

VALORACIÓN DE OPCIONES TIPO LOOKBACK. UNA APLICACIÓN A LA TASA DE CAMBIO

*Cecilia Maya Ochoa**

*Jorge Andrés Rodríguez Mejía**

RESUMEN

El desarrollo de los instrumentos de cobertura conocidos como derivados financieros ha sido realmente vertiginoso a partir de los años noventa. Uno de los más dinámicos grupos son las opciones exóticas, es decir, aquellas que no se ajustan a las condiciones de las tradicionales opciones *Europeas* o *Americanas*. Este estudio se enfoca en la valoración de las opciones exóticas del tipo *Lookback* para las cuales presenta los métodos analíticos y numéricos usados frecuentemente con éste propósito. Se discute la aplicabilidad de dichos métodos a la valoración de opciones de éste tipo sobre la tasa de cambio y se concluye que en este caso es necesario recurrir al método Montecarlo donde el subyacente sigue un proceso de volatilidad estocástica como el propuesto por Heston (1993). La utilización del método Montecarlo se justifica debido a su flexibilidad, necesaria en la valoración de opciones exóticas cuyo valor depende de la trayectoria seguida por el subyacente (path dependent) y por su mejor aproximación a la realidad, donde los activos financieros estudiados rechazan la existencia de volatilidad constante, uno de los supuestos básicos del modelo Black y Scholes (1973).

ABSTRACT

The development of instruments for hedging risks known as derivatives has been vertiginous in the last two decades. One of the most dynamic is the group of exotic options, that is to say, those that do not adjust to the conditions of the traditional *European* or *American* options. This study focuses on the valuation of *Lookback* options, and presents the current analytical and numerical methods used for this purpose. Its application to the case of options on the exchange rate is discussed and the study concludes that the use of the Montecarlo method where the underlying asset follows a process of stochastic volatility like the one proposed by Heston (1993) is much more suitable for this case. The flexibility which characterizes this method is necessary for the valuation of exotic options which are path dependent. This method also allows us to model the underlying asset following different stochastic processes when lognormality is rejected.

* Ph.D. en Economía Internacional y Finanzas Brandeis University, Boston USA. M.A. Economía Internacional y Finanzas, Directora Maestría en Finanzas. e-mail: cmaya@eafit.edu.co. Tels.: Ofic. 2619500 Ext. 756. Medellín, Colombia.

* Candidato a Magíster en Finanzas, Universidad EAFIT. Economista, Universidad EAFIT. e-mail: jrodriguez@pintuco.com. Tels.: Ofic. 3848473. Medellín, Colombia.

Los contratos de opciones se han convertido en los últimos años en piezas claves de los mercados financieros mundiales debido a su utilidad para la cobertura de riesgos. La negociación de instrumentos financieros derivados en el mundo ha presentado un crecimiento sobresaliente en las últimas tres décadas. Particularmente en América Latina, se ha presentado un crecimiento significativo de este tipo de operaciones a partir de la segunda mitad de la década de los noventa. Este crecimiento, inclusive, ha llevado a que varios de estos mercados se posicionen en los primeros puestos a nivel mundial. Cuatro de los quince mercados de derivados más grandes son latinoamericanos (Lamothe y Pérez, 2006).

Producto del desarrollo que han tenido los mercados de instrumentos financieros derivados, hoy existe un sinnúmero de productos para los agentes del mercado de acuerdo a sus requerimientos. Un conjunto de estos productos son las denominadas opciones *exóticas*, las cuales comienzan a cotizarse en los mercados organizados a partir de 1990, pero que en mercados OTC (*Over The Counter*) se pueden encontrar desde mucho antes.

Las opciones exóticas pueden definirse, según Crespo Espert (1998), como aquellas cuya estructura de resultados es diferente a la de las opciones tradicionales, y que han surgido con la intención de abaratar el coste de las primas o para ajustarse más adecuadamente a determinadas situaciones. Es decir, se trata de opciones cuyas características, ya sea la determinación del precio de ejercicio (o del subyacente, la prima, las condiciones de pago, entre otros) difieren de las opciones clásicas. Otra definición ampliamente aceptada es la que emplea Rubenstein (1991) quien clasifica a las opciones *exóticas* como todas aquellas opciones no tradicionales, es decir, aquellas que tienen funciones de pagos más complejas que las de las opciones *Europeas* y *Americanas* estándar. Este tipo de opciones nace de las diferentes necesidades de los agentes económicos en los mercados OTC y su objetivo final es el de ser mecanismos de cobertura o especulación superiores a los de las opciones tradicionales, de allí que también se les conozca como “opciones de segunda generación”.

El desarrollo de este tipo de opciones puede ser atribuido a varios factores de los mercados de capitales mundiales como son la globalización, la gran volatilidad de dichos mercados, el riesgo y la necesidad de gestionarlo, los avances tecnológicos y el desarrollo de la teoría de valoración de este tipo de instrumentos. Las opciones *exóticas* podrían convertirse en un instrumento muy popular en los mercados financieros mundiales debido a su flexibilidad y utilidad, aunque aún es necesario que se extienda su uso a más agentes en los mercados, lo cual sólo es posible a través de su difusión y conocimiento. En este trabajo, se busca abordar las opciones *Lookback* del tipo *Europeo* y mostrar su utilidad para gestionar el riesgo de tasa de cambio desde la perspectiva de una empresa del sector real. Además buscará ilustrar los métodos analíticos y numéricos utilizados actualmente para su valoración, así como proponer uno basado en la simulación de Montecarlo y procesos de volatilidad estocástica que se ajuste mejor al comportamiento de la tasa de cambio.

En la primera parte de este estudio se introduce al lector en las opciones exóticas del tipo *Lookback* y se explican los modelos analíticos propuestos para su valoración; además, se estudia la sensibilidad de este tipo de opciones ante cambios en sus parámetros y se comparan los resultados con opciones tradicionales del tipo "*Plain vanilla*". La segunda parte presenta el método numérico de simulación de Montecarlo en presencia de volatilidad constante, se discute el problema de la volatilidad de la volatilidad y se propone un método de valoración que involucra volatilidad estocástica. Finalmente en la tercera y última parte se propone una aplicación para el caso colombiano empleando lo descrito en los apartados previos, para la cobertura del riesgo de tipo de cambio peso colombiano / dólar americano.

1. Opciones Lookback: opciones exóticas en el mejor de los mundos.

Las opciones exóticas del tipo *Lookback* son opciones cuyo precio depende de la trayectoria de su subyacente (*path-dependent*) y de los precios mínimo o máximo que éste alcance. De allí se derivan su nombre, ya que el poseedor de una de estas opciones podrá "mirar hacia atrás" la trayectoria del subyacente y

determinar el pago de la opción. Estas opciones se pactan en las modalidades de precio de ejercicio flotante o fijo.

En 1979, Goldman, Sosin y Gato introdujeron un modelo analítico para la valoración de las opciones *Lookback* europeas cuando su precio de ejercicio es flotante. Para las opciones *call*, el precio de ejercicio es conocido únicamente al momento del vencimiento de la opción y corresponde al precio mínimo que toma el subyacente durante la vida de la opción, otorgando a su titular el derecho de comprar el subyacente al precio de ejercicio más bajo observado en la vida de la opción. Su función de pago se define de la siguiente forma:

$$\text{Máx}[0, S_T - S_{\min[0,T]}] \quad (1)$$

Por el contrario, en el caso de las opciones *put*, el derecho que se adquiere es el de vender el activo subyacente al precio de ejercicio más alto registrado durante la vida de la opción. La función de pago de esta opción sería:

$$\text{Máx}[0, S_{\max[0,T]} - S_T] \quad (2)$$

Un atractivo de este tipo de opciones es que nunca van a estar fuera del dinero, por lo cual siempre se ejercen. De allí que algunos autores como Yu, Kwok y Wu (2001) argumenten que, por este tipo de características, las opciones *Lookback* con precio de ejercicio flotante no deberían ser consideradas como tales. Debido a su superioridad frente a las opciones tradicionales (*plain vanilla*), instrumentos como las opciones *Lookback* tienen siempre un valor superior, ya que le permiten a su poseedor obtener el mejor resultado, el mejor de los mundos posibles.

Autores como Heynen y Kat (1994) han utilizado las opciones del tipo *Lookback* para ilustrar el problema de entrada y salida del mercado (*market entry-exit problem*). Broadie, Glasserman y Kou (1998) encuentran la manera de discretizar las formulas propuestas por Goldman, Sosin y Gatto (1979), argumentando que el precio de estos instrumentos se obtiene en cualquier momento de su vida de acuerdo a la evolución del subyacente, pero a su vez

este subyacente toma su precio en momentos particulares del tiempo (precios de apertura, cierre, promedios, etc.) con lo cual se puede establecer un modelo discreto para este tipo de opciones. Este tipo de discusión es retomado por Levy y Mantion (1998), quienes definen un método alternativo para la valoración de las opciones *Lookback* discretas.

Contrario a lo estipulado para las opciones *Lookback* con precio de ejercicio flotante, para las que estipulan un precio fijo, éste se conoce desde el momento de su emisión, pero su función de pago depende de los niveles que haya tomado el subyacente en la vida de la opción. De esta manera, el pago de una *call* dependerá de la diferencia entre el valor máximo del subyacente y el precio de ejercicio pactado, mientras que para una *put* es función de la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor mínimo del subyacente.

La función de pago de las opciones *call Lookback* europeas con precio de ejercicio fijo es:

$$\text{Máx}[0, S_{\text{máx}[0,T]} - X] \quad (3)$$

Mientras que para las opciones *put Lookback* europeas con precio de ejercicio fijo es:

$$\text{Máx}[0, X - S_{\text{mín}[0,T]}] \quad (4)$$

Conze y Viswanathan (1991), basándose en el trabajo pionero de Goldman, Sosin y Gato (1979), encontraron las formulas analíticas para valorar este tipo de opciones, las cuales serán desarrolladas más adelante.

Tal como ocurre con las opciones tradicionales, el ejercicio de las *Lookback* puede ser del tipo europeo o americano, según que el ejercicio se pueda dar en una única fecha o pueda ser ejercida en cualquier momento de su vigencia. Conze y Viswanathan (1991), encuentran en su estudio sobre opciones *Lookback* con precio de ejercicio fijo, que el valor de una *call Lookback Europea* es exactamente igual al de una *Americana*, debido a que su ejercicio anticipado no será óptimo para su tenedor sino hasta el vencimiento, mientras que las

puts americanas tendrán un mayor valor que las europeas. El estudio de estos autores se basa en “snell envelopes”, una técnica utilizada para estudiar problemas de convergencia en las opciones cuando el tipo de ejercicio es *Americano*. Barraquand y Pudet (1994), demuestran que esta convergencia no siempre es eficiente y que la mejor solución para obtener este tipo de conclusiones es la utilización de métodos numéricos.⁵

Para la valoración de las opciones americanas no existen formulas analíticas estándar como las de sus pares europeas. Existen aproximaciones de autores como Duffie y Harrison (1993), Min Dai y Yue Kwen Kwork (1991) y Tze Leung Lai y Tiong Wee Lim (2001), que demuestran como el valor de una opción *Lookback* americana debe ser equivalente a una europea más una prima por su ejercicio anticipado. Otros autores como Babbs (2000) sugieren técnicas de valoración para estas opciones basadas en árboles binomiales.

Algunas innovaciones y variantes que se derivan de las opciones *Lookback* son las *Alpha-Quantile options* que difieren de las *Lookback* tradicionales debido a que el subyacente toma sus valores extremos en cualquier momento en el tiempo y no en puntos “estándar” determinados (ej. Precios de cierre, apertura, promedio u hora determinada). Otra versión que se puede encontrar en los mercados son las *Asian Lookbacks* que toman su valor del promedio de valores extremos que del subyacente, combinando así la característica de las opciones *Asiáticas* con la de las opciones *Lookback*; las *Quanto Lookback*, son opciones *Lookback* tradicionales que combinan su función de pago con la característica *Quanto* que permite a su poseedor tener una opción denominada en una moneda pero realizar su pago en otra; finalmente, las *Russian options* son opciones *put Lookback* con tipo de ejercicio americano y con vencimiento a perpetuidad. Existen muchos más desarrollos poco conocidos y transados en los mercados mundiales que incluyen la característica *Lookback*, debido a los grandes beneficios y posibilidades que brinda a su poseedor este tipo de opciones.

⁵ El método FSG (Forward shooting grid) proporciona soluciones numéricas exactas para las opciones *Lookback* de cualquier tipo cuando su ejercicio es del tipo *Americano*. (ver: Barraquand y Pudet (1994), Cox, Ross y Rubenstein (1979)).

Este trabajo se enfoca en las opciones *Lookback* europeas, debido a que son las más transadas en los mercados internacionales, por lo cual probablemente serían las primeras en introducirse en el mercado local. Se analiza los métodos analíticos mencionados previamente y se propone un método de valoración numérico que se ajusta mejor a las condiciones de estos derivados, con lo cual se da un primer paso para el conocimiento y difusión de este tipo de instrumentos que son de gran utilidad para la cobertura de riesgos en los mercados financieros mundiales.

1.1 *Modelos analíticos para valorar opciones europeas del tipo Lookback con precio de ejercicio flotante*

Como se explicó anteriormente, este tipo de opciones permite obtener el mejor precio de compra (o venta) durante la vigencia de la opción. Goldman, Sossin y Gatto desarrollaron en 1979 un modelo analítico⁶ para valorar este tipo de opciones cuando su ejercicio es del tipo europeo.

Los supuestos empleados por estos autores para deducir una fórmula cerrada de valoración para este tipo de opciones son los mismos que emplearon Black y Scholes en 1973, con la salvedad de que el precio de ejercicio es variable y por tanto el valor de estas opciones depende de la trayectoria del precio del subyacente durante la vida de la opción. Los principales supuestos son:

- Mercados financieros sin fricciones, es decir, no existen impuestos ni costos de transacción.
- Todos los activos son perfectamente divisibles.
- Es posible realizar ventas en corto (*short sales*) sin restricciones.
- Es posible prestar y pedir prestado a la misma tasa libre de riesgo r en todo el período de vigencia de la opción, con r capitalizado de manera compuesta continua.
- Las opciones son del tipo Europeas.
- El activo subyacente (en este caso acciones), no paga dividendos.
- No existen oportunidades de arbitraje.

⁶ Ver demostración detallada en el anexo 1.

- El precio del subyacente $S(t)$ sigue un proceso lognormal:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5)$$

Donde $dW \sim N(0, dt)$ representa un proceso Wiener estándar, μ es la tasa esperada de retorno compuesta continua y σ es la volatilidad de los retornos del activo subyacente.

A continuación se define la notación básica que se utiliza en la presentación de los modelos analíticos:

- $0 \leq t \leq T$, siendo t el tiempo actual. $t = 0$ es el momento de emisión de la opción y $T = T$ el tiempo de expiración de la misma. Luego $(T-t)$ será el tiempo faltante para la expiración de la opción.
- S_t : Precio del activo subyacente en el momento t .
- X : Precio de ejercicio fijo pactado.
- r : Tasa de interés libre de riesgo compuesta continua.
- σ^2 : Varianza de las variaciones logarítmicas del precio del subyacente.
- $M(t)$: Máximo precio alcanzado por el activo subyacente durante la vida de la opción hasta el momento t .
- $m(t)$: Mínimo precio alcanzado por el subyacente durante la vida de la opción hasta el momento t .
- $C_{\min}[S_t, m_t, (T-t)]$: Valor de una opción Europea de compra sobre el valor mínimo observado del subyacente, con precio actual S_t y restándole $(T-t)$ para la expiración.
- $P_{\max}[S_t, M_t, (T-t)]$: Valor de una opción Europea de venta sobre el valor máximo observado del subyacente, con precio actual S_t y restándole $(T-t)$ para la expiración.
- q : Tasa de rendimientos por dividendos del activo subyacente.
- rf : Tasa de interés libre de riesgo foránea compuesta continua.

Si los precios siguen un proceso estocástico como en (5), de acuerdo con el lema de Itô, los retornos logarítmicos de un activo financiero siguen un proceso de Wiener con tendencia:

$$d(\ln S) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dZ \quad (6)$$

Ahora bien, el pago de una opción del tipo Europeo con precio de ejercicio flotante puede ser replicado por un portafolio que contenga al activo subyacente y un bono libre de riesgo. Este portafolio cumple con las condiciones necesarias para una cobertura dinámica perfecta, por lo cual puede ser valorado en un mundo neutral al riesgo (Harrison y Kreps, 1979), luego la tendencia del logaritmo del precio del activo subyacente se convierte en⁷ $(r - \frac{\sigma^2}{2})$ y la opción puede ser valorada como el ingreso esperado al vencimiento de la misma descontado a la tasa libre de riesgo. Black y Scholes (1973) han demostrado que, en equilibrio, las opciones *call* y *put* del tipo Europeo pueden valorarse de acuerdo con las siguientes formulas cerradas:

$$C = N(d1)S_t - e^{-r(T-t)} XN(d2) \quad (7)$$

$$P = -N(-d1)S_t + e^{-r(T-t)} XN(-d2) \quad (8)$$

A partir de estas ecuaciones, Goldman, Sosin y Gatto (1979) demuestran que también es posible la cobertura dinámica perfecta para *puts* sobre el máximo y *calls* sobre el mínimo cuando $r = \frac{\sigma^2}{2}$. Para este caso, el emisor de la opción puede cubrirse perfectamente adquiriendo un *straddle*⁸ combinando opciones con un precio de ejercicio igual al precio máximo (*puts*) o mínimo (*calls*) del activo subyacente desde el momento de la emisión y cuyo plazo de expiración sea equivalente al de la opción emitida. Ello garantiza que al vencimiento de la opción sobre el extremo, su suscriptor reciba un ingreso exactamente igual al valor que debe cubrir por dicha opción. Dadas estas condiciones, es posible valorar la misma bajo riesgo neutral como sigue:

⁷ El cambio de la variación logarítmica del precio del subyacente por la tasa libre de riesgo se conoce como transformación de Cox y Ross (1975).

⁸ Estrategia que se construye combinando posiciones largas en una opción *call* y una opción *put* con el mismo precio de ejercicio. También se conoce con el nombre de cono.

$$P_{m\acute{a}x}[S_t, M_t, (T-t)] = e^{-rt} E|_{M \geq S} [M_T - S_T] \text{Pr ob}(M \geq S) \quad (9)$$

$$C_{m\acute{i}n}[S_t, m_t, (T-t)] = e^{-rt} E|_{m \leq S} [S_T - m_T] \text{Pr ob}(m \leq S) \quad (10)$$

donde el valor de la opci3n sobre el extremo ser3 el valor presente del ingreso esperado, condicional a la no existencia de pagos negativos y descontado a la tasa libre de riesgo. Ahora bien, en raz3n a que estas opciones siempre se ejercen, la $\text{Pr ob}(M \geq S) = 1$ y la $\text{Pr ob}(m \leq S) = 1$, luego:

$$P_{m\acute{a}x}[S_t, M_t, (T-t)] = e^{-rt} E[M_T] - S_t \quad (11)$$

$$C_{m\acute{i}n}[S_t, m_t, (T-t)] = S_t - e^{-rt} E[m_T] \quad (12)$$

De all3, que el conocimiento de la probabilidad conjunta no sea necesario, 3nicamente nos interesa la distribuci3n condicional del m3ximo o del m3nimo seg3n el caso (*put o call*). Con esta observaci3n del m3ximo o del m3nimo, es posible encontrar el valor de la opci3n. Si existe un activo que paga el m3ximo realizable ($V_{m\acute{a}x}$) o el m3nimo realizable ($V_{m\acute{i}n}$), dicho valor se puede calcular de la siguiente manera:

$$P_{m\acute{a}x}[S_t, M_t, (T-t)] = V_{m\acute{a}x}[S, M_t, (T-t)] - S_t \quad (13)$$

$$C_{m\acute{i}n}[S_t, m_t, (T-t)] = S_t - V_{m\acute{i}n}[S, m_t, (T-t)] \quad (14)$$

Realizando la transformaci3n de Cox y Ross (1975) y bajo riesgo neutral, se puede obtener las siguientes relaciones de precios para $V_{m\acute{a}x}$ y $V_{m\acute{i}n}$:

$$V_{m\acute{a}x}[S_t, M_t, (T-t)] = M_t e^{-rt} \left[N \left\{ \frac{a - \mu_t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} - \frac{\sigma^2}{2r} e^{2\mu_t/\sigma^2} N \left\{ \frac{-a - \mu_t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} \right] + S_t \left[1 + \frac{\sigma^2}{2r} \right] \left[1 - N \left\{ \frac{a - (\mu + \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} \right] \quad (15)$$

$$V_{m\acute{i}n}[S_t, m_t, (T-t)] = m_t e^{-rt} \left[N \left\{ \frac{b - \mu_t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} - \frac{\sigma^2}{2r} e^{2\mu_t/\sigma^2} N \left\{ \frac{-b + \mu_t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} \right] + S_t \left[1 + \frac{\sigma^2}{2r} \right] \left[1 - N \left\{ \frac{-b - (\mu + \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right\} \right] \quad (16)$$

Donde:

$$a \equiv \ln[M_t / S_t] \geq 0$$

$$b \equiv \ln[S_t / m_t] \geq 0$$

$$\mu \equiv r - \frac{\sigma^2}{2}$$

Estas relaciones cumplen con las condiciones de valor terminal respectivas, esto es:

$$\begin{aligned} V_{\max}[S_T, M_T, 0] &= M_T \\ V_{\max}[0, M_t, t] &= M_t e^{-rt} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_{\min}[S_T, m_T, 0] &= m_T \\ V_{\min}[0, 0, t] &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A partir de allí, Goldman, Sosin y Gatto (1979) obtuvieron las fórmulas cerradas para valorar opciones *Lookback* con precio de ejercicio flotante que se presentan a continuación, generalizadas para el caso de subyacentes que generen ingresos intermedios, v.gr. tasa de rendimiento por dividendos compuesta continua, q .

$$C = S e^{-qt} N(d1) - S_{\min} e^{-rt} N(d2) + S e^{-rt} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[\left(\frac{S}{S_{\min}} \right)^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N\left(-d1 + 2 \frac{(r-q)}{\sigma} \sqrt{T}\right) - e^{(r-q)T} N(-d1) \right]$$

(19) Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S / S_{\min}) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma \sqrt{T}$$

$$P = S_{\max} e^{-rt} N(-d2) - S e^{-qt} N(-d1) + S e^{-rt} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[- \left(\frac{S}{S_{\min}} \right)^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N\left(d1 + 2 \frac{(r-q)}{\sigma} \sqrt{T}\right) - e^{(r-q)T} N(d1) \right]$$

(20) Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S / S_{\max}) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma \sqrt{T}$$

1.2 *Modelos analíticos para valorar opciones europeas del tipo Lookback con precio de ejercicio fijo*

Un método analítico para valorar opciones *Lookback Europeas* con precio de ejercicio fijo, fue introducido por primera vez en 1991 por Conze y Viswanathan, retomando para ello los mismos supuestos empleados por Goldman, Sosin y Gatto (1979).

Para este tipo de opciones donde el precio de ejercicio X es fijo, contrario a las de precio de ejercicio flotante, una opción de compra será una opción sobre el máximo y una de venta será una opción sobre el mínimo. Es decir, el titular ejercerá su derecho de compra si el ingreso al vencimiento, equivalente a la diferencia entre el precio máximo del subyacente durante la vigencia de la opción y el precio de ejercicio, es positiva $(M_{T_0}^T - X)^+$. Para quien adquiere una opción de venta, el ingreso al vencimiento depende de la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio mínimo observado del subyacente $(X - m_{T_0}^T)^+$ en el momento T . En el momento $t = 0$, el valor de una *call* será:

$$C = e^{-rT} E[(\text{máx}(0, M_t - X)] \quad (21)$$

$$P = e^{-rT} E[\max((X - m_t), 0)] \quad (22)$$

Esto es, la solución analítica difiere cuando la opción está dentro del dinero (*In The Money*, ITM) a cuando la misma se encuentra fuera (*Out of The Money*, OTM) o en el dinero (*At The Money*, ATM). Para una *call Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es menor que $S_{\text{máx}}$:

$$C = Se^{-qT} N(d1) - Xe^{-rT} N(d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[-\left(\frac{S}{X}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N\left(d1 - 2\frac{(r-q)}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{(r-q)T} N(d1) \right] \quad (23)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\text{Ln}(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (24)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

En el caso de una *call Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es mayor o igual que $S_{m\acute{a}x}$:

$$C = (S_{m\acute{a}x} - X)e^{-rT} + Se^{-qT}N(d1) - S_{m\acute{a}x}e^{-rT}N(d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[- \left(\frac{S}{S_{m\acute{a}x}} \right)^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N \left(d1 - 2 \frac{(r-q)}{\sigma} \sqrt{T} \right) + e^{(r-q)T} N(d1) \right] \quad (25)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\text{Ln}(S / S_{m\acute{a}x}) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (26)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

De manera similar, estos autores deducen las formulas cerradas para una *put Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es mayor que $S_{m\acute{a}x}$:

$$P = Xe^{-rT}N(-d2) - Se^{-qT}N(-d1) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[- \left(\frac{S}{X} \right)^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N \left(-d1 + 2 \frac{(r-q)}{\sigma} \sqrt{T} \right) - e^{(r-q)T} N(-d1) \right] \quad (27)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\text{Ln}(S / X) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (28)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

Y para una *put Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es menor o igual que $S_{m\acute{a}x}$:

$$P = (X - S_{m\acute{a}x})e^{-rT} - Se^{-qT}N(-d1) + S_{m\acute{a}x}e^{-rT}N(-d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \left[- \left(\frac{S}{S_{m\acute{a}x}} \right)^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} N \left(-d1 + 2 \frac{(r-q)}{\sigma} \sqrt{T} \right) - e^{(r-q)T} N(-d1) \right] \quad (29)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\text{Ln}(S / S_{m\acute{a}x}) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (30)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

Una extensión desarrollada por estos autores, de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo, es la propuesta para opciones sobre el tipo de cambio. Para ello se parte de que es posible escribir todas las formulas cerradas para valoración de opciones *Lookback*, de la siguiente forma:

$$\Pi = e^{-rT} f(r, S_0) \quad (31)$$

Donde f es la función de pago dada por la fórmula. De allí que para opciones sobre tipo de cambio se tiene,

$$\Pi = e^{-rT} f(r - r_f, X_0) \quad (32)$$

Donde r_f es la tasa de interés libre de riesgo foránea y X_0 es la tasa de cambio *spot* o al contado. Para este tipo de subyacente, su rendimiento durante la vida de la opción es equivalente a la tasa libre de riesgo foránea. Luego, para una *call* y una *put Lookback* sobre el tipo de cambio, su valor se calcula sustituyendo q por r_f en (23) y (24):

$$C = Se^{-rfT} N(d1) - Xe^{-rT} N(d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r - rf)} \left[- \left(\frac{S}{X} \right)^{\frac{2(r - rf)}{\sigma^2}} N \left(d1 - 2 \frac{(r - rf)}{\sigma} \sqrt{T} \right) - e^{(r - rf)T} N(d1) \right] \quad (33)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r - rf + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$C = (S_{m\acute{a}x} - X)e^{-rT} + Se^{-rfT} N(d1) - S_{m\acute{a}x}e^{-rT} N(d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r - rf)} \left[- \left(\frac{S}{S_{m\acute{a}x}} \right)^{\frac{2(r - rf)}{\sigma^2}} N \left(d1 - 2 \frac{(r - rf)}{\sigma} \sqrt{T} \right) + e^{(r - rf)T} N(d1) \right] \quad (34)$$

Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S/S_{m\acute{a}x}) + (r - rf + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (35)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

De manera similar, estos autores deducen las formulas cerradas para una *put* sobre tipo de cambio reemplazando q por r_f en (27) y (28):

- *Put Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es mayor que $S_{m\acute{i}n}$:

$$P = Xe^{-rT}N(-d2) - Se^{-rfT}N(-d1) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-rf)} \left[-\left(\frac{S}{X}\right)^{\frac{2(r-rf)}{\sigma^2}} N\left(-d1 + 2\frac{(r-rf)}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{(r-rf)T}N(-d1) \right]$$

(36)

Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r-rf + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (37)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

- *Put Lookback* con precio de ejercicio fijo cuando el precio de ejercicio es menor o igual que S_{\min} :

$$P = (X - S_{\min})e^{-rT} - Se^{-rfT}N(-d1) + S_{\min}e^{-rT}N(-d2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-rf)} \left[-\left(\frac{S}{S_{\min}}\right)^{\frac{2(r-rf)}{\sigma^2}} N\left(-d1 + 2\frac{(r-rf)}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{(r-rf)T}N(-d1) \right]$$

(38)

Donde,

$$d1 = \frac{\ln(S/S_{\min}) + (r-rf + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (39)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

Para analizar la sensibilidad de las opciones *Lookback* sobre tasa de cambio a los distintos parámetros determinantes de su valor tales como la tasa de interés libre de riesgo doméstica y foránea, la volatilidad y el tiempo de expiración, se utilizan las fórmulas analíticas antes mencionadas. El objetivo que se persigue es el de comparar la sensibilidad de las opciones *Lookback* ante cambios en estos parámetros con el que presentan las opciones europeas tradicionales valoradas mediante la extensión planteada para opciones sobre tasa de cambio por Garman y Kolhagen (1983) al modelo Black-Scholes (1973). Los parámetros utilizados para cada una de ellas se pueden ver en la siguiente tabla.

TABLA 1: Parámetros para el cálculo de la sensibilidad en los modelos analíticos.

CALL LOOKBACK CON PRECIO DE EJERCICIO FLOTANTE					
ATM			ITM		
S	1.00		S	1.25	
r	0.09		r	0.09	
rf	0.04		rf	0.04	
m	1.00		m	1.00	
σ	0.05		σ	0.05	
T	0.25		T	0.25	
Call	0.03		Call	0.26	

CALL LOOKBACK CON PRECIO DE EJERCICIO FIJO					
ATM		ITM		OTM	
S	1.25	S	1.00	S	1.00
r	0.09	r	0.09	r	0.09
rf	0.04	rf	0.04	rf	0.20
M	1.25	M	1.50	M	1.00
σ	0.05	σ	0.05	σ	0.05
X	1.25	X	1.25	X	1.25
T	0.25	T	0.25	T	0.25
Call	0.02	Call	0.03	Call	0.00

La sensibilidad del valor de la opción ante cambios en la volatilidad debe ser positiva para opciones *call* y *put*, ya que cuanto mayor sea esta variable, mayor podrá ser el rango de precios del subyacente al vencimiento de la opción. con lo cual la opción podrá quedar muy dentro del dinero, aumentando el riesgo del emisor de la opción, que a su vez reflejará este riesgo en la prima de la opción.

La sensibilidad del valor de la opción ante cambios en la tasa de interés foránea afecta negativamente a las opciones *call* y positivamente a las *put*, debido a que aumentos en la tasa de interés foránea tiene el efecto de depreciar el activo subyacente local.

Ante cambios en la tasa de interés doméstica, la sensibilidad del valor de la opción *call* se explica porque el derecho a comprar en el futuro tiene mayor valor cuando el tipo de interés es alto ya que el valor actual del precio de ejercicio es menor. Para las opciones *put* ocurre lo opuesto, ante aumentos en el tipo de interés doméstico su valor disminuye.

Por último, el propietario de una opción de vida larga tiene la alternativa de ejercer la opción si la volatilidad actúa a su favor, en caso contrario, simplemente la dejará expirar sin ejercerla. Por ello, un mayor tiempo para la expiración de la opción se traduce en una mayor probabilidad de que la opción expire dentro del dinero y, por ello, el valor de la opción se incrementa.

Los resultados obtenidos concuerdan con lo explicado anteriormente, aunque existen ciertas diferencias en cuanto a la magnitud del cambio ante variaciones en los parámetros para las opciones *lookback* y las *plain vanilla*. En las siguientes figuras 1-4 se presentan los resultados obtenidos para opciones *Lookback* de ejercicio flotante y fijo contrastado con opciones del tipo *plain vanilla* con base en los valores de los parámetros definidos en la Tabla 1.

No sorprende que las opciones *Lookback* “at the Money” presentan en todo momento un mayor valor que las tradicionales como puede verse en la figura 1. Adicionalmente, su sensibilidad ante cambios en la volatilidad y el tiempo para la expiración es mayor pues un incremento en ambos parámetros puede hacer que el precio del subyacente se mueva hacia nuevos valores extremos, lo cual incrementa su valor. No así en el caso de cambios en la tasa de interés doméstica, donde son las opciones tradicionales exhiben una mayor sensibilidad. La razón parece residir en el hecho de que las *lookback* requieren de una inversión inicial mayor por ser más costosas, luego dejan menos dinero disponible en el portafolio para inversiones a la tasa libre de riesgo ascendente.

Por otro lado, las opciones *lookback* “in the Money” muestran una sensibilidad similar a las tradicionales cuando ya se encuentran muy en el dinero. Para las *lookback* ITM la probabilidad de ejercicio es uno, y para las tradicionales, si se encuentran “deep in the Money” será prácticamente la misma. Es por ello que ante variaciones en los distintos parámetros, los valores que alcanzan son aproximadamente iguales, tal como se observa en la figura 2. Finalmente, las opciones *lookback* de ejercicio flotante nunca están por fuera del dinero, por lo cual este último caso no se analiza.

Para el caso de las opciones *lookback* con precio de ejercicio fijo, las que están ATM presentan un comportamiento similar a las de ejercicio flotante, esto es, un mayor valor y una mayor sensibilidad ante cambios en los parámetros que las opciones tradicionales, ya que cambios en éstos parámetros harán que el precio del subyacente alcance nuevos valores extremos y podrán hacer que la opción se mueva hacia el dinero.

Las opciones *lookback* ITM parecen ser menos sensibles ante cambios en los parámetros, este comportamiento puede explicarse debido a que con los datos de entrada iniciales estas opciones se encuentran muy dentro del dinero⁹ lo cual las hace poco sensibles ante cambios de los parámetros. Para las opciones *lookback* “out of the money” se encontró que la opción fuera del dinero es prácticamente insensible ante cambios en los parámetros estudiados pues se requiere que el precio del subyacente alcance un nuevo extremo para que cambie su valor casi nulo o nulo, mientras que en las tradicionales cualquier cambio puede afectar su valor aunque se encuentre por fuera del dinero.

⁹ El pago de la opción sería igual a $X-S = 1.25-1=0.25$, que es el 25% del precio del subyacente.

Figura 1: Call Lookback con precio de ejercicio flotante “at the money”

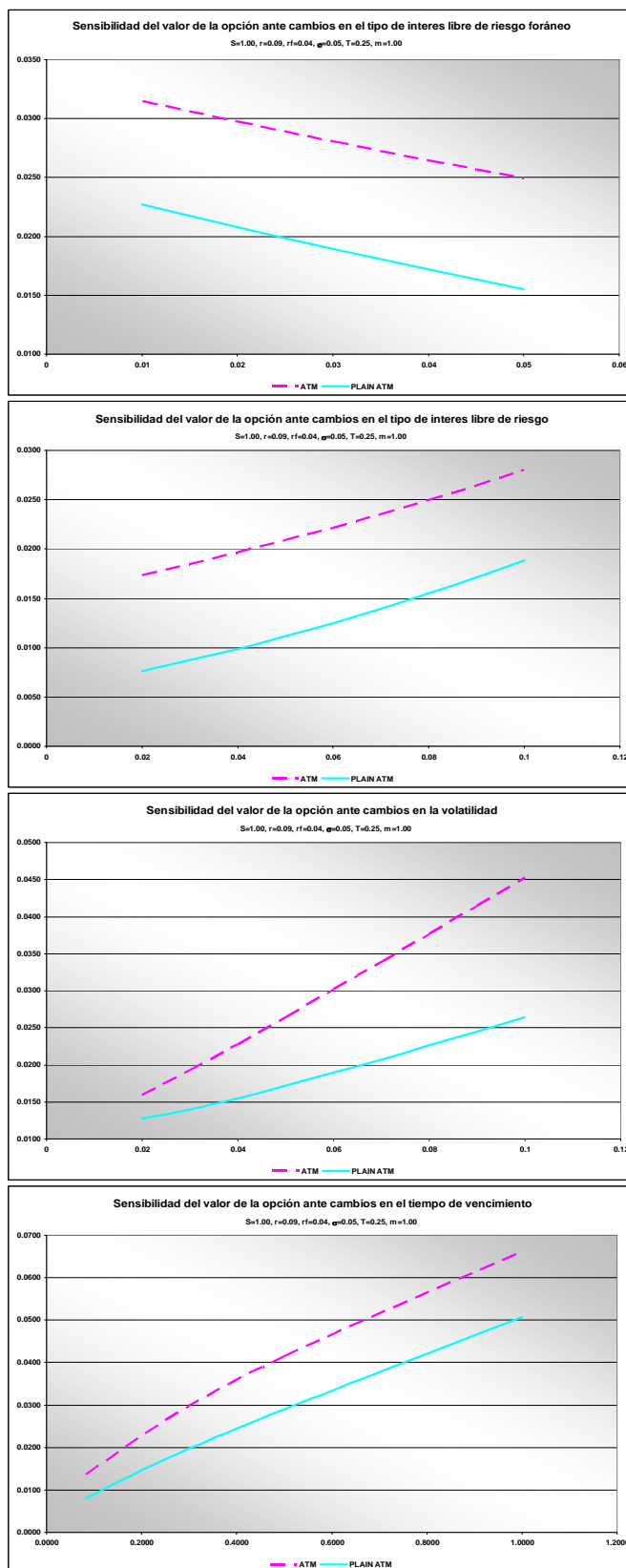


Figura 2: Call Lookback con precio de ejercicio flotante “deep in the money”

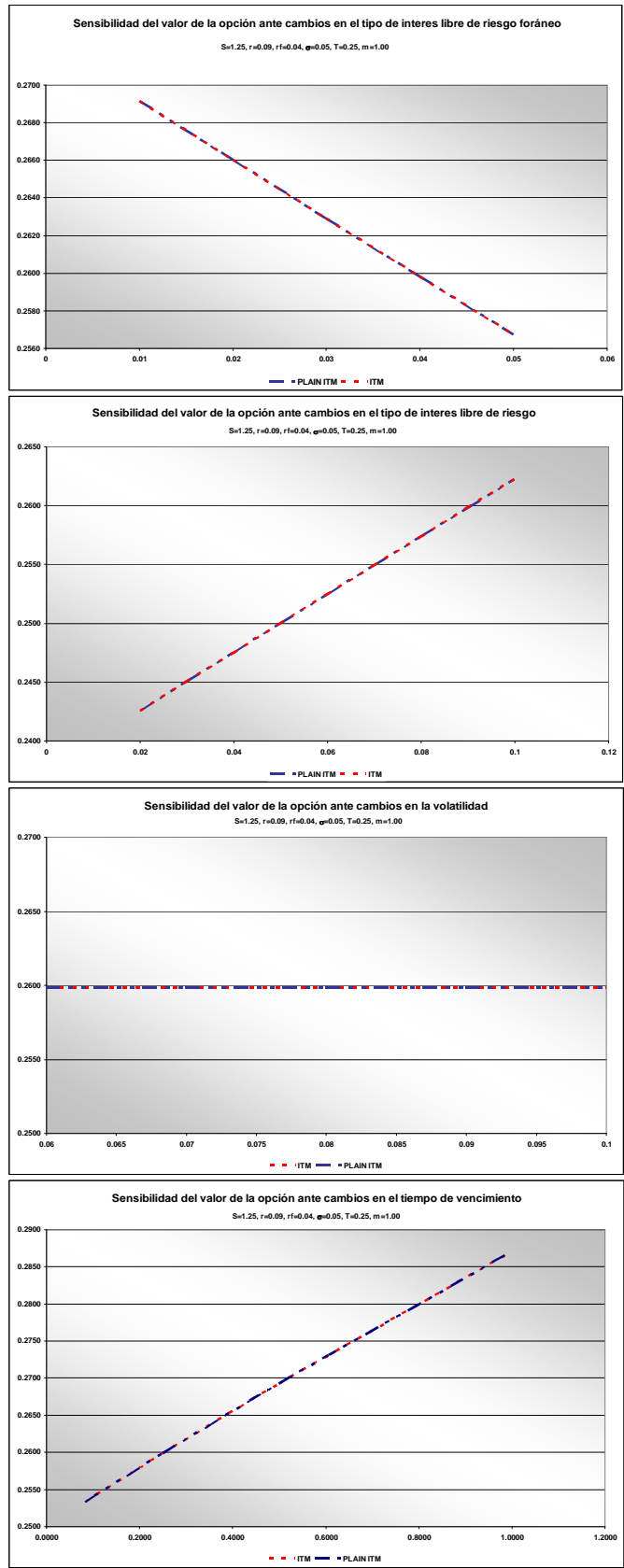


Figura 3: Call Lookback con precio de ejercicio fijo “at the money”

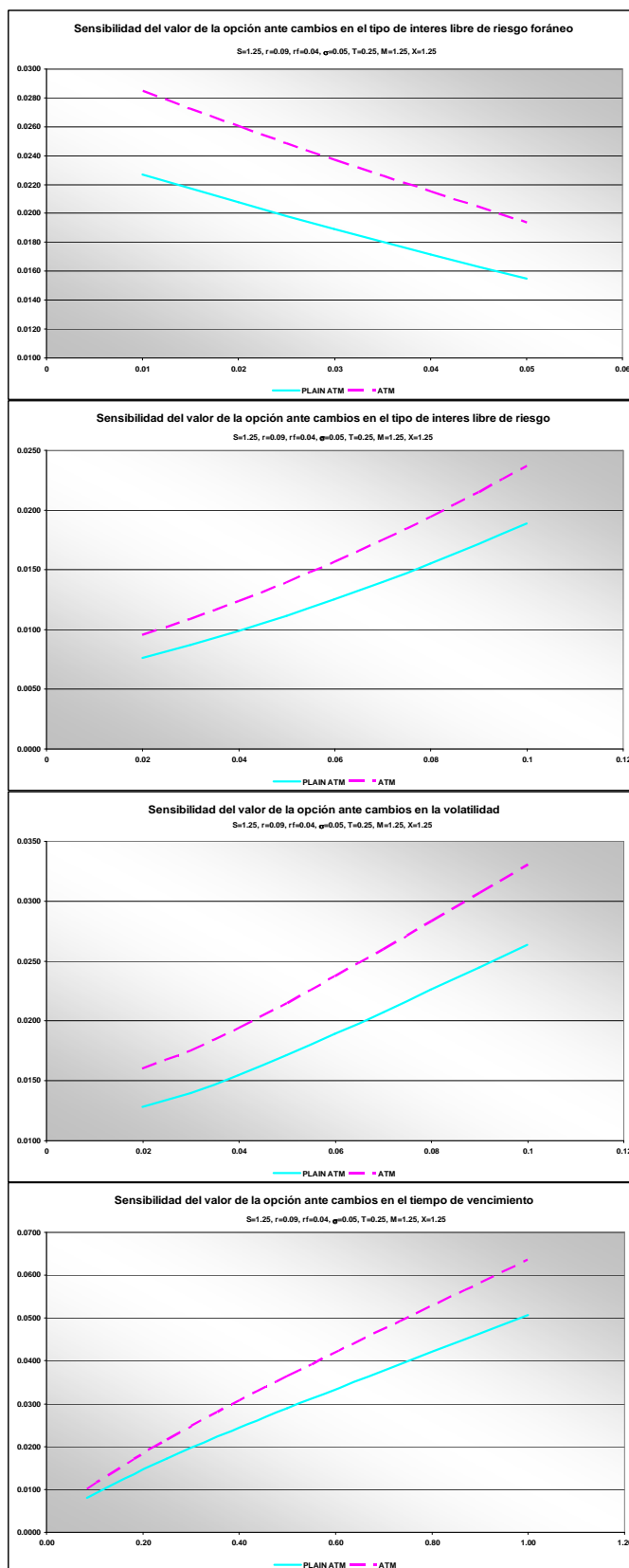
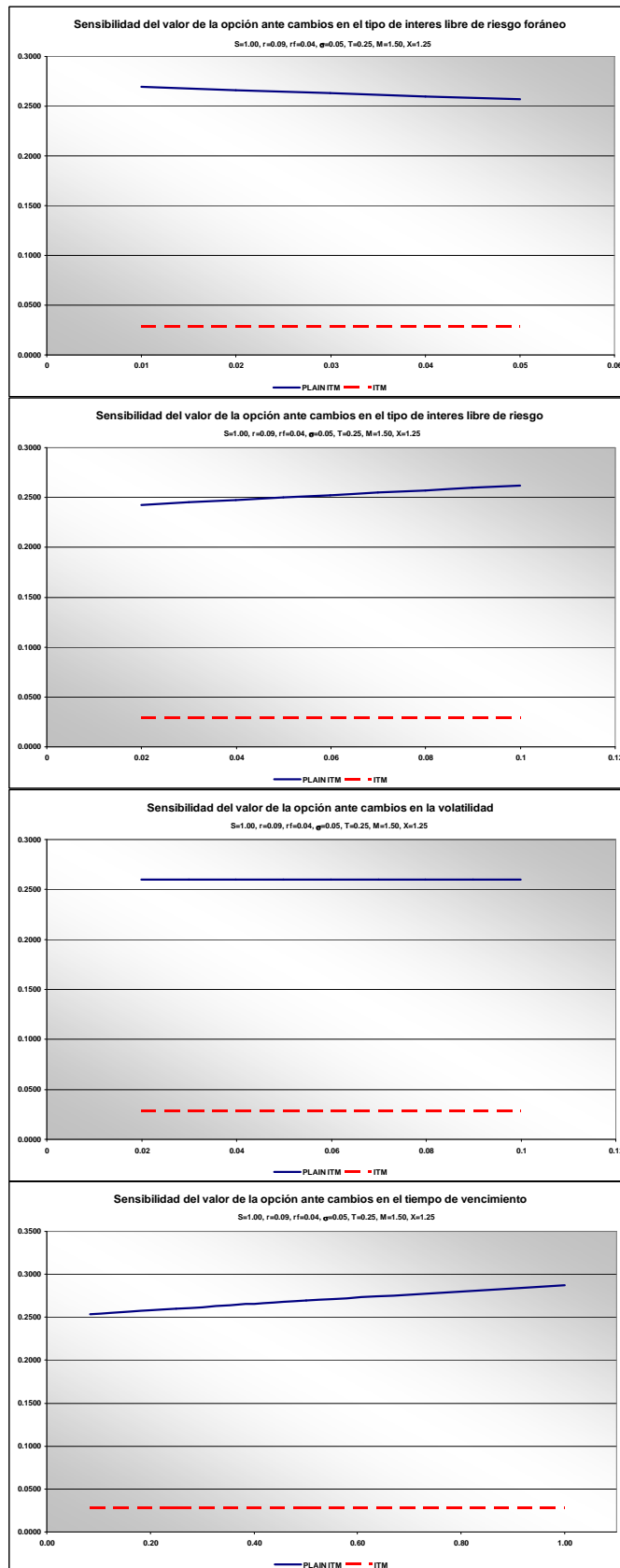


Figura 4: Call Lookback con precio de ejercicio fijo “in the money”



Una de las limitaciones de las funciones analíticas expuestas anteriormente, es que se asume un máximo o un mínimo de acuerdo al conjunto de información que se tiene disponible hasta el momento de la valoración. Con ello no se tiene en cuenta la evolución futura del precio del activo subyacente. El método de Monte Carlo permite corregir este problema, ya que se permite simular trayectorias de precios futuros del subyacente sin limitar la valoración a la información existente.

2. Método de Monte Carlo para valoración de opciones *lookback*.

2.1 Método de Monte Carlo para valorar opciones: el caso de volatilidad constante.

El método Montecarlo para valoración de opciones fue introducido por Boyle (1977), y es actualmente muy utilizado para la valoración de la mayoría de opciones *exóticas*. Si la variación en el precio del activo subyacente sigue un proceso Browniano geométrico, al aplicar el Lema de Ito se obtiene que la variación logarítmica del precio sigue:

$$d \ln S = \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \right] \quad (40)$$

Donde,

- S: Precio del activo subyacente.
- μ : Tasa de retorno esperada del activo subyacente.
- σ : Volatilidad de las variaciones logarítmicas del activo subyacente.
- dW : Proceso de Wiener.

Para simular el proceso, es necesario discretizar la ecuación (40), con lo cual obtenemos:

$$S + \Delta S = S \times e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma E_t \sqrt{\Delta t} \right]} \quad (41)$$

Donde,

ΔS : Es el cambio discreto para S en el intervalo de tiempo seleccionado.

μ : Tasa de retorno esperada del activo subyacente.

σ : Volatilidad de las variaciones logarítmicas del activo subyacente.

E_t : Número aleatorio que se distribuye $\phi(0,1)$.

Con ayuda de métodos computacionales, se puede generar miles de innovaciones E_t y simular diferentes trayectorias para el precio de S . El valor de la opción se calcula en cada una de las sendas simuladas de acuerdo con su función de pago, traído a valor presente a la tasa libre de riesgo. Finalmente, lo que se obtiene con el método Monte Carlo es una distribución del valor esperado de la opción y una estimación del error que nos permite determinar un intervalo de confianza dado un cierto nivel de significancia. El error es proporcional a $1/\sqrt{N}$, siendo N el número de sendas generadas para el precio del subyacente.

Una ventaja de este método para la valoración de opciones exóticas *path dependent* es su flexibilidad, ya que permite conocer la trayectoria que ha seguido el precio y calcular variadas funciones de pago para la opción, así como la modelación del precio del subyacente con distribuciones diferentes a la lognormal como se verá más adelante en este trabajo.

Para evaluar el método de Monte Carlo aplicado a las opciones *Lookback*, se empleó el software MatLab con los parámetros descritos en la tabla 2 para obtener el valor de una opción *call lookback* con precios de ejercicio flotante y fijo. Los valores de la tasa de interés local y la foránea son las tasas de referencia del Banco de la República de Colombia y la Reserva Federal de Estados Unidos, respectivamente. La volatilidad es calculada como la desviación estándar de las variaciones logarítmicas del tipo de cambio en lo corrido del presente año. El valor de estos parámetros se selecciona de esta forma con el propósito de comparar con el valor de las opciones *lookback* cuando la tasa de cambio presenta de volatilidad estocástica. Más adelante se

desarrollará una aplicación al caso colombiano con datos reales extraídos del mercado.

TABLA 2: Parámetros para la simulación de Monte Carlo en presencia de volatilidad constante.

<i>Lookback con precio de ejercicio flotante</i>	
S	1.00
r	0.09
rf	0.04
σ	0.05
T	0.25

<i>Lookback con precio de ejercicio fijo</i>	
S	1.00
r	0.09
rf	0.04
σ	0.05
X	1.00
T	0.25

Con estos parámetros, los resultados obtenidos para 100.000 iteraciones fueron los siguientes:

Tabla 3. Valor opción call lookback con volatilidad constante

	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback con precio de ejercicio Flotante</i>	0.1117	0.1114 - 0.1119
<i>call Lookback con precio de ejercicio Fijo</i>	0.1139	0.1136 - 0.1142

2.2 Método de Montecarlo para valorar opciones: el caso de volatilidad estocástica.

Hasta ahora se ha asumido volatilidad constante para la valoración de las opciones *lookback*, tanto en su forma analítica como por medio de la simulación. Se ha demostrado en múltiples estudios que los activos financieros no siguen una distribución lognormal y, por consiguiente, la volatilidad no es constante. (Wilmott, 1998). En Colombia hay trabajos que demuestran esto para la tasa de cambio bajo estudio (Maya, 2006) que muestra la no normalidad de los retornos de los activos y la presencia de colas pesadas¹⁰. Para este caso no se aplican las fórmulas analíticas presentadas anteriormente. Es por ello que se recurre nuevamente al método de Monte Carlo para valorar opciones del tipo *Lookback* en presencia de volatilidad estocástica.

Existe una gran cantidad de literatura acerca de los procesos de volatilidad estocástica y de su utilización en la valoración de opciones. Heston (1993) propone una fórmula cerrada de valoración de una opción *call* europea utilizando un proceso de volatilidad de raíz cuadrada con las características de la transformación de Fourier. Bakshi, Cao y Chen (1997) proponen modelos alternativos al de Heston para la valoración de opciones incluyendo volatilidad estocástica y de salto difusión. Schöbel y Zhu (2000) derivan una forma de valorar opciones retomando el proceso de volatilidad propuesto por Ornstein-Uhlenbeck. Hull y White (1987) y Sanabis (2002) obtienen soluciones no cerradas, por medio de expansiones de Taylor que se basan en la distribución condicional del activo subyacente.

Sin embargo, para el caso de las opciones exóticas no es mucho lo que se ha escrito. Para opciones que dependen de la evolución del subyacente Davydov y Linetsky (2001) derivaron una fórmula cerrada de valoración, en términos de funciones Bessel para opciones del tipo *Barrera* y *Lookback*, bajo un proceso de elasticidad constante de la varianza.¹¹

¹⁰ Para el activo sujeto a este estudio, la tasa de cambio peso colombiano / dólar americano, ese es el caso como puede verse en el anexo 2 del apéndice.

¹¹ Constant Elasticity of Variance (CEV) Model.

Henderson y Hobson (2000) utilizan métodos numéricos para valorar opciones *Passport* basándose en los procesos de Hull y White (1987) y de Stein y Stein (1991). Para nuestro estudio se utilizará el modelo propuesto por Heston, debido a que fue propuesto desde sus inicios para valorar opciones sobre el tipo de cambio del tipo *plain vanilla*; además, para el caso de la tasa de cambio bajo estudio ha demostrado que ofrece una buena aproximación (Grajales, 2006).

En el modelo de Heston (1993), el proceso estocástico que sigue el precio de un activo financiero y su varianza se describe por las siguientes ecuaciones:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \quad (42)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \quad (43)$$

Donde μ , θ , k y σ son constantes, μ es la tasa esperada de retorno del activo subyacente, θ es la media de la varianza de largo plazo, k es la velocidad de reversión a la media de largo plazo, σ es la volatilidad asociada a V_t , también denominada v-vol ó volatilidad de la volatilidad y ρ es la correlación entre los dos procesos de Wiener $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$.

Aplicando el método de valoración de riesgo neutral y haciendo $X_t = \ln(S_t)$, se puede describir la dinámica del precio del subyacente así,

$$dX_t = \left[r - \frac{1}{2} v_t \right] dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(1)} \quad (44)$$

$$dv_t = \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \quad (45)$$

Las ecuaciones (42) y (43) pueden llevarse a un intervalo de tiempo discreto, empleando una discretización de Euler, logrando que el precio S_{it} y la varianza v_{it} en el momento ti puedan aproximarse a

$$S_{it} = S_{it-1} + \mu S_{it-1} \Delta t + \sqrt{v_{it-1}} S_{it-1} \Delta W_{it}^{(1)} \quad (46)$$

$$v_{it} = v_{it-1} + \kappa(\theta - v_{it-1})\Delta t + \sqrt{v_{it-1}} \sigma \left[\rho \Delta W_{it}^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta Z_{it} \right] \quad (47)$$

Con $1 \leq i \leq n$, $\Delta W_{it}^1 = (W_{it}^1 - W_{it-1}^1) \sim N(0, \sqrt{\Delta t}) iid$

$\Delta Z_{it} = (Z_{it} - Z_{it-1}) \sim N(0, \sqrt{t}) iid$.

Teniendo en cuenta la dinámica del subyacente, podemos simular n trayectorias del tipo de cambio peso colombiano / dólar americano en presencia de volatilidad estocástica. Para ello se utilizarán los datos descritos en la Tabla 2 y además los siguientes parámetros obtenidos siguiendo la metodología de Grajales (2006) para la serie de precios de cierre del tipo de cambio peso colombiano / dólar americano entre el primero de enero de 2003 y el 31 de diciembre de 2006.

**Tabla 4. Estimación parámetros Heston (1993). Tasa de cambio COP/USD
2003-2006**

μ	-0.08730739292405
θ	0.00328494511856
σ (v-vol)	0.49446069287568
k	21.71988707536190
ρ	-0.01117657604546

Con estas trayectorias, se calcularon los valores para las primas de las opciones *call lookback* con precio de ejercicio flotante y fijo. Los resultados obtenidos para 100.000 iteraciones fueron:

Tabla 5. Valor opción call lookback con volatilidad estocástica (Heston 1993)

	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante	0.1521	0.1514 - 0.1528
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo	0.1613	0.1606 - 0.1620

Al comparar los resultados de la tabla 3 y la tabla 5, se observa claramente que al tener en cuenta la volatilidad estocástica, el valor de las opciones aumenta debido a que, como se explicó anteriormente, al asumir normalidad se subestiman las colas gordas de la distribución. Claramente se muestra que cuando se asume volatilidad constante en la valoración de activos financieros como el tipo de cambio, se puede llegar a conclusiones equivocadas. Es por ello que en la última parte de este trabajo, la cual consiste en una aplicación para el caso colombiano, se utilizará el método propuesto que involucra volatilidad estocástica.

3. Aplicación para la valoración de opciones *lookback* sobre la tasa de cambio peso colombiano / dólar americano.

Luego de haber estudiado las bondades que puede brindar este tipo de instrumento de cobertura, surge la inquietud de conocer su costo para una empresa del sector real en Colombia. Para un importador sería útil adquirir opciones del tipo *call lookback* que le permitan adquirir dólares en el futuro al mejor precio posible, en tanto para un exportador lo ideal es tomar posiciones largas en *puts lookback* por las que pueda vender sus ingresos futuros en dólares al mejor precio. La pregunta es, por supuesto, si una cobertura de este tipo resulta prohibitiva con respecto al precio de otras opciones actualmente ofrecidas en el mercado local.

Para contestar el interrogante planteado, se computa el valor de la prima de las opciones *lookback* con precio de ejercicio fijo bajo volatilidad estocástica y se compara con el costo de la prima para las opciones *lookback* cuando se asume volatilidad constante así como el de las opciones tradicionales (*Plain vanilla*) existentes. Las opciones *lookback* con precio de ejercicio flotante no

son comparables con las opciones tradicionales, debido a que no poseen un precio de ejercicio fijado desde la emisión de la opción, y por el contrario este valor se conoce únicamente en el momento de su expiración, ya que es producto de la evolución del precio del activo subyacente.

Los datos empleados para esta aplicación son los valores del tipo de cambio peso colombiano / dólar americano desde el 1 de enero de 2003 hasta el 31 de diciembre de 2006. A partir de esta serie histórica se estiman los parámetros del proceso estocástico de Heston (1993) de acuerdo con Grajales (2006).

A continuación se valora una *call Lookback*⁸ con precio de ejercicio flotante y con precio de ejercicio fijo asumiendo volatilidad estocástica. Esta última se compara con una *lookback* con volatilidad constante y una *plain vanilla* para tres períodos diferentes de 1 mes, 3 meses y 6 meses. Para el tipo de interés libre de riesgo foráneo se toma como referencia la tasa LIBOR⁹ a los plazos propuestos debido a que esta es la tasa de referencia global en los mercados de derivados de tasa de cambio.

El tipo de interés libre de riesgo local se define con las tasas de los TES¹⁰ con vencimiento en los mismos plazos del derivado respectivo, contado a partir del primero de junio; así, el promedio de la tasa de los TES con vencimiento en julio, septiembre y diciembre, servirán para los plazos de 1, 3 y 6 meses, respectivamente. Se escogió este tipo de instrumento como proxy de la tasa libre de riesgo local debido a que en el mercado colombiano existen pocas alternativas para este tipo de estudios; además, las tasas de referencia disponibles como la DTF¹¹ tienen problemas metodológicos en su cálculo que son tema de discusión y estudio actualmente.

Finalmente, para el valor del activo subyacente se utilizarán los valores del tipo de cambio peso colombiano / dólar americano teniendo como referencia precios de 1900, 2000 y 2100 pesos colombianos por dólar para opciones *call*

⁸ El precio de la *call Lookback* se calcula con la metodología de Heston como se vió en la sección anterior, pues es la manera correcta de valorar este tipo de instrumentos.

⁹ London Interbank Offered Rate (LIBOR).

¹⁰ Títulos de deuda soberana de la República de Colombia.

¹¹ DTF: Tasa promedio de captación de certificados de depósito a término (CDT) de los intermediarios financieros en Colombia.

fuera, en y dentro del dinero, respectivamente. El resumen de los diferentes parámetros y sus respectivos valores se puede ver en la tabla 6.

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 7 y muestran claramente que el valor de las opciones *Lookback* con precio de ejercicio fijo es superior al de sus pares tradicionales. Esto se puede intuir dada la cobertura superior que brinda este tipo de opciones como se ha visto a lo largo de este trabajo.

TABLA 6: Parámetros para aplicación al caso colombiano.

Modelo de Heston

<i>Call Lookback</i>	30 días	90 días	180 días
μ	-0.08730739292405	-0.08730739292405	-0.08730739292405
θ	0.00328494511856	0.00328494511856	0.00328494511856
σ (<i>v-vol</i>)	0.49446069287568	0.49446069287568	0.49446069287568
k	21.71988707536190	21.71988707536190	21.71988707536190
ρ	-0.01117657604546	-0.01117657604546	-0.01117657604546
S	1,900	1,900	1,900
	2,000	2,000	2,000
	2,100	2,100	2,100
X	2,000	2,000	2,000
rf	5.32%	5.36%	5.39%
r	7.50%	7.70%	7.98%
N (<i>iteraciones</i>)	100,000	100,000	100,000

Volatilidad Constante

<i>Call Lookback</i>	30 días	90 días	180 días
S	1,900	1,900	1,900
	2,000	2,000	2,000
	2,100	2,100	2,100
X	2,000	2,000	2,000
σ	5.48%	5.48%	5.48%
rf	5.32%	5.36%	5.39%
r	7.50%	7.70%	7.98%
N (<i>iteraciones</i>)	100,000	100,000	100,000

Modelo de Black-Scholes

<i>Call Plain vanilla</i>	30 días	90 días	180 días
S	1,900	1,900	1,900
	2,000	2,000	2,000
	2,100	2,100	2,100
X	2,000	2,000	2,000
σ	5.48%	5.48%	5.48%
rf	5.32%	5.36%	5.39%
r	7.50%	7.70%	7.98%

Los resultados para las opciones *call Lookback* con precio de ejercicio fijo frente a las opciones tradicionales y frente a la valoración con volatilidad constante son:

Tabla 7. Comparación valores opciones *plain vanilla*, *lookback* con volatilidad constante y volatilidad estocástica

S=1900, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días Heston	0.1706	0.1543 - 0.1868
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días	0.0104	0.0080 - 0.0127
<i>call Plain Vanilla</i> 30 días	0.0074	-

S=2000, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días Heston	23.3521	23.2127 - 23.4915
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días	23.3425	23.2183 - 23.4666
<i>call Plain Vanilla</i> 30 días	14.4380	-

S=2100, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días Heston	123.3077	123.1560 - 123.4595
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 30 días	123.2788	123.1445 - 123.4132
<i>call Plain Vanilla</i> 30 días	103.1776	-

S=1900, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días Heston	3.0394	2.9540 - 3.1248
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días	1.7101	1.6592 - 1.7609
<i>call Plain Vanilla</i> 90 días	1.0597	-

S=2000, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días Heston	47.0071	46.7576 - 47.2565
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días	45.605	45.3830 - 45.8270
<i>call Plain Vanilla</i> 90 días	27.7403	-

S=2100, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días Heston	147.3678	147.1016 - 147.6340
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 90 días	145.7173	145.4817 - 145.9529
<i>call Plain Vanilla</i> 90 días	110.6544	-

S=1900, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días Heston	12.6113	12.4202 - 12.8025
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días	9.9243	9.7749 - 10.0737
<i>call Plain Vanilla</i> 180 días	6.1991	-

S=2000, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días Heston	73.4166	73.0581 - 73.7752
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días	70.0994	69.7752 - 70.4237
<i>call Plain Vanilla</i> 180 días	44.0641	-

S=2100, X=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días Heston	173.3641	172.9852 - 173.7431
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Fijo 180 días	169.1642	168.8238 - 169.5046
<i>call Plain Vanilla</i> 180 días	124.1985	-

Puede observarse que con la metodología propuesta que considera volatilidad estocástica, se obtienen valores superiores para las primas de las opciones Lookback, este comportamiento se debe a que la distribución del tipo de cambio en presencia de volatilidad constante considera una cantidad inferior de eventos extremos ya que se basa en una distribución normal, mientras que el proceso de Heston (1993) simula de manera más aproximada el número de estos eventos y genera una distribución con colas más gordas. También puede notarse que a medida que se incrementa el tiempo de vigencia de la opción, aumenta la brecha entre la valoración propuesta y la que considera volatilidad constante debido a que a mayor tiempo, existe una mayor posibilidad de alcanzar valores más extremos que con el método de valoración tradicional.

En cuanto al valor de las opciones lookback en comparación con el de las plain vanilla, en ocasiones dicho valor dobla o triplica el de estas últimas. Aunque en principio parece relativamente alto, debe tenerse en cuenta que la calidad de la cobertura que ofrecen unas y otras es muy diferente. En el caso de las lookback, la cobertura que se adquiere con ellas es de tal calidad que siempre ubica al tenedor de estas opciones en el mejor de los mundos posibles, luego no es de extrañar que su valor sea sustancialmente más alto que las de las plain vanilla.

Los resultados para las opciones *call lookback* con precio de ejercicio flotante frente a la valoración de las mismas en presencia de volatilidad constante son:

S=1900	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días Heston	21.4598	21.3300 - 21.5895
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días	21.3476	21.2337 - 21.4616
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días Heston	43.8503	43.6163 - 44.0843
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días	42.3379	42.1298 - 42.5459
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días Heston	68.4675	68.1319 - 68.8031
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días	64.5201	64.2180 - 64.8222

S=2000	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días Heston	22.6179	22.4808 - 22.7551
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días	22.6097	22.4895 - 22.7299
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días Heston	46.1186	45.8737 - 46.3634
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días	44.6439	44.4247 - 44.8630
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días Heston	71.779	71.4251 - 72.1328
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días	68.461	68.1409 - 68.7810

S=2100	Prima	Intervalo de confianza
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días Heston	23.7079	23.5647 - 23.8510
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 30 días	23.6144	23.4884 - 23.7403
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días Heston	48.3449	48.0876 - 48.6022
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 90 días	46.8178	46.5885 - 47.0470
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días Heston	75.5875	75.2153 - 75.9598
<i>call Lookback</i> con precio de ejercicio Flotante 180 días	71.751	71.4163 - 72.0856

En el caso de las opciones *Lookback* con precio de ejercicio flotante puede observarse un comportamiento similar al que se evidencia en las de precio de ejercicio fijo. A medida que se incrementa el tiempo de expiración de la opción, el valor de la opción valorada con la metodología de Heston (1993) se incrementa en una mayor proporción que el de la opción *lookback* valorada con la metodología tradicional que considera volatilidad constante, ello sucede porque se incrementa el tiempo y con ello la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos. Finalmente, la diferencia de precios es mayor en la medida en que la opción se va ubicando más dentro del dinero.

CONCLUSIONES

Con este trabajo se propone una metodología más ajustada a las características del derivado y del activo subyacente para la valoración de opciones exóticas del tipo *Lookback* y se aplica al caso colombiano para cubrir el tipo de cambio peso colombiano / dólar americano. Con esta metodología, es posible observar un mayor valor en las primas de las opciones *Lookback* frente a sus pares tradicionales (*Plain vanilla*), debido a las bondades que ofrecen las primeras, como es brindar a su tenedor la posibilidad de comprar (*calls*) o vender al precio más favorable.

Se concluye también que al considerar volatilidad constante se subvalora estas opciones, ya que se subestima la probabilidad de ocurrencia de valores extremos o “colas gordas” característica de la distribución del tipo de cambio peso / dólar americano. Lo adecuado es considerar volatilidad estocástica en este caso y metodologías que se adecuen a un proceso de esta naturaleza como es el método de Monte Carlo.

Una alternativa que surge ante el alto costo de estas opciones, es de las opciones denominadas *Partial Lookback*, en donde se pacta un período de tiempo parcial para que el subyacente tome sus valores máximo o mínimo, es decir, el tiempo de vigencia de la opción es el mismo que en una opción *Lookback* estándar, pero el tiempo en que el subyacente toma sus valores extremos para efectos del pago de la opción es menor. Ante la sensibilidad demostrada por estas opciones ante incrementos en el tiempo, es de esperar que su costo será relativamente mucho más económico que el de las estándar.

Es importante para este tipo de instrumentos que aún no son transados en el mercado local, el que se difundan metodologías correctas de valoración como la propuesta en este estudio. Con ello se logra que las entidades financieras, al tener un mayor conocimiento de estos instrumentos y del riesgo que asumen al emitirlos, los incorporen en su portafolio de productos. El resultado sería el de comenzar a profundizar el mercado de derivados en Colombia, que a diferencia de los otros mercados de derivados latinoamericanos no ha presentado un desarrollo sobresaliente en las últimas décadas.

Por último cabe destacar que esta metodología es aplicable a las demás opciones exóticas *path dependent*, teniendo en cuenta la definición y la correspondiente función de pago de cada una de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Akahori, J. "Some Formulae for a New Type of Path-Dependent Option". *The Annals of Applied Probability*, Vol. 5, 1995. Pp.383-388.

Andersson, Kristina. "Stochastic Volatility". Uppsala University, Department of Mathematics. 2003.

Avram, F. Kyprianou, A. and Pistorius, M. "Exit Problems for Spectrally Negative Levy processes and applications to (Canadized) Russian Options". *The Annals of Applied Probability*, Vol. 14, 2004. Pp. 215-238.

Babbs, S. "Binomial Valuation of Lookback Options", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 24, (1992, 2000). Pp. 1499-1525.

Ballotta, L. "Lévy processes, Option Valuation and Pricing of the Alpha-Quantile Option". Monografia dell'Istituto di Econometria e Matematica, Università Cattolica Sacro Cuore Milano, Thesis. 2001.

Barraquand, J. and Pudet, T. "Pricing of American path-dependent contingent claims". *Mathematical Finance*, Vol. 6, 1996. Pp. 17-51.

Bermin, H. "Essays on Lookback & Barrier Options - A Malliavin Calculus Approach", Working Paper, 1998.

Black, F. and Scholes, M. "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, 81, 1973. Pp 637-659.

Bowie, Jonathan and Carr, Peter. "Static Hedges for Barrier and Lookback options". Risk conference on equity derivatives. 1994.

Boyle, P. "Options: A Monte Carlo approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, 1977. Pp 323-338.

Boyle, P. and Tian, Yisong. "Pricing Lookback and Barrier options under CEV process". *Journal of financial and quantitative analysis*, Vol. 34, No. 2, 1999. Pp. 241-264.

Boyle, P. Tian, Yisong and Imai Junichi. "Lookback options under CEV process: A correction". University of Waterloo, Centre for advanced studies in finance. 1999.

Brady, S. "Handle Exotics with Care". *Corporate Finance*, march, 1994. Pp 38-39.

Broadie, Mark and Kaya, Özgür. "Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes". Columbia University, Department of Industrial engineering and operations research. 2003.

Chernov, M. and Ghysels, E. "Estimation of the stochastic volatility models for the purpose of options valuations". Computational Finance sixth international conference, MIT, Cambridge, 2000.

Cheuk, T. and Vorst, T. "Currency Lookback Options & Observation Frequency: A Binomial Approach". *Journal of International Money & Finance*, Vol. 16, No. 2, 1997. Pp 173-187.

Conze, Antoine and Viswanathan. "Path dependent options: The case of Lookback options". *The Journal of Finance*, Vol 46, (1991). Pp 1893-1907.

Cox, J. and Ross, S. "The valuation of options for alternative stochastic processes". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 1976. Pp 145-166.

Cox, J. Ross, S. and Rubinstein, M. "Option pricing: A simplified Approach". *Journal of financial economics*. Vol. 7, 1979. Pp. 229-263.

Crespo Espert, J.L. "Valoración de Opciones Exóticas. Aplicación a los Productos Indizados emitidos y Comercializados en España". Tesis Doctoral U.A.M. Febrero, 1998.

Crespo Espert, J.L. "Opciones exóticas: tipología, valoración y cobertura". *Cuadernos de Derecho y Comercio*, Consejo General de los Colegios Oficiales de Corredores de Comercio, Ed. Dykinson, Madrid. Pp 301-336.

Dai, Min and Kwen, You. "American options with Lookback payoff". National Singapore university, 2001.

Darrel, J. and Harrison, Michael. "Arbitrage pricing of Russian options and perpetual Lookback options". *The annals of applied probability*. Vol. 3. Pp 641-651.

Dragulescu, Adrian and Yakovenko, Victor. "Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility". *Quantitative Finance*, Vol 2, 2002. Pp 443-453.

Erkstrom, E. "Russian Options with a Finite Time Horizon". *Journal of Applied Probability*, Vol. 41, No. 2, 2004. Pp.313-326.

Fiorentini, G. León, A. and Rubio, G. "Estimation and empirical performance of Heston's stochastic volatility model: the case of a thinly traded market. *Journal of empirical Finance*, Vol. 9. 2002. Pp. 225-255.

Gatheral, Jim. "Stochastic Volatility and local volatility". Merrill Lynch. 2002.

Gerbert, Hans and Shiu, Elias. "Pricing Lookback options and dynamic guarantees". University of Lausanne, Switzerland. 2003.

Gobet, Emmanuel and Kohatsu-Higa, Arturo. "Computation of Greeks for Barrier and Lookback options using Malliavin Calculus". *Electronic communications in probability*. November 13, 2002.

Goldman, B. Sosin, H. and Gatto, M. "Path dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, Vol.34, No.5, 1979. Pp.1111-1127.

Grajales, Carlos. "Modelación estocástica de la tasa de cambio peso colombiano - us dólar". Universidad EAFIT, Escuela de ciencias y humanidades, Maestría en matemáticas aplicadas. 2006.

Heston, Steven. "A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options". *The review of financial studies*, Vol.6, No. 2, 1993. Pp 327-343.

Heynen, R. and Kat, H. "Lookback options with Discrete and Partial Monitoring of the Underlying Price". *Applied Mathematical Finance*, Vol. 2, 1995. Pp 273-283.

Hull, J. and White, A. "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options". *Journal of Derivatives*, Vol. 1, 1993. Pp. 21-31.

Hull, J. and White, A. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility". *Journal of Finance*, Vol. 42, 1987.

Hull, J. "*Options, Futures & Other Derivatives*". 5th Edition 2002 - Chapter 12.

Kat, H. "Pricing Lookback Options Using Binomial Trees: An Evaluation". *Journal of Financial Engineering*, Vol. 4, 1995. Pp 375-397.

Lamothe, Prósper. Perez, Miguel. "*Opciones Financieras y Productos Estructurados*". Mc Graw Hill, Madrid, 2006. 3 ed.

Lee, P. "How to Exorcise Your Derivative Demons". Euromoney, September, 1992. Pp 36-48.

Leung, Tze and Wee, Tiong. "Efficient valuation of American floating strike Lookback options". National Science foundation. 2001.

Machado, Juan. Sancha, Pilar. Tejero, Concepción y Toscano, David. "Opciones Exóticas". *Boletín económico*, Universidad de Huelva, Departamento de Economía Financiera, Contabilidad y dirección de operaciones. 2000.

Maya, Cecilia. "Monte Carlo Option Pricing". *Lecturas de Economía*, Jun-Dic., 2004.

Maya, Cecilia. "Valuation of Financial Assets Using Monte Carlo: When the World is not so Normal". *Revista de Economía del Rosario*, Jun-Dic, 2004.

Maya, Cecilia. "La modelación estocástica de la tasa de cambio COP / USD", informe de investigación, Universidad EAFIT, 2006.

Merton, R. "Option pricing when underlying stock return are discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 1976. pp 125-144.

Merton, R. "Theory of rational option pricing". *The Bell Journal of economics and management science*, Vol.4, 1973. Pp 141-183.

Miura, R. "A Note on Lookback Options Based on Order Statistics". *Hitotsubashi Journal of Commerce & Management*, Vol. 27, 1992. Pp.15-28.

Poulsen, Rolf. "Exotic options: Proofs without formulas". University of Copenhagen, Institute of economics. 2004.

Rob, Jochen. "Pricing of guaranteed index-linked products based on Lookback options". University of Ulm. Germany. 1998.

Rubinstein, M. "Implied binomial trees". *Journal of Finance*, Vol. 49, 1994. Pp 771-818.

Schmidt, Klaus E. "Pricing exotic options using local, implied and stochastic volatility obtained from market data". Working paper. 2004.

Shepp, L. and Shiryaev, A. "The Russian Option: Reduced Regret". Working Paper, 1998.

Shephard, Neil. "Stochastic Volatility". University of Oxford, Nuffield College. 2006.

Skipper, Max and Buchen, Peter. "The quintessential option pricing formula". University of Sydney, Australia, School of mathematics and statistics, 2003.

Stein, Elias and Stein, Jeremy. “Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach”. *The review of financial studies*, Vol. 4, 1991. Pp 727-752.

Tahani, Nabil. “Exotic options pricing under stochastic volatility”. Canada research chair in risk management. 2005.

Utrera, Leila. “Las últimas innovaciones de la industria de derivados: Futuros exóticos”. Bolsa de comercio de Rosario. Argentina, 2004.

Venegas, Francisco. Riesgos financieros y económicos. Ed. Thomson. 2006. 1139 pp.

Wilmot, P. “*Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*”. John Wiley & Sons, University Edition. 1998. Cap. 19.

Zhao, Gang. Zhou, Yakun and Valkili, Pirozz. “A new efficient simulation strategy for pricing path-dependent options”. Winter simulation conference, 2006.

www.banrep.gov.co

www.superfinanciera.gov.co

www.valoresbancolombia.com

APÉNDICE.

ANEXO 1: Demostración del modelo analítico de Goldman, Sosin y Gatto (1979), con base en Venegas (2006).

$$c = e^{-rt} E[S_t - m_t / F_t]$$

Considerando

1. $\zeta_t \equiv E[m_t / F_t] = E[\min(m_t, S_t e^{-Mt}) / F_t]$
2. $Y_t = -\sigma w_t + vt$
3. $Mt = \max_{\mu < t} Y_{\mu-t}$
4. $v = \frac{1}{2} \sigma^2 - r$

Definiendo $Z = -\ln(m_t / S_t)$, entonces:

$$\begin{aligned} \zeta_t - m_t &= E[\min(0, S_t e^{-Mt} - m_t) / F_t] \\ &= E[(S_t e^{-Mt} - m_t) 1_{\{S_t e^{-Mt} \leq m_t\}} / F_t] \\ &= E[(S_t e^{-Mt} - m_t) 1_{\{M_t \geq -\ln(m_t / S_t)\}} / F_t] \\ &= E[(S_t e^{-Mt} - S_t e^{-Z}) 1_{\{M_t \geq Z\}} / F_t] \\ &= S_t E[(e^{-Mt} - e^{-Z}) 1_{\{M_t \geq Z\}} / F_t] \\ &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{P}\{M_t \geq y\} dy \end{aligned}$$

Dado que $\tilde{P}\{M_t \geq y\} = \tilde{P}\{y_t \geq y\} + e^{2v\sigma^2 y} \tilde{P}\{y_t \geq y + 2vt\}$

Se tiene:
$$\begin{aligned} \zeta_t - m_t &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{P}\{M_t \geq y\} dy \\ &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{P}\{y_t \geq y\} dy - S_t \int_z^\infty e^{-ky} \tilde{P}\{y_t \geq y + 2vt\} dy \end{aligned}$$

Tenemos que : $\textcircled{3} \quad 2v\sigma^2 - 1 = -2r\sigma^2 = -K$

Las integrales se resuelven por separado

1. $\zeta_t = -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{P}\{y_t \geq y\} dy \quad y$
2. $\zeta_t = -S_t \int_z^\infty e^{-ky} \tilde{P}\{y_t \geq y + 2vt\} dy$

1. Teniendo en cuenta a $\textcircled{3}$ y $\textcircled{4}$:

$$\zeta_t = -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{P}\{y_t \geq y\} dy \quad \left. \vphantom{\int_z^\infty} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= S_t E \left[(e^{-y_t} - e^{-z}) \mathbf{1}_{\{y_t \geq z\}} / F_t \right] & \text{A.1} \\
&= S_t e^{rt} E \left[e^{\{\sigma \tilde{w}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\}} \mathbf{1}_{\{y_t \geq z\}} / F_t \right] - m_t \tilde{P} \{ y_t \geq z \}
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Girsanov y utilizando ②:

$$\begin{aligned}
Y_t &= -\sigma \tilde{w}_t + vt \\
&= -\sigma(v_t^\sigma + \sigma t) + vt \\
&= -\sigma v_t^\sigma + (v - \sigma^2)t \\
&= -\sigma v_t^\sigma - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t
\end{aligned}$$

A partir de A.1 sigue:

$$\begin{aligned}
\zeta_t &= S_t e^{rt} \tilde{P}^{(\sigma)} \{ y_t \geq z \} - m_t \tilde{P} \{ y_t \geq z \} \\
\zeta_t &= S_t e^{rt} \tilde{P}^{(\sigma)} \left\{ -\sigma v_t^\sigma - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t \geq -\ln(m_t / S_t) \right\} - m_t \tilde{P} \left\{ -\sigma \tilde{w}_t - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t \geq -\ln(m_t / S_t) \right\} \\
\zeta_t &= S_t e^{rt} \tilde{P}^{(\sigma)} \left\{ \sigma v_t^\sigma \leq \ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t \right\} - m_t \tilde{P} \left\{ \sigma \tilde{w}_t \leq \ln(m_t / S_t) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t \right\} \\
&= S_t e^{rt} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - m_t N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \zeta_t &= -S_t \int_z^\infty e^{-ky} \tilde{P} \{ y_t \geq y + 2vt \} dy \\
&= \frac{S_t}{k} E \left[(e^{-k(y_t - 2vt)} - e^{-kz}) \mathbf{1}_{\{y_t \geq z + 2vt\}} / F_t \right] \\
&= \frac{S_t}{k} E \left[(e^{-k(y_t - 2vt)}) \mathbf{1}_{\{y_t \geq z + 2vt\}} / F_t \right] - e^{-kz} \frac{S_t}{k} \tilde{P} \{ y_t \geq z + 2vt \}
\end{aligned}$$

Con ⑤ y ②, se tiene: $y_t = -\sigma \tilde{w}_t + vt$, lo que implica:

$$e^{-k(y_t - 2vt)} = e^{-2r\sigma^{-2}(y_t - 2vt)} = e^{rt} e^{\gamma \tilde{w}_t - \frac{1}{2} \gamma^2 t}$$

Con $\gamma = 2r\sigma^{-1}$

Análogamente como en 1.

$$\zeta_t = \frac{e^{rt} S_t}{k} E \left[e^{\{\gamma \tilde{w}_t - \frac{1}{2} \gamma^2 t\}} \mathbf{1}_{\{y_t \geq z + 2vt\}} / F_t \right] - e^{-kz} \frac{S_t}{k} \tilde{P} \{ \sigma \tilde{w}_t \leq \ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t \}$$

Aplicando el teorema de Girsanov con $U_t^{(\gamma)} = \tilde{w}_t - \gamma t$

$$y_t = -\sigma U_t^{(\gamma)} + (v - \sigma \gamma)t$$

De allí que:

$$\zeta_t = \frac{e^{rt} S_t}{k} \tilde{P}^{(\gamma)} \{y_t \geq z + 2vt\} - e^{-kz} \frac{S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

$$\zeta_t = \frac{e^{rt} S_t}{k} \tilde{P}^{(\gamma)} \{\sigma v_t^{(\gamma)} \leq -z - (v + \sigma \gamma)t\} - e^{-kz} \frac{S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

$$\zeta_t = \frac{e^{rt} S_t}{k} \tilde{P}^{(\gamma)} \left\{ \sigma v_t^{(\gamma)} \leq \ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t \right\} - e^{-kz} \frac{S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

$$A.2 = \frac{e^{rt} S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{k \ln(m_t / S_t)} \frac{S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

A partir de A.2 y 1 y 2:

$$E[m_t / F_t] = m_t + \zeta_t$$

$$E[m_t / F_t] = m_t + \zeta_t^{(1)} + \zeta_t^{(2)}$$

Reemplazando $\zeta_t^{(1)}$ y $\zeta_t^{(2)}$ obtenemos:

$$E[m_t / F_t] = m_t + \zeta_t^{(1)} + \zeta_t^{(2)}$$

$$\zeta_t^{(1)} = S_t e^{rt} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - m_t N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

$$\zeta_t^{(2)} = \frac{e^{rt} S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{k \ln(m_t / S_t)} \frac{S_t}{k} N \left(\frac{\ln(m_t / S_t) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

Tomando el proceso que sigue la distribución:

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma d\tilde{w}_t$$

$$d_m = \left(\frac{\ln(S_t/m_t) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \text{ con esto y teniendo la distribución normal}$$

acumulada.

$$N(d_m - \sigma\sqrt{t}) = 1 - N(-d_m + \sigma\sqrt{t})$$

Se tiene que:

$$E[m_t / F_t] = m_t + e^{rt} S_t N(-d_m) - m_t N(-d_m + \sigma\sqrt{t}) + \frac{e^{rt} S_t}{k} N(-d_m) - \frac{m_t}{k} \left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{1-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t})$$

$$E[m_t / F_t] = e^{rt} S_t N(-d_m) \left(1 + \frac{1}{k}\right) + m_t (1 - N(-d_m + \sigma\sqrt{t})) - \frac{m_t}{k} \left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{1-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t})$$

$$E[m_t / F_t] = e^{rt} S_t \left(1 + \frac{1}{k}\right) N(-d_m) + m_t N(d_m - \sigma\sqrt{t}) - \frac{m_t}{k} \left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{1-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t})$$

$$E[m_t / F_t] = m_t \left[N(d_m - \sigma\sqrt{t}) - \frac{1}{k} \left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{1-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t}) \right] + e^{rt} S_t \left(1 + \frac{1}{k}\right) N(-d_m)$$

Con base en lo anterior se puede mostrar que el precio de compra de una opción Europea con precio de ejercicio igual al mínimo del subyacente:

$$C = S_t - e^{-rt} m_t N(d_m - \sigma\sqrt{t}) + \frac{e^{-rt} S_t}{k} \left(\frac{S_t}{m_t}\right) N(-d_m + k\sigma\sqrt{t}) - S_t \left(1 + \frac{1}{k}\right) N(-d_m)$$

$$C = S_t (1 - N(-d_m)) - m_t e^{-rt} N(d_m - \sigma\sqrt{t}) + \frac{S_t e^{-rt}}{k} \left[\left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t}) - e^{rt} N(-d_m) \right]$$

Si reemplazamos $N(d_m) = 1 - N(-d_m)$ obtenemos:

$$C = S_t N(d_m) - m_t e^{-rt} N(d_m - \sigma\sqrt{t}) + \frac{S_t e^{-rt}}{k} \left[\left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{-k} N(-d_m + k\sigma\sqrt{t}) - e^{rt} N(-d_m) \right]$$

ANEXO 2: Gráfica de distribución de rendimientos del tipo de cambio peso / dólar para el período de estudio.

