

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

Algoritmo para detectar eventos epilépticos a partir de wavelets analizando la función de energía

Bernardo de Jesús López Gómez

Ricardo Joaquín de Armas Costa

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director

Jairo Villegas Gutiérrez

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT

Medellín

Agradecimientos

Agradecemos al profesor Jairo Villegas Gutiérrez, quien nos mostró un mundo de las matemáticas aplicadas desconocido por nosotros. Se trata del mundo de las Wavelets. A partir de las conversaciones informales y del desarrollo de los seminarios dirigidos por él, aprendimos a construir el análisis multirresolución y aplicarlo al tratamiento de señales no estacionarias como las electroencefalográficas. Es de esta forma como surge y se desarrolla este trabajo.

Agradecemos al Centro de Epilepsia del Hospital de la Universidad de Freiburg, en Alemania quienes después de explicarles sobre el proyecto autorizaron el trabajo con su base de datos, base que es muy completa en pacientes que sufren de epilepsia. Por medio de esta base de datos se pudo determinar los umbrales para cada nivel de resolución con un alto grado de confianza.

Agradecemos a la Universidad de California Irvine, en Estados Unidos ya que usamos algunas señales de EEG de su repositorio para el análisis estadístico de los umbrales.

Agradecemos a la Universidad EAFIT por el apoyo en cuanto a los recursos bibliográficos y el espacio físico.

Agradecemos a nuestras familias por la comprensión, la paciencia que tuvieron y por el tiempo que nos dieron para el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción	1
1. Introducción a las wavelets	5
1.1. Una representación adecuada	6
1.2. Transformadas wavelets	11
1.2.1. Transformada wavelet discreta	12
1.3. Análisis multirresolución	14
1.4. Wavelets biortogonales	16
1.4.1. Transformadas wavelets biortogonales	19
2. Introducción a la teoría spline	21
2.1. Función spline	22
2.1.1. Los splines-B	22
2.1.2. Splines de Schoenberg	22
2.1.3. La spline $\beta^3(t)$	24
2.2. Splines-B discretas	31
2.3. Operación de reducción	34
2.3.1. Prefiltro v^0	34
2.4. Operación de expansión	36
2.5. El espacio de detalles W	37
2.6. La wavelet biortogonal spline $\psi(t)$	37
2.6.1. Filtro binomial kernel modulado	39

2.6.2.	Spline discreto de orden siete modulado	40
2.6.3.	Delta Kronecker $\delta_{-1}(k)$	41
2.7.	La función escalada dual $\tilde{\phi}(t)$	44
2.7.1.	El filtro $(b^3)^{-1}$	44
2.8.	La wavelet dual $\tilde{\psi}(t)$	44
3.	Algoritmo de detección de los eventos epilépticos	45
3.1.	Base de datos de EEG	47
3.1.1.	Base de datos de EEG de la Universidad de Freiburg .	47
3.1.2.	Base de datos de EEG de la Universidad de California Irvine	48
3.2.	El algoritmo de detección	52
3.3.	Síntesis del algoritmo	52
3.3.1.	Retener	58
3.3.2.	Downsampling	60
3.3.3.	Upsampling	61
3.3.4.	Spline B	62
3.3.5.	Función escalada corrida	63
3.3.6.	Función wavelet	64
3.3.7.	Función wavelet corrida	65
3.3.8.	Coefficientes de detalles	66
3.3.9.	Función escalada dual	66
3.3.10.	Función wavelet dual	68
3.3.11.	Coefficientes de detalles duales	69
3.3.12.	Gráficas de detalles	70
3.3.13.	Función de energía	71
3.3.14.	Distribución de energía	72
3.3.15.	Umbrales (thresholds)	72
3.3.16.	Algoritmo de detección usando una wavelet spline biortogonal	73
3.3.17.	Algoritmo de detección usando una wavelet Daubechies4 ortogonal	73
4.	Resultados y comparaciones	75
4.1.	Distribución de energía	75
4.2.	Resultados del detector con spline biortogonal	80
4.3.	Resultados del detector con Daubechies4	85
4.4.	Conclusión	90

Índice General **vii**

4.5. Perspectivas futuras de aplicación en la práctica médica 91

Bibliografía **93**

Introducción

Las wavelets son funciones que en el procesamiento de señales tienen ciertas características especiales que las vuelven útiles en este campo de la ingeniería. Por ejemplo, ellas pueden separar la información en diferentes componentes frecuenciales, estudiando cada componente con una cierta resolución asociada a la escala. Con el nombre wavelet nos estaremos refiriendo en este trabajo a los vocablos: “onditas”, “ondículas”, “ondelletes”, “ondas de corta duración” ó “de soporte compacto”; usados por otros autores en los distintos trabajos de investigación sobre el tema. Las wavelets y el análisis multirresolución actualmente se han convertido en una herramienta de gran potencia para afrontar algunos problemas fundamentales del tratamiento de las señales (ver, p.e.[2, 32]). Problemas como: la reducción del ruido, la compresión de señales (de mucha importancia tanto en la transmisión de grandes cantidades de datos como en su almacenamiento) y la detección de determinados patrones o irregularidades locales en ciertos tipos de señales como las electroencefalográficas, las producidas por las huellas digitales, las producidas por las vibraciones de motores, las producidas por los defectos de soldadura entre placas de distintos materiales. Las señales electroencefalográficas producidas por la actividad eléctrica anormal en el cerebro de los pacientes que sufren de epilepsia (ver, p.e., [1, 8, 15, 19, 20]), corresponden a un trastorno del cerebro en el cual grupos de células nerviosas o neuronas en el cerebro, transmiten a veces señales en una forma anormal. Las neuronas normalmente generan impulsos electroquímicos que actúan sobre otras neuronas, glándulas y músculos para producir pensamientos,

2 Introducción

sentimientos humanos y acciones. La epilepsia perturba el patrón normal de la actividad neuronal y esto causa sensaciones, emociones y comportamientos extraños o a veces, crisis epilépticas, contracciones musculares y pérdidas del conocimiento. Durante una crisis epiléptica, las neuronas pueden emitir señales hasta 500 veces por segundo, lo cual es mucho más rápido que la tasa normal. En ciertas personas, esto sólo ocurre ocasionalmente, pero en otras, puede ocurrir hasta varias veces al día. Las señales electroencefalográficas son de baja frecuencia e intrínsecamente no estacionarias. A ellas se le suman ruidos, que se llaman artefactos y suelen ser señales de altas frecuencias, como las producidas por la contracción muscular o actividad eléctrica externa.

Es ampliamente conocida la funcionalidad de la transformada de Fourier en el estudio de este tipo de patología, permitiendo en nuestro caso realizar una primera aproximación a la caracterización de señales electroencefalográficas. Sin embargo, esta transformada presenta una fuerte debilidad en el tratamiento de señales no estacionarias, es decir, en el tratamiento de aquellas señales cuyas componentes espectrales varían en el transcurso del tiempo como el EEG. La transformada de Fourier realiza una descomposición de las señales en sus componentes frecuenciales pero no facilita la información temporal de éstas. Como alternativa a la transformada de Fourier, se desarrollan investigaciones utilizando la transformada wavelet que permite localizar simultáneamente en el dominio del tiempo y la frecuencia estas últimas componentes no deseadas, y además, se conoce de forma precisa las señales de baja frecuencia, que son las que mejor información aportan acerca del estado mental del paciente. Las familias o tipos de funciones wavelets disponibles viene en aumento. Con ellas se ha realizado numerosos estudios comparativos, delimitando cual permite realizar un análisis más adecuado del electroencefalograma. Concretamente se ha empleado la transformada wavelet discreta comparando las familias Haar, Daubechies, Coiflets, Symlets, Dmeyer, Biortogonal, Rbiortogonal y sus subfamilias correspondientes. Pero sin duda, las wavelets biortogonales son las que por sus características como tener un soporte compacto y simetría permiten la reconstrucción exacta de la señal a través de filtros FIR (filtro con impulso de respuesta finita), lo cual en las wavelets ortogonales es imposible, excepto en la wavelet de Haar.

La representación multirresolución obtenida de la transformada wavelet combinada con los filtros digitales permiten la localización en el tiempo de la actividad epileptiforme y ayudan a optimizar la carga computacional. De acuerdo con todo lo dicho anteriormente, vemos que las wavelets

proporcionan un conjunto de herramientas flexibles para detectar problemas prácticos tanto en la ciencia como en la ingeniería y particularmente en la bioingeniería. Entre estas herramientas se tiene la transformada wavelet asociada con el análisis multirresolución de una señal, es decir, a distintos niveles de resolución se tendrá una base wavelets. Concretamente, cuando se pretenda obtener un mayor detalle en una señal (mayor resolución), mayor número de funciones por unidad de longitud se tendrán en la base wavelets.

Es importante tener en cuenta que no existe una transformada wavelet única, ni una función wavelet que resuelva todos los problemas. Es a partir de la modelación del proceso, de un análisis a priori del tipo de señal tratada y del objetivo que se pretenda (compresión, eliminación del ruido, detección de eventos) se busca la familia de wavelets (Haar, Daubechies, Coiflets, Spline...) que mejor coincida con las características de la señal a estudiar (ver, p.e., [7, 10, 21, 29, 30]). En este trabajo se toma la transformada discreta wavelet cuyo propósito es el mismo de la transformada wavelet continua, sólo que aquí se utilizan las técnicas del filtrado digital.

El electroencefalograma se pasa a través de una serie de filtros, donde los pasa altas se utilizan para separar las altas frecuencias y los pasa baja para separar bajas frecuencias. La resolución depende tanto de las operaciones de filtrado como de las variaciones de la escala determinadas por las operaciones de muestreo (downsampling y el upsampling). Con la primera se descartan ciertas muestras durante el análisis de la señal, reduciendo en un factor de n el número de muestras del EEG que se está analizando. Por el contrario, con el upsampling significa que añadimos nuevas muestras al EEG. Al pasar la señal del EEG por un filtro pasa baja y luego por uno pasa alta, la mitad de la señal que sale del filtro pasa altas forma los primeros coeficientes wavelets de la señal, pues se tiene un proceso de descomposición mediante filtros pasa altas y pasa bajas. Se sigue con el proceso hasta alcanzar el nivel de resolución que se requiera.

En virtud a la biortogonalidad de los Spline-B cúbicos escogidos como wavelets, en este trabajo podemos garantizar la detección de eventos epilépticos o puntas presentados en un EEG. Los estudios desarrollados en torno al tratamiento de los EEG muestran que es suficiente trabajar con ocho niveles de resolución para una buena detección de los eventos epilépticos.

El algoritmo se construye aprovechando la energía de la señal, con la distribución uniforme de la energía en cada nivel de resolución, se puede calcular una serie de parámetros estadísticos (media y desviación) que permiten fijar un umbral el cual detecta la presencia de puntas o eventos

4 Introducción

epilépticos en el EEG.

En el presente trabajo mostramos el proceso completo, partiendo de un electroencefalograma y haciendo todo el desarrollo matemático y algorítmico, hasta encontrar los eventos o puntas usando la wavelet seleccionada que en nuestro caso es la spline cúbica biortogonal. Finalmente hacemos la comparación con la wavelet Daubechies 4, para mostrar que esta segunda es menos eficiente que la elegida para nuestro estudio, debido a que genera muchos picos y conduce posiblemente a falsos positivos.

CAPÍTULO 1

Introducción a las wavelets

Introducción

El origen de la descomposición de una señal en wavelets está en la necesidad de conocer las características y particularidades de la señal en diferentes instantes de tiempo. La principal virtud de las wavelets es que permiten modelar procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene por qué ser suave [1, 8, 11, 14, 15, 19]. Una de las ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia pero no en tiempo, esto es, el análisis en frecuencia obtenido del análisis de Fourier es insensible a perturbaciones que supongan variaciones instantáneas y puntuales de la señal como puntas debido a conmutaciones o variaciones muy lentas como tendencias. En otras palabras, si f es una señal (f es una función definida en todo \mathbb{R} y tiene energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$), la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ proporciona la información global de la señal en el tiempo localizada en frecuencia. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

6 Introducción a las wavelets

y la integración es sobre todo tiempo. Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto. En este capítulo se presenta una introducción a la teoría wavelets, en particular se estudiará la transformada wavelet y el análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$. Con este concepto se ilustra cómo construir otras bases wavelets, y además, permite analizar funciones (señales) en $L_2(\mathbb{R})$ en varias escalas (niveles de resolución) [6, 8, 10, 15]. Para ello, se utiliza versiones escaladas de un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$. Para tal descomposición de una función $f \in L_2(\mathbb{R})$, sólo se necesitan los coeficientes de la expansión de f en dicho conjunto ortonormal.

1.1. Una representación adecuada

A continuación se presenta una breve explicación del por qué la Transformada de Fourier no es una representación adecuada para señales no estacionarias (como las electroencefalográficas) cuando se desea obtener información de la correspondencia tiempo - frecuencia. Revisando la literatura sobre el tratamiento de señales vemos que son muchos los fenómenos físicos que pueden describirse mediante una señal en el dominio del tiempo; es decir, una de las variables es el tiempo (variable independiente) y la otra es la amplitud (variable dependiente). Cuando se dibuja esta señal se obtiene una función tiempo - amplitud; sin embargo, la información que se puede obtener directamente de esta representación no siempre es la más apropiada, puesto que la información que caracteriza a la señal, en muchos casos, puede observarse más claramente en el dominio de la frecuencia, es decir, mediante el espectro de frecuencias que muestre las frecuencias existentes en la señal. Entonces, ¿cuál es la representación adecuada para reconocer la correspondencia tiempo - frecuencia de la señal? Para una mejor representación de la señal se hace necesario disponer de una representación en el dominio del tiempo y de la frecuencia. En la figura 1 se muestra una señal sinusoidal en el dominio del tiempo de la cual se desconoce su contenido de frecuencia.

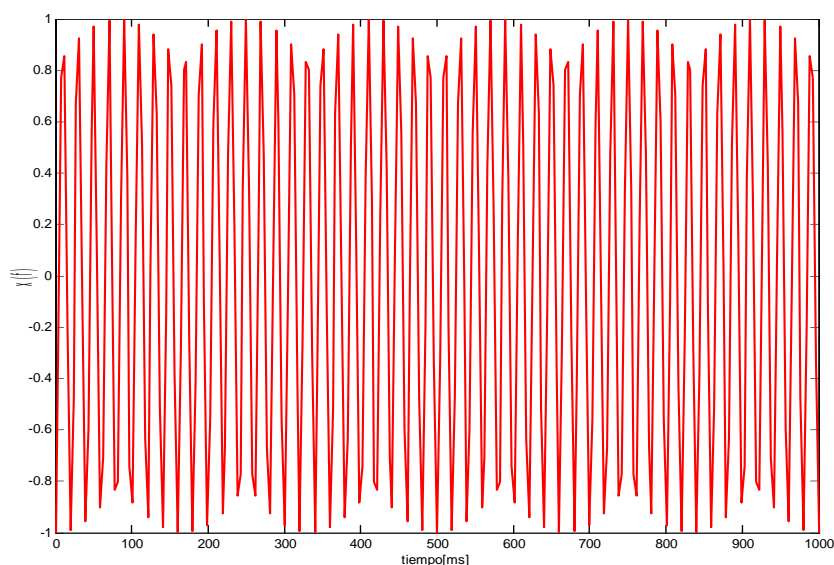


Figura 1. Señal sinusoidal

Para encontrar el contenido de frecuencia de esta señal se hace uso de la Transformada de Fourier. Esta transformada parte de una representación en el dominio del tiempo de la señal y obtiene la representación en frecuencias de la misma, es decir, si se representara esto gráficamente, en un eje se mostraría la frecuencia y en el otro eje la amplitud. En la figura 2 la transformada de Fourier muestra el espectro de frecuencias. En todo el espectro de frecuencias se aprecia una sola componente de frecuencia de 50Hz.

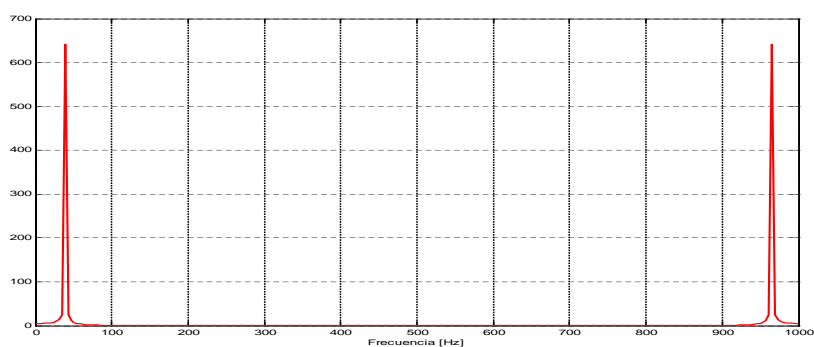


Figura 2. Señal con contenido de 50 Hz

8 Introducción a las wavelets

Se ve que el espectro de frecuencias de una señal es simétrico y por lo tanto la segunda mitad es redundante. Hasta aquí se tiene que la Transformada de Fourier, entrega la información del contenido en frecuencia de la señal, pero no indica el instante de tiempo en el que aparece. Esta información no sería necesaria cuando la señal es estacionaria; pero es de vital importancia si la señal es no estacionaria. El concepto de señal estacionaria es muy importante en el análisis de señales. Las señales cuyo contenido de frecuencia no cambia en el tiempo se denominan señales estacionarias, por lo cual no se necesita saber en qué instante de tiempo existen esas componentes de frecuencias, ya que todas las componentes de frecuencias están presentes en todo instante de tiempo.

En la figura 3. se muestra una señal estacionaria cuyos componentes de frecuencia de 10, 50, 100 y 150 Hz., están presentes en cualquier instante de tiempo.

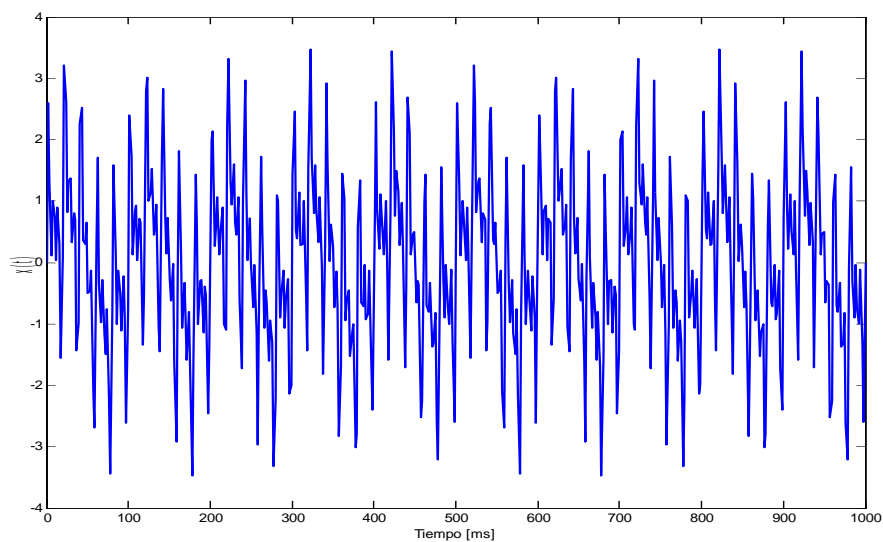


Figura 3. Señal estacionaria

En la figura 4 se observa la Transformada de Fourier mostrando las respectivas componentes de frecuencias.

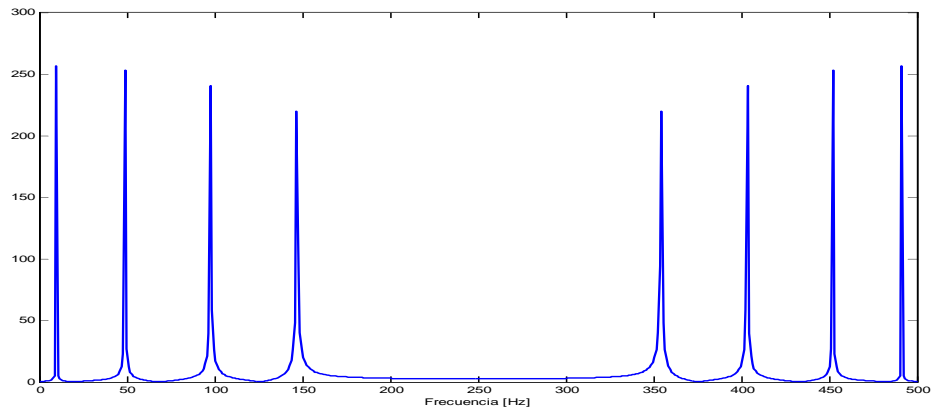


Figura 4. Espectro de frecuencia de la señal de la figura 3.
Frecuencias de 10, 50, 100 y 150 Hz.

La figura 5 muestra una señal no estacionaria con cuatro componentes de frecuencias distintas para cuatro intervalos de tiempo diferentes. El intervalo de 0 a 200 ms. contiene una señal sinusoidal de 150 Hz. El intervalo de 200 a 500 ms. contiene una señal sinusoidal de 100 Hz. El intervalo de 500 a 800 ms. contiene una señal sinusoidal de 50 Hz. El último, el intervalo de 800 a 1000 ms. con contenido de frecuencia de 10 Hz.

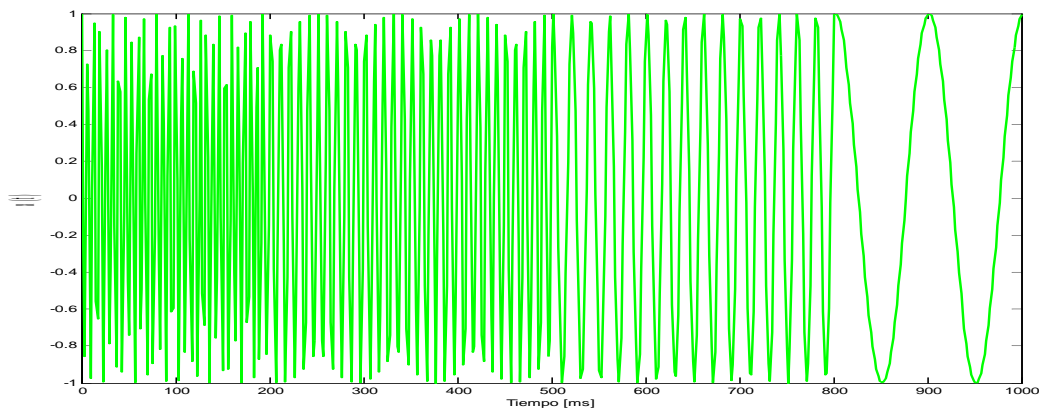


Figura 5. Señal no estacionaria
Frecuencias de 150, 100, 50 y 10 Hz

10 Introducción a las wavelets

En la figura 6 se observa la Transformada de Fourier mostrando el contenido de frecuencia de la señal no estacionaria.

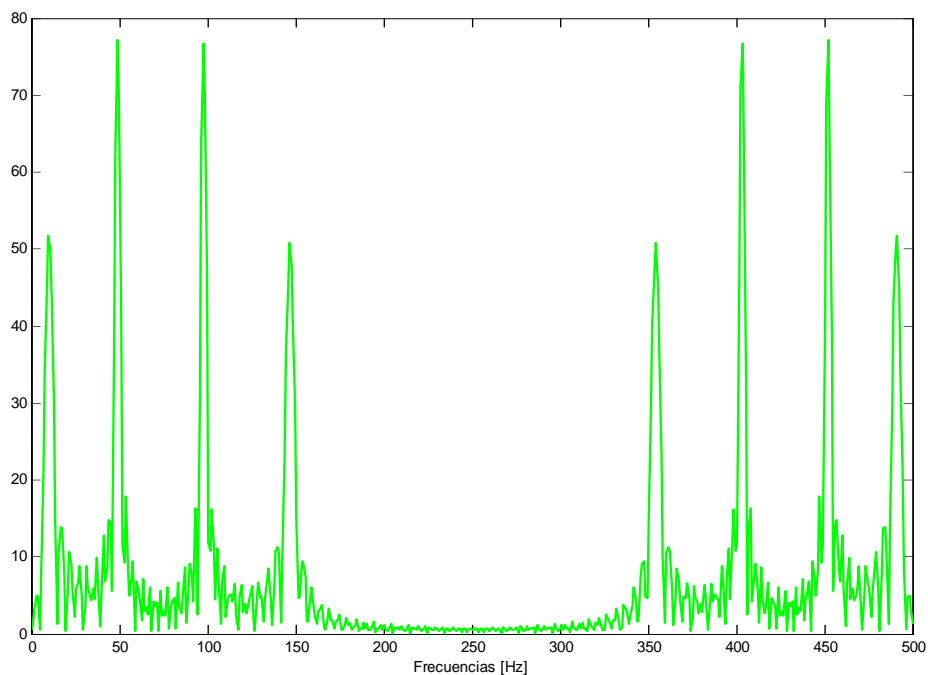


Figura 6. Espectro de frecuencia de la señal no estacionaria

Si se analizan los espectros de las figuras 4 y 6 vemos que ambos muestran cuatro componentes espectrales para las mismas frecuencias 10, 50, 100 y 150 Hz. Aparte del rizado y de la diferencia de amplitud que siempre es posible de normalizar, los dos espectros son prácticamente idénticos, aunque se tratan de señales en el dominio del tiempo diferentes. Ambas señales contienen las mismas componentes de frecuencias pero la señal estacionaria contiene estas frecuencias todo el tiempo, mientras que la señal no estacionaria presenta estas frecuencias en distintos intervalos de tiempo. Esto se debe a que la Transformada de Fourier solo proporciona el contenido espectral de la señal y no la localización de las componentes espectrales. Esta es la razón por la cual la Transformada de Fourier no es una representación adecuada para señales

no estacionarias cuando se desea obtener una correspondencia frecuencia - tiempo.

Las señales electroencefalográficas presentan formas muy irregulares o cambios abruptos siendo la representación wavelet una buena elección para el tratamiento de este tipo de señales. Las wavelets proporcionan además bases de funciones bien localizadas en el tiempo([9, 13, 17, 28, 34]).

1.2. Transformadas wavelets

El análisis wavelets es un método de descomposición de una función o señal usando funciones especiales, las wavelets. La descomposición es similar a la de la transformada de Fourier, en donde una señal $f(t)$ se descompone en una suma infinita de armónicos $e^{i\omega t}$ de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$, cuyas amplitudes son los valores de la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

El análisis de Fourier tiene el defecto de la no localidad: el comportamiento de una función en un conjunto abierto, no importa cuán pequeño, influye en el comportamiento global de la transformada de Fourier. No se captan los aspectos locales de la señal tales como cambios bruscos, saltos o puntas, que se han de determinar a partir de su reconstrucción. En la transformada wavelet estos aspectos locales sí son observados, debido a que las wavelets se representan en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función fija ψ , la wavelet madre que, en general, no es senoidal [45, 49]. Esto es,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db \quad (1.2.1)$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

12 Introducción a las wavelets

Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. La función dilatada y trasladada se define por

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Esta función se obtiene a partir de ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego, por traslación en b . Es claro que $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.

1.2.1. Transformada wavelet discreta

La transformada wavelet continua (1.2.1) introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $\mathcal{W}_\psi f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia de wavelets será ahora dada por

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Se utilizará la notación ψ_{jk} para denotar la wavelet ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, observe que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre sí. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [7, 43].

Definición 1.2.1. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.2)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver [10] y [21] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (1.2.3)$$

o teniendo en cuenta (1.2.2) como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

donde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Definición 1.2.2. Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ el conjunto bidimensional de coeficientes

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$$

se llama la transformada wavelet discreta de f .

En consecuencia, la expresión (1.2.3) se puede escribir en forma alterna como

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t). \quad (1.2.4)$$

La serie (1.2.4) se llama representación wavelet de f .

Ejemplo 1.2.1. Un ejemplo clásico es la wavelet de Haar, la cual es dada por

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

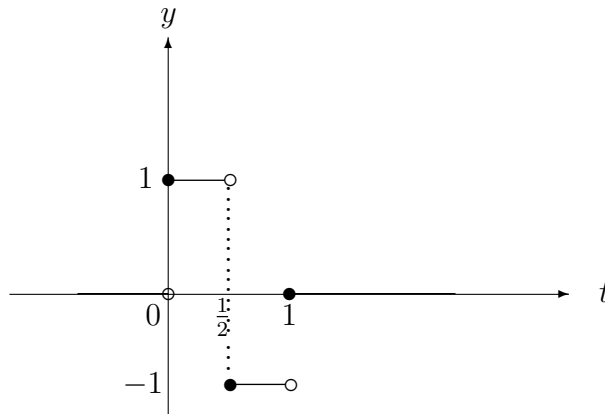


Figura 7. Wavelet de Haar

Observación 1.2.1. 1) $\psi_{jk}(t)$ es más apropiada para representar detalles finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $d_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuación sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .

2) Las wavelets gozan de la “propiedad zoom,” esto hace que las bases wavelet sean excelentes detectores de singularidades, en otras palabras, las singularidades producen coeficientes wavelet grandes.

3) La propiedad zoom es común en todos los sistemas wavelet, constituye la mayor diferencia con los sistemas de Fourier para la detección de singularidades. En problemas de teoría de señales, las singularidades llevan información esencial como la presencia de esquinas en las imágenes. Esto hace de las bases wavelet una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes, en detrimento del análisis de Fourier.

4) Es interesante notar que

$$d_{j,k} = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$$

es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre ψ .

1.3. Análisis multirresolución

El sistema de Haar no es muy apropiado para aproximar funciones suaves. De hecho, cualquier aproximación de Haar es una función discontinua [5, 10, 21]. Se puede probar que si f es una función muy suave, los coeficientes de Haar decrecerán muy lentamente. Por tanto se pretende construir wavelets que tengan mejor propiedades de aproximación, y una forma de hacerlo es a través del análisis multirresolución (AMR) [10, 27, 28, 29, 30].

Sea $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, la familia de trasladadas de φ ,

$$\{\varphi_{0k}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi_{0k}(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es un sistema ortonormal (con el producto interno de $L_2(\mathbb{R})$). Acá y en lo que sigue

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) = D_{2^j}T_k\varphi(t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

recuerde que $D_a f(t) = a^{1/2}f(at)$ y $T_a f(t) = f(t - a)$ son los operadores dilatación y traslación, respectivamente.

Se definen los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k) : \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}, \\ V_1 &= \left\{ h(t) = f(2t) : f \in V_0 \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ h(t) = f(2^j t) : f \in V_0 \right\}, j \in \mathbb{Z} \\ &= \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Note que φ genera la sucesión de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Suponga que la función φ se escoge de tal forma que los espacios estén encajados $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, y $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, estos dos hechos fundamentales hacen parte de la definición de análisis multirresolución.

Definición 1.3.1. *Un análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente de subespacios cerrados V_j en $L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ tales que*

1. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, e.d., $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$,
4. $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$, $j \in \mathbb{Z}$,
5. Existe una función $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de funciones $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_0 .

La función φ se llama función de escala. En el espacio V_{j+1} las funciones (señales) se describen con más detalle que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio “más grande”. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución [8, 15]. Es usual reunir estos “sintonizadores finos” en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$. Sin embargo, la elección de estos subespacios no es única. Pero se puede escoger a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Es decir,

$$W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp, \quad j \in \mathbb{Z},$$

o de manera equivalente

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.1)$$

Informalmente, esto quiere decir que si se tiene una función (señal) f a resolución 2^{j+1} y se proyecta a resolución inferior 2^j entonces

$$f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

acá P_j representa la proyección ortogonal en el espacio V_j donde se recoge la versión “suavizada” de f y la diferencia $f - P_j f$ representa el “detalle” de f , que está en W_j y se expresa como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$. Recuerde que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j (ver p.e., [4]).

1.4. Wavelets biortogonales

Una base que genera un espacio no tiene que ser ortogonal. La expansión ortogonal de una función es una importante herramienta para el análisis de señales. Los coeficientes de expansión representan las magnitudes de esas componentes de señales. Con el fin de ganar una gran flexibilidad en la construcción de bases wavelets se tiene como recurso el relajamiento de la condición de ortogonalidad y permitiendo la no ortogonalidad de las bases wavelets. Por ejemplo, es bien conocido que la wavelet de Haar es la única conocida que está soportada compactamente, es ortogonal y simétrica [37, 42, 44, 52].

Base dual

Antes de hacer una discusión sobre las wavelets biortogonales, es importante revisar el concepto de base dual. Por simplicidad se considera un espacio de coordenadas bidimensional. Cualquiera de dos vectores (e_1, e_2)

que no son paralelos pueden formar una base para el espacio. Si el ángulo entre los dos vectores es de 90 grados, se tiene una base ortogonal. Cualquier vector \vec{A} en este espacio puede ser escrito únicamente como una superposición de dos bases de vectores $\vec{A} = A_1 e_1 + A_2 e_2$. Si la base es ortogonal, se tiene que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ y la componente A_i a lo largo de e_i está dada por el producto interno $e_i \cdot \vec{A} = A_1 e_i \cdot e_1 + A_2 e_i \cdot e_2 = A_i$. Sin embargo, si la base no es ortogonal, el A_i dado no es más largo que el dado por el producto interno de \vec{A} y e_i . En orden al calcular la componente A_i se introduce otro conjunto de vectores base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ llamado el **dual** de (e_1, e_2) . La base dual satisface que $\tilde{e}_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ y el espacio generado por la base dual se llama el espacio dual del espacio original.

En términos de la base dual, las componentes de un vector a lo largo de la base (e_1, e_2) puede ser calculado como

$$\tilde{e}_i \cdot \vec{A} = \sum_j A_j \tilde{e}_i \cdot e_j = A_i$$

así vemos que la introducción de la base dual y el espacio dual nos habilita para descomponer un vector como una combinación lineal o superposición de bases no-ortogonales. Similarmente para una base no ortogonal $\{\phi_i(t)\}$ de un espacio de función, se introduce la base dual $\{\tilde{\phi}_i(t)\}$ por

$$\langle \tilde{\phi}_i, \phi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\phi}_i(t)} \phi_j(t) dt = \delta_{ij}.$$

Una función $f(t)$ puede ser descompuesta como una superposición de la base no ortogonal $\{\phi_i(t)\}$

$$f(t) = \sum_j f_j \phi_j(t) = \sum_j \langle \tilde{\phi}_j, f \rangle \phi_j(t).$$

Se asume que el espacio de la función y su dual son el mismo, una condición satisfactoria por L^2 ; sin embargo, las reglas de la base dual y la base original puede ser intercambiada y se obtiene

$$f(t) = \sum_j \langle \phi_j, f \rangle \tilde{\phi}_j(t)$$

cuando $\{\phi_i(t)\}$ es ortogonal, se tiene la relación obvia $\tilde{\phi} = \phi$.

18 Introducción a las wavelets

Recordemos que las dilataciones y translaciones de la familia escala $\{\phi_{jk}\}$ constituye una base para V_j y similarmente $\{\psi_{jk}\}$ para W_j . Ahora focalizamos la atención en el caso que ellas no son ortogonales.

Se puede definir un análisis multirresolución dual con los subespacios duales $\{\tilde{V}_j\}$ y $\{\tilde{W}_j\}$, generados de una función escala dual $\tilde{\phi}$ y una wavelet madre $\tilde{\psi}$, respectivamente.

Ahora en cambio de

$$\langle \phi_{jk}, \phi_{kl} \rangle = \delta_{kl}$$

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{j'l} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kl}$$

y

$$\langle \phi_{jk}, \psi_{jl} \rangle = 0$$

como un cambio ortonormal, se tiene que

$$\langle \tilde{\phi}_{jk}, \phi_{jl} \rangle = \delta_{kl}$$

y

$$\langle \tilde{\psi}_{jk}, \psi_{j'l} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kl}$$

y

$$\langle \tilde{\psi}_{jk}, \phi_{jl} \rangle = 0$$

y

$$\langle \tilde{\phi}_{jk}, \psi_{jl} \rangle = 0$$

donde

$$\tilde{\phi}_{jk} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$$

y

$$\tilde{\psi}_{jk} = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k).$$

Estos conjuntos constituyen bases para el subespacio dual $\{\tilde{V}_j\}$ y $\{\tilde{W}_j\}$.

Las condiciones mostradas están referidas a condiciones de biortogonalidad en donde ψ y $\tilde{\psi}$ son wavelets biortogonales. En términos de subespacios, las condiciones de biortogonalidad pueden ser expresadas como $V_j \perp \tilde{W}'_j$; $\tilde{V}_j \perp W_j$ y $W_j \perp \tilde{W}_j$ para $j \neq j'$.

Por definición, una función escala y una wavelet madre satisface la ecuación de dilatación y la ecuación wavelet respectivamente. Así se tiene que

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k)$$

y

$$\tilde{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2t - k)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2t - k).$$

Los coeficientes en las ecuaciones anteriores se pueden obtener haciendo producto interno con la función dual apropiada. Por ejemplo,

$$h_k = \langle \tilde{\phi}_{1,k}, \phi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\phi}_i(2t - k)} \phi(t) dt$$

y

$$g_k = \langle \tilde{\phi}_{1,k}, \psi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\phi}_i(2t - k)} \psi(t) dt.$$

Los papeles de estas dos ecuaciones ϕ y $\tilde{\phi}$ y ψ y $\tilde{\psi}$ pueden ser intercambiados.

1.4.1. Transformadas wavelets biortogonales

Las funciones que califican como wavelets ortonormales con soporte compacto carecen de propiedades deseables de simetría. Podrá resultar conveniente, por ejemplo, de que $\psi(t)$ fuese una función par o impar. Utilizando dos diferentes wavelets base $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$, una para la descomposición (análisis) y otra para la reconstrucción (síntesis), se pueden tener wavelets simétricas con soporte compacto. Las wavelets son duales y las dos familias $\{\psi_{j,k}(t)\}$ y $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}$ son biortogonales, es decir,

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$$

y se tiene por lo tanto que

$$c_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$$

y

$$d_{j,k} = \langle f(t), \tilde{\psi}_{j,k}(t) \rangle$$

son utilizadas para la descomposición de la señal $f(t)$ y

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t)$$

para la reconstrucción.

CAPÍTULO 2

Introducción a la teoría spline

Introducción

Después de un estudio riguroso sobre la estructura interna de la señal electroencefalográfica (ver, p.e.,[3, 18, 25, 39, 48]) y de la revisión de algunos trabajos realizados sobre la detección de puntas de dicha señal (ver, p.e.,[13, 24, 26, 41, 54]) vemos que la wavelet que mejor se adecúa o se acomoda a esta señal es la wavelet biortogonal spline cúbica con soporte compacto. En la reciente teoría wavelet se plantea que cuando la función inicial ψ es elegida adecuadamente, entonces cada señal de energía finita resulta ser una superposición de estos átomos cada uno multiplicado por un coeficiente. Esta representación de la señal es única y conserva en los coeficientes la energía de la señal. El análisis multirresolución que se construye en este trabajo para el tratamiento de la señal electroencefalográfica tiene su fundamentación teórica en los trabajos desarrollados por Michael Unser, Akran Aldroubi y Murray Eden (ver, p.e.,[44, 45, 46]). De la familia de polinomios spline-B que ellos presentan, se escoge el caso particular de los polinomios splines cúbicos biortogonales. Por medio del análisis multirresolución se obtienen los coeficientes wavelets y los respectivos coeficientes wavelets duales de la señal electroencefalográfica. Estos coeficientes permiten construir la función de energía de la señal en estudio. Los splines biortogonales actúan como filtros

cortos que mejoran la carga computacional y son más estables.

2.1. Función spline

Una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un subintervalo, que se unen entre sí, obedeciendo a ciertas condiciones de continuidad. El nombre Spline es una palabra del idioma inglés que significa listón elástico. Estos listones eran usados por artesanos para crear curvas, que describen superficies a construir, como cascos de barcos y fuselajes de aviones. Constreñidos por pesos, estos listones elásticos o splines asumen una forma que minimizan su energía elástica, propiedad que heredan los splines matemáticos de grado tres.

2.1.1. Los splines-B

Se le llama así a un sistema de funciones spline a partir de las cuales se pueden obtener, mediante combinaciones lineales, todas las demás funciones spline. Es decir, dichos polinomios spline constituyen bases para ciertos espacios de splines. La utilización de splines-B tiene muchas ventajas con respecto a otros tipos de aproximaciones. La más importante de las ventajas tiene que ver con la facilidad de procesamiento de las mismas con un ordenador. Algunas características de los splines - B: son funciones simétricas, son funciones en forma de campana, los splines-B forman una base de splines.

2.1.2. Splines de Schoenberg

Son splines-B centrados, simétricos y poseen soporte compacto. Schoenberg [46] introdujo una de las muchas representaciones de las funciones spline, las llamadas B-splines central de orden n , definidas de la siguiente manera

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)^n \cdot \mu\left(t - k + \frac{n+1}{2}\right).$$

Consideremos el espacio V_j , que es el formado por las funciones spline, donde cada polinomio definido sobre el intervalo $[k2^j, (k+1)2^j)$, donde $k \in \mathbb{Z}$, es de grado tres. El índice j será usado para denotar el nivel de resolución. Específicamente, V_j es el conjunto de funciones spline cuadrado integrables de

una dimensión, es decir, funciones que pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$. Estas funciones son continuas de clase C^2 . También podemos denotar de V_j de la siguiente manera

$$V_j = \{s(t) : s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_j(k)\phi(2^{-j}t - k), t \in \mathbb{R}, c_j \in l^2\}$$

l^2 es el espacio de las sucesiones cuadrado sumables $a(k), k \in \mathbb{Z}$.

La función escalada $\phi(t)$ se diseña tomando la suma promedio de los splines-B cúbicos con el filtro identidad $\delta_0(k)$

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(k)\beta^3(t - k).$$

El filtro identidad o delta Kronecker se define como

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k \neq 0, \end{cases}$$

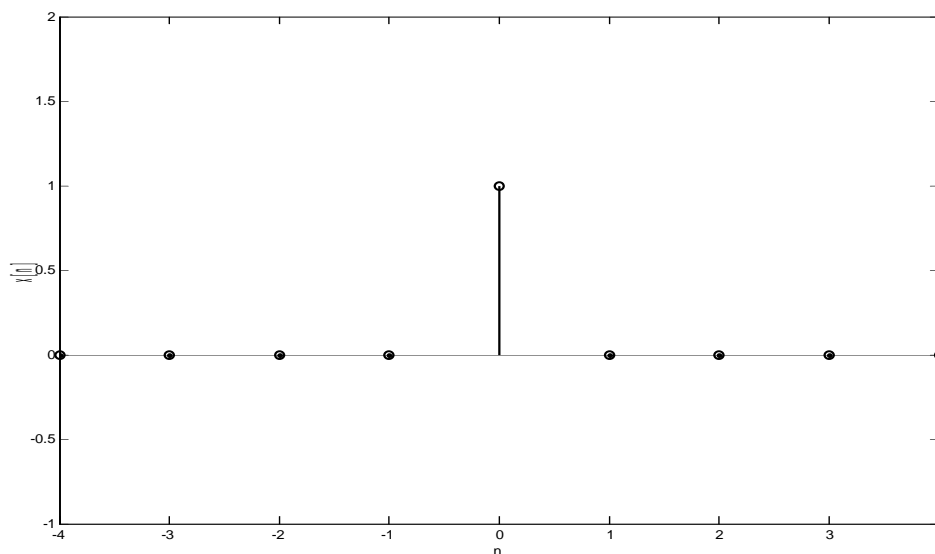


Figura 8. El filtro identidad

2.1.3. La spline $\beta^3(t)$

Es la spline - B central de schoenberg de orden tres. Se diseña utilizando la propiedad de convolución de los splines - B, o se puede obtener directamente la definición del spline-B central de Schoenberg para $n = 3$. En este caso se suaviza el spline de orden cero con tres convoluciones

$$\beta^3(t) = \beta^0 * \beta^0 * \beta^0 * \beta^0(t).$$

A continuación se presentan algunas propiedades de los splines.

La propiedad de convolución se expresa como

$$\begin{aligned} \beta^n(t) &= \beta^{n-1} * \beta^0(t) \\ &= \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1)\text{veces}}. \end{aligned}$$

Para demostrar esta propiedad, se parte de $\beta^0(t)$ (función característica de los splines o spline de orden 0)

$$\beta^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora supongamos que la propiedad es válida e intentaremos llegar a la definición de Spline-B dada anteriormente

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)^n \cdot \mu\left(t - k + \frac{n+1}{2}\right).$$

Se tiene en cuenta que $t \in \mathbb{R}$, μ la función escalón unitario y el superíndice se refiere al orden de los polinomios. En esta definición aparece un desplazamiento que no modifica en nada el análisis posterior, dado que sino los filtros digitales que necesitamos implementar para buscar los coeficientes de la base spline-B, resultan inestables (la transformada Z con polos en el círculo unitario).

La transformada de Fourier de

$$\beta^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es

$$\begin{aligned}
 B^0(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta^0(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} (1) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-1/2}^{1/2} \\
 &= -\frac{1}{j\omega} \left[e^{-\frac{j\omega}{2}} - e^{\frac{j\omega}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

por tanto

$$B^0(w) = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega}$$

ahora tenemos que

$$\beta^n(t) = \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1)\text{veces}}$$

pasando al dominio de la frecuencia se obtiene

$$B^n(w) = \underbrace{B^0(w) \cdot B^0(w) \cdot B^0(w) \dots B^0(w)}_{(n+1)\text{veces}}$$

donde

$$B^n(w) = [B^0(w)]^{n+1}$$

pero

$$B^0(w) = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega}$$

entonces, reemplazando en la anterior se tiene

$$B^n(w) = \left[\frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} \right]^{n+1}$$

26 Introducción a la teoría spline

o mejor

$$B^n(w) = \frac{[e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1}}{[jw]^{n+1}},$$

ahora se tiene que $\beta_+^0(t)$ es la spline-B de grado cero para $t \geq 0$. Derivando de manera sucesiva a $\beta_+(t)$ se obtiene

$$D^1(\beta_+^0(t)) = 0!\delta(t)$$

$$D^2(\beta_+^1(t)) = 1!\delta(t)$$

$$D^3(\beta_+^2(t)) = 2!\delta(t)$$

⋮

$$D^{n+1}(\beta_+^n(t)) = n!\delta(t),$$

pasamos al dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad, tanto a la derecha como al delta Dirac, obteniéndose

$$(jw)^{n+1}(B_+^n(w)) = n!1$$

$$(jw)^{n+1}(B_+^n(w)) = n!$$

ahora hacemos $B_+^0(w) = X_+^n(w)$, y de esta forma llegamos a

$$\begin{aligned} B^n(w) &= \frac{[e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1}}{[jw]^{n+1}} \cdot 1 \\ &= \frac{[e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1}}{[jw]^{n+1}} \cdot \frac{[jw]^{n+1} X_+^n(w)}{[jw]^{n+1} X_+^n(w)} \\ &= \frac{[e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1}}{[jw]^{n+1}} \cdot \frac{[jw]^{n+1} X_+^n(w)}{n!} \\ &= [e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1} \frac{X_+^n(w)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} [e^{jw/2} - e^{-jw/2}]^{n+1} X_+^n(w) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k e^{-jw[k - \frac{n+1}{2}]} X_+^n(w) \end{aligned}$$

donde solo resta volver al dominio del tiempo

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)_+^n$$

llegando así a la expresión final

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)^n \cdot \mu\left(t - k + \frac{n+1}{2}\right),$$

donde la función escalón unitario

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

se desplaza $(k - \frac{n+1}{2})$, quedando demostrada la propiedad.

En la propiedad de construcción recursiva cada Spline-B de orden n puede ser calculada a partir de la Spline-B desplazada de orden $n - 1$

$$\beta^n(t) = \frac{\left(\frac{t+1}{2} + t\right)\beta^{n-1}\left(t + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{n+1}{2} - t\right)\beta^{n-1}\left(t - \frac{1}{2}\right)}{2}$$

Para la propiedad de derivación recursiva se dice que la primera derivada de una spline-B de orden n puede ser calculada a partir de la spline-B desplazada de orden menor

$$\frac{d\beta^n(t)}{dt} = \beta^{n-1}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \beta^{n-1}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

La segunda derivada de una spline-B de orden n puede ser calculada a partir de la spline-B desplazada de orden menor

$$\frac{d^2\beta^n(t)}{dt^2} = \beta^{n-2}(t+1) - 2\beta^{n-2}(t) + \beta^{n-2}(t-1)$$

En la propiedad de integración recursiva, la integral de una spline-B de orden n puede ser calculada a partir de la propiedad de construcción recursiva

$$\beta^n(t) = \frac{\left(\frac{t+1}{2} + t\right)\beta^{n-1}\left(t + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{n+1}{2} - t\right)\beta^{n-1}\left(t - \frac{1}{2}\right)}{2},$$

ahora integramos a cada lado así,

$$\int_{-\infty}^x \beta^n(t) dt = \int_{-\infty}^x \left(\frac{(\frac{t+1}{2} + t)\beta^{n-1}(t + \frac{1}{2}) + (\frac{n+1}{2} - t)\beta^{n-1}(t - \frac{1}{2})}{2} \right) dt,$$

resolviendo las integrales por partes se llega a

$$\int_{-\infty}^x \beta^n(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{n+1}(t - \frac{1}{2} - k).$$

Basándose en la propiedad de la convolución, es fácil ver que todas las splines-B son positivas y el valor de su integral es igual a uno.

A continuación se presentarán las splines de ordenes cero, uno, dos y tres con sus respectivas gráficas.

La spline de orden cero o función característica $\beta^0(t)$ en el intervalo $[-1/2, 1/2)$, se definió anteriormente como

$$\beta^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2), \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

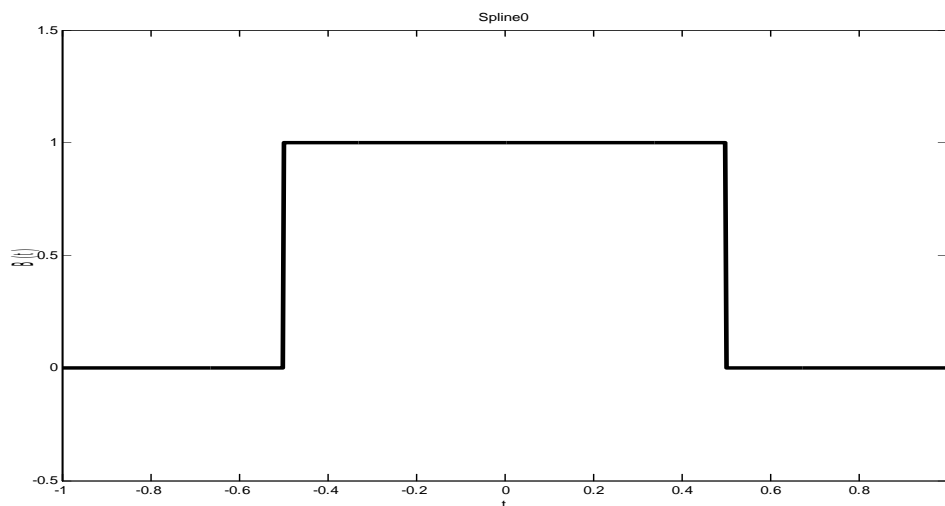


Figura 9. Spline de orden cero

La spline de orden uno se expresa como $\beta^1(t) = \beta^0 * \beta^0(t)$.

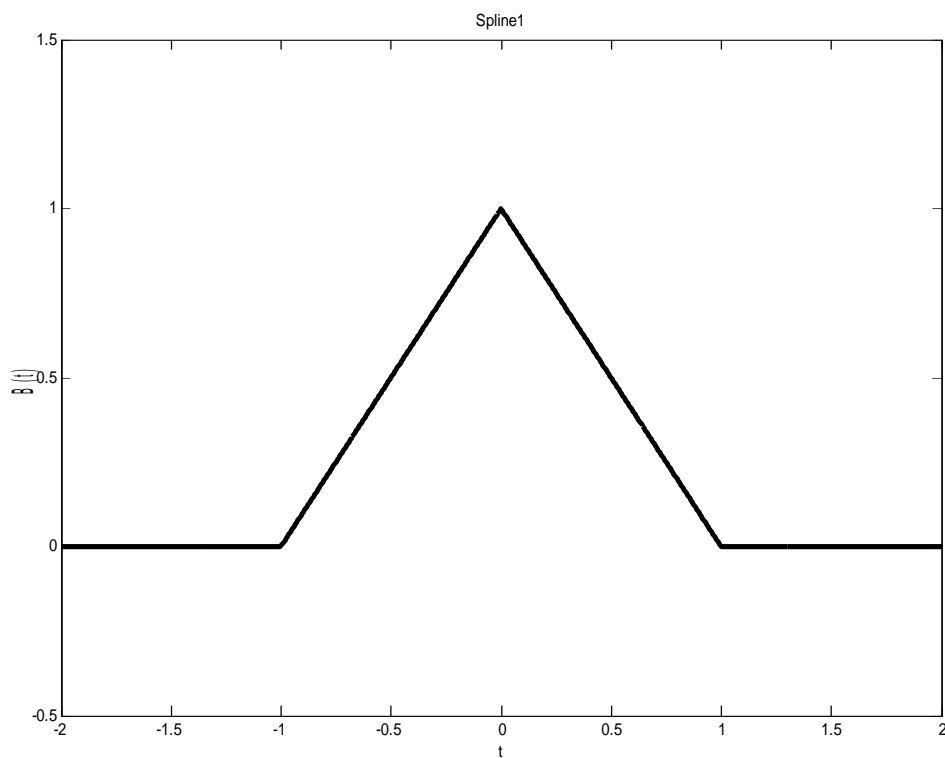


Figura 10. Spline de orden uno

La spline de orden dos se expresa como $\beta^2(t) = \beta^0 * \beta^0 * \beta^0(t)$.

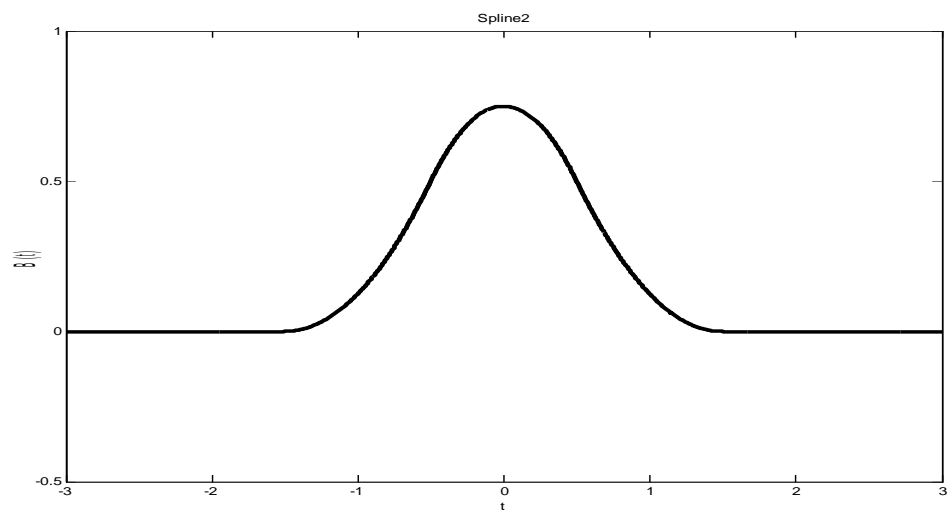


Figura 11. Spline de orden dos

La spline de orden tres se expresa como $\beta^3(t) = \beta^0 * \beta^0 * \beta^0 * \beta^0(t)$

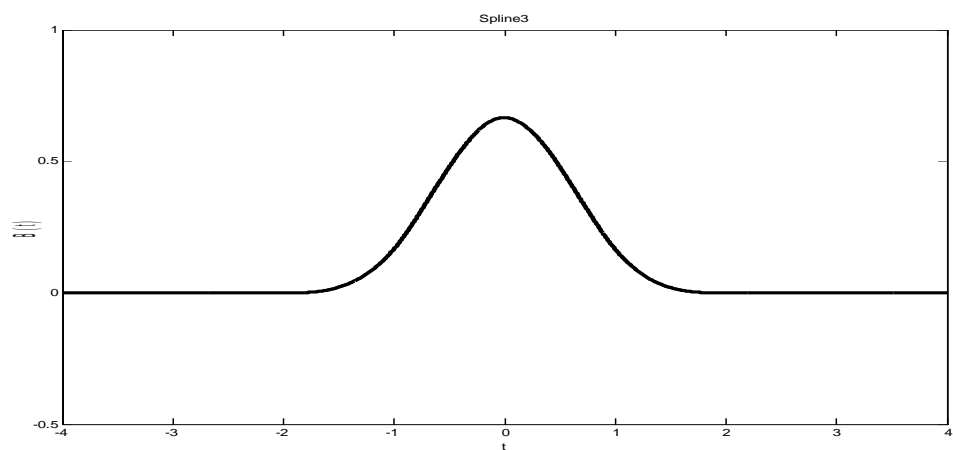


Figura 12. Spline de orden tres

La función escalada $\phi(t)$ en nuestro caso, es la spline cúbica $\beta^3(t)$. Desarrollando las respectivas operaciones se obtiene

$$\phi(t) = \beta^3(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -2, \\ 1/6(2+t)^3, & \text{si } -2 \leq t \leq -1, \\ 1+t - (1/6)t^3 - (1/3)(1+t)^3, & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t + (1/6)t^3 - (1/3)(1-t)^3, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1/6(2-t)^3, & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

2.2. Splines-B discretas

Para encontrar los coeficientes de la base de splines-B, es de gran utilidad analizar las propiedades del muestreo de las Splines-B.

Spline-B discreta centrada $b_m^n(k) := \beta^n(\frac{k}{m})$. La spline-B discreta con kernels de orden n y con factor de expansión m son obtenidos por muestreo de los splines-B continuos.

Spline-B discreta desplazada $c_m^n(k) := \beta^n(\frac{k}{m} + \frac{1}{2})$, donde el subíndice se refiere a la cantidad de muestras entre nodos (dado que hemos tomado a los mismos con una distancia unitaria de separación) y el superíndice se refiere al orden de la spline-B.

Las spline-B poseen propiedades importantes como [23, 44, 46] la propiedad de construcción recursiva. Como en el caso de la spline-B continua, podemos construir la spline-B discreta de orden n a partir de la de orden $n - 1$

$$b_m^n(k) = \frac{(\frac{k}{m} + \frac{n+1}{2})c_m^{n-1}(k) + (\frac{n+1}{2} - \frac{k}{m})c_m^{n-1}(k-m)}{n}$$

$$c_m^n(k) = \frac{(\frac{k}{m} + \frac{n+2}{2})b_m^{n-1}(k+m) + (\frac{n}{2} - \frac{k}{m})b_m^{n-1}(k)}{n}.$$

El superíndice n se refiere al orden del spline y el subíndice m se refiere al espacio entre los nodos o tamaño de etapa. Esta propiedad se demuestra en

32 Introducción a la teoría spline

forma discreta a partir de la construcción recursiva de la spline-B continua. Tomando como punto de partida las splines-B discretas de orden cero se tiene

$$b_m^0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in [-m/2, m/2], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$c_m^0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in [1 - m, 0], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cuando se da la igualdad, el muestreo hace que la función tome el valor de $\frac{1}{2}$, esto casi no se menciona pero al implementar los algoritmos es necesario tenerlo en cuenta. Ahora sí, podemos calcular las de orden superior utilizando la propiedad anterior.

La otra propiedad importante es la de convolución. Para las splines-B discretas con sobremuestreo entero m mayor que 1, podemos encontrar una propiedad similar a la de las continuas.

Para m impar

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^2} \underbrace{(b_m^0 * b_m^0 * \dots * b_m^0)}_{(n+1)\text{veces}} * b_1^n(k).$$

Para m par y para n impar

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^n} \delta_{\frac{n+1}{2}} * \underbrace{(b_m^0 * b_m^0 * \dots * b_m^0)}_{(n+1)\text{veces}} * b_1^n(k).$$

Para m par y n par

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^n} \delta_{\frac{n+1}{2}} * \underbrace{(b_m^0 * b_m^0 * \dots * b_m^0)}_{(n+1)\text{veces}} * c_1^n(k).$$

La sucesión de espacios anidados V_j y la función escalada $\phi(t) = \beta^3(t)$ definen el análisis multirresolución en el presente trabajo. Este análisis multirresolución recibe el nombre de “**Polinomio spline pirámide**”.

La relación de escala viene dada de la siguiente manera

$$\beta^3\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_2^3(k) \beta^3(t - k).$$

El filtro binomial Kernel $\mu_2^3(k)$ es un filtro discreto FIR, es decir, un filtro con impulso de respuesta finita. Se define como

$$\mu_2^3(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < -2, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } k = -2, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } k = -1, \\ \frac{3}{4}, & \text{si } k = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } k = 1, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } k = 2, \\ 0, & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

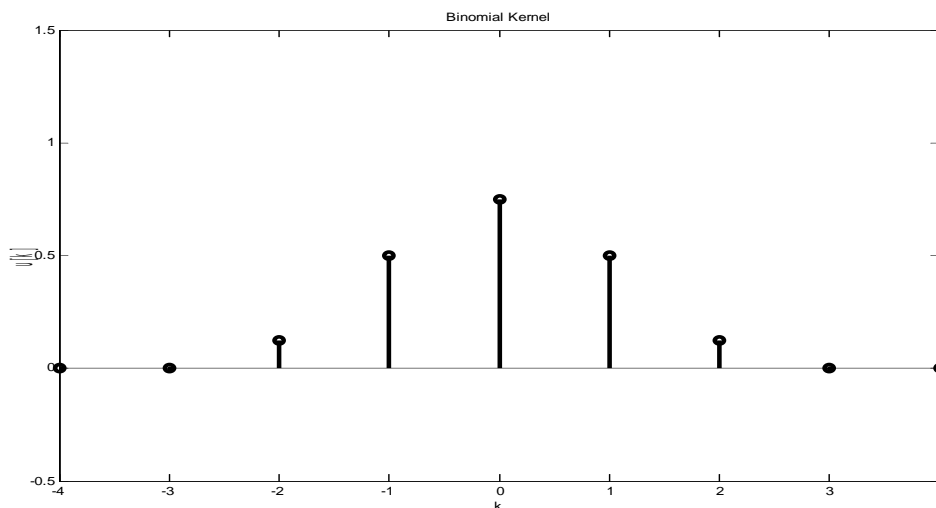


Figura 13. Filtro Binomial Kernel

2.3. Operación de reducción

La operación de reducción se diseña para descomponer la señal electroencefalográfica en los coeficientes de aproximación. Se define como

$$c_{j+1}(k) := [v^0 * c_j] \downarrow 2(k).$$

Esta operación toma la sucesión de coeficientes de aproximación; primero la filtra y después la muestrea hacia abajo por un factor de 2 (downsampling). Los respectivos coeficientes de aproximación del polinomio spline pirámide se construyen de manera recursiva por las repetidas operaciones de la operación de reducción. Este procedimiento computacional es una extensión del algoritmo de aproximación multirresolución de funciones bases no ortogonales de mallat.

2.3.1. Prefiltro v^0

El impulso de respuesta finita del prefiltro v^0 es

$$v^0(k) = \frac{1}{2} [(b^7)^{-1}] \uparrow 2 * b^7 * \mu_2^3(k).$$

El spline discreto de orden siete b^7 se obtiene muestreando el spline β^7 en los enteros, así

$$b^7(k) = \beta^7(t)|_{t=k},$$

donde, β^7 es el spline-B de orden siete que se obtiene por repetidas convoluciones del spline de orden cero; exáctamente siete convoluciones.

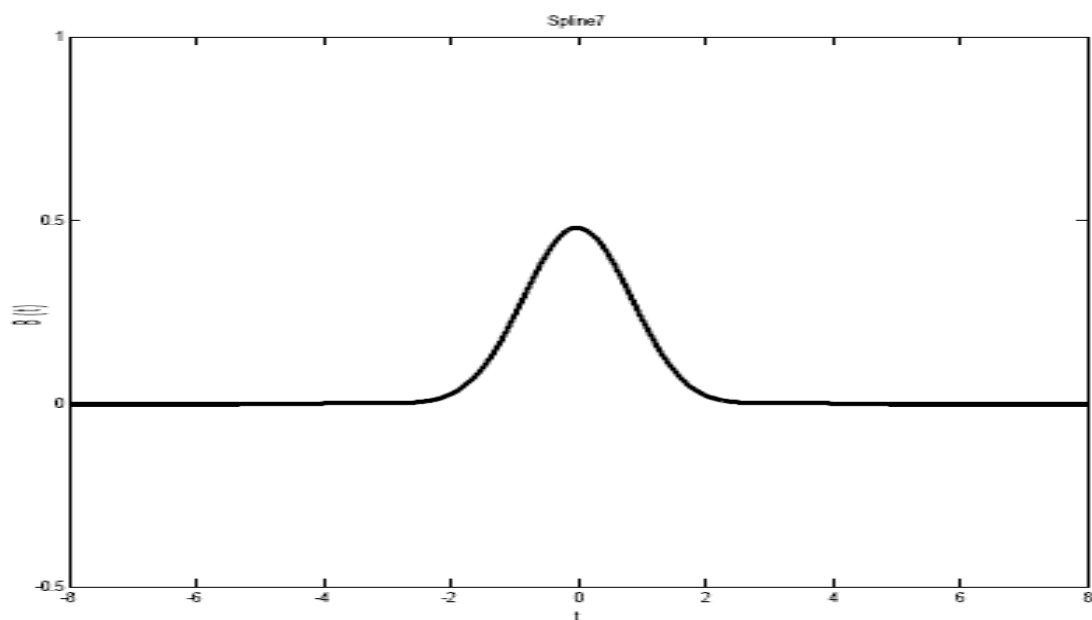


Figura 14. Spline B de orden siete

Muestreando β^7 , el spline discreto de orden siete queda de la siguiente manera

$$b^7(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < -3, \\ 0,000204, & \text{si } k = -3, \\ 0,0235, & \text{si } k = -2, \\ 0,2377, & \text{si } k = -1, \\ 0,4794, & \text{si } k = 0, \\ 0,2377, & \text{si } k = 1, \\ 0,0235, & \text{si } k = 2, \\ 0,000204, & \text{si } k = 3, \\ 0, & \text{si } k \geq 3, \end{cases}$$

este es un filtro FIR.

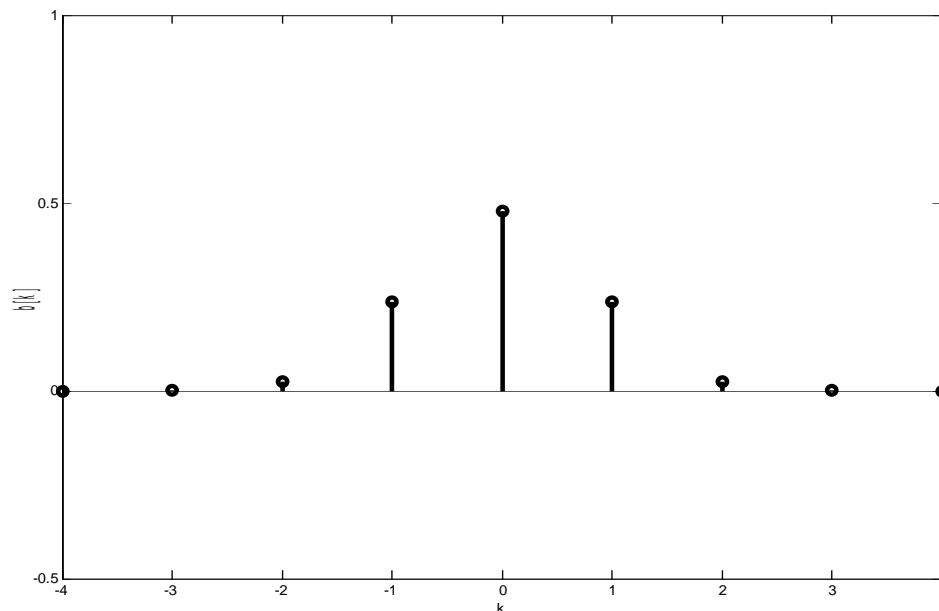


Figura 15. Spline discreto de orden siete

El filtro $(b^7)^{-1}$ se obtiene de la función de transferencia

$$B^7(z) = \frac{5040}{z^3 + z^{-3} + 2416 + 1191(z + z^{-1}) + 120(z^2 + z^{-2})}$$

2.4. Operación de expansión

La operación de expansión se diseña para reconstruir la señal electroencefalográfica a partir de sus coeficientes de aproximación. Se define como

$$\hat{c}_i(k) := v * [c_{i+1}] \uparrow 2(k),$$

esta operación toma la sucesión de coeficientes de aproximación, primero la muestrea hacia arriba por un factor de dos (upsampling) y después la filtra.

El post-filtro v se define como

$$v = [\delta_0] \uparrow 2 * \mu_2^3 * (\delta_0)^{-1}$$

2.5. El espacio de detalles W

La pérdida de información o residuo que resulta después de aplicar la operación de **reducción** en el polinomio spline pirámide se denota

$$r_{j+1} := s_j - s_{j+1}$$

Por construcción, el residuo r_{j+1} se incluye en V_j , de manera que sea perpendicular a V_{j+1} ; esto es,

$$r_{j+1} \in W_{j+1}$$

donde

$$V_{j+1} \oplus W_{j+1} = V_j$$

y

$$W_{j+1} \perp V_{j+1}$$

W_{j+1} , es llamado el espacio de detalles o espacio residual de resolución 2^{j+1} .

2.6. La wavelet biortogonal spline $\psi(t)$

La wavelet spline $\psi(\frac{t}{2})$ se construye tomando la suma promedio de las splines-B cúbicas con la sucesión $w(k)$

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) \beta^3(t - k).$$

Esta es ortogonal con el conjunto de funciones spline-B expandidas

$$\left\{ \beta^3\left(\frac{t}{2} - k\right) \right\}.$$

Ahora se determina una fórmula explícita para la wavelet spline - B de orden tres.

38 Introducción a la teoría spline

Con la sucesión $w(k)$ finita.

Usando la representación de funciones bases expandidas

$$\beta^3\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_2^3(k) \beta^3(t-k)$$

y la propiedad

$$\langle \beta^3(t), \beta^3(t-y) \rangle = \beta^7(y).$$

Propiedad que es una consecuencia directa de

$$\beta^n = \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1) \text{ veces}}$$

La restricción de ortogonalidad puede ser expresada como una ecuación de convolución,

$$\langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \beta^3\left(\frac{t}{2} - k\right) \rangle = [w * \mu_2^3 * b^7] \downarrow 2(k) = 0; \quad k \in Z.$$

La transformada Z es

$$\frac{1}{2}(W(z)U_2^3(z)B_1^7(z) + W(-z)U_2^3(-z)B_1^7(-z)) = 0.$$

Aplicando la transformada inversa z se obtiene la siguiente expresión para la wavelet spline-B de orden tres

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mu_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(t-k)$$

2.6.1. Filtro binomial kernel modulado

La modulación del filtro binomial kernel modulado produce

$$\underline{\mu}_2^3(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < -2, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } k = -2, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } k = -1, \\ \frac{3}{4}, & \text{si } k = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } k = 1, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } k = 2, \\ 0, & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

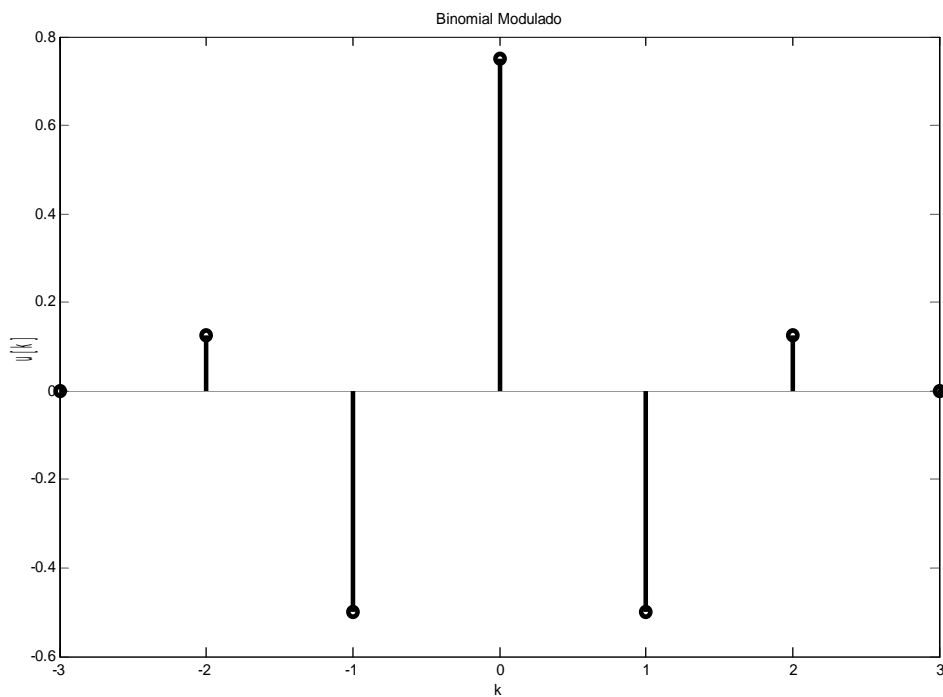


Figura 16. Filtro binomial modulado

2.6.2. Spline discreto de orden siete modulado

La modulación del filtro spline discreto de orden siete produce

$$\underline{b}_2^7(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < -3, \\ -0,000204, & \text{si } k = -3, \\ 0,0235, & \text{si } k = -2, \\ -0,2377, & \text{si } k = -1, \\ 0,4794, & \text{si } k = 0, \\ -0,2377, & \text{si } k = 1, \\ 0,0235, & \text{si } k = 2, \\ -0,000204, & \text{si } k = 3, \\ 0, & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

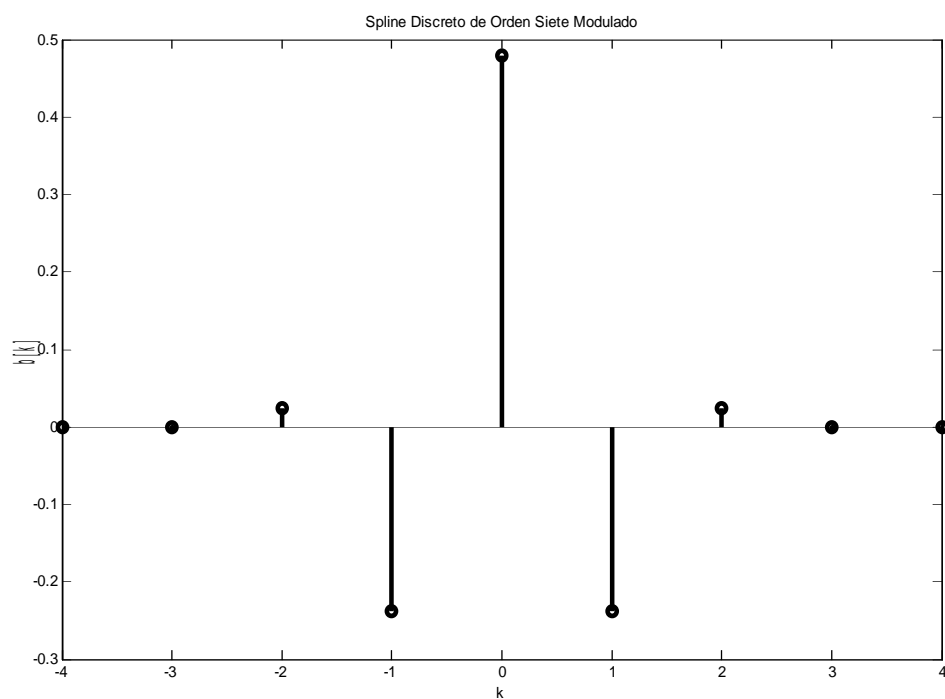


Figura 17. Spline discreto de orden siete modulado

2.6.3. Delta Kronecker $\delta_{-1}(k)$

El delta kronecker corrido hasta menos uno se define como

$$\delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = -1, \\ 0, & \text{si } k \neq -1. \end{cases}$$

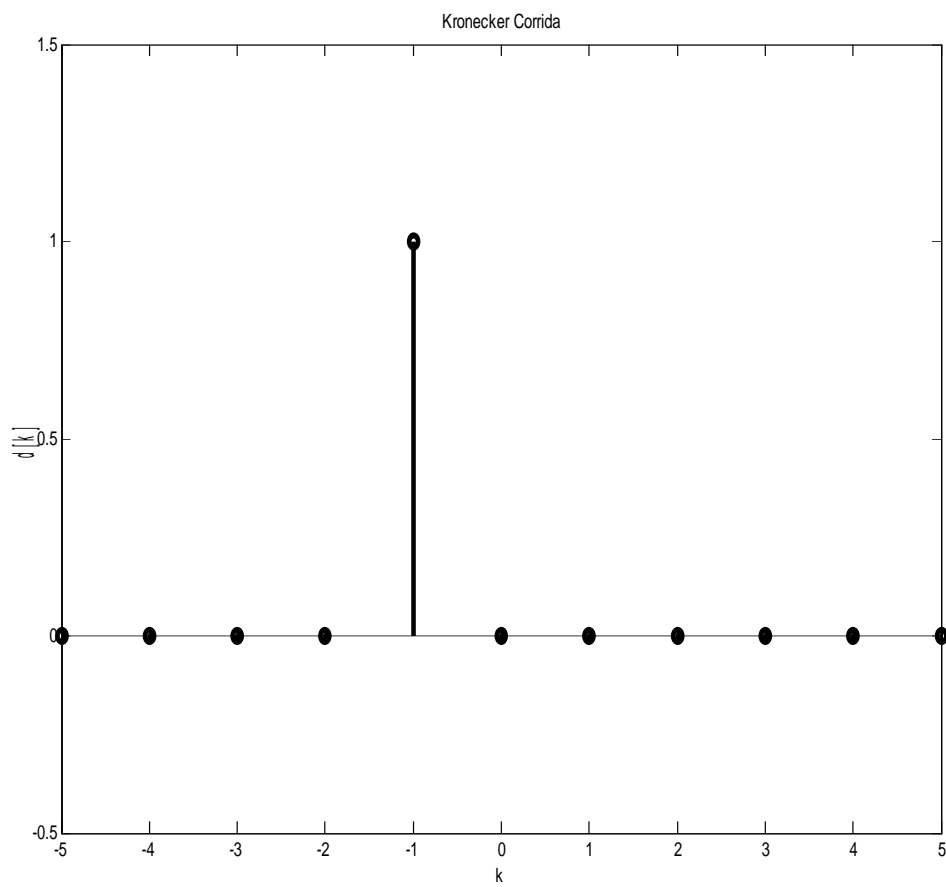


Figura 18. Delta Kronecker corrida

42 Introducción a la teoría spline

Cambiando t por $2t$ en

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\underline{\mu}_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(t - k)$$

se obtiene la wavelet biortogonal spline

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\underline{\mu}_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(2t - k).$$

Desarrollando las operaciones respectivas, la wavelet queda definida así

$$\begin{aligned} \psi(t) = \frac{1}{40320} & [-\phi(2t + 6) + 124\phi(2t + 5) - 1677\phi(2t + 4) + 7904\phi(2t + 3) \\ & - 18482\phi(2t + 2) + 24264\phi(2t + 1) - 18482\phi(2t) + 7904\phi(2t - 1) \\ & - 1677\phi(2t - 2) + 124\phi(2t - 3) - \phi(2t - 4)]. \end{aligned}$$

Esta wavelet es de medida nula, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$; es oscilante, además es cuadrado integrable, es una función de energía finita, está bien localizada en un intervalo finito de tiempo y se desvanece en el tiempo.

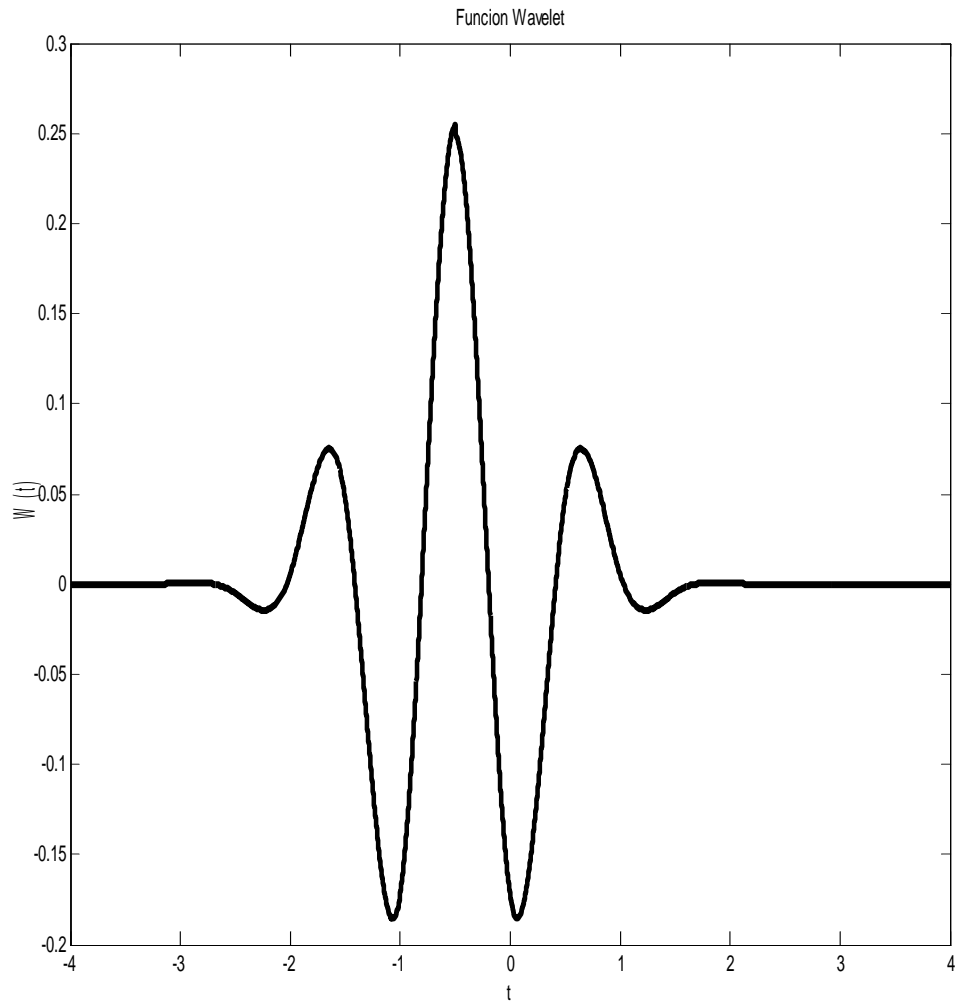


Figura 19. Wavelet B-Spline

2.7. La función escalada dual $\tilde{\phi}(t)$

La función escalada dual es en sí misma una función escalada y se define como

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_k (b^3)^{-1}(k) \phi(t - k)$$

2.7.1. El filtro $(b^3)^{-1}$

El filtro $(b^3)^{-1}$ se obtiene de la función de transferencia

$$B^3(z) = \frac{z + z^{-1} + 4}{6}$$

2.8. La wavelet dual $\tilde{\psi}(t)$

La wavelet dual es en sí misma una wavelet y se define como

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_k (b^3 * [\underline{b}^3 * b^3] \downarrow 2)^{-1}(k) \psi(t - k)$$

CAPÍTULO 3

Algoritmo de detección de los eventos epilépticos

Introducción

En esta sección se presenta una breve introducción a la epilepsia, como una de las enfermedades neurológicas más prevalentes y a los electroencefalogramas que han logrado ganar un lugar indiscutible en la exploración del sistema nervioso central (SNC); además se presenta una síntesis del procedimiento de detección de puntas o eventos epilépticos.

La primera mención conocida de la epilepsia proviene alrededor de los años 500 a 700 A.C. La epilepsia es un trastorno del cerebro en el cual grupos de células nerviosas o neuronas en el cerebro, transmiten a veces señales en una forma anormal; las neuronas normalmente generan impulsos electroquímicos que actúan sobre otras neuronas, glándulas y músculos para producir pensamientos, sentimientos humanos y acciones.

Durante una crisis epiléptica, las neuronas pueden emitir señales hasta 500 veces por segundo. Luego de realizar la historia del paciente y el examen físico, se necesitan de acuerdo con los hallazgos, unos estudios que son útiles, entre los cuales podemos destacar el electroencefalograma (EEG), que es el registro de la actividad eléctrica cerebral obtenida por medio de electrodos colocados en diferentes puntos de la cabeza.

Los tipos de epilepsia en las personas epilépticas pueden clasificarse

de muchas formas: por sistemas, por la causa de la epilepsia, por el área del encéfalo donde se originan las descargas eléctricas anormales o por los cambios observados en el electroencefalograma.

La clasificación internacional tiene en cuenta los síntomas observados durante una crisis [31, 47] y la localización de la actividad eléctrica anómala en el encéfalo.

Fue Hans Berger, quien en 1929 logró medir la actividad cerebral del ser humano; detectó comportamientos oscilatorios que denominó ritmos de Berger. La señal electroencefalográfica pertenece a las señales no estacionarias, lo que significa que no se puede expresar como una función matemática y que son eventos estrictamente no periódicos. Se puede ver como una combinación de señales superpuestas con diferentes características frecuenciales y temporales. Estas señales se denominan ritmos de la señal electroencefalográfica y de acuerdo al rango de frecuencias tiene su clasificación en cuatro ritmos [18] a saber: ritmo Alfa (8-13 Hz) asociado al estado de vigilia, su voltaje oscila entre $20\mu V$ y $80\mu V$; ritmo Beta (14-30 Hz), tiene menor amplitud que el alfa y su voltaje oscila entre $5\mu V$ y $10\mu V$; ritmo Theta (4-7 Hz, su voltaje promedio es de $50\mu V$; ritmo Delta (0-4 Hz), es el más lento de todos los ritmos, su voltaje oscila entre $70\mu V$ y $100\mu V$. Los eventos epilépticos o signos de enfermedad en electroencefalografía (ver p.e, [17, 18, 20, 25, 26, 48, 53, 54]) pueden sintetizarse en tres grafoelementos (eventos) como puntas (deflexiones de curso rápido), ondas (fenómenos de curso lento) y puntas-ondas, polipuntas-ondas (asociación de dichos eventos) como se ilustran en las figuras 20, 21 y 22.



Figura 20. Puntas



Figura 21. Ondas



Figura 22. Complejos puntas - Ondas

3.1. Base de datos de EEG

Las pruebas estadísticas para determinar los umbrales del algoritmo de detección de puntas se hicieron sobre dos bases de datos.

La base de datos del Centro de Epilepsia del Hospital de la Universidad de Freiburg, en Alemania.

La base de datos de la Universidad de California Irvine, en Estados Unidos.

3.1.1. Base de datos de EEG de la Universidad de Freiburg

Para la base de datos de la Universidad de Freiburg se recibió el permiso correspondiente para lo que asignaron clave y contraseña. Las características de esta base de datos se describen a continuación.

La base contiene los registros de EEG de 21 pacientes que sufren de epilepsia focal médicamente intratable. Los datos fueron registrados durante un seguimiento de epilepsia pre - invasiva quirúrgica en el Centro de Epilepsia del Hospital de la Universidad de Freiburg, Alemania. En once pacientes, el foco epiléptico se encuentra en las estructuras del cerebro neocortical, en ocho pacientes en el hipocampo, y en dos pacientes en ambos. Con el fin de obtener una señal de alto-a-ruido, menos artefactos, y para grabar directamente desde las esferas de actividad, la red intracraneal, strip-, y la profundidad-se utilizaron electrodos. Los datos de EEG fueron adquiridos mediante un vídeo Neurofile NT EEG sistema digital con 128 canales, 256 Hz tasa de muestreo, y un análogo de 16 bits-convertidor digital. Notch o filtros de banda de paso no se han aplicado. Por razones técnicas, el registro está temporalmente pausado después de cada bloque, dando lugar a lagunas, con una duración de 1-3 segundos. Para cada uno de los pacientes, existen conjuntos de datos llamados “durante la crisis o ictal” y “interictal”, los primeros archivos contienen crisis epilépticas y al menos 50 minutos antes de los datos durante la crisis. Los segundos contienen aproximadamente 24 horas de grabaciones de EEG sin actividad epiléptica. Por lo menos 24 horas de grabaciones continuas interictal están disponibles para 13 pacientes. Para el resto de los pacientes los datos interictal del EEG invasivo consiste en menos de 24 h que se unieron, para terminar con al menos 24 horas por paciente. Los seis contactos de la red de todos los implantados, bandas y electrodos de profundidad fueron seleccionados mediante inspección visual de los datos en bruto por un epileptólogo certificado. Tres contactos fueron seleccionados de la zona de inicio de la crisis, es decir, de las áreas afectadas a principios de la actividad durante la crisis. Los otros tres contactos de los electrodos fueron seleccionados como que no participan o que participan a más tardar durante la extensión de crisis. Los períodos durante la crisis de consumo determinado con base en la identificación de patrones de ataque típicos de anteriores crisis se manifiestan clínicamente en grabaciones intracraneal mediante inspección visual de epileptólogos con experiencia.

3.1.2. Base de datos de EEG de la Universidad de California Irvine

Este es un repositorio en línea de los grandes conjuntos de datos que abarca una amplia variedad de tipos de datos, las tareas de análisis, y

áreas de aplicación. La función principal de este archivo es permitir a los investigadores en el descubrimiento de conocimiento y minería de datos a escala existentes y futuros algoritmos de análisis de datos muy grandes y complejos conjuntos de datos. Cada archivo corresponde a la grabación de un tema diferente en el electrodo occipital izquierdo (O1), con referencia vinculada lóbulos de las orejas. Cada archivo contiene varios ensayos libres de artefactos, cada uno de ellos con 512 puntos de datos (256 antes y 256 después de la estimulación) almacenados con una frecuencia de muestreo de 250 Hz. Los ensayos se almacenan en forma consecutiva en un archivo de 1 columna. Los datos fueron pre-filtrada en el rango de 0,1-70Hz. En las figuras 23 y 24 se muestra la base de datos de la Universidad de Freiburg en Alemania.

Seizure Prediction in Freiburg, Germany

Download Area

- EEG Database
- Electrode Positions
- browse Ascii files
- General informations
- please report corrupted files to epilepsydatabase@fdm.uni-freiburg.de

Patient	Sex	Age	Seizure type	H/NC	Origin	Electrodes	seizures analyzed	Interictal Duration	Info	Ictal	Size[MB]	Interictal	Size[MB]	Interictal duration	Interictal intervals
1	f	15	SP,CP	NC	Frontal	g,s	4	06400 s	info	001ictal	86,4	001interictal	242,2	24 h	1
2	m	38	SP,CP,GTC	H	Temporal	d	3	06400 s	info	002ictal	55,8	NA	220	24 h	2
3	m	14	SP,CP	NC	Frontal	g,s	5	06400 s	info	003ictal	82,5	003interictal	232	24 h	1
4	f	26	SP,CP,GTC	H	Temporal	d,g,s	5	06400 s	info	004ictal	113,9	004interictal	235,3	24 h	1
5	f	16	SP,CP,GTC	NC	Frontal	g,s	5	06400 s	info	005ictal	72,1	005interictal	175,7	24 h	3
6	f	31	CP,GTC	H	Temporo/Occipital	d,g,s	3	06400 s	info	006ictal	62,9	006interictal	221,1	24 h	1
7	f	42	SP,CP,GTC	H	Temporal	d	3	08597 s	info	007ictal	55,7	007interictal	235,2	25 h	1
8	f	32	SP,CP	NC	Frontal	g,s	2	06979 s	info	008ictal	35,1	008interictal	236,1	24 h	2
9	m	44	CP,GTC	NC	Temporo/Occipital	g,s	5	06163 s	info	009ictal	96	009interictal	447,3	24 h	2
10	m	47	SP,CP,GTC	H	Temporal	d	5	08047 s	info	010ictal	101,6	010interictal	226,8	24 h	1
11	f	10	SP,CP,GTC	NC	Parietal	g,s	4	06570 s	info	011ictal	76,3	011interictal	231,2	24 h	1
12	f	42	SP,CP,GTC	H	Temporal	d,g,s	4	09326 s	info	012ictal	74	012interictal	417	25 h	1
13	f	22	SP,CP,GTC	H	Temporo/Occipital	d,s	2	06400 s	info	013ictal	38	013interictal	229,2	24 h	1
14	f	41	CP,GTC	H,NC	Fronto/Temporal	d,s	4	05894 s	info	014ictal	66,5	014interictal	224,1	24 h	5
15	m	31	SP,CP,GTC	H,NC	Temporal	d,s	4	06400 s	info	015ictal	93,1	015interictal	222,4	24 h	1
16	f	50	SP,CP,GTC	H	Temporal	d,s	5	06400 s	info	016ictal	104,6	016interictal	211,2	24 h	2

Figura 23. Base de Datos. U. Freiburg

Patient	Sex	Age	Seizure type	H/NC	Origin	Electrodes	seizures analyzed	Interictal Duration	Info	Ictal Size[Mb]	Interictal Size[Mb]	Interictal duration	Interictal intervals
17	m	28	SP,CP,GTC	NC	Temporal	s	5	06634 s	info 07	ictal 151,7	interictal 241,5	24 h	1
18	f	25	SP,CP	NC	Frontal	s	5	09369 s	info 01	ictal 132,8	interictal 242,1	25 h	1
19	f	28	SP,CP,GTC	NC	Frontal	s	4	07780 s	info 01	ictal 119,5	interictal 227,3	24 h	3
20	m	33	SP,CP,GTC	NC	Tempo/Parietal	c.g.s	5	92219 s	info 02	ictal 124,7	interictal 239,5	26 h	1
21	m	13	SP,CP	NC	Temporal	s	5	06177 s	info 02	ictal 110,5	interictal 224,1	24 h	2

SP = simple partial CP = complex partial GTC = generalized tonic-clonic

Figura 24. Base de Datos. U. Freiburg

3.2. El algoritmo de detección

A continuación se presenta una síntesis del algoritmo de detección de puntas o eventos epilépticos. Las subrutinas y las rutinas codificadas en MATLAB que componen el algoritmo de detección de puntas se ilustran respectivamente con un EEG de 1000 puntos tomados de un solo canal. Se explica la construcción estadística de los umbrales tomando como referencia un nivel de resolución. Las cartas se elaboraron con el paquete estadístico STATGRAPHICS Plus 5.1. Los códigos de las gráficas que aparecen a lo largo de los capítulos fueron escritos en MATLAB. Se escoge MATLAB por ser un paquete computacional muy completo y robusto en lo que tiene que ver con el tratamiento de las señales. Dentro de las cajas de herramientas (toolbox) que ofrece se encuentra una que contiene el análisis multirresolución programado con muchas wavelets clásicas como las Daubechies4. La lectura de los EEG se realizó con EEGLAB [2, 16, 32, 33, 35, 51].

MATLAB 7.4.0(R2007a)
EEGLAB 2008
STATGRAPHICS Plus 5.1

Los códigos para el algoritmo de detección de puntas no fueron tomados del toolbox de wavelets. Son códigos diseñados por los autores de la tesis. Para mayor información consultar en los correos: rarmas@usbbog.edu.co - blopezgo@eafit.edu.co

3.3. Síntesis del algoritmo

Los registros de la actividad eléctrica del cerebro a través de los electrodos profundos o colocados en el cuero cabelludo son usados para localizar las descargas de los ataques epilépticos de los pacientes, quienes son candidatos a tratamientos quirúrgicos para remover el foco del ataque. En la práctica clínica, la localización epiléptica es deducida del análisis visual de las descargas interictales e ictales. En este trabajo se introduce un algoritmo para localizar puntas que es el grafoelemento de la irritación cortical y por ello la representación bioeléctrica por excelencia de la epilepsia. Este evento epiléptico en un EEG lo ubicamos dentro de un marco multirresolución como inicialmente fue introducido por Unser ([46]). Este método es adecuado para

el tratamiento digital de señales no estacionarias y en particular para el análisis EEG. El método aquí presentado ([13]) está basado en la **función energía** que provee una solución a algunos problemas de detección de registros electroencefalográficos como

- La localización de eventos en el dominio tiempo-frecuencia.
- La localización en el tiempo y la caracterización de los diferentes tipos de eventos de las formas epilépticas.
- La posibilidad de la implementación de algoritmos rápidos en tiempo real.

Un orden para implementar un algoritmo rápido de multirresolución, para detectar puntas o eventos epilépticos, es introducir una descomposición simple de la **función energía** en cada nivel de resolución. Por este camino, se obtiene un **detector de eventos** basado en filtros digitales, diseñados bajo un esquema diádico. Para ello nos fundamentamos en los elementos teóricos como el **análisis wavelets y filtros** expresados en ([46]).

Se analizará el problema de la localización de eventos epilépticos en el marco dado por la transformada wavelet del **spline polinomial** ([13]), usando el spline cúbico $\phi(t)$ con soporte compacto como una función escala que fue obtenida a través de convoluciones repetidas de orden cero a partir de la función característica en el intervalo $[-1/2, 1/2)$ como ya se mostró en la sección 2.1.3.

Para construir la correspondiente función wavelet $\psi(t)$, procedemos como se indica en [12].

La fórmula general para construir la wavelet spline-B de orden n es

$$\psi_b^n(t/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u_2^n * b^{2n+1} * \delta_{-1})(k) \beta^n(t - k)$$

donde

$$u_2^n(k) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{k+(n+1)/2}, & \text{si } |k| \leq (n+1)/2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ψ_b^n : Función wavelet

$\underline{u}_2^n(k) = (-1)^k u_2^n(k)$: Kernel binomial modulado

$b^{2n+1}(t) = \beta^{2n+1}(t)|_{t=k}$: Spline discreto

$\delta(k)$: Distribución delta, en caso discreto (en procesamiento de señales se llama impulso unitario), donde $\delta_i * a(k) = a(k - i)$

$\beta^n(x - k)$: Spline de orden n

$k \in Z$

para $n = 3$ se tiene lo siguiente

$$\psi_b^3(t/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\underline{u}_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(t - k),$$

de esta manera se construye la wavelet madre, que en nuestro caso corresponde a una wavelet de orden 3, que se obtiene a partir del spline cúbico que hizo de función escala.

Haciendo uso del procedimiento anterior se obtuvo $\psi(t)$

$$\psi(t) = \psi_b^3 = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -4 \\ \frac{-1}{241920}(2t + 8)^3, & \text{si } -4 \leq t < -3,5 \\ \frac{-1}{241920}(2t + 8)^3 + \frac{128}{241920}(2t + 7)^3, & \text{si } -3,5 \leq t < -3 \\ \frac{-1}{241920}(2t + 8)^3 + \frac{128}{241920}(2t + 7)^3 - \frac{2179}{241920}(2t + 6)^3, & \text{si } -3 \leq t < -2,5 \\ \vdots & \vdots \\ 0, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

La selección de esta wavelet garantiza una buena localización en el plano tiempo-frecuencia.

La descomposición wavelet para una señal electroencefalográfica dada $S(t)$, inicialmente representada por los coeficientes del spline polinomial a resolución cero (0) es

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_0(k)\phi(t-k) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_N(k)\phi(2^{-N}t-k) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k)\psi(2^{-j}t-k)$$

donde los valores $d_1(k), d_2(k), \dots, d_N(k)$ son los coeficientes wavelets y la sucesión $\{C_N(k)\}$ representa la resolución no muy buena de la señal en el nivel de resolución N . Si esta descomposición se lleva sobre todos los niveles de resolución, se obtiene la siguiente expansión wavelet

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k)\psi(2^{-j}t-k)$$

En cada nivel j , esta serie tiene la propiedad de oscilación completa, la cual hace la descomposición útil en aplicaciones en la localización del tiempo del evento.

En este punto es conveniente introducir dos filtros digitales que serán usados en el algoritmo. Ellos están dados por las funciones de transferencia

$$B^{-1}(z) = \frac{6}{z + z^{-1} + 4} = \frac{6z}{1 + 4z + z^2}$$

$$A^{-1}(z) = \frac{5040z^3}{z^6 + 120z^5 + 1191z^4 + 2416z^3 + 1191z^2 + 120z + 1}$$

Con $b^{-1}(k)$ y $a^{-1}(k)$ representamos la respuesta al impulso de estos filtros. Desarrollando ([46]) un sistema recursivo rápido para obtener los coeficientes de expansión procedemos de la siguiente manera

$$c_0(k) = [b^{-1} * S](k)$$

$$c_{i+1}(k) = [v^* * c_i] \downarrow 2(k)$$

$$d_{i+1}(k) = [w^* * c_i] \downarrow 2(k)$$

v^* y w^* son filtros digitales, donde

$$v^*(k) = \left(\frac{1}{2}\right)[[a^{-1}] \uparrow 2 * a * u](k)$$

$$w^*(k) = \left(\frac{1}{2}\right)[[a^{-1}] \uparrow 2 * u_s * \delta_1](k)$$

donde

$$\begin{aligned}
 u_s(k) &= (-1)^k u(k) \\
 \delta_1 * a(k) &= a(k-1) \\
 [a] \uparrow 2(k) &= \begin{cases} a(k/2), & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$[a] \downarrow 2(k) = a(2k).$$

Con el procedimiento anterior y los filtros presentados, se construirá el algoritmo que nos permitirá detectar las puntas o eventos epilépticos en un EEG. Como el procedimiento a seguir es la formulación del algoritmo para la detección basada en la **función energía** y para ello, iniciamos diciendo que la familia

$$\psi_{k,j}(t) = \psi(2^{-j}t - k)$$

es una base ortonormal en $L^2(R)$. El concepto de energía está ligado con la noción usual derivada de la teoría de Fourier y la suma del cuadrado de los coeficientes de las series, es la energía de la función, es decir,

$$\|S\|^2 = \sum_{k,j} |d_{k,j}|^2 = \sum_{k,j} |\langle S, \psi_{k,j} \rangle|^2$$

cuando la descomposición wavelet está dada por

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k) \psi(2^{-j}t - k).$$

Pero las wavelets que estamos usando pertenecen a la clase más general de las wavelets biortogonales([13]). Esto significa que existe una función $\tilde{\psi}(t)$ tal que

$$\langle \psi(2^{-i}t - k), \tilde{\psi}(2^{-j}t - l) \rangle = \begin{cases} 2^i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La familia $\tilde{\psi}_{j,k} = \tilde{\psi}(2^{-j}t - k)$ se llama la **base dual** de $\psi_{j,k}$. Cada señal $S(t)$ se puede escribir como

$$S(t) = \sum_{k,j} d_j(k) \psi_{j,k}(t) = \sum_{k,j} \tilde{d}_j(k) \tilde{\psi}_{j,k}(t)$$

donde

$$d_j(k) = \langle S, \psi_{j,k} \rangle$$

y $\tilde{d}_j(k) = \langle S, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$. En este caso, o sea en el biortogonal, la energía de la señal $S(t)$ está dada por

$$\|S\|^2 = \sum_{j,k} 2^j d_j(k) \tilde{d}_j(k).$$

La dual $\tilde{\psi}(t)$ es en si misma una wavelet dada por [12],

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_k (a * [a_s * a] \downarrow 2)^{-1}(k) \psi(t - k)$$

y la correspondiente función escala, $\tilde{\phi}(t)$ es

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_k a^{-1}(k) \phi(t - k).$$

Los filtros digitales correspondientes al análisis de la wavelet dual son

$$v^*(k) = (1/2)u(k)$$

$$w^*(k) = (1/2)[a_s * u_s * \delta_1](k)$$

y la sucesión de inicialización es

$$\tilde{C}_0(k) = [a * b^{-1} * S](k).$$

Las ecuaciones anteriores se aplican recursivamente en sus cálculos para encontrar los coeficientes de la función energía.

Desde luego que se está utilizando una descomposición diádica del rango de frecuencias de una señal de M muestras en donde se tienen $\frac{M}{2^j}$ coeficientes en el nivel j .

En orden a obtener una detección exacta de los eventos epilépticos, uniformemente se distribuyen los **átomos de energía** en $\|S\|^2 = \sum_{j,k} 2^j d_j(k) \tilde{d}_j(k)$, lo

que significa que los términos $2^j d_j(k) \tilde{d}_j(k)$ son distribuidos a lo largo de los 2^j puntos.

Definiendo

$$e_j(r) = d_j(k) \tilde{d}_j(k)$$

para $r \in \mathbb{Z}$ en el intervalo $(k-1)2^j < r \leq k2^j$. La energía en cada nivel de resolución $j = 1, 2, \dots, N$ es

$$E_j = \sum_{r=1}^M e_j(r)$$

y la energía en cada muestreo en tiempo $r = 1, 2, \dots, M$ es

$$E(r) = \sum_j e_j(r).$$

Los diferentes tipos de eventos epilépticos pueden ser caracterizados para los valores $e_j(r)$ a diferentes niveles de resolución.

Con el procedimiento anterior se construye el programa que nos permite calcular la función energía de la señal no estacionaria en los ocho niveles de resolución.

Para la detección de los eventos epilépticos se requiere del siguiente análisis estadístico: se toman las frecuencias de energía en cada nivel de resolución y se realizan los siguientes cálculos

$$D_j = \bar{x} + k_j \sigma$$

donde

\bar{x} : es el valor medio de la función energía e_j en cada nivel de energía.

σ : es la desviación estándar de los valores e_j .

k : valor arbitrario en cada nivel de energía. Siguiendo en detalle los procedimientos anteriores se logra construir los diferentes algoritmos para llegar a obtener el detector de eventos epilépticos a partir de la función de energía obtenida.

A continuación se presentan las diferentes rutinas que fueron elaboradas mediante el uso del MATLAB y que soportan el algoritmo.

3.3.1. Retener

Rutina que mantiene parte del EEG. Toma el EEG y crea uno de longitud N , extrayendo en forma alternada elementos de ambos extremos. Haciendo uso de dicha rutina, se obtienen los siguientes resultados. La figura 25 muestra un EEG con 1000 puntos y después el EEG con 500 puntos.

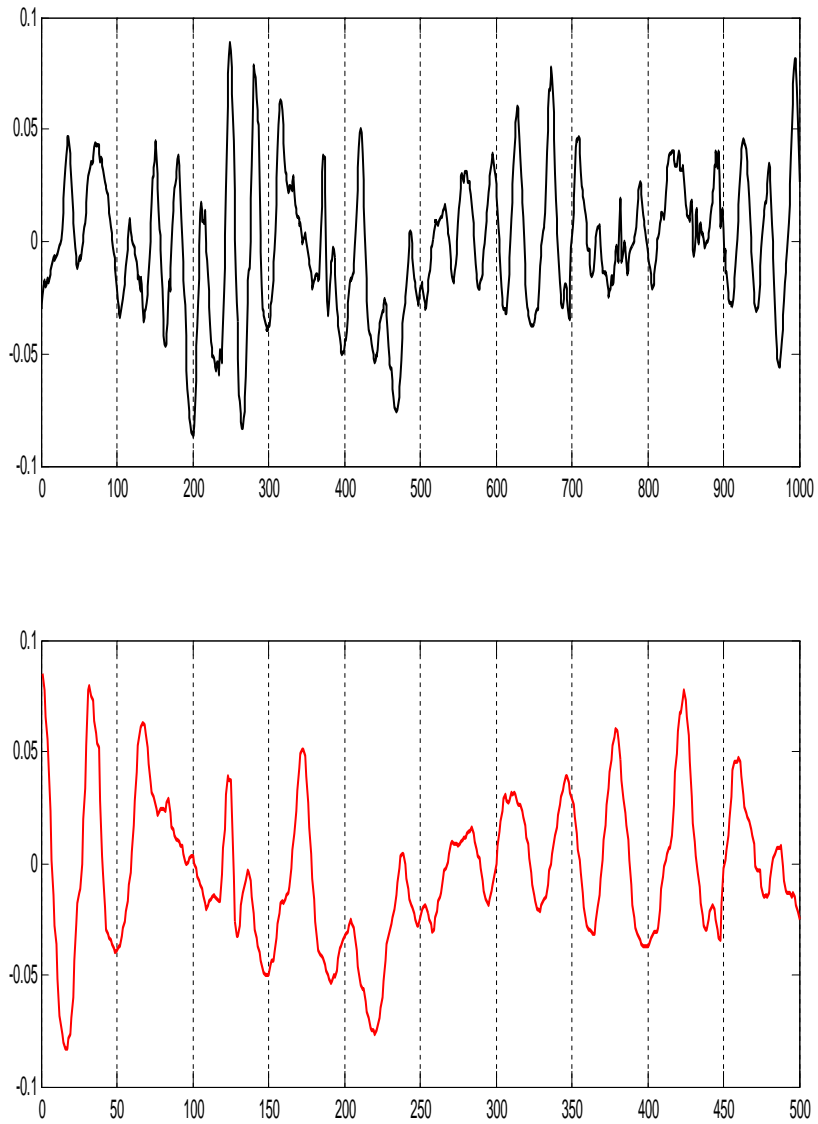


Figura 25. Electroencefalograma de 1000 y 500 puntos respectivamente

3.3.2. Downsampling

Rutina que elimina todos los coeficientes de índice impar pertenecientes al EEG. Disminuyendo la longitud del EEG a la mitad o a la mitad menos $1/2$, dependiendo si la longitud original es par o impar. La figura 26 muestra un EEG con 1000 puntos y después el EEG con 500 puntos sin los datos impares.

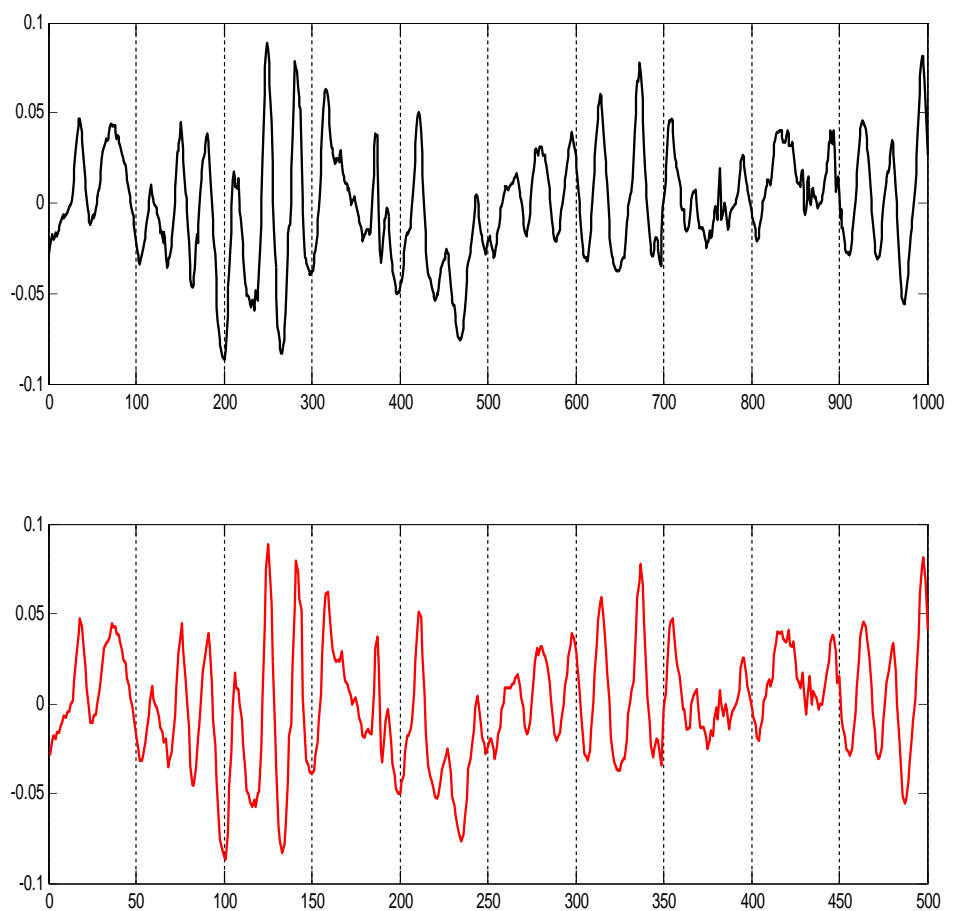


Figura 26. EEG de 1000 y 500 puntos respectivamente sin datos impares

3.3.3. Upsampling

Rutina que inserta ceros entre los coeficientes del EEG, aumentando la longitud del EEG al doble mas uno. La figura 27 muestra un EEG con 1000 puntos y después el EEG con 1000 puntos mas de ceros.

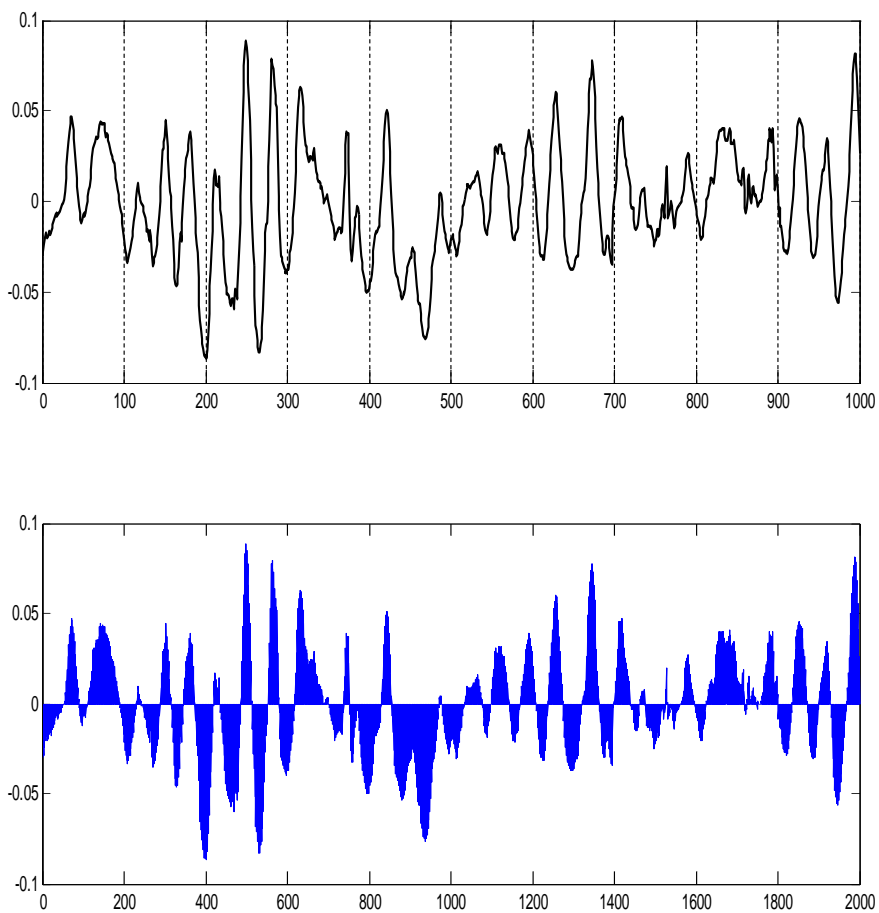


Figura 27. EEG con 1000 puntos y 1000 puntos mas de ceros

3.3.4. Spline B

Rutina que construye los Splines B desde el orden cero hasta el orden siete. Discretizando el Spline cubico se obtiene la función escalada o filtro FIR b^{-1} . Discretizando el Spline B de orden siete se obtiene el filtro FIR a . La figura 28 muestra los splines desde al grado cero hasta el grado siete. De estos splines en el algoritmo de detección se usan como filtros FIR los splines de grado tres y de grado siete.

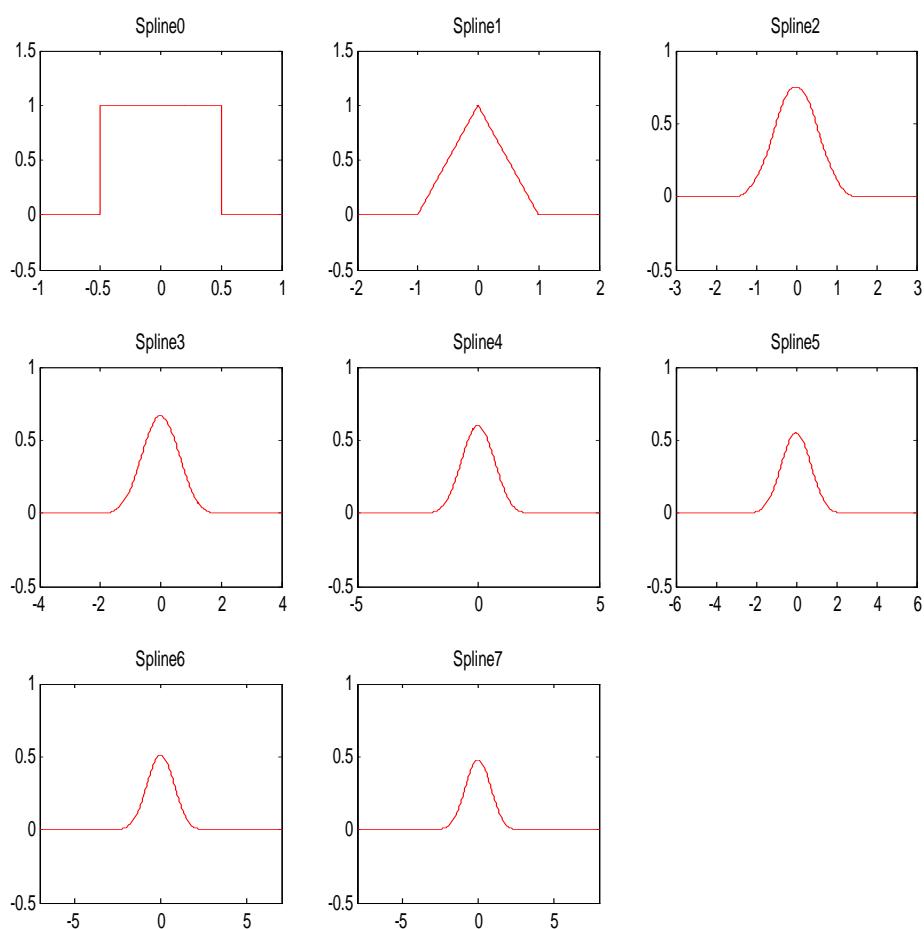


Figura 28. Splines del grado cero al grado siete

3.3.5. Función escalada corrida

Rutina que toma la función escalada en el nivel de resolución cero y la corre K unidades. Para los otros niveles de resolución se cambia la escala diádica en el código. La figura 29 muestra la función escalada, la función escalada corrida tres unidades a la derecha y tres unidades a la izquierda.

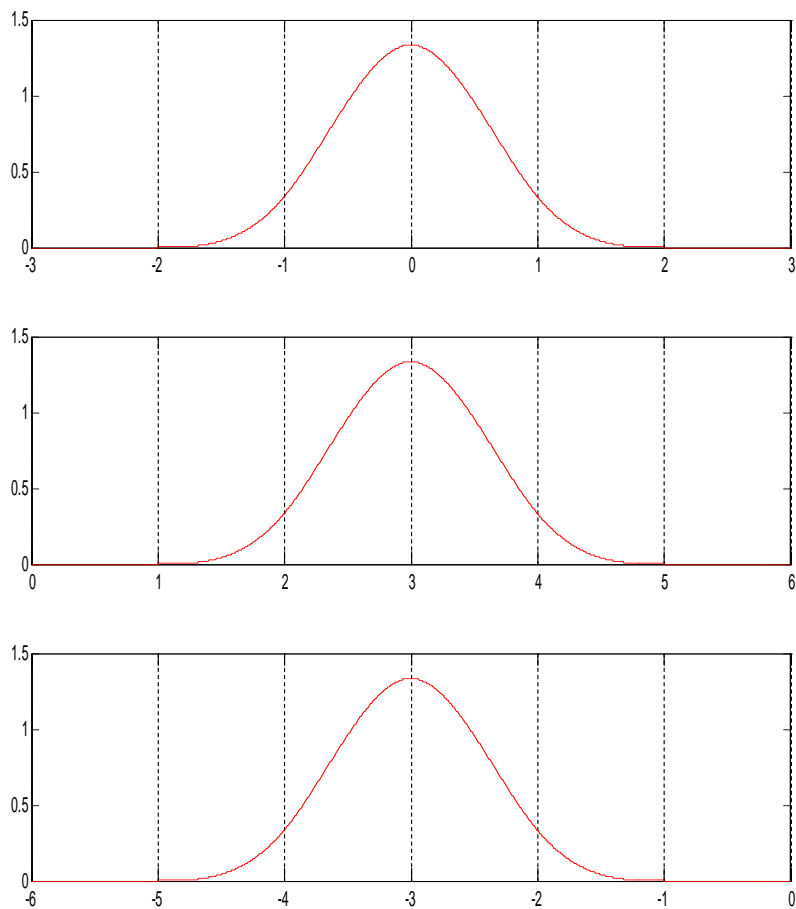


Figura 29. Función escalada y escalada corrida a la derecha y a la izquierda

3.3.6. Función wavelet

Rutina que construye la función wavelet. La figura 30 muestra la Función Wavelet usada como filtro FIR paso altas para la construcción de los coeficientes de detalles del algoritmo.

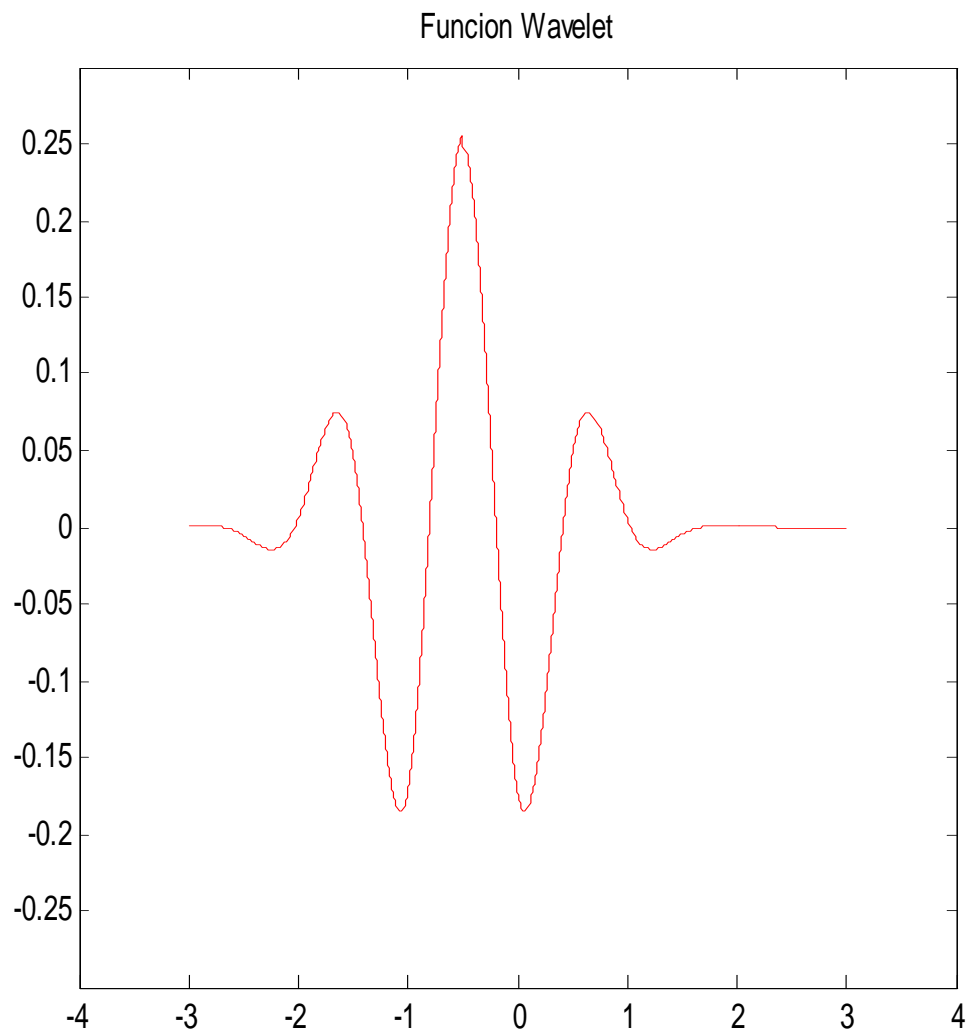


Figura 30. Función Wavelet

3.3.7. Función wavelet corrida

Rutina que construye la función wavelet y la corre K unidades en el nivel de resolución cero. Para la rutina en los otros niveles de resolución se procede de manera análoga. La figura 31 muestra la función wavelet, la función wavelet corrida tres unidades a la derecha y tres unidades a la izquierda.

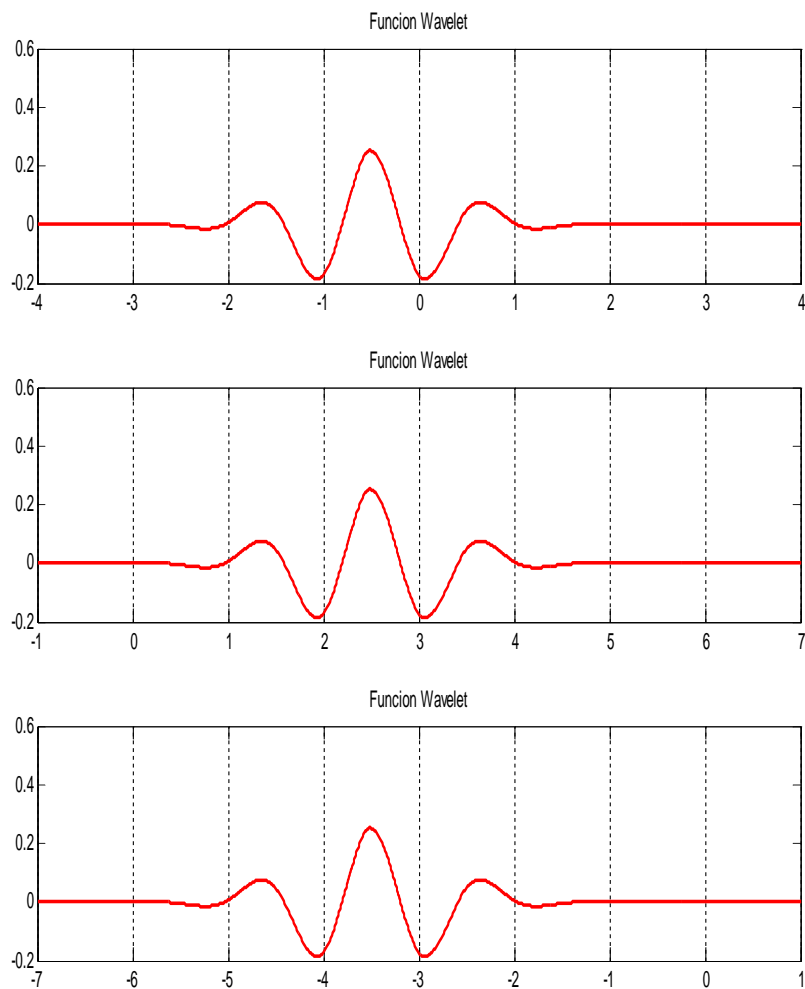


Figura 31. Función Wavelet y Wavelet corrida a la derecha y a la izquierda

3.3.8. Coeficientes de detalles

Rutina que determina los coeficientes de detalles de la señal electroencefalográfica EEG. Desde el primer nivel de resolución hasta el nivel ocho de resolución. La figura 32 muestra los coeficientes de detalles de un EEG, desde el nivel de resolución uno hasta el nivel de resolución ocho.

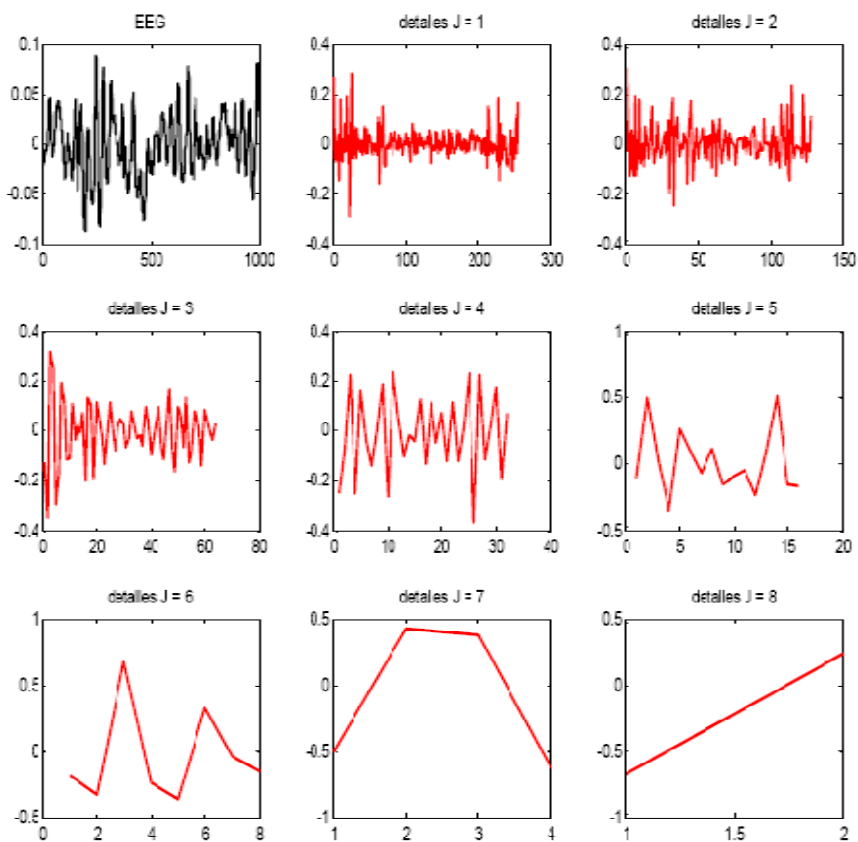


Figura 32. Coeficientes de Detalles

3.3.9. Función escalada dual

Rutina que calcula la función escalada dual. La figura 33 muestra la función escalada dual.

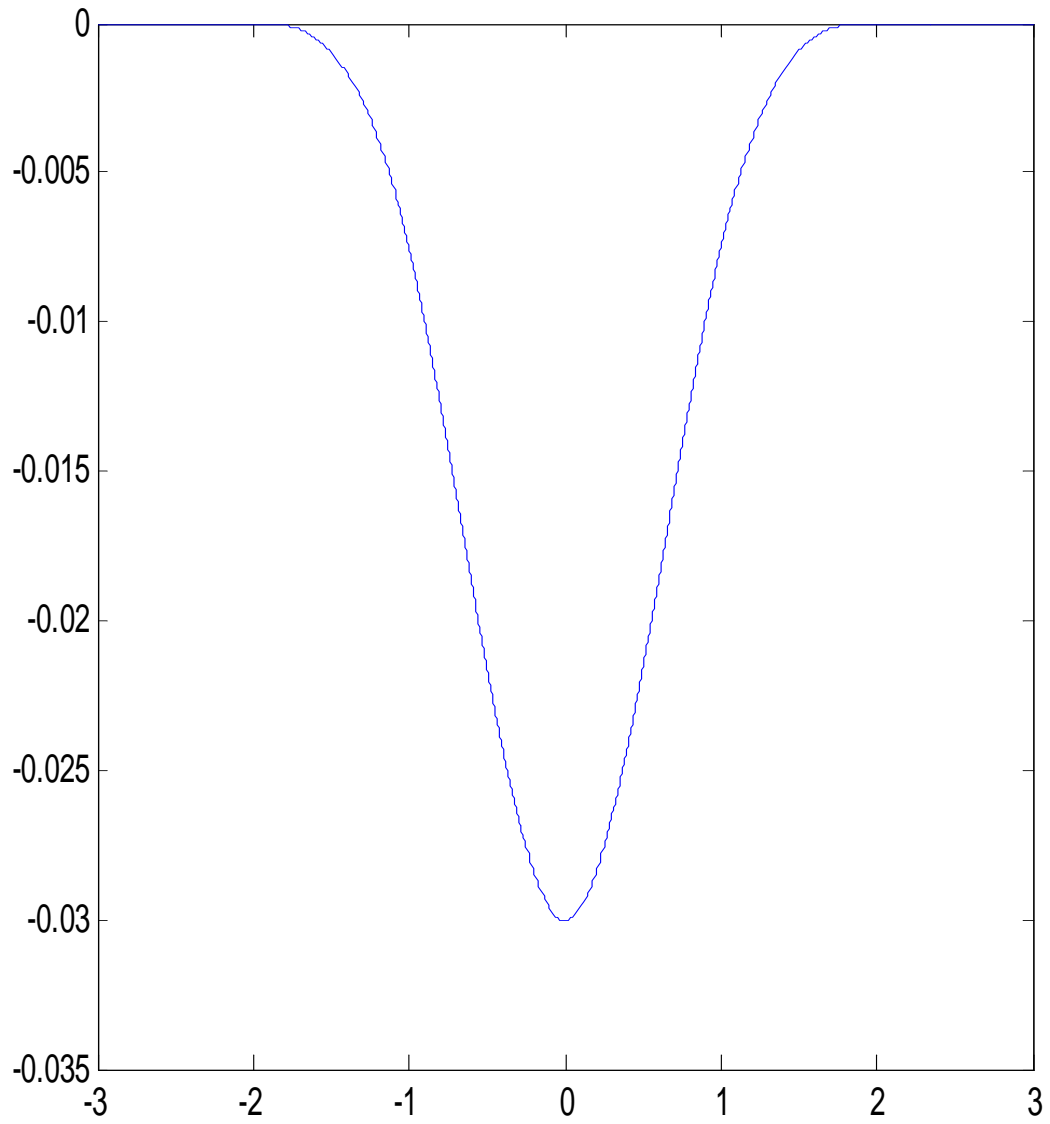


Figura 33. Función Escalada Dual

3.3.10. Función wavelet dual

Rutina que muestra la función wavelet dual. La figura 34 muestra la función wavelet dual.

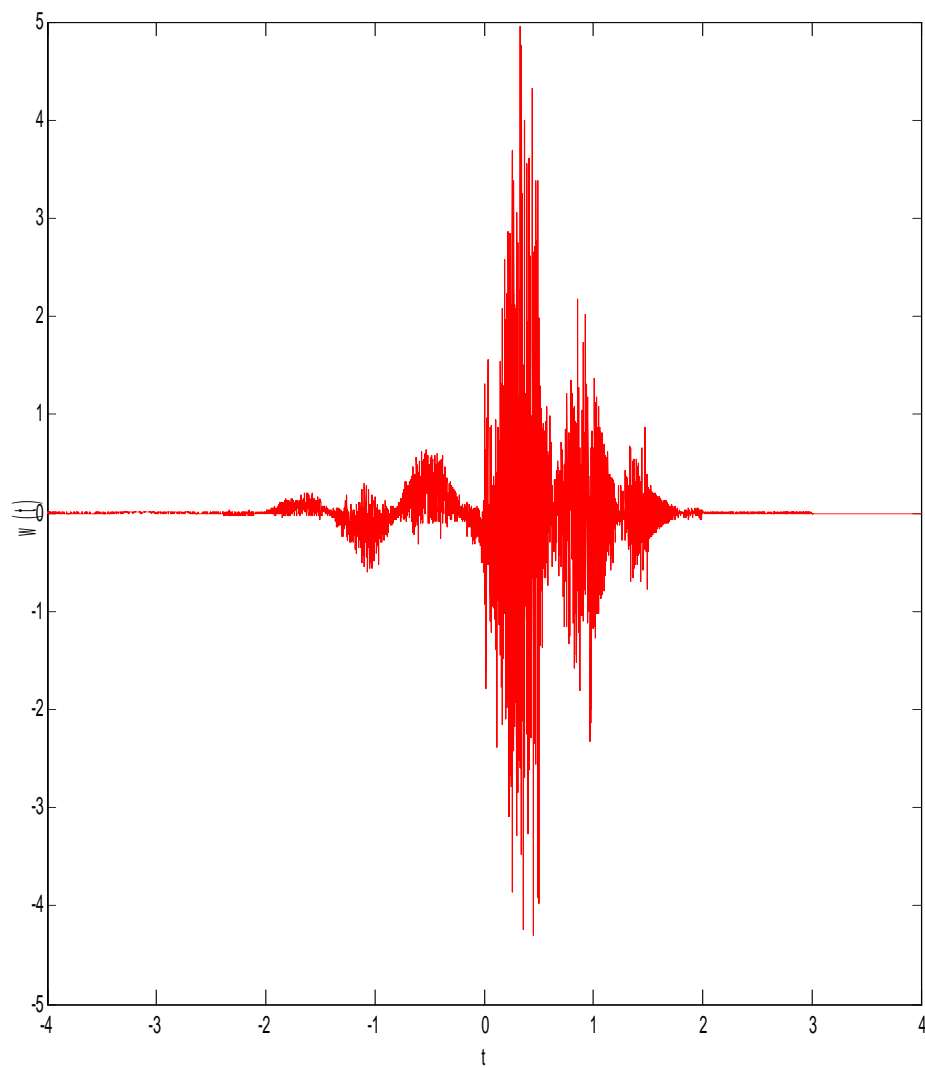


Figura 34. Función wavelet dual

3.3.11. Coeficientes de detalles duales

Rutina que determina los coeficientes de detalles duales de la señal electroencefalográfica EEG, desde el primer nivel de resolución hasta el nivel ocho de resolución. En la figura 35 aparecen los coeficientes de detalles duales de un EEG desde el nivel de resolución uno hasta el nivel de resolución ocho.

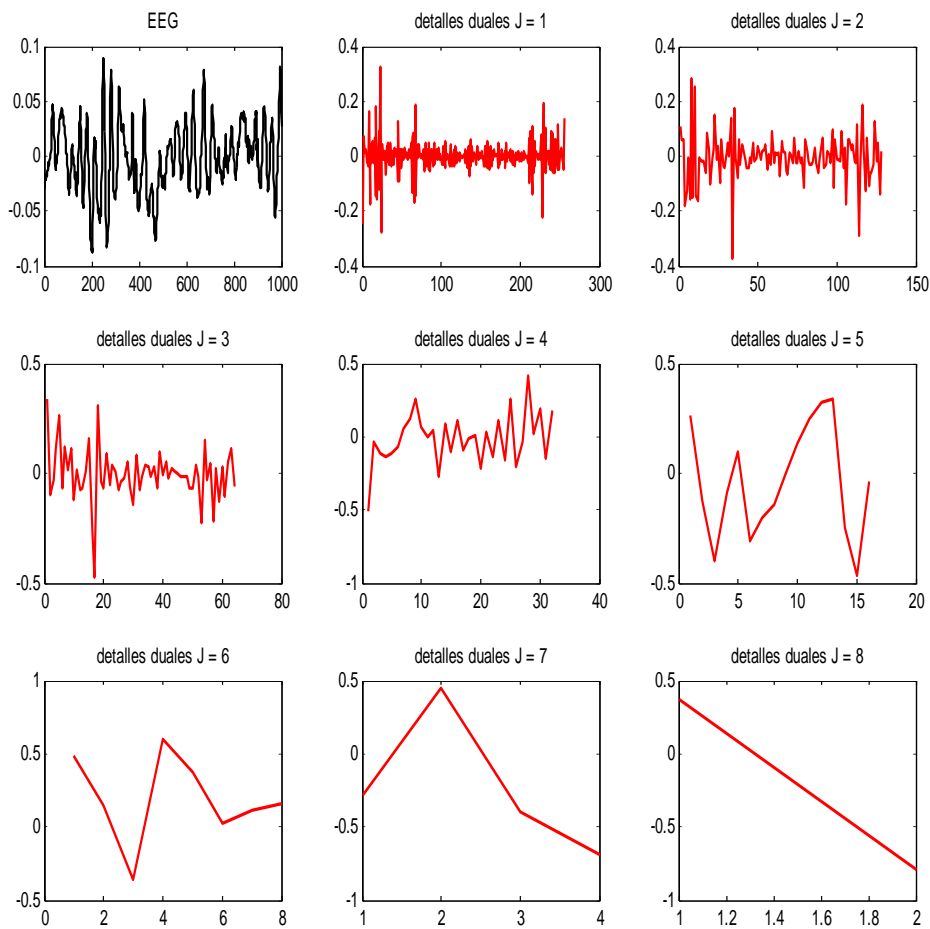


Figura 35. Coeficientes de detalles duales desde los niveles uno al ocho

3.3.12. Gráficas de detalles

Rutina que muestra la señal electroencefalográfica, la gráfica de los coeficientes de detalles y la gráfica de los coeficientes de detalles duales. La figura 36 muestra un EEG y la gráfica de los coeficientes de detalles y de detalles duales.

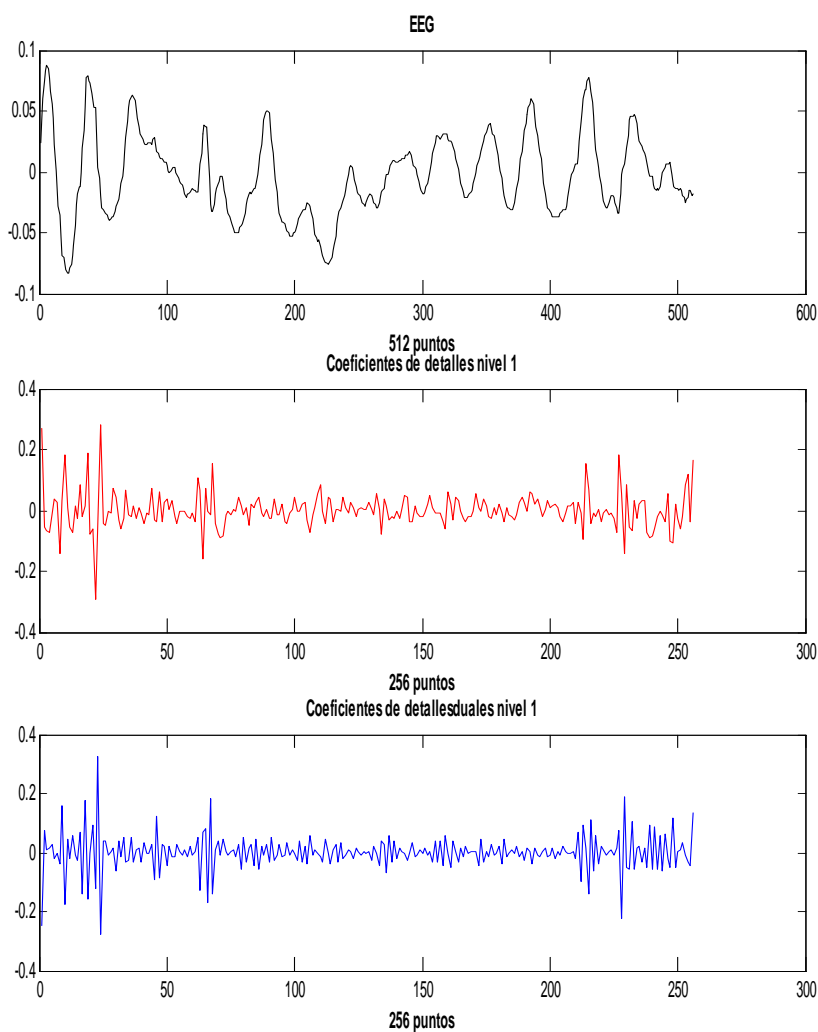


Figura 36. EEG y gráficas de coeficientes de detalles y detalles duales

3.3.13. Función de energía

Rutina que construye la función de energía para cada nivel de resolución en que se ha descompuesto el EEG. Distribuye los átomos de energía en cada nivel multiplicando primero los respectivos coeficientes de detalles y de detalles duales, después suma dichos productos. La figura 37 ilustra el EEG y la distribución de energía en el segundo nivel.

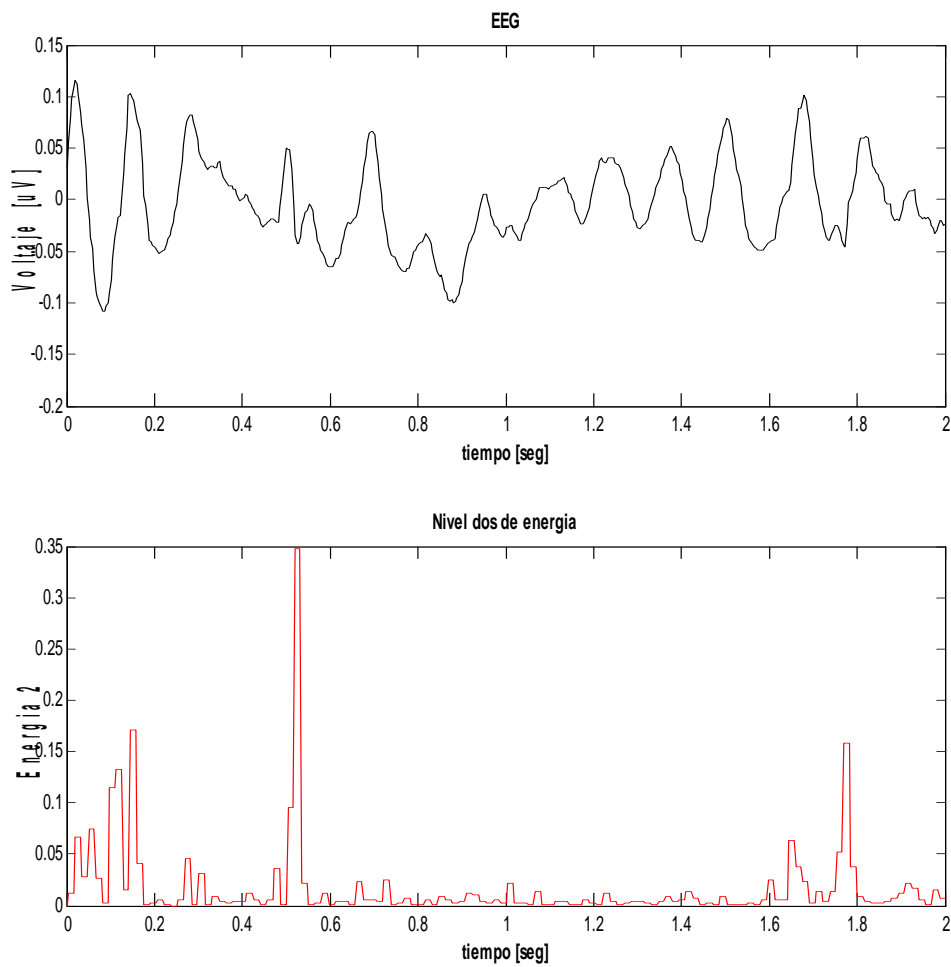


Figura 37. EEG y la distribución de energía en el segundo nivel

3.3.14. Distribución de energía

Rutina que indica la cantidad de energía en cada nivel de resolución. En el próximo capítulo se presentarán las gráficas.

3.3.15. Umbrales (thresholds)

Los valores de los umbrales en cada nivel de resolución se escogieron a partir de un tratamiento estadístico de la serie EEG. Con la autorización de la Universidad de Freiburg en Alemania se tomaron de su base de datos 40 EEG. Esta base de datos se describió en la sección 3.1.1. Se tomaron 10 muestras de la base de datos de la Universidad de California Irvine. Esta base esta disponible en la Internet y no requiere de permiso porque se montó para fomentar la investigación. Las cartas se elaboraron con un total de 50 muestras. El procedimiento fue el siguiente:

- 1) Para cada EEG se tomaban los datos arrojados por la función de energía en cada nivel de resolución.
- 2) Por cada EEG se originaban ocho conjunto de vectores o datos.
- 3) Se agrupaban según el nivel de resolución en EXCEL.
- 4) Para cada EEG en cada uno de los niveles de resolución se elaboraron las respectivas cartas de control. Esto se hizo usando el paquete STATGRAPHICS Plus 5.1.
- 5) Por último se promedian todos los LCU (Límite Central Superior) obtenidos de todas las cartas y este es el respectivo umbral. La figura 38 ilustra una de las tablas de control en el nivel uno para una de las muestras de EEG.

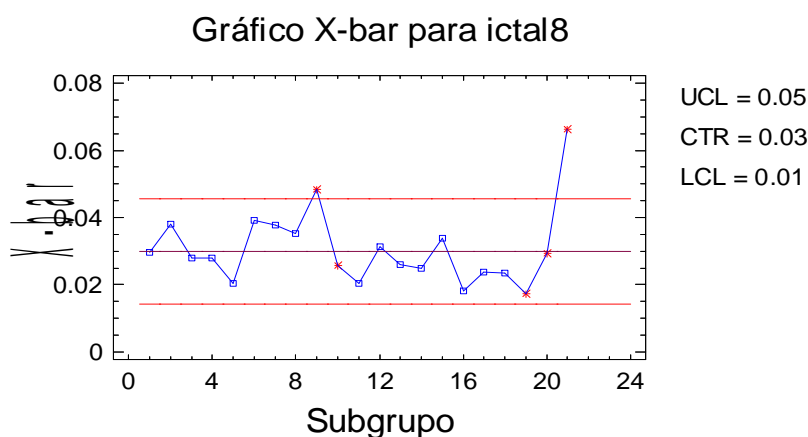


Figura 38. Tabla de control en el nivel uno

3.3.16. Algoritmo de detección usando una wavelet spline biortogonal

Rutina que analiza dos segundos de un EEG a razón de 256 Hz. Lo descompone en ocho niveles de resolución usando una wavelet spline biortogonal. Para cada nivel de resolución determina los coeficientes de detalles y los coeficientes de detalles duales. Multiplica los respectivos coeficientes de detalles y de detalles duales y luego los suma. En cada nivel se construyen unos umbrales a partir de procedimientos estadísticos, mediante las cartas de control. Por último determina las puntas (evento característico de epilepsia) en un EEG. Con una confiabilidad alta en algunos niveles de resolución para un paciente que sufre de Epilepsia. Recordemos que estas puntas solo pueden ser leídas por un experto o por el epileptólogo para un diagnóstico clínico. El detector trata de evitar esto, mostrando las puntas contenidas en esa muestra de EEG. En el próximo capítulo se presentarán las gráficas.

3.3.17. Algoritmo de detección usando una wavelet Daubechies4 ortogonal

Rutina que analiza dos segundos de un EEG a razón de 256 Hz. Lo descompone en ocho niveles de resolución usando una wavelet Daubechies4 ortogonal. Para cada nivel de resolución determina los coeficientes de detalles y los coeficientes de detalles duales. Multiplica los respectivos coeficientes de detalles y de detalles duales y luego los suma. En cada nivel se construyen unos umbrales a partir de procedimientos estadísticos, mediante las cartas de control. Por último determina las puntas (evento característico de epilepsia) en un EEG. Con una confiabilidad alta en algunos niveles de resolución para un paciente que sufre de Epilepsia. Recordemos que estas puntas solo pueden ser leídas por un experto o por el epileptólogo para un diagnóstico clínico. El detector trata de evitar esto.

La figura 39 ilustra la Daubechies 4.

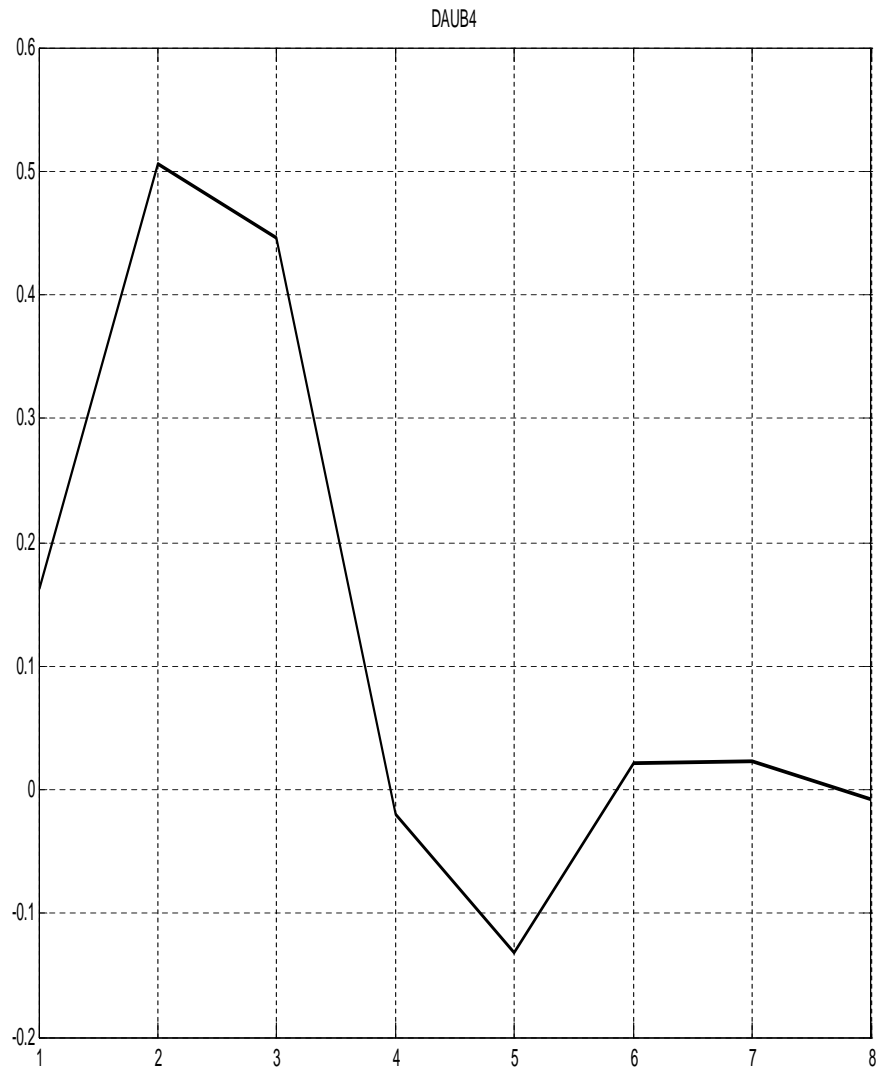


Figura 39. Daubechies4

CAPÍTULO 4

Resultados y comparaciones

Introducción

En esta sección se ilustra la forma como se distribuyen los átomos de energía de manera uniforme en los coeficientes en cada nivel de resolución. Se aprecia la relación entre las frecuencias altas y bajas con la energía distribuida en algunos niveles de resolución. Se analizan los resultados obtenidos con el método propuesto para la detección de puntas (evento epiléptico) usando splines biortogonales. Se usa una de las wavelets Daubechies, el miembro más simple y más localizado del juego de Daubechies, a menudo llamado Daub4. Esta es una wavelet que por ser ortogonal su dual es la misma wavelet. La wavelet Daubechies nos sirve como referente para comparar el algoritmo de detección usando los mismos umbrales y justificar como a pesar del hecho que diferentes wavelets podrían ser usadas en el algoritmo de detección propuesto en este trabajo, las splines cúbicas biortogonales presentan un número de propiedades atractivas como la detección de puntas (eventos epilépticos).

4.1. Distribución de energía

En las figuras 40, 41, 42 y 43 se ilustra la relación entre las frecuencias altas y bajas con la energía distribuida en algunos niveles de resolución. Estas

76 Resultados y comparaciones

frecuencias que corresponden con las puntas, hacen juego en algunos niveles respectivamente.

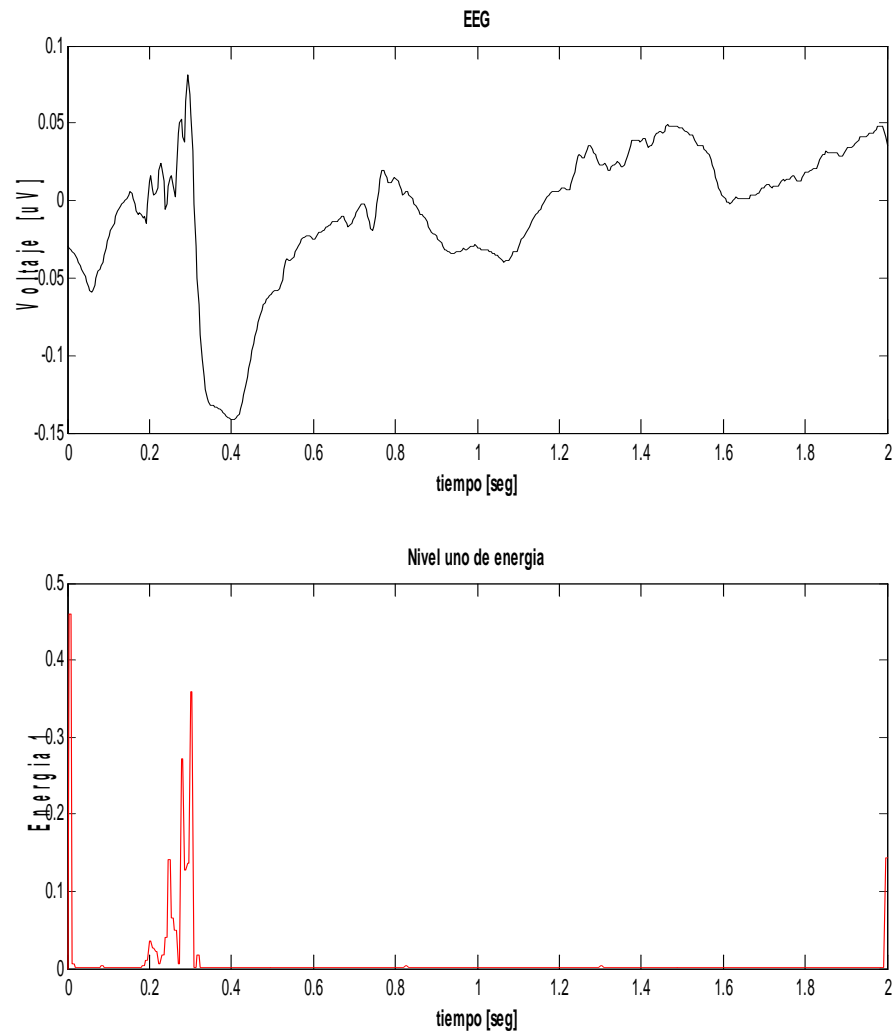


Figura 40. EEG y su distribución de energía en el nivel 1

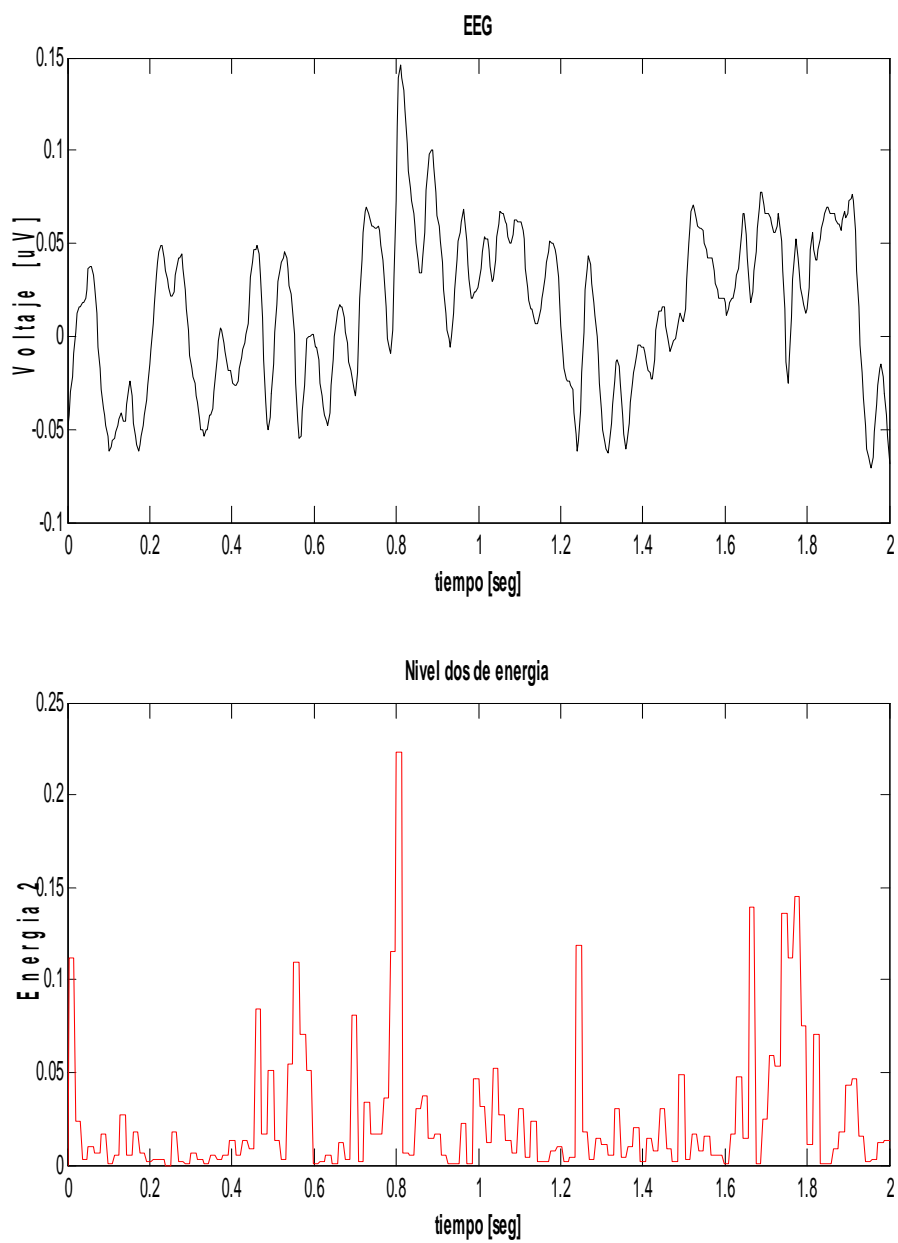


Figura 41. EEG y su distribución de energía en el nivel 2

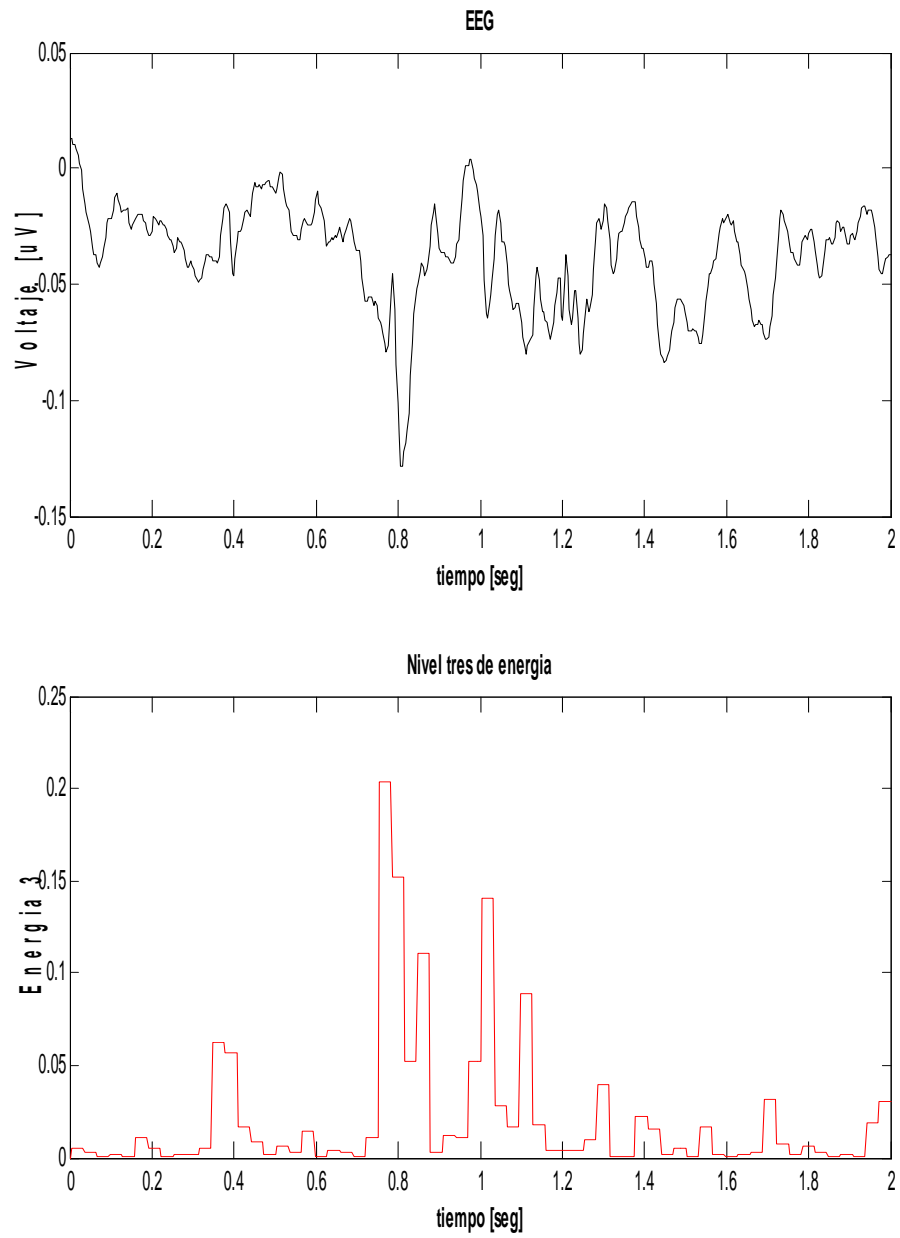


Figura 42. EEG y su distribución de energía en el nivel 3

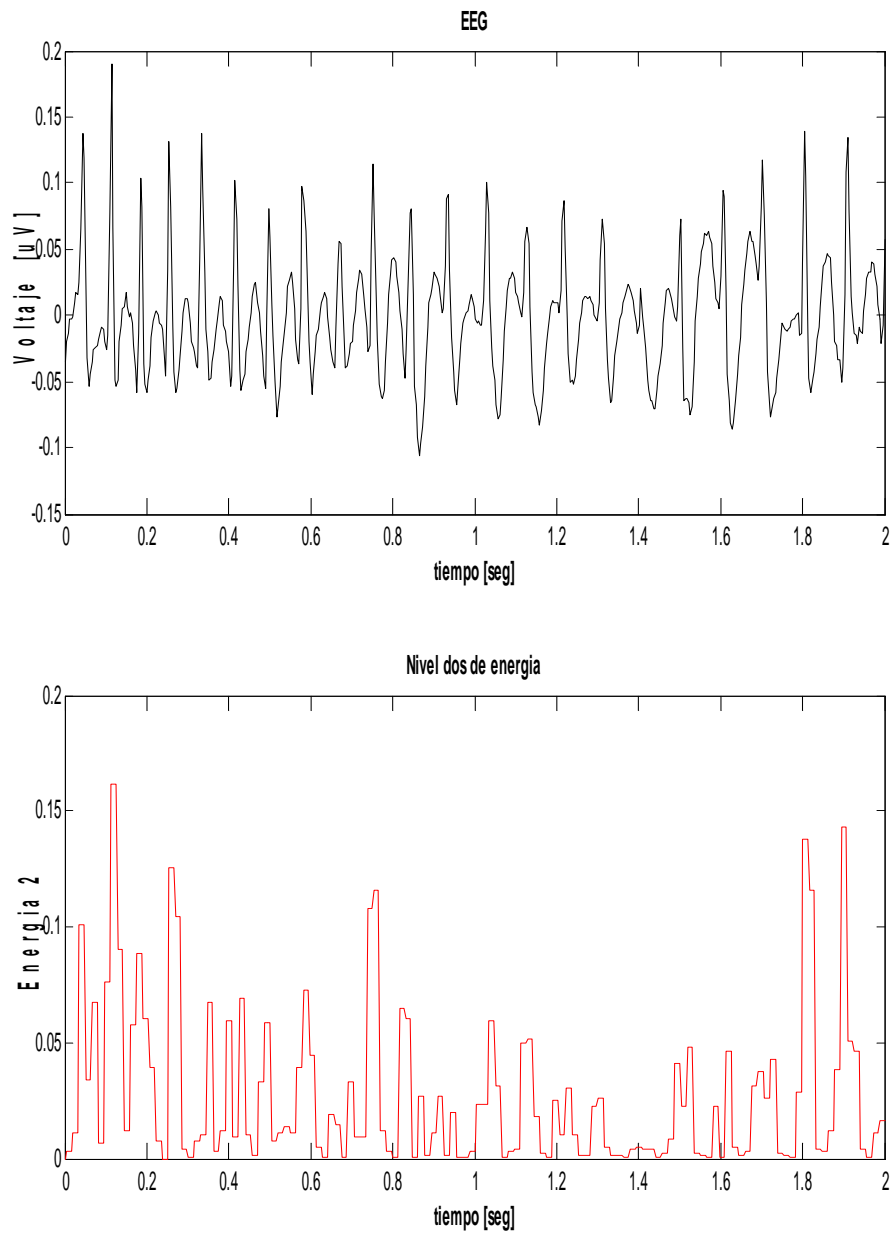


Figura 43. EEG y su distribución de energía en el nivel 2

4.2. Resultados del detector con spline bior-togonal

En las figuras 44, 45, 46, 47 y 48 se ilustra los resultados obtenidos con el método propuesto usando una wavelet spline cúbica biortogonal.

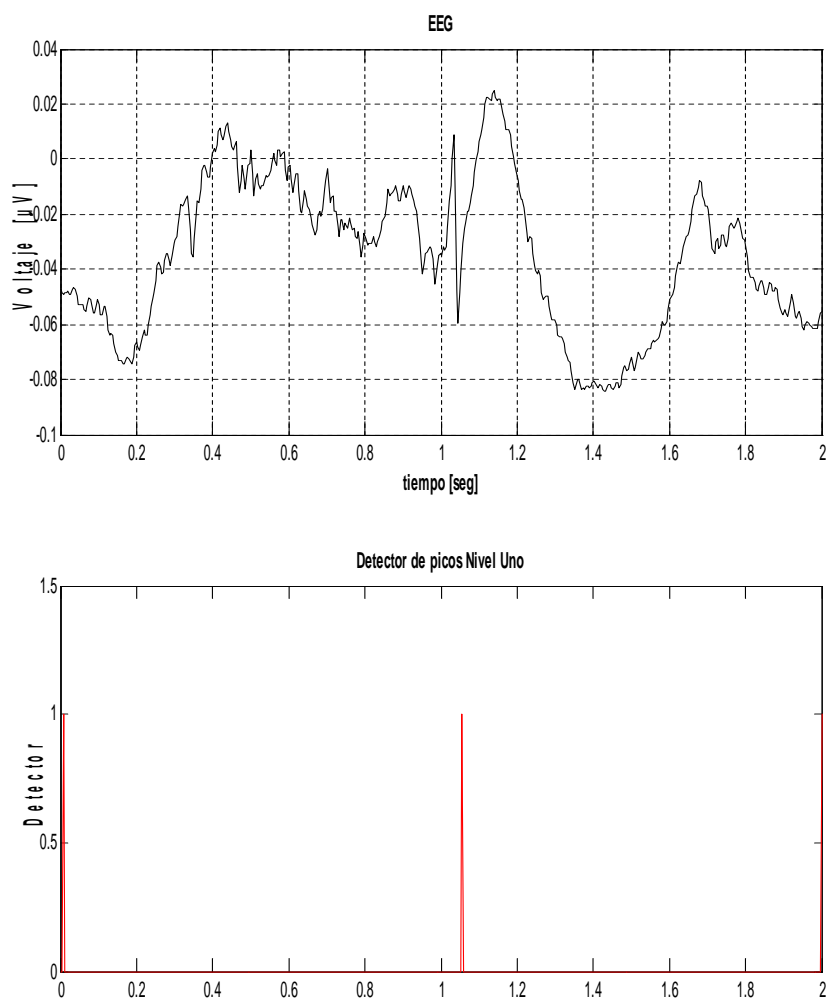


Figura 44. EEG y su detector de puntas en el nivel 1

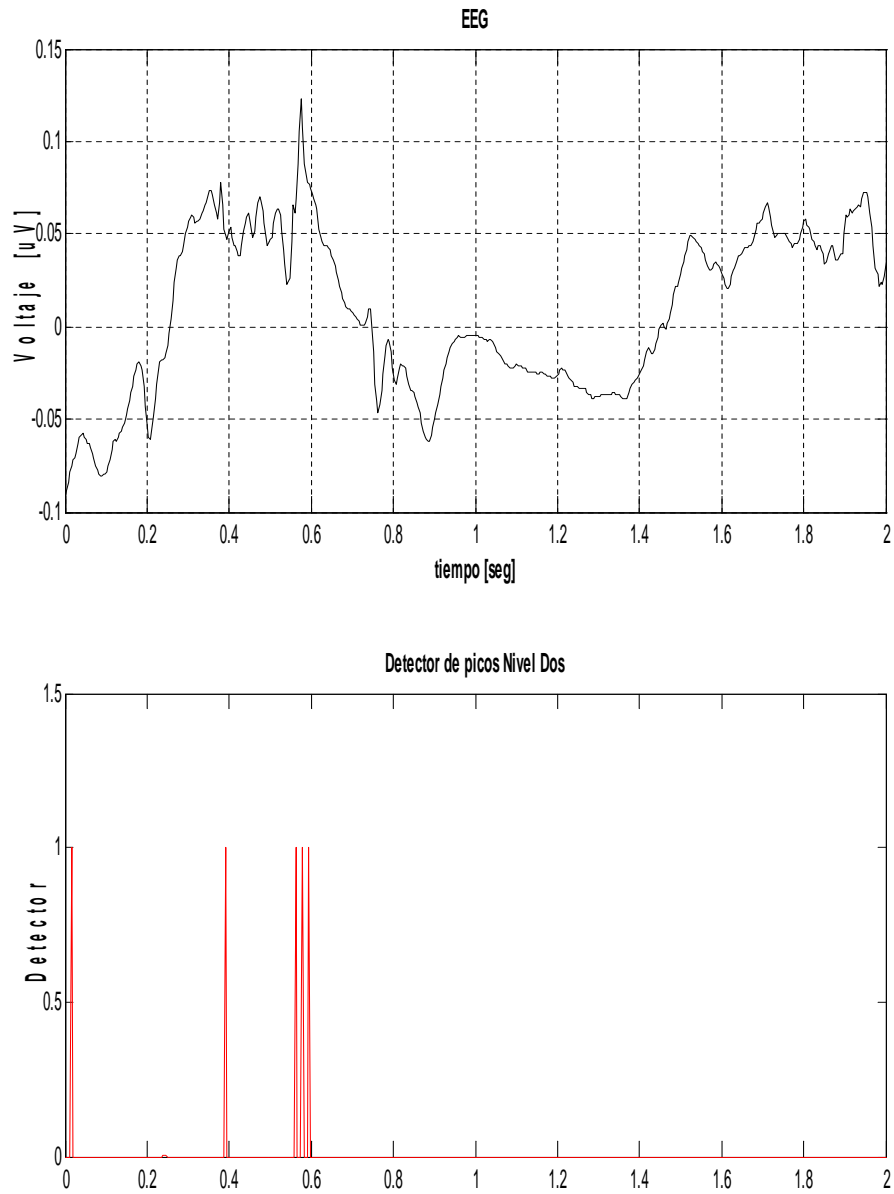


Figura 45. EEG y su detector de puntas en el nivel 2

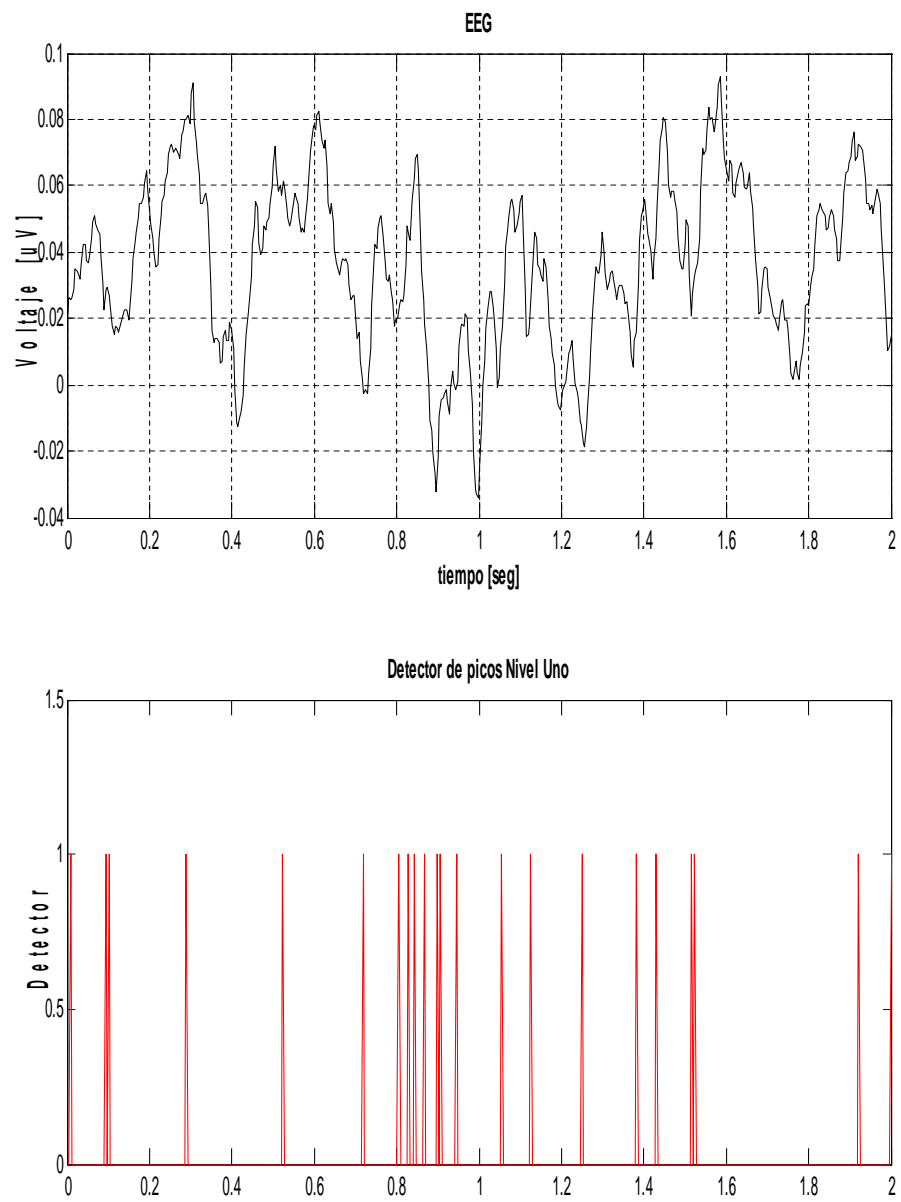


Figura 46. EEG y su detector de puntas en el nivel 1

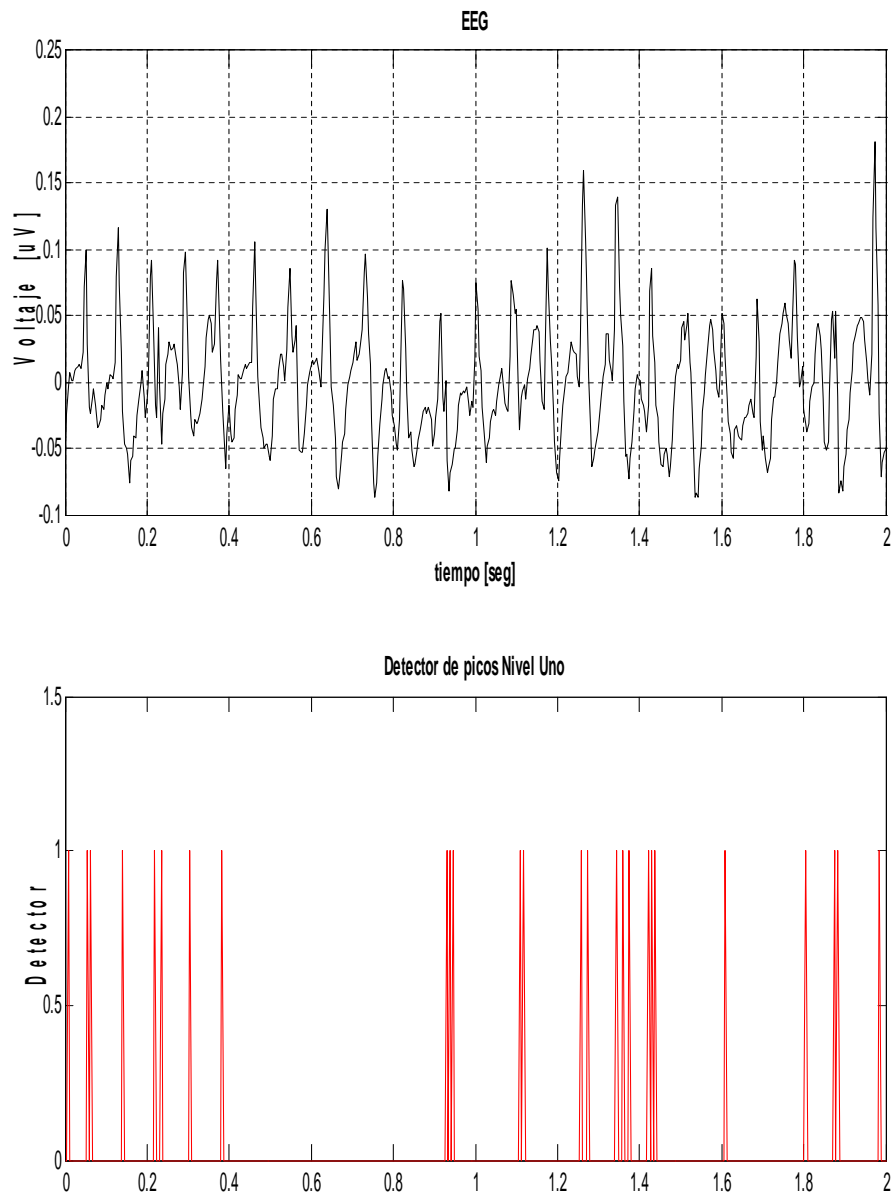


Figura 47. EEG y su detector de puntas en el nivel 2

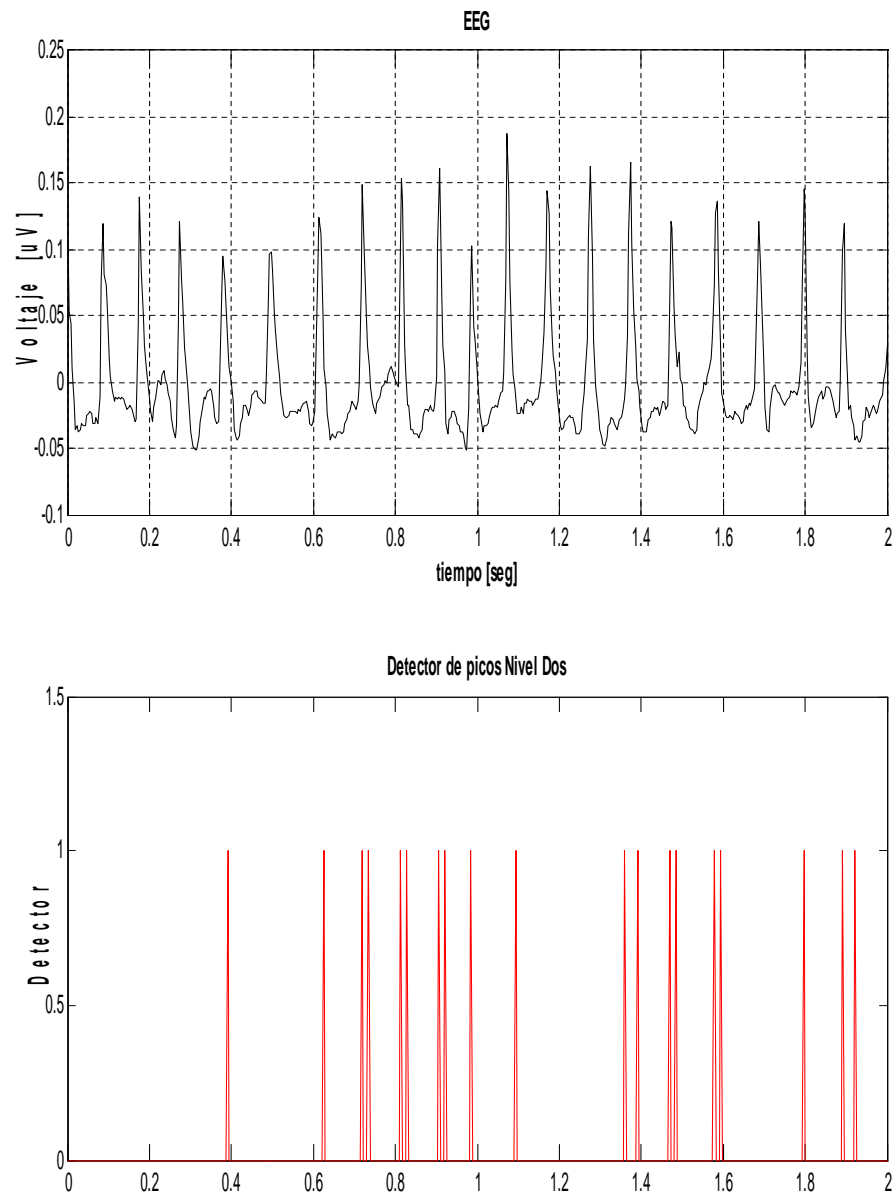


Figura 48. EEG y su detector de puntas en el nivel 2

4.3. Resultados del detector con Daubechies4

En las figuras 49, 50, 51, 52 y 53 se ilustra los resultados obtenidos con el método propuesto usando una wavelet Daubechies; la Wavelet Daub4 Ortogonal. Los EEG que aparecen son los mismos que se usaron en las figuras 42, 43, 44 y 45.

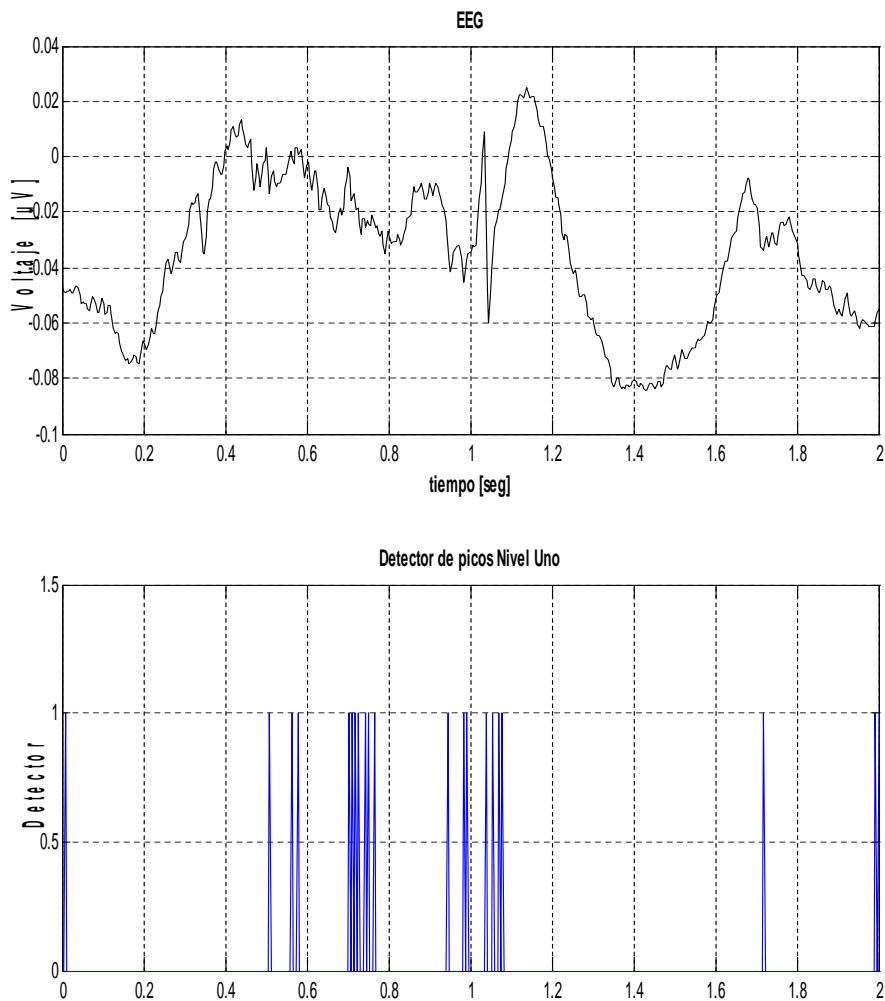


Figura 49. EEG y su detector de puntas en el nivel 1

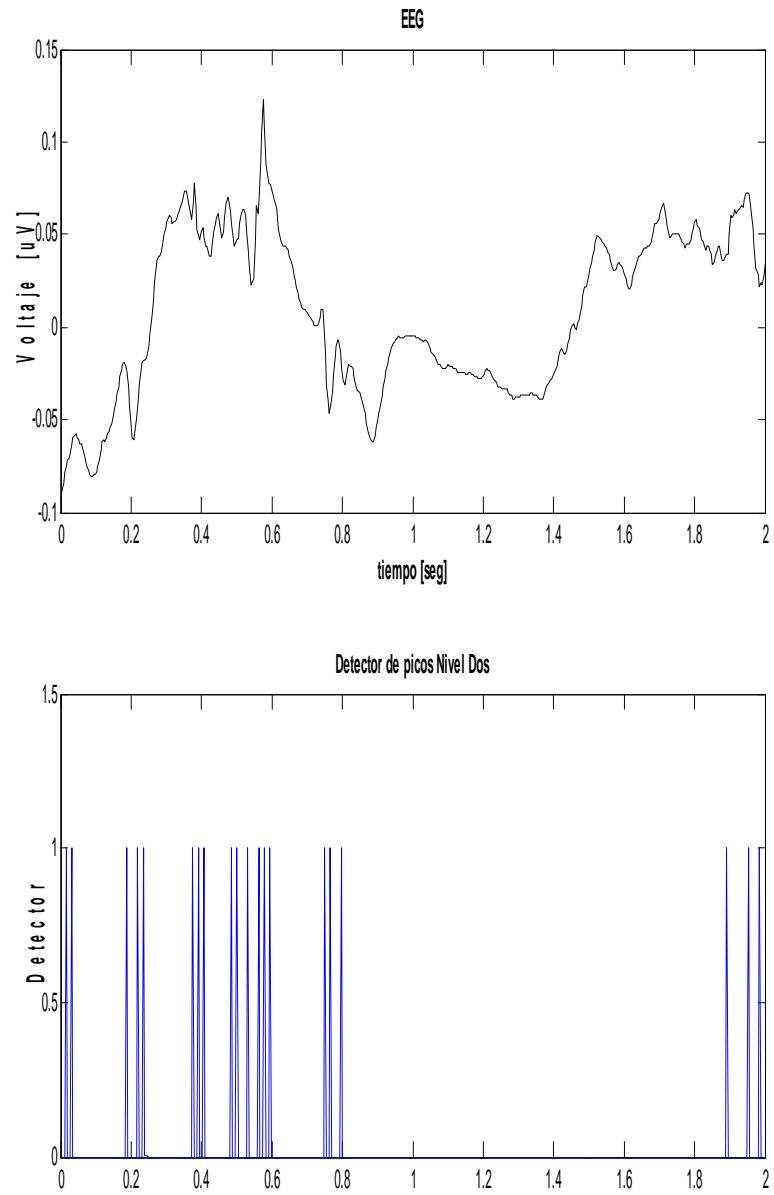


Figura 50. EEG y su detector de puntas en el nivel 2

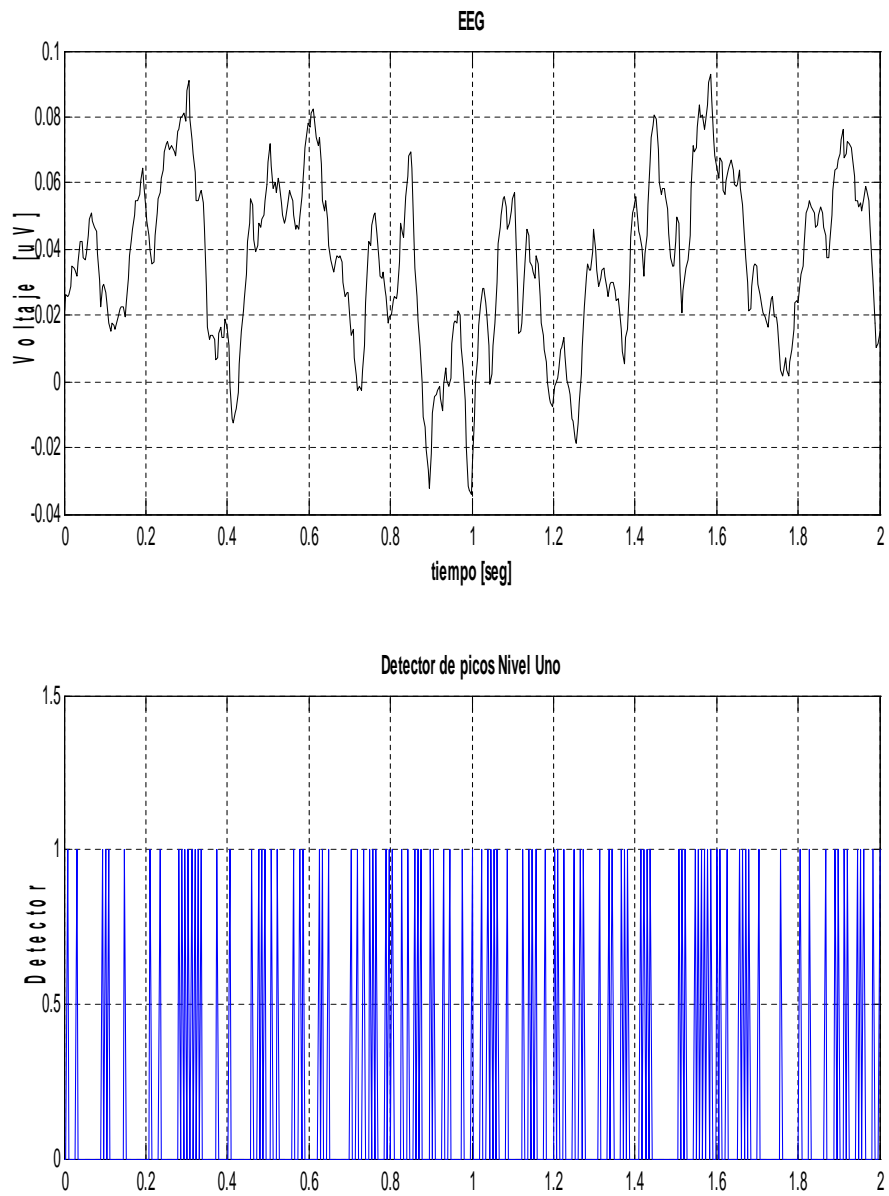


Figura 51. EEG y su detector de puntas en el nivel 1

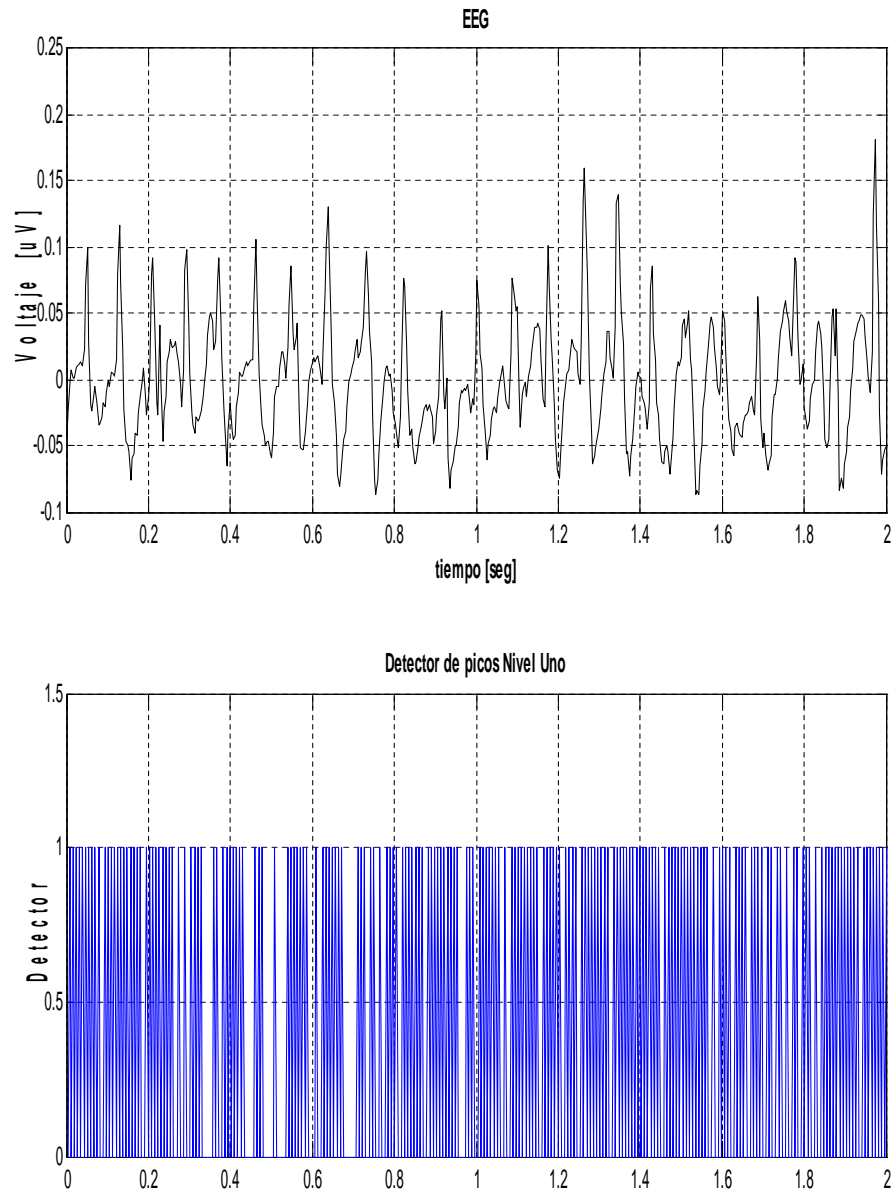


Figura 52. EEG y su detector de puntas en el nivel 1

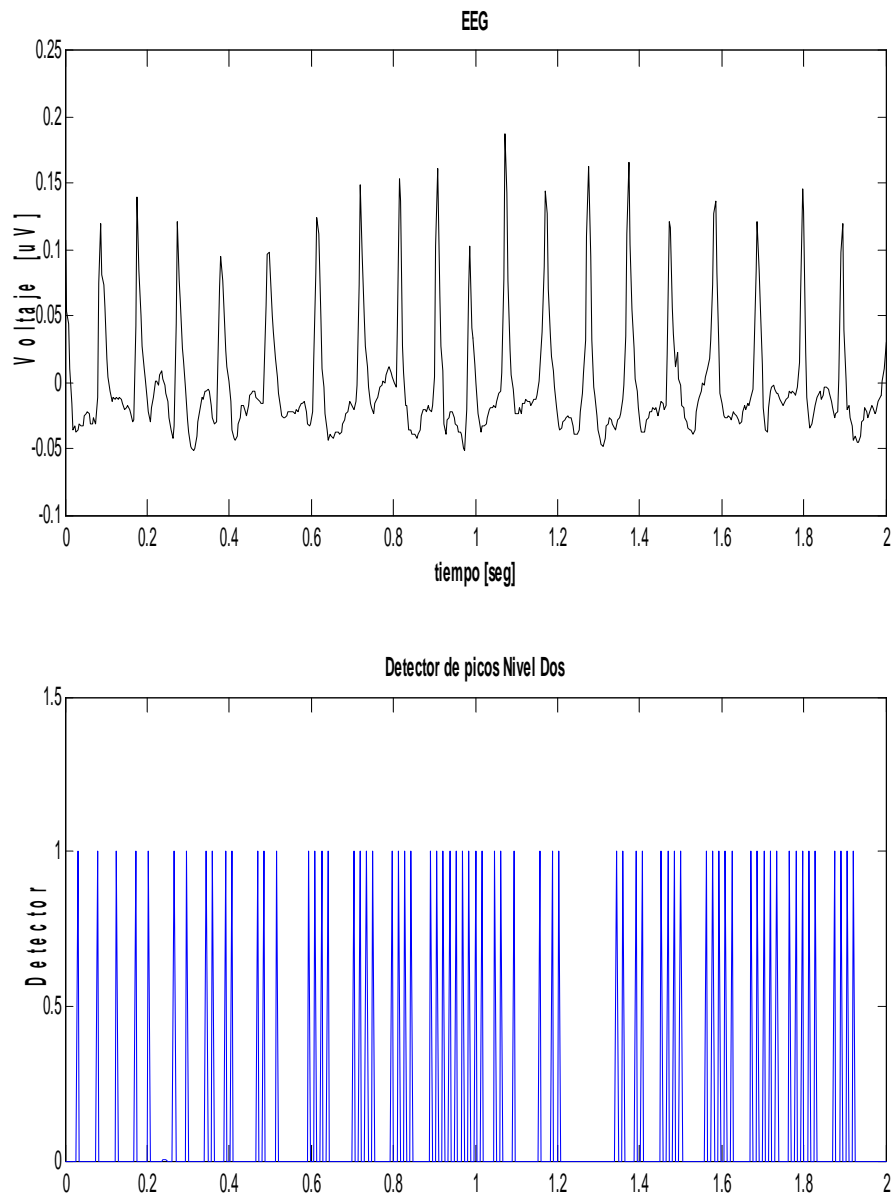


Figura 53. EEG y su detector de puntas en el nivel 2

4.4. Conclusión

En este trabajo vemos como a partir de la función de energía construida en un marco multiresolución wavelet, se pueden localizar en el tiempo fenómenos contenidos en la señal no estacionaria EEG. Observamos como diferentes eventos epileptogénicos que tienen localizaciones de frecuencias diferentes corresponden a niveles diferentes de resolución. La detección de puntas (eventos epilépticos) en este trabajo se presenta en un alto porcentaje en los tres primeros niveles de resolución. Se usó una de las wavelets Daubechies, el miembro más simple y más localizado del juego de Daubechies, a menudo llamada DAUB4. Siendo ésta una wavelet ortogonal, su dual es la misma. Como se muestra en las comparaciones, el algoritmo de detección que usa una DAUB4, tratando de descubrir las puntas y usando los mismos umbrales del algoritmo de detección con wavelets biortogonales proporciona un número grande de eventos positivos falsos. Esta comparación muestra que a pesar del hecho de que wavelets diferentes podrían ser usados en nuestro algoritmo, los polinomios spline tiene un número de propiedades que los hacen atractivos en el presente trabajo. Hay que tener en cuenta que a las señales electroencefalográficas se le suman muchas veces ruidos que se llaman artefactos y que suelen ser señales de altas frecuencias o bien señales patológicas. Un posible artefacto es la contracción de la musculatura de los temporales y frontales, que generan puntas de alta frecuencia y voltaje bajo a intermedio, otros artefactos son la masticación, el parpadeo, el movimiento de golpe de la cabeza contra la camilla, el rascado del cuero cabelludo e incluso la señal de un celular; y todas pueden generar puntas, ondas agudas o puntas onda lenta. Las señales electroencefalográficas tratadas en este trabajo no contienen artefactos como se especificó en la descripción de las respectivas bases de datos de la Universidad de Freiburg y de la Universidad de California. Sin embargo se debe tener en cuenta estas variables para la obtención, el procesamiento y el análisis de la señal, utilizando el algoritmo propuesto en este trabajo; ya que de lo contrario es probable que el algoritmo no funcione tan eficientemente.

4.5. Perspectivas futuras de aplicación en la práctica médica

El problema a resolver en este trabajo de maestría tiene gran relevancia desde el punto de vista diagnóstico para aplicación en el área de la neurofisiología y epilepsia, ya que continuamente en la práctica diaria, el especialista intenta detectar visualmente las anomalías presentes en un registro electroencefalográfico, el cual puede tener una duración de 40 minutos hasta 120 horas; esto genera un riesgo de no detectar algunas anomalías ocasionales por el agotamiento y la gran inversión en tiempo que necesita el especialista para leer completamente información de más de dos horas. La adecuación de un algoritmo que aproveche las ventajas de localización tiempo-frecuencia de las diferentes anomalías que se buscan, ahorraría en un gran porcentaje el tiempo de lectura, ya que solo arrojaría los sitios donde probablemente se encuentre la anomalía (de ahí que sea muy importante un método con gran sensibilidad diagnóstica, sacrificando por lo tanto su especialidad). Mirando las perspectivas futuras de aplicación en la práctica médica tenemos por ejemplo, el disminuir el tiempo de lectura de registros prolongados, la detección en tiempo real de puntas epilépticas y fenómenos ictales con una alarma asociada, pues muchas veces en un estudio se presentan convulsiones subclínicas, es decir, sin ningún síntoma que avise al personal de salud, cuantificación de estudios de electroencefalografía para un seguimiento a la terapia o deterioro de su condición, entre otros. Siguiendo este trabajo de tesis se puede continuar explorando más utilidades en análisis de registros electroencefalográficos de pacientes con epilepsia, idealmente utilizando registros y bases de nuestra población, proponiendo a instituciones de salud que cuentan con estos recursos, trabajos de investigación con este algoritmo y sus derivados.

Bibliografía

- [1] Aldroubi, A. The wavelet transform: A surfing guide, pp 3-36 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, New York 1996.
- [2] Ambardar, Ashok. *Procesamiento de Señales Analógicas y Digitales*, 2ª edición, edit Thompson, Mexico, 2002, pags:1-20.
- [3] Blanco, S., Quian, Quiroga R., Rosso, O.A. and Kochen S. *Time-frequency analysis of electroencephalogram series*. Phys. rev. E51 2624-2631. 1995.
- [4] Boggess, A., Narcowich, F. J. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [5] Bonani, A., Durand, S. and Weiss, G. *Wavelets obtained by continuous deformations of the Haar wavelet*, *Revista Mat. Iberoamericana*, Vol. 12, No 1, 1996.
- [6] Burrus, C.S., Gopinath, R. A., Guo, H. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms A Primer*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [7] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Boston, 1992.
- [8] Chui, C. K. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997, pags:89-117.

-
- [9] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 1988, 909-996.
- [10] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
- [11] Daubechies, I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36 1990, 961-1005.
- [12] D'Attellis, C.E. and E.M. Feernández-Beerdaguer. *Wavelet Theory and Harmonic Analysis in Applied Sciences*, edit. Birkhause, Buenos Aires, Argentina, 1997, 227-262
- [13] D'Atellis, C.E., Isaacson, S.I. and Sirne, R.O. *Detection of epileptic events in electroencephalograms using wavelet analysis*. *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 25, 1997, pags: 286-293.
- [14] Delyon, B. and Juditsky, A. Estimating wavelets coefficients, pp 151-168 in *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, Tokyo, 1995.
- [15] Donoho, D. *Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noyse Data*. "Different Perspectives on Wavelets", Proceedings of Symposia in Pure Math., AMS., I Daubechies, Edt., 47, 173-205, 1993.
- [16] Faundez, Pablo, Fuentes, Alvaro. *Proceso digital de señales acústicas utilizando wavelets*. Instituto de matemáticas UACH. Tesis de grado.Pags: 12-57.
- [17] Ferrero, Alejandro F. *Análisis Computado del EEG*. Instituto Ferrero de Neurología y Sueño. Fundación Argentina de estudio del Cerebro. <http://www.ifn.com.ar>
- [18] Franco Salazar, Guillermo. *Manual de electroencefalografía*, edit. Científico-Técnica, La habana, 1980.Pags:1-27, 40-44
- [19] Gersho, A. and Gray R. M. *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.
- [20] Gram , Lennart and Mogens Dam. *Epilepsia*, edit. Médica Panamericana, Buenos Aires, 1995.Pag: 33-41

-
- [21] Hernández, E. Weiss, G. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [22] Irino, T., Kawahara, H. *Signal reconstruction from modified auditory wavelet transform*, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol 41, 1993, 3549-3553.
- [23] Kincaid, David y Cheney, Ward. *Análisis Numérico*. Edit. Addison-Wesley. E.U.A. 1994. Pags 323-363.
- [24] Kochen, S., Giagante, B., D'Atellis, C.D., Sirne, R., Roitman, J. *Wavelet analysis preceding seizure*. *Advances in Clinical Neurophysiology*. Vol. 54, 2002, pags: 457-461.
- [25] Kobayashi, K., James, C.J., Nakahori, T., Akiyana, T., Gotman, J. *Isolation of epileptiform discharges from unaveraged EEG by independent component analysis*. *Clin Neurophysiol*, Vol. 110 No. 10, oct. 1999. Pags: 1755-1763.
- [26] Litt, B., Echauz, J. *Prediction of epileptic seizures*. *The Lancet neurology*, Vol. 1, May 2002, pags: 78-83.
- [27] Mallat, S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R}^d)$* , *Trans. of Amer. Math. Soc.* 315, 1989, 69-87.
- [28] Mallat, S. *A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, 1989, 674-693.
- [29] Mallat, S. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New Yor, 1998.
- [30] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*. Herman, Paris, 1990.
- [31] National Institutes of health Brain Resources and Information Network. *Epilepsia*.
- [32] Oppenheim, Alan V. and Ronald W. Schafer *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto* 2ª edic, Edit Prentice hall, Madrid España, 1999.
- [33] Oppenheim, A., Shafer, R. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

-
- [34] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [35] Proakis, J. G., Manolakis, D. G. *Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Macmilan, New York, 1992.
- [36] Quak, E. and Weyrich, N. *Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelet on a bounded interval*, *Appl. and Comp. Harmonic Anal.* (ACHA), 1 1994, 217-231.
- [37] Research, Wolfram. *Wavelet Explorer. Mathematica*. Universidad de Yale. 1996. Pag: 104-113.
- [38] Rioul, O., Duhamel, P. *Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transform*, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-38 1992, 569-586.
- [39] Sanei,saeid and Chambers, J.A. *EEG Signal Processing. Centre of Digital Signal processing*. Cardiff University. 2007. Pags: 1-31, 35-58, 142-145
- [40] Schiff, J.F., Aldroubi,A., Unser, M., and Sato S. *Fast wavelet transformation of EEG*. *Electroencefalography and Clinical Neurophysiology*, 91: 442-455,1994.
- [41] Sirne, R.O., D'Atellis, C. E. *Spike detection using wavelets*.
- [42] Strang, G. and Nguyen, T. *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996.
- [43] Sun, W. and Zhou, X. *Sampling theorem for wavelet subspaces: error estimate and irregular sampling*, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48 2000, 223-226.
- [44] Unser, M. and Aldroubi, A. *B-spline processing I: Theory and II: Efficient design and application*, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol 41 1993, 821-848.
- [45] Unser, M. *A practical guide to implementation of the wavelet transform*, pp 37-76 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, New York 1996.

-
- [46] Unser, Michael, Aldroubi Akran and Eden Murray. *A family of polynomial spline wavelet transforms*. Signal Processing 30(1993) 141-162.
- [47] Valencia, Miguel. *Análisis numérico y experimental de la actividad cortical*. Facultad de ciencias Universidad de Navarra-España. tesis de Doctorado. 2006. Pags:6-14.
- [48] Villanueva Gómez F. *Description of epileptic seizures*. Rev Neurol. Vol. 30, suppl. 1, June 2000. Pags: S4-9.
- [49] Walnut, D. *An Introduction to Wavelets Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001,pags:289-333.
- [50] Walter, G. G. and Shen, X. *A substitute for summability in wavelet expansions*, *Appl.Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1999, 51-63.
- [51] Walter, G. G. and Shen, X. *Deconvolution using Meyer wavelets*, *J. Integral Equations Appl.* 11 1999, 515-534.
- [52] Walter, G. G., Shen, X. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [53] Senhadji, L., Bellanger J.-J., Carrault G. *EEG Spike Detectors Based on Different Descompositions : A Comparative Study in Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing*, Wiley-IEEE Press (Ed.) (1997) 407-421 - <http://www.hal.inserm.fr/inserm-00131461/en/>
- [54] Zapata Ferrer, A., Rivas Maya, L., Gonzalez Gaona, A., Aguillon Pantleon, M., Castro García, M., Nasad, N.M., Haro valencia, R., Vásquez Herrera, M. *Detecting the onset of epileptic seizures*. IEEE Eng. Med. Biol. Mag., Vol. 18, No. 3, Mayo-Jun 1999, Pags: 78-83.

Índice alfabético

- análisis multirresolución, 15
- delta Kronecker, 23
- distribución de energía, 75
- downsampling, 60
- FIR, 33
- función
 - de energía, 71
 - de escala, 15
 - dilatada, 12
 - escalada corrida, 63
 - escalada dual, 44
 - spline, 22
 - trasladada, 12
- grafoelementos, 46
- ritmos, 46
 - Alfa, 46
 - Beta, 46
 - Delta, 46
 - Theta, 46
- ritmos de Berger, 46
- señal, 5
- señales
 - electroencefalográficas, 11
 - estacionarias, 8
 - spline biortogonal, 80
 - spline-B, 22
 - discreta centrada, 31
 - splines de schoenberg, 22
 - transformada de fourier, 5
- umbrales, 72
- upsampling, 61
- wavelet , 11
 - coeficientes, 14
 - corrida, 65
 - de Haar, 16
 - dual, 17, 44
 - serie, 13
 - transformada discreta, 13