

**ESTIMACIÓN DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS PARA COLOMBIA:
ANÁLISIS EMPÍRICO CON FILTROS DE KALMAN**

*Rogelio Maldonado Castaño
Natalia Zapata Rueda
Javier Orlando Pantoja Robayo*

Documentos de trabajo

Economía y Finanzas

Centro de Investigaciones Económicas y Financieras (CIEF)



**UNIVERSIDAD
EAFIT**
Abierta al mundo

ESTIMACIÓN DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS PARA COLOMBIA. ANÁLISIS EMPÍRICO CON FILTROS DE KALMAN

Rogelio Maldonado Castaño
Natalia Zapata Rueda
Javier Orlando Pantoja Robayo

22 de septiembre de 2012

Resumen

Si bien la estimación oficial para Colombia de la estructura a término está dada por el modelo [6] el cual es ampliamente aceptado y usado. El modelo de [6] se basa en el ajuste de la curva con datos disponibles hasta $t-1$ lo que dificulta por ende la estimación futura (en el tiempo t) de la curva cero cupón. Dada la importancia de contar con una estimación de la estructura a término para la valoración de activos financieros en el mercado Colombiano, esta investigación propone la construcción de una metodología que permita estimar en forma dinámica, confiable y simple los parámetros del modelo de tasas de interés [6]. Para esto fue necesario hacer uso de la re-parametrización propuesta por [3], que determina la forma de la estructura a término a través de los factores latentes Nivel, Pendiente y Curvatura. Nuestra propuesta estará enmarcada en una forma Estado - Espacio a través del uso de filtros de Kalman. Los resultados del modelo son acertados para predicciones de un periodo a futuro.

Palabras clave: Estructura de tasas de interés, modelos estado - espacio, filtro de Kalman, estimación de parámetros.

Código de clasificación JEL: G17

**Dynamic Estimation of the term Structure Interest rate Model for
the Colombian Markets, Empirical Analysis using Kalman-Filter**

Abstract

In Colombia the official estimation for the term structure model is given by [6] development which is widely accepted and used. This estimation is based on the curve fitting with available data, only for one day ahead, making difficult to estimate the future zero-coupon curve. Taking into account the importance of having an estimation of the term structure for the valuation of financial assets in the Colombian market, this research proposes a methodology to estimate in dynamic form the parameters of interest rates in the Nelson and Siegel Model. This required the use of the re-parameterization proposed by [3], which determines the shape of the term structure through latent factors level, slope and curvature. This paper proposes dynamic estimation of the term structure of interest rate using a Kalman filter methodology throughout the state - space framework. Results show us that predicts are successful for more than one period in the future.

1. Introducción

Para los administradores de portafolio en cuyas estructuras sean admisibles activos de renta fija es de sumo interés la gestión de precio; para tal fin es indispensable la estimación, el manejo y de ser posible el pronóstico de la estructura a plazos de tasas de interés del mercado al cual están expuestos (a nivel país, industria o sector). Teniendo en cuenta la relevancia que tienen los pronósticos, independiente de su naturaleza, para la administración de portafolios de inversión no solamente para el logro de los resultados deseados sino también para la administración del riesgo en el que se incurre en la búsqueda de estos logros, es de alta relevancia contar con una metodología que permita, sin alejarse de los modelos a los que los reguladores exigen respetar, realizar pronósticos de la estructura a plazos de tasas de interés. Para el caso específico del mercado colombiano, el modelo de tasas de interés asumido como oficial por parte de los entes reguladores para fines de valoración a precios de mercado y construcción de un gran número de productos financieros derivados atados a tasas de interés es la metodología propuesta por Charles R. Nelson y Andrew F. Siegel (1987). Esta metodología presenta beneficios tan importantes como la simplicidad para su estimación, su uso generalizado no sólo en la academia sino para los practitioners y además de su ajuste a las tasas reales de mercado; sin embargo, el proceso de estimación de parámetros, dado que estos no son variables dependientes del tiempo, impide su estimación futura y además su metodología de cálculo requiere ser contrastada contra los valores observados en la curva de rendimiento de mercado. Francis X. Diebold y Canlin Li en su trabajo *“Forecasting the term structure of government bond yields”* de 2006 interpretan los parámetros del modelos [6] como factores latentes de Nivel, Pendiente y Curvatura de la estructura a término de la tasa de interés. Esta reparametrización propuesta por [3] permite hacer uso de un conjunto de ecuaciones recursivas como lo son las establecidas en un Filtro de Kalman para obtener la posible forma y nivel futura de la curva de tasas de interés para Colombia. Este documento está dividido en cinco secciones, siendo ésta la primera de ellas, en la segunda sección describiremos nuestro marco teórico. En la tercera parte expondremos la metodología usada en nuestra investigación. En la cuarta detallaremos los resultados obtenidos del modelo y finalmente en la quinta presentaremos nuestras conclusiones.

2. Marco teórico

Dado que nuestro objetivo investigativo está centrado en el pronóstico de la forma de la estructura a término de tasas de interés para Colombia, debemos enfocar nuestro trabajo en el campo de los modelos de tasas de interés y pronóstico.

2.1. Modelos estocásticos

En el campo de la modelación con fines de pronóstico de la estructura a término tenemos que entre los trabajos más conocidos en la literatura académica están:

El trabajo de [1] es un modelo para la tasa corta que asume una distribución lognormal con el fin de eliminar posibles tasas negativas. Una falencia de este modelo es que no es posible hallar una solución cerrada que permita que el árbol por el cual se obtiene la estructura a plazo, sea construido basado en tasas forward y el proceso de volatilidad sin tener que usar un procedimiento inductivo hacia adelante. Éste toma como input una estructura de volatilidades, e implícitamente, conlleva un proceso de reversión a la media. Los supuestos usados en el modelo son: los cambios en los rendimientos de los bonos están perfectamente correlacionados, el retorno esperado es el mismo para todos los activos en un mismo periodo, no hay impuestos ni costos de transacción y la distribución de las tasas cortas es lognormal. Como resultado, este modelo obtiene tasas de corto plazo futuras consistentes con la estructura a plazo que se usa como input.

[2] más conocido como el CIR, es un modelo que se basa en el esquema de un proceso productivo para una economía donde cada individuo debe decidir entre consumir o invertir un capital limitado, se puede prestar y pedir prestado. El equilibrio se alcanza cuando se llega a la tasa a la cual ningún individuo se ve en la necesidad de pedir prestado o prestar (tasa de equilibrio de mercado). El modelo explica los movimientos en la tasa de interés entérminos de las preferencias individuales. La tasa corta asume el riesgo en el proceso productivo de la economía y ésta determina la estructura a plazo completa y por ende la valoración del “*interest rate contingent claim*”. El largo plazo debe ser compensado por una prima.

El modelo conlleva un proceso de reversión a la media y es un modelo lognormal debido a que la volatilidad de la tasa de interés está positivamente relacionada con el nivel de la tasa de interés. La gran falencia de este modelo es que no provee una adecuada estimación de la estructura a plazo.

El trabajo de [8] es un modelo de equilibrio en condiciones de no arbitraje mediante la determinación de una ecuación diferencial parabólica que caracteriza el precio de un bono cero cupón. Es un modelo en tiempo continuo con reversión a la media en un mercado eficiente en el cual la tasa spot instantánea sigue un proceso continuo de Markov y el precio de un bono de descuento depende sólo de la tasa spot durante su plazo. Dentro de los supuestos se encuentra que la varianza es constante y arroja como resultado una solución cerrada.

[4] es un modelo basado en el supuesto de no arbitraje de la tasa de interés, donde no se consideran fricciones de mercado, costos de transacción o impuestos, trabaja en tiempo discreto y finito. Se pretende modelar el comportamiento incierto de la estructura a plazo de las tasas de interés a través de la construcción de un árbol binomial y se obtiene como resultado una estructura de tasa de interés con ajuste perfecto a la estructura de tasa forward que se usa como input inicial.

Dado que nuestro objetivo de investigación está enmarcado dentro de la regulación colombiana debemos trabajar en el campo del modelo previsto en ésta.

2.2. Modelo Nelson y Siegel (1987)

El modelo de [6] proporciona un método de estimación paramétrica de una curva de rendimiento que además de ajustarse a las observaciones del mercado, se concentra en la evolución de la tasa forward instantánea. Este es un modelo no polinomial donde uno de los objetivos es eliminar saltos irregulares en la estructura de las tasas de interés (curva yield teórica). Su principal beneficio es la simplicidad y por ende su uso generalizado, no sólo en la academia sino más aun por parte de los participantes del mercado. En el caso particular de Colombia, la curva construida bajo la metodología de este modelo, es usada como curva de referencia para valorar activos de renta fija a precios de mercado, entre muchas otras aplicaciones.

Supuestos del Modelo: Se concentra en la evolución de la tasa forward instantánea; la dinámica de la tasa forward instantánea puede ser modelada por la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, particularmente con raíces iguales y reales; la ecuación diferencial ordinaria puede presentar diferentes formas: monótona, jorobada, en forma de S, como las más comunes y no es un modelo de equilibrio general, por lo tanto no tiene interpretación económica del comportamiento de los agentes y de los mercados en que estos participan.

El modelo [6] parte del supuesto de que el comportamiento de la tasa forward instantánea puede ser modelada por la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con raíces iguales y reales. Partiendo del trabajo de estos autores hacemos la derivación de éste con el fin de contextualizar de una manera muy clara el proceso que se debe tener en cuenta para nuestro trabajo empírico. Para la modelación de la dinámica de la tasa forward se parte del concepto de una inversión que renta $R(t)$ durante un periodo T .

$$I(t, T) = \exp(R(t) * T) \quad (1)$$

Si luego de que termine el periodo T se reinvierte el monto I hasta un periodo $T + \Delta T$, se obtendrá:

$$L(t, T, T + \Delta T) = \exp(R(t) * T) * \exp(f(t, T, T + \Delta T) * \Delta T) \quad (2)$$

Donde $f(t, T, T + \Delta T)$ es la tasa forward del periodo $T, T + \Delta T$. Otra forma de ver esto es suponer que se invertirá cierta cantidad de dinero desde el periodo t hasta el periodo $T + \Delta T$ donde:

$$J(t, T + \Delta T) = \exp[R(t, T + \Delta T) * (T + \Delta T - t)] \quad (3)$$

Suponiendo que estamos en un mercado libre de arbitraje, entonces:

$$L(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T) \quad (4)$$

Y como sabemos que el precio de un bono está dado por

$$B(t, T) = \exp[-R(t, T)(T - t)] \quad (5)$$

De donde se puede despejar $R(t, T)$ y reemplazando en la fórmula anterior se obtiene la solución para la tasa forward:

$$f(t, T, T + \Delta T) = -[(\ln B(t, T + \Delta T) - \ln(B(t, T)))/\Delta T] \quad (6)$$

Y para hallar la tasa forward instantánea se evalúa f en el límite cuando ΔT tiende a cero y se obtiene que:

$$f(t, T) = -(\partial \ln B(t, T))/\partial T \quad (7)$$

Integrando se obtiene

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T) + \ln(B(t, t)) \quad (8)$$

Y se sabe que $B(t, t) = 1$ entonces

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T) \quad (9)$$

De donde se obtiene que el precio de un bono cero cupón es:

$$B(t, T) = \exp[-\int_t^T f(t, s) ds] \quad (10)$$

Recordando que:

$$B(t, T) = \exp[-R(t, T)(T - t)] \quad (11)$$

Se obtiene finalmente:

$$R(t, T) = \frac{1}{(T - t)} \int_t^T f(t, s) ds \quad (12)$$

Esta última expresión es la que nos indica que la curva de rendimientos es el promedio de los valores futuros de la tasa forward instantánea. Y teniendo en cuenta que la solución del modelo es a través de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con raíces reales e iguales, se obtiene finalmente la función conocida como [6] para la tasa forward instantánea con maduración en t que tiene la siguiente expresión:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (13)$$

La ecuación anterior puede tomar diferentes formas dependiendo del valor de los parámetros. Entre las formas que se pueden observar están las monótonas,

en formas de S o con joroba. Finalmente, si se integra la ecuación de la tasa forward anterior se obtiene la tasa spot ($s(t)$):

$$s(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}{\frac{t}{\tau}} \right) - \beta_2 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (14)$$

Donde $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$ son los parámetros para estimar en el modelo:

β_0 es la contribución del componente del largo plazo, nunca tiende a cero.

β_1 es la contribución del componente del corto plazo, puesto que cuando aumenta t tiende rápidamente a cero.

β_2 es la contribución del componente del mediano plazo, puesto que aumenta en la medida que pasa t hasta llegar a su máximo y luego decae.

τ es la velocidad con la que β_1 y β_2 convergen a cero. El inverso $1/\tau$ es la aceleración a la cual converge la tasa forward instantánea al nivel de largo plazo β_0 .

Dada la naturaleza misma de la solución del modelo se evidencia que una gran falencia de éste es que los parámetros no son dinámicos o dependientes del tiempo, y es precisamente aquí donde enfocaremos nuestro trabajo empírico.

2.3. Modelo Diebold y Li (2006)

Los autores interpretan los parámetros del modelo [6] como factores de nivel, pendiente y curvatura de la estructura a término de tasas de interés.

Básicamente parten desde el mismo punto de vista de [6] en cuanto a la solución de un ecuación diferencial de segundo orden para obtener la siguiente función para la tasa forward.

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (15)$$

Pero dentro de la reparametrización por ellos elaborada expresan esta función de la siguiente manera:

$$f_t(\tau) = \beta_{0t} + \beta_{1t} e^{-\tau \lambda t} + \beta_{2t} \lambda_t \tau e^{-\tau \lambda t} \quad (16)$$

Donde se debe tener en cuenta que $\lambda = \frac{1}{\tau}$, y $\tau = t$ si queremos hacer la equivalencia con [6].

Luego de conocer la curva de las tasas forward de [3] se puede determinar la tasa spot para un bono cero cupón con vencimiento en Tau como el promedio ponderado de las tasas forward, en este punto nos permitimos desarrollar partiendo desde el trabajo original la siguiente derivación:

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(m) dm \quad (17)$$

Cuya solución está dada por:

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(m) dm = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \beta_{0t} + \beta_{1t} e^{(-\lambda_t m)} + \beta_{2t} \lambda_t m e^{(-\lambda_t m)} dm \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\tau} (\beta_{0t}\tau + \beta_{1t} \frac{(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})}{\lambda_t} + \beta_{2t} \int_0^\tau \lambda_t m e^{(-\lambda_t m) dm}) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\tau} (\beta_{0t}\tau + \beta_{1t} \frac{(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})}{\lambda_t} + \beta_{2t} (-e^{(-\lambda_t\tau)} + \frac{(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})}{\lambda_t})) \quad (20)$$

$$= \beta_{0t} + (\beta_{1t} + \beta_{2t}) \frac{(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})}{(\lambda_t\tau)} - \beta_{2t} e^{(-\lambda_t\tau)} \quad (21)$$

Esto último es el mismo modelo [6] Pero [3] reparemetrizan esta última expresión de la siguiente manera con el fin de diferenciar los factores latentes Nivel, Pendiente y Curvatura de la estructura a término:

$$r_t(\tau) = \beta_{0t} + \beta_{1t}(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})/(\lambda_t\tau) + \beta_{2t}((1 - e^{(-\lambda_t\tau)})/(\lambda_t\tau) - e^{(-\lambda_t\tau)}) \quad (22)$$

Dónde: β_{0t} Se asocia al nivel de la estructura

$$\beta_{1t}(1 - e^{(-\lambda_t\tau)})/(\lambda_t\tau) \quad (23)$$

Se asocia a la pendiente de la estructura

$$\beta_{2t}((1 - e^{(-\lambda_t\tau)})/(\lambda_t\tau) - e^{(-\lambda_t\tau)}) \quad (24)$$

Se asocia a la curvatura de la estructura.

Ni $\frac{1}{2}$ tase que los términos que acompai $\frac{1}{2}$ an a cada uno de los parámetros de la estructura (betas) son los llamados Loadings.

Estos Loadings son la ponderación o aporte de cada uno de los factores a la forma de la curva a través del tiempo. Lo anterior se puede observar en la Gr $\frac{1}{2}$ fica 1.

2.4. Filtros de Kalman

Rudolf. E. Kalman, en 1960 publicó su trabajo “*New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*” en donde define esta herramienta como un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva eficiente del método de mónicos cuadrados. Esta solución permite calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en el momento t, dichas estimaciones. Este filtro es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-space).

Entre sus beneficios se resaltan: “*Utiliza el método de mónicos cuadrados para generar recursivamente un estimador del estado al momento k, que es lineal, insesgado y de varianza mónica; se distingue por su habilidad para predecir el estado de un modelo en el pasado, presente y futuro, aun cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida; utiliza toda la historia de la serie pero con la ventaja de que intenta estimar una trayectoria estocástica de*

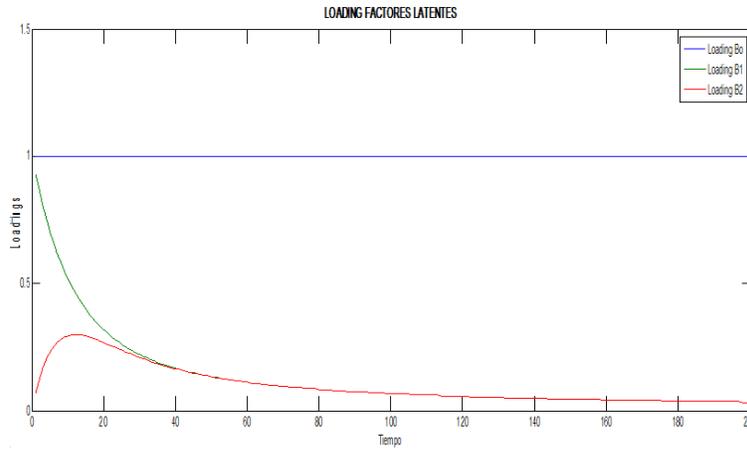


Figura 1: Ponderación de los factores de la estructura a término

los coeficientes en lugar de una determinística, con lo cual soluciona el posible sesgo de la estimación ante la presencia de cambios estructurales; la solución arrojada por el filtro es óptima dado que combina toda la información observada con el conocimiento previo del comportamiento del sistema, produciendo una estimación del estado con un error minimizado estadísticamente y este método es recursivo ya que recalcula la solución cada vez que una nueva observación es incorporada en el sistema”.

Este modelo se puede generalizar en el siguiente algoritmo de ecuaciones que enmarcan nuestro objetivo investigativo:

Algoritmo General para el Filtro de Kalman:

1. Estimaciones Iniciales
2. Ecuaciones de Pronóstico
 - Pronóstico del Estado
 - Pronóstico de la Covarianza del error
3. Ecuaciones de Corrección
 - Calculo de ganancia de Kalman
 - Actualización con la medida Y_t
 - Actualización de la covarianza del error

[7] en su trabajo para el Banco Central de Costa Rica en el 2003 describe de manera muy clara y completa el proceso del Algoritmo del Filtro así:

“El filtro de Kalman estima el proceso utilizando una especie de control de retroalimentación, esto es, estima el proceso a algún momento en el tiempo y entonces obtiene la retroalimentación por medio de los datos observados. Desde este punto de vista las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman se pueden dividir en dos grupos: las que actualizan el tiempo o ecuaciones de predicción y las que actualizan los datos observados o ecuaciones de actualización. Las del primer grupo son responsables de la proyección del estado al momento t tomando como referencia el estado en el momento $t-1$ y de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado. El segundo grupo de ecuaciones son responsables de la retroalimentación, es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado. Las ecuaciones que actualizan el tiempo pueden también ser pensadas como ecuaciones de pronóstico, mientras que las ecuaciones que incorporan nueva información pueden considerarse como ecuaciones de corrección. Efectivamente, el algoritmo de estimación final puede definirse como un algoritmo de pronóstico-corrección para resolver numerosos problemas. Así el filtro de Kalman funciona por medio de un mecanismo de proyección y corrección al pronosticar el nuevo estado y su incertidumbre y corregir la proyección con la nueva medida.”

3. Trabajo empírico

Recordemos entonces que el objetivo de nuestra investigación será la estimación futura o pronóstico de los parámetros del modelo [6] a través de las herramientas matemáticas descritas en la sección anterior, para finalmente lograr la construcción de una curva cero cupón dinámica para Colombia.

3.1. Datos

Para esta investigación fue necesario contar con los parámetros diarios del modelo [6] desde el 02 de Mayo de 2003 hasta el 28 de Febrero de 2011 para un total de 1973 periodos. Con estos datos se construyó la estructura a término de referencia para la investigación con 20 vencimientos: 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13 años. Esta información se encuentra disponible en la página web de Infoval (Proveedor de precios, tasas y márgenes para la valoración de activos colombianos), sin embargo éstos también pueden ser obtenidos a través de las observaciones de las tasas de negociación diarias de los títulos de deuda pública interna colombiana, TES clase B, siguiendo la metodología de valoración de Infoval.

3.2. Modelo Propuesto

Dado el trabajo presentado en 2006 por Francis Diebold y Canlin Li donde interpretan el modelo [6] entérminos de tres factores latentes Nivel, Pendiente y Curvatura para la estimación de una estructura a plazo de tasas de interés, se

propone la estimación a futuro de estos factores latentes a través de un Filtro de Kalman con el fin de tener una idea de la posible forma y nivel que pueda tener la curva de tasas de interés para Colombia.

Así nuestro modelo matemático está representado de la siguiente manera:

$$Y_t = H\beta_t + e_t; \quad e_t \sim N(0, R), i.i.d. \quad (25)$$

$$\beta_t = F\beta_{(t-1)} + v_t; \quad v_t \sim N(0, Q), i.i.d. \quad (26)$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ Y_t(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} \beta_{0t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Donde los parámetros a estimar a través del Filtro de Kalman serán β_{0t} , β_{1t} y β_{2t} .

3.3. Estimación a Partir del Modelo Propuesto

Dado que el proceso de estimación llevado a cabo se hace a través de un Filtro de Kalman como el descrito en la sección 2.4, lo primero que debíamos determinar eran cada una de las matrices involucradas en el modelo.

3.3.1. Estimaciones Iniciales

Se deben definir los valores semilla o de arranque de $\hat{\beta}_{t-1}$ y de P_{t-1} Donde: Matriz $\hat{\beta}_{t-1}$:

Es la Matriz de los parámetros estimados en el periodo anterior. La magnitud de esta matriz es de 3x1. Para el periodo de arranque del pronóstico se usa como semilla los últimos parámetros observados que se tengan disponibles.

Matriz P_{t-1} : Esta matriz es el mismo pronóstico de la covarianza del error del modelo pero del periodo t-1 para elaborar el pronóstico del siguiente paso. Es de magnitud 3x3 y para el primer periodo de pronóstico el valor semilla sería el de la matriz Q del primer periodo.

3.3.2. Ecuaciones de Pronóstico

- Pronóstico del Estado

$$\hat{\beta}_t^* = F\hat{\beta}_t^* \quad (30)$$

Donde:

Matriz F: Es la relación entre los parámetros a estimar con los del periodo anterior. Esta matriz debe ser una matriz de magnitud 3x3. Partimos de la base de que dado que el modelo no solamente pronostica, sino también que corrige esta matriz que sirve de dato semilla para el pronóstico será una matriz diagonal, donde los valores de esta diagonal son 1, esto partiendo del precepto de que el mejor pronóstico que tengo para mañana es el valor de hoy mas un error.

- Pronóstico de la covarianza del error

$$P_t^* = FP_{t-1}F^T + Q \quad (31)$$

Donde:

Matriz P_t^* : Es el pronóstico de la covarianza del error del modelo. La magnitud de esta matriz es de 3x3. Esta matriz se va actualizando en la medida que el filtro opera. Matiz Q: Es el valor de las varianzas del error estado. Es de magnitud 3x3.

3.3.3. Ecuaciones de Corrección

- Ganancia de Kalman

$$K_t = P_t^* H^T (HP_t^* H^T + R)^{-1} \quad (32)$$

Dónde:

Matriz H: Es la matriz de Loadings de los factores latentes del modelo [3]. Es de magnitud 20x3 y está también referida en la ecuación (3) del modelo propuesto.

Matriz R: Es la matriz de varianzas del error de las observaciones. Es de magnitud 20x20.

- Actualización de la medida

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_t^* + K_t(Y_t - H\hat{\beta}_t^*) \quad (33)$$

Donde:

Matriz Y_t : Es la matriz de los pronósticos de los Yields del modelo, ecuación (3) del modelo propuesto. Es de magnitud 20×1 .

- Actualización covarianza del error

$$P_t = (I - K_t H) P_t^* \quad (34)$$

Donde:

Matriz I: Es una matriz identidad de magnitud 3×3 .

4. Resultados

Lambda tal y como lo estipulan [3] debe ser fijado como una constante, con el fin de que la estimación de los demás parámetros sea una estimación lineal, este factor será el valor que maximiza el Loading del factor de la curvatura (β_{2t}) en el periodo que se considere adecuado para la economía en estudio, en nuestro caso la economía colombiana. En el trabajo de [3] fijan Lambda en 0.0609 para el periodo 30 meses, o 2,5 años), el cual es considerado por los autores como la parte media de la estructura. Para Colombia tradicionalmente los agentes que intervienen en el mercado consideran que la parte media de la estructura a término gira alrededor de los 3 años de vencimiento. Con esto se obtuvo entonces el valor de un Lambda para Colombia. Retomando que el Lambda será el valor que maximiza el Loading del factor de la curvatura (β_{2t}) en el periodo que se considere adecuado y que una maximización es un procedimiento matemático donde se deriva la función en cuestión igualándola a cero, entonces se tiene que:

Proposición 1:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 - e^{-x})}{x} - e^{-x} = x^2 + x - e^x + 1 \quad (35)$$

Prueba de la Proposición 1:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 - e^{-x})}{x} - e^{-x} = \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 - e^{-x})}{x} - \frac{\partial}{\partial x} e^{-x} = \quad (37)$$

Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} (-e^{-x}) = \frac{\partial}{\partial u} e^u \frac{\partial}{\partial x} u \quad (38)$$

Donde

$$u = -xy \frac{\partial}{\partial u} e^u = e^u \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 - e^{-x})}{x} - e^{-x} \left[\frac{\partial(-x)}{\partial x} \right] \quad (40)$$

Usando la regla del cociente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \quad (41)$$

Donde

$$u = 1 - e^{-x} y v = x \quad (42)$$

$$\frac{x \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x}) \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right]}{x^2} - e^{-x} \left[\frac{\partial(-x)}{\partial x} \right] \quad (43)$$

$$\frac{x \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x}) \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right]}{x^2} - e^{-x} \left[-\frac{\partial(x)}{\partial x} \right] \quad (44)$$

$$\frac{x \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x}) \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right]}{x^2} + e^{-x} \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right] \quad (45)$$

$$\frac{x \left[\frac{\partial}{\partial x} (1) - \frac{\partial}{\partial x} e^{-x} \right] - (1 - e^{-x}) \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right]}{x^2} + e^{-x} \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} \right] \quad (46)$$

$$\frac{x \left[0 - \frac{\partial}{\partial x} (-e^{-x}) \right] - (1 - e^{-x}) (1)}{x^2} + (1) e^{-x} \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 - e^{-x})}{x} - e^{-x} = \frac{e^{-x}(x^2 + x - e^x + 1)}{x^2} \quad (48)$$

Arreglando para facilidad

$$\frac{[1 - (1 - e^x)] - x \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^{-x}) \right]}{x^2} + e^{-x} = \quad (49)$$

Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} (-e^{-x}) = \frac{\partial}{\partial u} e^u \frac{\partial}{\partial x} u \quad (50)$$

$$\frac{-x \left[(e^{-x}) \left[\frac{\partial(-x)}{\partial x} \right] + e^{-x} - 1 \right]}{x^2} + e^{-x} = \quad (51)$$

$$\frac{-x(e^{-x}) \left[-\left[\frac{\partial x}{\partial x} \right] + e^{-x} - 1 \right]}{x^2} + e^{-x} = \quad (52)$$

$$\frac{(1) x e^{-x} + e^{-x} - 1 + e^{-x} x^2}{x^2} = \quad (53)$$

$$\frac{(e^{-x}(x+1) - e^{-x} + x^2)}{x^2} = \quad (54)$$

$$\frac{(e^{-x}(x^2 + x - e^{-x} + 1))}{x^2} = \quad (55)$$

Despejando:

$$x^2 + x - e^x + 1 \quad (56)$$

Donde la solución de una de las raíces es:

$$x \approx 1,79328 \quad (57)$$

Esta es la solución general para cualquier economía, ya dependerá de los intereses de cada investigador despegar en el periodo de tiempo que considere adecuado.

Recordando que $x = \Delta_\tau$ (Sección 2.3) y para nuestro caso $\tau = 3$ años ; Entonces:

$$\lambda x 3 \approx 1,79328 \quad (58)$$

$$\lambda \approx \frac{1,79328}{3} \quad (59)$$

$$\lambda \approx 0,5978 \quad (60)$$

Así, $\frac{1}{2}$ el Lambda para Colombia es 0.5978.

En la Gráfica 2 podemos observar el comportamiento del factor latente de la curvatura de la estructura colombiana con el Lambda encontrado

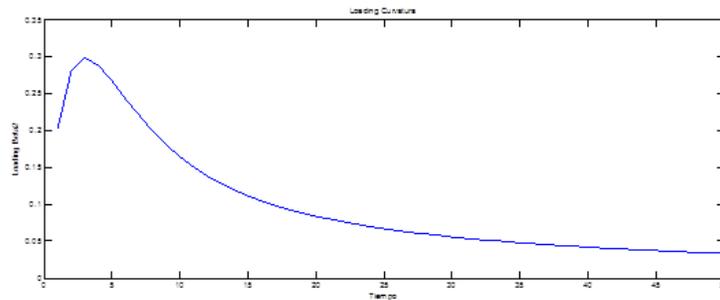


Figura 2: Comportamiento del factor latente de la curvatura

Finalmente luego de definir los valores de cada una de las matrices involucradas en el modelo y en el Filtro de Kalman se procedió a programar en Matlab el código para el proceso obteniendo los siguientes resultados.

Se puede ver gráficamente el ajuste del modelo para predecir los parámetros de la estructura de tasas de interés del modelo, esto se hace comparando los parámetros reales frente a las estimaciones arrojadas por el proceso programado.

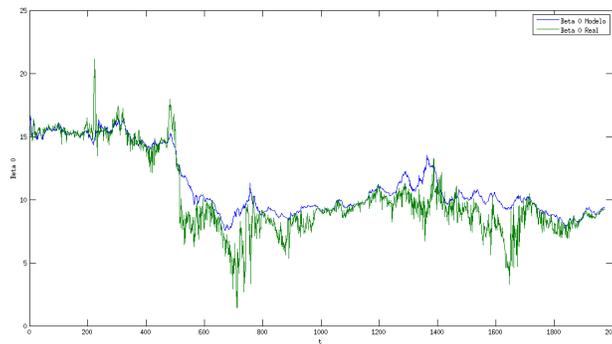


Figura 3: Beta 0 estimado Vs Beta 0 Real

	Beta 0	Modelo	Real
Media	11.172001	10.291287	
Error típico	0.056829	0.071992	
Mediana	10.106184	9.248001	
Desviación estándar	2.524245	3.197784	
Varianza de la muestra	6.371812	10.225821	
Curtosis	2.072118	2.468198	
Sesgo	0.774889	0.649143	

Cuadro 1: Estadísticas parámetro B_{0t} estimado Vs Real

En las Gráficas 4 y 5 se puede observar en la línea verde las observaciones reales de los parámetros β_{0t} y β_{1t} , mientras que en la azul el resultado del proceso de la estimación. Lo más destacable es que el modelo captura la tendencia que siguen las observaciones reales. A pesar de que se evidencia la existencia de un error de estimación en estos parámetros veremos más adelante que los resultados de los Yields que componen la estructura a término se ajustan de manera importante gracias a la recursividad del proceso.

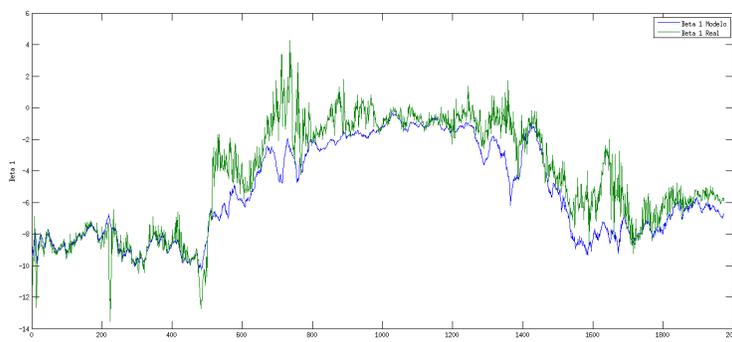


Figura 4: Beta 1 estimado Vs Beta 1 real

Beta 1	Modelo	Real
Media	-5.380730	-4.399345
Error típico	0.067647	0.077613
Mediana	-6.137594	-4.500264
Desviación estándar	3.004768	3.447442
Varianza de la muestra	9.028632	11.884858
Curtosis	1.505493	1.747753
Sesgo	0.185256	-0.127731

Cuadro 2: Estadísticas parámetro B_{1t} estimado Vs Real

En la Gráfica 6 podemos ver como los resultados de la estimación del parámetro β_{2t} en color azul difiere aún más de las observaciones reales en verde debido a la mayor ponderación del factor Lambda en el loading de éste parámetro. Sin embargo es destacable el ajuste a la tendencia. Las divergencias en las estimaciones de los parámetros frente a las observaciones reales tal y como lo mencionamos anteriormente se deben al efecto que ejerce Lambda en cada Loading, esto se puede apreciar en las Tablas 1, 2 y 3.

Luego de obtener estos parámetros, que son los encargados junto con los Loadings de determinar la forma de la estructura de tasas de interés, procedimos a calcular la curva cero cupón para la economía colombiana a los vencimientos que determinamos desde un inicio y compararlas con la real a los mismos vencimientos. A continuación mostramos gráficamente los resultados de estas Yields en 3 puntos de la curva representativos de la parte corta, media y larga.

En la Gráfica 7 se observa el comportamiento de la estimación de los Yields de la parte corta de la curva en verde contrastada contra los datos reales en azul. Así mismo se puede evidenciar el ajuste de la predicción en la Tabla 4 donde se muestra las estadísticas de los resultados obtenidos.

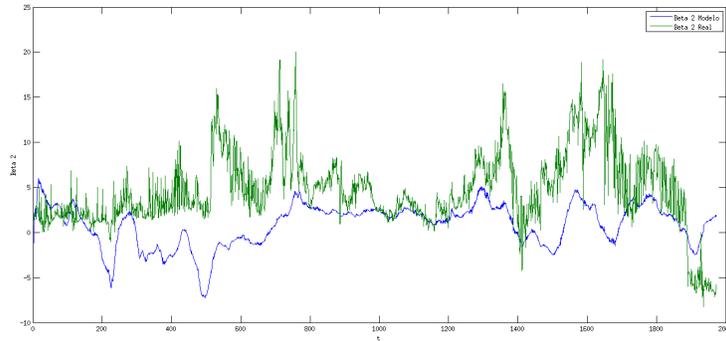


Figura 5: Beta 2 estimado Vs Beta 2 real

	Beta 2	Modelo	Real
Media	0.873150		4.686552
Error típico	0.052607		0.095646
Mediana	1.574642		3.915308
Desviación estándar	2.336727		4.248461
Varianza de la muestra	5.460292		18.049420
Curtosis	3.480239		4.153870
Sesgo	-0.791034		0.319269

Cuadro 3: Estadísticas parámetro B_{2t} estimado Vs Real

En la Gráfica 8 se observa el comportamiento de la estimación de los Yields de la parte media de la curva en verde contrastada contra los datos reales en azul. Nótese el ajuste de la predicción en las estadísticas contenidas en la Tabla 5.

En la Gráfica 8 y en la Tabla 6 se observa el comportamiento de la estimación de los Yields de la parte larga de la curva en verde contrastada contra los datos reales en azul.

Vemos que el comportamiento de las estimaciones de los Yields en el modelo es mucho más ajustado que las estimaciones de los parámetros frente a sus pares observados, esto se debe a la recursividad y eficiencia que provee el filtro de Kalman dentro del modelo.

Adicionalmente se llevaron a cabo pruebas de ajuste de los Yields para cada uno de los plazos analizados, las cuales evidenciaron el buen comportamiento de las predicciones como se puede observar en la siguiente tabla.

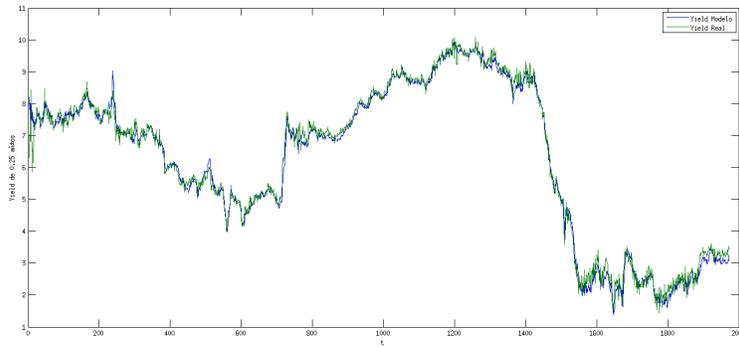


Figura 6: Yield estimado vs real con vencimiento a 0.25 años

Yield Corto	Modelo	Real
Media	6.233139	6.283921
Error típico	0.053850	0.053421
Mediana	6.956659	7.020304
Desviación estándar	2.391951	2.372900
Varianza de la muestra	5.721428	5.630653
Curtosis	1.952804	1.937607
Sesgo	-0.456085	-0.422072

Cuadro 4: Estadísticas Yield estimado vs real con vencimiento a 0.25 años

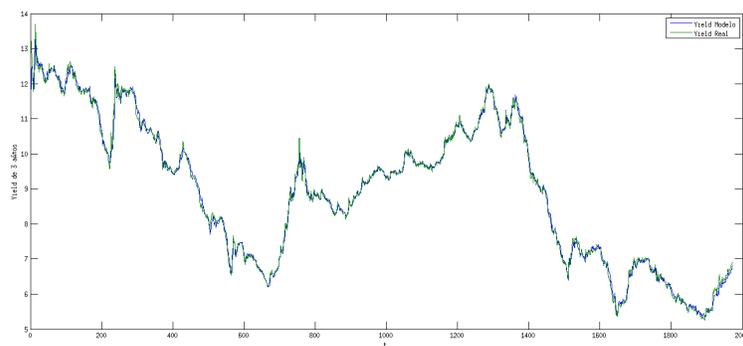


Figura 7: Yield estimado vs real con vencimiento a 3 años

Yield Medio	Modelo	Real
Media	8.931506	8.925940
Error típico	0.045265	0.045259
Mediana	9.166149	9.148164
Desviación estándar	2.010594	2.010338
Varianza de la muestra	4.042488	4.041458
Curtosis	1.884482	1.919470
Sesgo	-0.002183	0.009721

Cuadro 5: Estadísticas Yield estimado vs real con vencimiento a 3 años

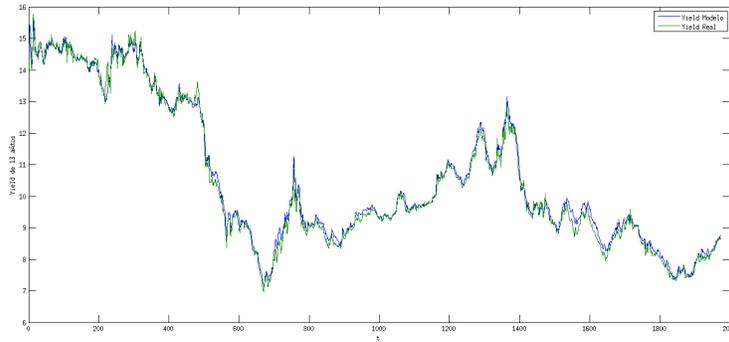


Figura 8: Yield estimado vs real con vencimiento a 13 años

Yield Largo	Modelo	Real
Media	10.591856	10.506951
Error típico	0.050521	0.051629
Mediana	9.679334	9.590572
Desviación estándar	2.244084	2.293276
Varianza de la muestra	5.035911	5.259116
Curtosis	2.120491	2.128790
Sesgo	0.667364	0.690082

Cuadro 6: Estadísticas Yield estimado vs real con vencimiento a 13 años

Plazos	MAPE	RMSE
Yield Corto	0.004843	0.576248
Yield Medio	-0.000524	0.215949
Yield Largo	-0.004875	0.574961

5. Conclusiones

Este documento mostró como se puede obtener un pronóstico de la curva cero cupón para Colombia, la cual está enmarcada por norma dentro del modelo [6] a través del uso de dos recursos. El primero de ellos es el uso del modelo planteado por [3] en el 2006 que propone una reparametrización de [6] en tres factores latentes Nivel, Pendiente y Curvatura, y el segundo pero mas importante aun, una herramienta matemática que está compuesta por un conjunto de ecuaciones recursivas de las cuales se obtienen no sólo un pronóstico sino también la corrección del error de éste.

Dado a esta recursividad y eficiencia en la corrección del error que ofrece el filtro de Kalman fue posible obtener un pronóstico dinámico bastante ajustado para un horizonte de $t+1$, tal y como se evidencia en las tablas que acompañan las gráficas.

Dentro de este marco teórico vimos la necesidad de obtener, tal cual lo propusieron [3], la estimación de un Lambda representativo para la economía en estudio con el fin de facilitar la modelación. Sin embargo, también observamos como las predicciones de los parámetros de la estructura a término se ven afectadas en la medida que los Loadings contengan un mayor aporte de Lambda. Aun así dada la metodología del cálculo de las Yield de la curva cero cupón estimadas a partir de las predicciones de los parámetros son bastante cercanas a las observaciones reales, esto dado a la propiedad de autocorrección del modelo.

Después de analizar los resultados mostrados gráficamente y en las tablas que las acompañan, consideramos que la predicción lograda por el modelo descrito en este documento es bastante acertada para un periodo adelante, sobre todo si se tiene en cuenta que la predicción logra capturar la tendencia que siguen las observaciones contra las cuales se contrastaron los resultados obtenidos.

Finalmente, de esta investigación podría desprenderse análisis adicionales como la evaluación de la predicción con pronósticos a más largo plazo, con el fin de evaluar si su eficiencia es tan acertada como las obtenidas en este documento.

Referencias

- [1] Fischer Black, Emanuel Derman, and William Toy. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Analysts Journal*, 46:33–39, 1990.
- [2] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A Ross. A theory of term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–408, 1985.
- [3] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130:337–364, 2006.

- [4] Thomas S. Y. Ho and Sang-Bin Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41:1011–1029, 1986.
- [5] R.E Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [6] Charles R. Nelson and Andrew F Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60:473–489, 1987.
- [7] Alvaro Solera Ramirez. El filtro de kalman. banco central de costa rica, división económica. Departamento de Investigaciones Económicas 2003.
- [8] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure .wells fargo bank and university of california. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.