

CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES NUMÉRICAS DE  
PROBLEMAS DE DIFUSIÓN FUERTEMENTE ACOPLADOS  
SINGULARES

Por:

MIRYAM LUCÍA GUERRA MAZO  
RUBEN DARÍO GUERRA TAMAYO

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO  
DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

DIRECTOR : DR. JOSE ALBEIRO SANCHEZ CANO

UNIVERSIDAD EAFIT  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

2007

*A nuestras familias*

# AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a aquellas personas que colaboraron en la realización de este proyecto, especialmente al Dr. José Albeiro Sánchez Cano por su generosidad, acompañamiento, sugerencias y consejos durante todo este tiempo.

# ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
2. PRELIMINARES . . . . .	4
2.1 Terminología . . . . .	4
2.2 Complemento de Schur . . . . .	14
2.3 Problemas de Sturm-Liouville discretos . . . . .	14
2.4 Formulación matricial del problema Sturm-Liouville discreto (P.S.L.D)	16
2.5 Series de Fourier discretas . . . . .	19
2.6 Solución de ecuaciones en diferencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes reales. . . . .	20
3. CASO I . . . . .	23
3.1 Discretización . . . . .	24
3.2 El Problema de Frontera en Diferencia Parcial . . . . .	27
3.3 Construcción de Soluciones para el Problema Mixto . . . . .	38
4. CASO II . . . . .	51
4.1 Discretización . . . . .	51
4.2 El Problema de Frontera en Diferencia Parcial . . . . .	54
4.3 Construcción de Soluciones para el Problema Mixto . . . . .	66
5. EJEMPLOS . . . . .	74
5.1 Ejemplo 1 . . . . .	74

5.2	Ejemplo 2 . . . . .	79
5.3	Ejemplo 3 . . . . .	81
	<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	<b>83</b>

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es la construcción de soluciones numéricas para sistemas en derivadas parciales mixtos difusivos acoplados singulares. Los métodos estandar para resolver tales problemas están basados en una transformación del problema acoplado en un nuevo sistema desacoplado [13], y así el sistema puede ser tratado escalarmente con las técnicas clásicas. Tal desarrollo tiene varias deficiencias, lo cual limita la aplicabilidad, ya que las matrices de coeficientes  $A$  y  $B$  que acompañan las derivadas respecto a  $x$  y  $t$  de la variable buscada  $u$  necesitan ser simétrica; además el orden de la derivada superior que aparece en el sistema desacoplado resultante es, en general, mayor que la del sistema original. En este trabajo se utiliza un método constructivo para la solución de los problemas acoplados mediante un enfoque global matricial sin necesidad de desacoplar el problema.

Inicialmente se tratará con problemas de difusión fuertemente acoplados de la forma,

$$\text{CASO I} \quad \left\{ \begin{array}{l} Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ B_1u(1, t) + B_2u_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

luego se analizará un segundo caso de la forma,

$$\text{CASO II} \begin{cases} Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t) - u(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ B_1u(1, t) + B_2u_x(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = F(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  y  $F(x)$  son vectores en  $\mathbb{C}^m$ , y  $A, B, B_1, B_2$  son matrices  $m \times m$ , elementos de  $\mathbb{C}^{m \times m}$ .

El método propuesto consiste en discretizar el problema continuo (CASO I, CASO II) usando diferencias finitas y luego construir, de forma exacta, una solución numérica discreta del problema.

Los métodos de diferencia finita para los problemas de difusión son tratados en [17].

A lo largo del documento, el conjunto de todos los valores propios de una matriz  $D$  en  $\mathbb{C}^{m \times m}$  es denotado por  $\sigma(D)$  y el radio espectral, el máximo del conjunto  $\{|z|; z \in \sigma(D)\}$ , por  $\rho(D)$ . Si  $A$  es una matriz hermítica, escribiremos  $\lambda_{\min}$  para el mínimo de  $\sigma(A)$ . Finalmente, el subespacio vectorial generado por el vector  $w$  es denotado por  $\text{Lin}\{w\}$ .

En general, los aspectos básicos en la solución de ecuaciones en derivadas parciales involucran la existencia y unicidad, la convergencia y los métodos de construcción de soluciones.

En este último se tiene que uno de los métodos básicos para la construcción de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales es el método de separación de variables, el cual depende del hecho de que la ecuación en derivadas parciales sea lineal. En general, este método busca soluciones simples de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

que a su vez satisfaga condiciones de frontera homogéneas. Si se pueden obtener estas soluciones simples ó soluciones fundamentales  $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ , se compone una solución  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  que satisfaga también las condiciones iniciales.

El método de aproximación más usado en la solución de ecuaciones diferenciales es el de las diferencias finitas (o método de las mallas). Este consiste en sustituir por un conjunto finito (discreto) de puntos (nodos) la región de variación continua de los argumentos  $x$  y  $t$ , por ejemplo; de esta forma en lugar de las funciones de argumento continuo se consideran los argumentos discretos definidos en los nodos de malla llamados función de malla. Las derivadas que aparecen en las ecuaciones diferenciales se sustituyen (aproximan) mediante los cocientes respectivos de diferencias, es decir, por combinaciones lineales de valores de la función de malla en varios nodos de la red; de esta forma la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuaciones en diferencias). A su vez las condiciones de frontera y condiciones iniciales también se sustituyen por condiciones en diferencias para la función de malla.

En este método se requiere que el problema así obtenido tenga solución y que la solución se aproxime (converja) a la solución del problema original al aumentar el número  $N$  de puntos de malla. El análisis de convergencia del esquema en diferencia se realiza, generalmente, a través de los conceptos de consistencia, estabilidad y del teorema de Lax-Richtmyer.

## CAPÍTULO 2

# PRELIMINARES

### 2.1. TERMINOLOGÍA

En este trabajo se usarán varios tipos de inversa, la inversa de Moore-Penrose y la inversa de Drazin, las cuales permitirán expresar en forma cerrada finita y computable, tanto la condición de compatibilidad como la solución general del sistema algebraico:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^m$$

**Definición 2.1.1** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , entonces su inversa generalizada de Moore-Penrose se denota por  $A^\dagger$  y se define como la única matriz que cumple:

- (i)  $AA^\dagger A = A$
- (ii)  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- (iii)  $(AA^\dagger)^H = AA^\dagger$
- (iv)  $(A^\dagger A)^H = A^\dagger A$

**Definición 2.1.2** Sea  $A$  una transformación lineal sobre  $\mathbb{C}^m$ . El más pequeño de los enteros no negativos  $k$  tal que  $\mathbb{C}^m = R(A^k) + N(A^k)$ , o equivalentemente, el más pequeño de los enteros no negativos  $k$  tal que  $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$ , es llamado el índice de  $A$  y se denota por  $\text{Ind}(A)$ .

**Definición 2.1.3 (Algebraica)** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  con  $\text{Ind}(A) = k$  y si  $A^D \in \mathbb{C}^{m \times m}$  es tal que

$$(i) A^D A A^D = A^D$$

$$(ii) A A^D = A^D A$$

$$(iii) A^{k+1} A^D = A^k$$

entonces  $A^D$  es llamada inversa Drazin de  $A$ .

**Definición 2.1.4 (Funcional)** Sea  $\tilde{A}$  una transformación lineal sobre  $\mathbb{C}^m$  tal que  $\text{Ind}(\tilde{A}) = k$ . Sea  $x \in \mathbb{C}^m$  y escribamos  $x = u + v$  donde  $u \in R(\tilde{A}^k)$  y  $v \in N(\tilde{A}^k)$ . Sea  $\tilde{A}_1 = \tilde{A} |_{R(\tilde{A}^k)}$ . La transformación lineal definida por  $\tilde{A}^D x = \tilde{A}_1^{-1} u$  es llamada la inversa de Drazin de  $\tilde{A}$ . Para  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , sea  $\tilde{A}$  la transformación lineal inducida sobre  $\mathbb{C}^m$  por  $A$ . La inversa de Drazin,  $A^D$ , de  $A$  es definida como la matriz de  $\tilde{A}^D$  con respecto a la base estandar.

**Teorema 2.1.1** Para  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , la definición funcional de  $A^D$  es equivalente a la definición algebraica de  $A^D$ .

**Teorema 2.1.2 (Mitra)** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y sea  $A^G \in \mathbb{C}^{n \times m}$  una inversa de  $A$ . Sea  $b \in \mathbb{C}^m$  un vector, entonces el sistema

$$Ax = b$$

es compatible (tiene una solución) si y sólo si

$$A A^G b = b$$

bajo esta condición, la solución general de  $Ax = b$  viene dada por

$$x = A^G b + (I - A^G A) z$$

donde  $z$  es un vector arbitrario en  $\mathbb{C}^n$ .

**Prueba:** (i) Suponga que el sistema  $Ax = b$  tiene solución, entonces existe  $x^*$  tal que  $Ax^* = b$ . Como  $AA^GA = A$  se tiene que  $AA^GAx^* = b$  y  $AA^Gb = b$ . Recíprocamente, si se llama  $x^* = A^Gb$ , entonces  $Ax^* = AA^Gb = b$ , y  $x^*$  es solución del sistema.

(ii) Veamos que  $x = A^Gb + (I - A^GA)z$  con  $z$  un vector arbitrario en  $\mathbb{C}^n$  es solución del sistema  $Ax = b$ .

$$Ax = AA^Gb + A(I - A^GA)z = b + Az - AA^GAz = b + Az - Az = b.$$

Veamos que todas las soluciones son de la forma  $x = A^Gb + (I - A^GA)z$ , donde  $z$  es un vector arbitrario en  $\mathbb{C}^n$ .

(a) Como  $(I - A^GA)^G = I - A^GA$  entonces  $I - A^GA$  es una inversa generalizada de sí misma.

(b) Si se tiene la solución nula,  $A^GAz = 0 \iff Az = 0$ . Si  $A^GAz = 0$ , entonces  $0 = A0 = AA^GAz = Az = 0$ . Recíprocamente, si  $Az = 0$ , entonces  $A^GAz = A^Gz = 0$ .

(c) Notemos que  $\ker(A) = \text{Im}(I - A^GA)$ . En efecto, consideremos el sistema de ecuaciones lineales  $(I - A^GA)v = z$ , éste sistema es compatible si y sólo si  $(I - A^GA)(I - A^GA)^Gz = z$ , si y sólo si  $(I - A^GA)z = z$ , si y sólo si  $A^GAz = 0$ , si y sólo si  $Az = 0$ . Luego  $\ker(A) = \text{Im}(I - A^GA)$ .

(d) Consideremos una solución  $x_0$ . Sea  $x_0 = A^Gb$  una solución del sistema  $Ax = b$ . Si  $x$  es otra solución del sistema, entonces

$$\begin{aligned} Ax_0 &= b = Ax \\ \implies A(x - x_0) &= 0 \\ \implies (x - x_0) &\in \ker(A) \\ \implies x - x_0 &= k \in \ker(A) \\ \implies x &= x_0 + k, \quad k \in \ker(A) \end{aligned}$$

por (c) existe  $z \in \mathbb{C}^n$  tal que  $(I - A^G A)z = k$ , así  $x = x_0 + (I - A^G A)z$  y  $x = A^G b + (I - A^G A)z$ , con  $z \in \mathbb{C}^n$ . ■

**Teorema 2.1.3 (Representación en forma canónica de  $A$  y  $A^D$ )** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  es tal que  $\text{Ind}(A) = k > 0$ , entonces existe una matriz no singular  $P$  tal que

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde  $C$  es no singular y  $N$  es nilpotente de índice  $k$ . Más aún, si  $P, C, N$  son matrices que satisfacen las condiciones anteriores, entonces

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

**Definición 2.1.5** Para  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $f_n \in \mathbb{C}^m$ , el vector  $c \in \mathbb{C}^m$  es llamado un vector inicial consistente para la ecuación en diferencias  $Ax_{n+1} = Bx_n + f_n$  si el problema de valor inicial  $Ax_{n+1} = Bx_n + f_n$ ,  $x_0 = c$ ,  $n = 1, 2, \dots$  tiene una solución para  $x_n$ .

**Definición 2.1.6** La ecuación en diferencia  $Ax_{n+1} = Bx_n + f_n$  se dice es tratable si el problema de valor inicial  $Ax_{n+1} = Bx_n + f_n$ ,  $x_0 = c$ ,  $n = 1, 2, \dots$  tiene una única solución para cada vector inicial consistente  $c$ .

**Teorema 2.1.4** La ecuación en diferencia homogénea

$$Ax_{n+1} = Bx_n, \quad A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

es tratable si y sólo si, existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $(\lambda A + B)^{-1}$  existe.

**Teorema 2.1.5** Si la ecuación homogénea

$$Ax_{n+1} = Bx_n$$

es tratable, entonces la solución general es dada por

$$x_n = \begin{cases} \widehat{A}\widehat{A}^D q & \text{Si } n = 0 \\ \left(\widehat{A}^D \widehat{B}\right)^n q & \text{Si } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad q \in \mathbb{C}^m$$

donde  $\hat{A} = (\lambda A - B)^{-1} A$  y  $\hat{B} = (\lambda A - B)^{-1} B$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  es tal que  $(\lambda A - B)^{-1}$  existe. Además,  $c \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente para  $Ax_{n+1} = Bx_n$  si y sólo si  $c \in R(\hat{A}^k)$  donde  $k = \text{Ind}(\hat{A})$ . En este caso la única solución, sujeta a  $x_0 = c$ , es dada por  $x_n = (\hat{A}^D \hat{B})^n c$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Prueba:** Si  $Ax_{n+1} = Bx_n$  es tratable, existe  $(\lambda A - B)^{-1}$ , premultiplicando la ecuación en diferencias por esta última expresión se tiene

$$\begin{aligned} (\lambda A - B)^{-1} Ax_{n+1} &= (\lambda A - B)^{-1} Bx_n \\ \hat{A}x_{n+1} &= \hat{B}x_n \end{aligned}$$

escribiendo

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} & \hat{B} &= \begin{bmatrix} \lambda C - I & 0 \\ 0 & \lambda N - I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{B}_2 \end{bmatrix} \\ x_n &= \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} & x_{n+1} &= \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\lambda \hat{A} - \hat{B} = I$ ,  $C$  invertible, entonces

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda C - I & 0 \\ 0 & \lambda N - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esto es,

$$\begin{aligned} Cx_{n+1}^{(1)} - (\lambda C - I)x_n^{(1)} &= 0, \quad C\hat{B}_1 = \hat{B}_1C \\ Nx_{n+1}^{(2)} - (\lambda N - I)x_n^{(2)} &= 0, \quad N\hat{B}_2 = \hat{B}_2N \end{aligned}$$

sea  $k = \text{Ind}(N)$ , multiplicando  $Nx_{n+1}^{(2)} - (\lambda N - I)x_n^{(2)} = 0$  por  $N^{k-1}$ ,

$$\begin{aligned} N^k x_{n+1}^{(2)} - N^{k-1} (\lambda N - I) x_n^{(2)} &= 0 \\ - (\lambda N^k - N^{k-1}) x_n^{(2)} &= 0 \\ (\lambda N - I) N^{k-1} x_n^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $N^{k-1}x_n^{(2)} = 0$ ; multiplicando  $Nx_{n+1}^{(2)} - (\lambda N - I)x_n^{(2)} = 0$  por  $N^{k-2}$ ,

$$\begin{aligned} N^{k-1}x_{n+1}^{(2)} - N^{k-2}(\lambda N - I)x_n^{(2)} &= 0 \\ (\lambda N - I)N^{k-2}x_n^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $N^{k-2}x_n^{(2)} = 0$ ; luego se tiene  $x_n^{(2)} = 0$  y  $Nx_{n+1}^{(2)} - (\lambda N - I)x_n^{(2)} = 0$  la cual es tratable trivialmente. Además, como  $C$  es no singular, se tiene

$$\begin{aligned} Cx_{n+1}^{(1)} - (\lambda C - I)x_n^{(1)} &= 0 \\ x_{n+1}^{(1)} &= C^{-1}(\lambda C - I)x_n^{(1)} \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= C^{-1}(\lambda C - I)x_0^{(1)} \\ x_2^{(1)} &= C^{-1}(\lambda C - I)x_1^{(1)} = [C^{-1}(\lambda C - I)]^2 x_0^{(1)} \\ &\vdots \\ x_n^{(1)} &= [C^{-1}(\lambda C - I)]^n x_0^{(1)} \end{aligned}$$

es decir,  $Cx_{n+1}^{(1)} - (\lambda C - I)x_n^{(1)} = 0$  es consistente para cualquier  $x_0^{(1)}$  y la única solución es  $x_n^{(1)} = [C^{-1}(\lambda C - I)]^n x_0^{(1)}$ . De lo anterior la solución de la ecuación homogénea  $Ax_{n+1} = Bx_n$  se sigue. ■

**Definición 2.1.7** Una matriz  $A$  se dice convergente si la sucesión  $\{A^n\}$  tiende a la matriz nula cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El corolario 2.2.9 de [Ortega, pag. 44] proporciona una caracterización del concepto de matriz convergente. Sea  $A \in \mathbb{C}^m$ . Entonces  $\lim_{g \rightarrow \infty} A^g = 0$  si y sólo si  $\rho(A) < 1$ .

**Definición 2.1.8** Una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  definida como una aplicación lineal desde  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{C}^m$ . Si se considera las normas en  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$ , entonces se define la norma de la matriz

A por

$$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$$

donde,  $|Av|$  es la norma en  $\mathbb{C}^m$  y  $|v|$  es la norma en  $\mathbb{C}^n$ .

**Teorema 2.1.6** Sea  $A$  y  $B$  matrices  $m \times n$  y  $D$  una matriz  $n \times p$ . Entonces las siguientes desigualdades se satisfacen

- (i)  $\|A\| \geq 0$ , cumpliéndose la igualdad si y sólo si  $A = 0$ .
- (ii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (iii)  $\|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\|$ , para  $\alpha \in \mathbb{C}$
- (iv)  $|Av| \leq \|A\| |v|$ , para todo  $v \in \mathbb{C}^n$
- (v)  $\|AD\| \leq \|A\| \|D\|$

Una importante consecuencia de la última desigualdad es que para una matriz cuadrada,  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , se tiene

$$\|A^g\| \leq \|A\|^g$$

**Definición 2.1.9** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que  $f$  pertenece al espacio  $\mathfrak{F}(A)$  si existe un entorno  $V$  del conjunto de valores propios de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , sobre el cual  $f$  es analítica.

**Teorema 2.1.7 (Aplicación espectral)** Si  $f \in \mathfrak{F}(A)$ , entonces

$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$$

donde  $f(\sigma(A)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$

**Teorema 2.1.8 (Bromwich)** Sea  $A$  cualquier matriz compleja. Sean  $\mu$  y  $M$  la menor y mayor raíz característica de la matriz hermítica  $\frac{1}{2}(A + A^H)$ , y  $\nu$  y  $N$  la menor y la mayor raíz característica de la matriz hermítica  $\frac{1}{2i}(A - A^H)$ . Si  $\lambda$  es cualquier valor propio de  $A$ , entonces

$$\mu \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq M, \quad \nu \leq \operatorname{Im}(\lambda) \leq N$$

**Prueba:** Sea  $x$  un vector unitario tal que  $\lambda x = Ax$ , luego

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda \bar{x}^\top x = \bar{x}^\top Ax \\ \bar{\lambda} &= x^\top \overline{Ax} = \left(x^\top \overline{Ax}\right)^\top = \bar{x}^\top \overline{A}^\top x = \bar{x}^\top A^H x,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\lambda) &= \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = \bar{x}^\top \left(\frac{A + A^H}{2}\right) x \\ \operatorname{Im}(\lambda) &= \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda}) = \bar{x}^\top \left(\frac{A - A^H}{2i}\right) x\end{aligned}$$

luego, si  $\lambda$  y  $\Lambda$  son la menor y la mayor raíz característica de la matriz hermítica  $A$ , para toda  $x$ ,

$$\lambda \bar{x}^\top x \leq \bar{x}^\top Ax \leq \Lambda \bar{x}^\top x.$$

De donde se cumplen las desigualdades,

$$\mu \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq M, \quad \nu \leq \operatorname{Im}(\lambda) \leq N.$$

■

Se considera que una matriz compleja  $A$ ,  $m \times m$ , es una aplicación lineal sobre  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  en un sistema de coordenadas dado. Bajo este concepto se tienen las siguientes dos definiciones:

**Definición 2.1.10**  $\operatorname{Im} B = \{Bx/x \in \mathbb{C}^m\}$  y  $\ker B = \{x \in \mathbb{C}^m/Bx = 0\}$ .

El núcleo de una matriz  $B$ , denotado por  $\ker B$  coincide con la imagen de la matriz  $I - B^\dagger B$  denotada por  $\operatorname{Im}(I - B^\dagger B)$ . Esto es  $\operatorname{Im}(I - B^\dagger B) = \ker B$ .

**Definición 2.1.11** Un subespacio invariante de  $A$ ,  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , es un subespacio  $E$  de  $\mathbb{C}^m$ , con la propiedad que  $x \in E$  implica que  $Ax \in E$ . Escribimos esto como  $AE \subseteq E$ .

Nótese que si se tiene  $v \in \mathbb{C}^m$ ,  $v \in \ker B$  y además  $\ker B$  es subespacio invariante de  $A$ , entonces  $A^j v \in \ker B$ ,  $\forall j \geq 0$ , es decir,  $BA^j v = 0$ ,  $\forall j \geq 0$ . La propiedad  $A(\ker B) \subset \ker B$  es equivalente a la condición  $BA(I - B^\dagger B) = 0$  ya que se tiene que  $\ker B = \text{Im}(I - B^\dagger B)$ .

**Definición 2.1.12** Sea  $q(\lambda)$  el polinomio anulador de  $A$  de grado mínimo. Entonces a  $q(\lambda)$  se le llama polinomio minimal de  $A$ .

**Teorema 2.1.9 (Cayley-Hamilton)** Sea  $A$  una matriz cuadrada con polinomio característico  $p(\lambda)$ , entonces  $p(A)=0$ . En otras palabras, toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica.

La idea es usar diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales parciales y seleccionar una malla en el tiempo y en el espacio (con longitudes de malla  $k, h$  respectivamente) y aproximar los valores  $u(mh, nk)$  para enteros  $mh, nk$ . En lo que sigue  $u$  denotará la solución a la ecuación diferencial parcial y

$$v_{\text{espacio}}^{\text{tiempo}} = v_m^n \quad \text{con} \quad v_m^n \approx u(mh, nk).$$

será la solución exacta.

Se espera que la solución exacta se aproxime a la solución de la ecuación diferencial parcial a medida que se haga un mayor refinamiento de malla, esto se conoce como convergencia. Probar convergencia no es fácil en general, sin embargo hay dos conceptos relacionados que son más fáciles de verificar: *consistencia* y *estabilidad*.

**Definición 2.1.13** Dada una ecuación diferencial parcial  $Pu = f$  y un esquema en diferencia finito  $P_{k,h}v = f$ , se dice que el esquema en diferencia finito es consistente con la ecuación diferencial parcial si para cualquier función suave  $\phi(t, x)$

$$\|P[\phi] - P_{k,h}[\phi]\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h, k \rightarrow 0.$$

Equivalentemente, decimos que un esquema en diferencias finitas  $P_{k,h}v = f$  es consistente con la ecuación diferencial parcial  $Pu = f$  de orden  $(r, s)$  si para cualquier función suave  $\phi$ ,  $P\phi - P_{k,h}\phi = O(k^r, h^s)$ .

Donde "O grande" significa que  $g(v) = O(\varphi(v))$  para  $v \in V$  si existe una constante  $K$  tal que  $|g(v)| \leq K|\varphi(v)|$  para todo  $v \in V$ . En particular, una cantidad es  $O(h^r)$  si es acotada por un múltiplo constante de  $h^r$  para pequeños valores de  $h$ .

**Definición 2.1.14** Un esquema en diferencia finito de un paso  $P_{k,h}v_m^n = 0$  para una ecuación diferencial parcial es estable si existen números  $k_0 > 0$  y  $h_0 > 0$  tales que para cualquier tiempo  $T > 0$  existe una constante  $C_T$  tal que

$$\|v^n\| \leq C_T \|v^0\|$$

para  $0 \leq nk \leq T$ ,  $0 < h \leq h_0$  y  $0 < k \leq k_0$ .

**Definición 2.1.15** El problema de valor inicial para una ecuación diferencial parcial de primer orden  $Pu = 0$  es bien puesto si para cualquier tiempo  $T \geq 0$ , existe una constante  $C_T$  tal que cualquier solución  $u(t, x)$  satisface

$$\|u(t, x)\| \leq C_T \|u(0, x)\|$$

para  $0 \leq t \leq T$ .

Para comparar las soluciones se introduce la definición de norma.

**Definición 2.1.16** Para una función  $w = (\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, \dots)$  sobre una malla de espaciamiento  $h$  se define  $\|w\| = (h \sum_{-\infty}^{\infty} |w_m|^2)^{1/2}$  como la norma  $L_2$ .

**Definición 2.1.17** Un esquema en diferencia finita de un paso que se aproxima a la ecuación diferencial parcial es un esquema convergente si para cualquier solución de la ecuación diferencial parcial,  $u(t, x)$ , y soluciones del esquema en diferencia finito,  $v_m^n$ , tal que  $v_m^0$  converge a  $u_0(x)$  como  $mh$  converge a  $x$ , entonces  $v_m^n$  converge a  $u(t, x)$  como  $(nk, mh)$  converge a  $(t, x)$  cuando  $h, k$  convergen a cero.

**Teorema 2.1.10 (Lax-Richtmyer)** *un esquema en diferencia finito consistente para una ecuación diferencial parcial para la cual el problema de valor inicial es bien definido es convergente si y sólo si es estable.*

## 2.2. COMPLEMENTO DE SCHUR

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , con una partición en bloques

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

donde la submatriz  $E$  es invertible y  $H$  cuadrada ( $E$  y  $H$  no necesariamente de igual tamaño), se llama *complemento de Schur de  $E$  en  $A$*  a la matriz

$$W = H - GE^{-1}F.$$

Si  $E$  es invertible, entonces se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ GE^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H - GE^{-1}F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & E^{-1}F \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ya que el primer y el tercer factor de esta ecuación son invertibles, entonces  $A$  es invertible si y sólo si el complemento de Schur  $H - GE^{-1}F$  es invertible.

Nótese que si la matriz por bloques  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$  es invertible, ésto equivale a decir que la matriz  $B_2$  es invertible.

A continuación se comentaran varios temas y definiciones del problema Sturm-Liouville discretos, que serán de gran utilidad en este trabajo [14].

## 2.3. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE DISCRETOS

Obviamente, los problemas de valores en la frontera lineales homogéneos pueden tener soluciones no triviales. Si los coeficientes de la ecuación en diferencias y/o

los de las condiciones de frontera dependen de un parámetro, entonces uno de los problemas pioneros de la física matemática es determinar el/los valor(es) del parámetro para el cual tales soluciones no triviales existen. Esos valores del parámetro se llaman *autovalores* o *valores propios* y las correspondientes soluciones no triviales se llaman *autofunciones* o *funciones propias*.

Los problemas de valor en la frontera que consisten de la ecuación en diferencias

$$\Delta [p(k-1) \Delta u(k-1)] + q(k) u(k) + \lambda r(k) u(k) = 0, \quad k \in N(1, K)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0) = \alpha u(1), \quad u(K+1) = \beta u(K)$$

se llama *problema Sturm-Liouville discreto* (P.S.L.D). En la ecuación en diferencias,  $\lambda$  es el parámetro, y las funciones  $p, q$  y  $r$  son definidas sobre  $N(0, K)$ ,  $N(1, K)$  y  $N(1, K)$  respectivamente, y  $p(k) > 0$ ,  $k \in N(0, K)$ ,  $r(k) > 0$ ,  $k \in N(1, K)$ . Los conjuntos  $N(0, K)$ , y  $N(1, K)$  están definidos como sigue

$$N(0, K) = \{a \in \mathbb{N} / 0 \leq a \leq K\}$$

$$N(1, K) = \{b \in \mathbb{N} / 1 \leq b \leq K\}$$

el operador diferencia adelante,  $\Delta$ , está dado por

$$\Delta p(k-1) = p(k) - p(k-1) \quad \text{y} \quad \Delta^2 p(k) = \Delta(\Delta p(k)).$$

En las condiciones de frontera  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes conocidas.

Los siguientes resultados, en los cuales se asume tácitamente la existencia de los valores propios del P.S.L.D, son fundamentales.

**Teorema 2.3.1** *Los autovalores del P.S.L.D son simples, es decir, si  $\lambda$  es un autovalor del P.S.L.D y  $\phi_1(k)$  y  $\phi_2(k)$  son sus respectivas autofunciones, entonces  $\phi_1(k)$  y  $\phi_2(k)$  son linealmente dependientes en  $N(0, K+1)$ .*

**Definición 2.3.1** El conjunto de funciones  $\{\phi_m(k); m = 1, 2, \dots\}$  cada una de las cuales esta definida en  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$  se dice ortogonal sobre  $\overline{\mathbb{N}}$  con respecto a la función no negativa  $r(k)$ ,  $k \in \overline{\mathbb{N}}$  si

$$\sum_{l \in \overline{\mathbb{N}}} r(l) \phi_\mu(l) \phi_\nu(l) = 0, \quad \forall \mu \neq \nu,$$

la función  $r(l)$  se llama función de peso.

**Teorema 2.3.2** Sean  $\lambda_m; m = 1, 2, \dots$  los valores propios del problema Sturm-Liouville discreto y  $\phi_m(k); m = 1, 2, \dots$  las correspondientes autofunciones. Entonces, el conjunto  $\{\phi_m(k); m = 1, 2, \dots\}$  es ortogonal en  $N(1, K)$  con respecto a la función de peso  $r(k)$ .

**Teorema 2.3.3** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dos autovalores del P.S.L.D y sean  $\phi_1(k)$  y  $\phi_2(k)$  las correspondientes autofunciones. Entonces,  $\phi_1(k)$  y  $\phi_2(k)$  son linealmente dependientes sobre  $N(0, K+1)$  sólo si  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

**Teorema 2.3.4** Para el P.S.L.D los valores propios son reales.

## 2.4. FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA STURM-LIOUVILLE DISCRETO (P.S.L.D)

Al desarrollar la ecuación en diferencia

$$\Delta [p(k-1) \Delta u(k-1)] + q(k) u(k) + \lambda r(k) u(k) = 0, \quad k \in N(1, K)$$

utilizando la definición del operador  $\Delta$ ,

$$\Delta p(k-1) = p(k) - p(k-1) \quad \text{y}$$

$$\Delta^2 p(k) = \Delta(\Delta p(k)) = p(k+1) - 2p(k) + p(k-1)$$

y el lema 1.7.4 [Agarwal, cap. 1], fórmula del producto,

$$\Delta [u(k)v(k)] = u(k+1)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) = v(k+1)\Delta u(k) + u(k)\Delta v(k)$$

se obtiene para  $k \in N(1, K)$

$$\Delta [p(k-1)\Delta u(k-1)] + q(k)u(k) + \lambda r(k)u(k) = 0$$

$$p(k)\Delta [\Delta u(k-1)] + [\Delta u(k-1)]\Delta p(k-1) + q(k)u(k) + \lambda r(k)u(k) = 0$$

se sigue

$$p(k)[u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)] + [u(k) - u(k-1)][p(k) - p(k-1)] + q(k)u(k) + \lambda r(k)u(k) = 0$$

$$p(k)u(k+1) - p(k)u(k) - u(k)p(k-1) + u(k-1)p(k-1) + q(k)u(k) + \lambda r(k)u(k) = 0$$

$$p(k)u(k+1) - [p(k) + p(k-1)]u(k) + [q(k) + \lambda r(k)]u(k) + p(k-1)u(k-1) = 0$$

Si hacemos  $s(k) = p(k) + p(k-1) - q(k)$ , con  $k \in N(1, K)$ , se tiene

$$-p(k-1)u(k-1) + s(k)u(k) - p(k)u(k+1) = \lambda r(k)u(k)$$

por tanto, para  $k = 1, K$ , se tienen las dos ecuaciones siguientes

$$-p(0)u(0) + s(1)u(1) - p(1)u(0) = \lambda r(1)u(1)$$

$$-p(K-1)u(K-1) + s(K)u(K) - p(K)u(K+1) = \lambda r(K)u(K)$$

y con las condiciones de contorno  $u(0) = \alpha u(1)$  y  $u(K+1) = \beta u(K)$  toman la forma

$$\bar{s}(1)u(1) - p(1)u(2) = \lambda r(1)u(1)$$

$$-p(K-1)u(K-1) + \bar{s}(K)u(K) = \lambda r(K)u(K)$$

donde  $\bar{s}(1) = s(1) - \alpha p(0)$  y  $\bar{s}(K) = s(K) - \beta p(K)$ . Las  $K$  ecuaciones

$$-p(k-1)u(k-1) + s(k)u(k) - p(k)u(k+1) = \lambda r(k)u(k)$$

$$\bar{s}(1)u(1) - p(1)u(2) = \lambda r(1)u(1)$$

$$-p(K-1)u(K-1) + \bar{s}(K)u(K) = \lambda r(K)u(K)$$

para  $k \in N(2, K-1)$ , pueden ser escritas como un problema de autovalores matriciales

$$Au = \lambda Ru$$

donde  $A$  es la matriz simétrica real tridiagonal,  $K \times K$ , de la forma  $H_K(\mathfrak{S}, \mathfrak{N})$ , con

$$\mathfrak{S} = [\bar{s}(1), s(2), \dots, s(K-1), \bar{s}(K)]$$

y

$$\mathfrak{N} = [-p(1), -p(2), \dots, -p(K-1)]$$

$R$  es la matriz diagonal  $K \times K$  definida por  $R = \text{diag}[r(1), r(2), \dots, r(K)]$ , y  $u = [u(1), u(2), \dots, u(K)]$ . Esto es

$$\begin{pmatrix} \bar{s}(1) & -p(1) & & & 0 \\ -p(1) & s(2) & -p(2) & & \\ & -p(2) & \ddots & & \\ & & & s(K-1) & -p(K-1) \\ 0 & & & -p(K-1) & \bar{s}(K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(K) \end{pmatrix} =$$

$$\lambda \begin{pmatrix} r(1) & & & 0 \\ & r(2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r(K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(K) \end{pmatrix}.$$

Ya que  $p(k) > 0, k \in N(0, K)$ , y  $r(k) > 0, k \in N(1, K)$  se sigue que:

(i) el P.S.L.D tiene exactamente  $K$  autovalores reales  $\lambda_m, 1 \leq m \leq K$ , los cuales son distintos.

(ii) Correspondiendo a cada autovalor,  $\lambda_m$ , existe una autofunción  $\phi_m(k), k \in N(1, K)$ . Esas autofunciones  $\phi_m(k), 1 \leq m \leq K$  son mutuamente ortogonales con respecto a la función de peso  $r(k)$ . En particular, esas autofunciones son linealmente independientes en  $N(1, K)$ .

## 2.5. SERIES DE FOURIER DISCRETAS

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $\{\phi_m(k) / a \leq m \leq b\}$  un conjunto ortogonal de funciones en  $N(a, b)$  con respecto a la función de peso positiva  $r(k), k \in N(a, b)$ . Ya que la ortogonalidad de esas funciones  $\phi_m(k), a \leq m \leq b$ , en particular, implica su independencia lineal en  $N(a, b)$ , entonces cualquier función  $u(k), k \in N(a, b)$  puede ser expresada como una combinación lineal de  $\phi_m(k), a \leq m \leq b$ , es decir,

$$u(k) = \sum_{m=a}^b c_m \phi_m(k), \quad k \in N(a, b)$$

donde las constantes  $c_m, a \leq m \leq b$ , pueden ser determinadas como sigue:

- (1) mutiplicando la ecuación anterior por  $r(k) \phi_n(k), a \leq n \leq b$ ,
- (2) sumando el resultado desde  $k = a$  hasta  $k = b$ ,
- (3) usando la ortogonalidad de las funciones  $\phi_m(k), a \leq m \leq b$ , en  $N(a, b)$ .

Por tanto se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b r(k) \phi_n(k) u(k) &= \sum_{m=a}^b c_m \left( \sum_{k=a}^b r(k) \phi_n(k) \phi_m(k) \right) \\ &= c_n \left( \sum_{k=a}^b r(k) \phi_n^2(k) \right) \end{aligned}$$

y entonces

$$c_m = \frac{\sum_{k=a}^b r(k) \phi_m(k) u(k)}{\sum_{k=a}^b r(k) \phi_m^2(k)}, \quad a \leq m \leq b$$

en particular, si las funciones  $\phi_m(k)$ ,  $a \leq m \leq b$  son ortogonales, i.e., para cada  $m$ ,  $\sum_{k=a}^b r(k) \phi_m^2(k) = 1$ , entonces las constantes  $c_m$  se simplifican a

$$c_m = \sum_{k=a}^b r(k) \phi_m(k) u(k), \quad a \leq m \leq b.$$

**Definición 2.5.1** La relación  $u(k) = \sum_{m=a}^b c_m \phi_m(k)$ ,  $k \in N(a, b)$ , se llama la serie de

Fourier discreta, y las constantes  $c_m$  definidas por  $c_m = \frac{\sum_{k=a}^b r(k) \phi_m(k) u(k)}{\sum_{k=a}^b r(k) \phi_m^2(k)}$ ,  $a \leq m \leq b$  son los correspondientes coeficientes de Fourier discretos.

## 2.6. SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIA LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES REALES.

Sea  $u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_2 u_n = 0$  una ecuación en diferencia lineal homogénea de segundo orden con  $a_1, a_2$  coeficientes reales,  $a_2 \neq 0$  y condiciones iniciales  $u_0 = \alpha$ ,  $u_1 = \beta$ . Se buscarán soluciones de la forma  $u_n = \lambda^n$  donde  $\lambda$  es una constante a ser determinada. Si  $\lambda$  es solución, debe satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} \lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n &= 0 \\ \lambda^n (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) &= 0 \end{aligned}$$

bajo  $\lambda = 0$ , correspondiente a la solución trivial, se puede cancelar el factor  $\lambda^n$  y se llega a la siguiente ecuación cuadrática llamada ecuación característica de la ecuación diferencia,

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

El polinomio asociado,

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$$

se llama el polinomio característico asociado a la ecuación en diferencia. Resolviendo la ecuación característica se tienen los siguientes casos:

(i) Las raíces de la ecuación en diferencia,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son reales y distintas. En este caso la solución general de la ecuación en diferencias,  $u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_2 u_n = 0$ , viene dada por

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

donde  $A, B$  son constantes arbitrarias y  $n = 0, 1, 2, \dots$

(ii) Las raíces de la ecuación en diferencia,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son complejos conjugados. En este caso la solución general de la ecuación en diferencias,

$$u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_2 u_n = 0,$$

sigue siendo dada como en (i) pero es conveniente expresarla en forma polar, tomando  $\lambda_1 = \rho e^{i\omega}$ ,  $\lambda_2 = \rho e^{-i\omega}$  y usando el teorema de Moivre se tiene

$$u_n = \rho^n \left( K e^{in\omega} + L e^{-in\omega} \right)$$

donde  $K, L$  son complejos. Como  $u_n$  es real entonces  $K, L$  son complejos conjugados,  $L = \bar{K}$ . Tomando  $L = \frac{1}{2}(A + iB)$  con  $A$  y  $B$  constantes arbitrarias reales, la solución general puede escribirse

$$u_n = \rho^n (A \cos n\omega + B \sin n\omega)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

(iii) Las raíces de la ecuación en diferencia,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son iguales, es decir  $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ . En éste caso la solución general propuesta en los anteriores casos deja de ser válida y debe buscarse otra solución que combinada con  $\mu^n$  forme la solución general. Se procede de la siguiente manera: se sustituye  $u_n = \mu^n$  en la ecuación en diferencia y se usa el polinomio característico para obtener la siguiente identidad

$$\mu^{n+2} + a_1\mu^{n+1} + a_2\mu^n \equiv \mu^n P(\mu)$$

Se diferencia respecto a  $\mu$ ,

$$(n+2)\mu^{n+1} + (n+1)a_1\mu^n + na_2\mu^{n-1} \equiv n\mu^{n-1}P(\mu) + \mu^n P'(\mu)$$

como  $P(\mu) = 0$  entonces  $P(\lambda) = (\lambda - \mu)^2 = P(\mu)$ , diferenciando respecto a  $\mu$  se sigue que,

$$P'(\lambda) = 2(\lambda - \mu) = P'(\mu) = 0$$

Así,  $n\mu^{n-1}$  es otra solución de  $u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_2u_n = 0$  y la solución general viene dada por,

$$u_n = A\mu^n + Bn\mu^{n-1}$$

donde  $A, B$  son constantes arbitrarias y  $n = 0, 1, 2, \dots$

## CAPÍTULO 3

### CASO I

Inicialmente se tratará con problemas de difusión fuertemente acoplados de la forma:

$$Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3.0.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.0.2)$$

$$B_1u(1, t) + B_2u_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.0.3)$$

$$u(x, 0) = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.0.4)$$

Este caso esta organizado de la siguiente manera. En la sección 3.1 se tratará la discretización del problema continuo (3.0.1)-(3.0.4) usando aproximación en diferencias finitas progresivas. La sección 3.2 trata con la construcción de soluciones exactas no triviales del problema de frontera discreto asociado al problema mixto discreto por el método de separación de variables discretas. La solución numérica del problema (3.0.1)-(3.0.4) está construido por medio de la solución explícita del problema discretizado. En la sección 3.3 se construye, por superposición de las soluciones obtenidas para el problema de frontera discreto, una solución exacta el problema mixto discreto.

### 3.1. DISCRETIZACIÓN

Para la discretización del dominio  $[0, 1] \times [0, +\infty[$  se considera una discretización de  $[0, 1]$  tomando un paso espacial  $h = \frac{1}{N}$  donde  $N > 0$  es un número entero que se considera fijo por simplicidad. Se tiene entonces el conjunto de puntos  $\{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$ . Además, se toma un paso temporal  $k > 0$  que se considera fijo por simplicidad y se discretiza el tiempo  $[0, +\infty[$ ; se obtiene el conjunto de puntos  $\{t_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots\}$ . De este modo se ha construido una red rectangular del dominio  $[0, 1] \times [0, +\infty[$  formada por los puntos  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ . En cada punto de malla se usará un método en diferencias finitas progresivas que reemplazará las derivadas parciales  $u_t$  y  $u_{xx}$  de la ecuación original (3.0.1) transformando el problema continuo en un problema discreto. Para reemplazar  $u_t$  se desarrolla  $u(x, t)$  en serie de Taylor, en  $t$ , alrededor del punto  $(ih, jk)$ ,

$$u(ih, (j+1)k) = u(ih, jk) + ku_t(ih, jk) + O(k^2)$$

despejando  $u_t(ih, jk)$ , se tiene,

$$u_t(ih, jk) = \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k} + O(k^2),$$

de la misma forma  $u_{xx}$  se puede reemplazar por una aproximación en diferencias finitas progresivas desarrollando  $u((i+1)h, jk)$  y  $u((i-1)h, jk)$  en serie de Taylor, en  $x$ , alrededor del punto  $(ih, jk)$ ,

$$u((i+1)h, jk) = u(ih, jk) + hu_x(ih, jk) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(ih, jk) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(ih, jk) + O(h^4)$$

y

$$u((i-1)h, jk) = u(ih, jk) - hu_x(ih, jk) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(ih, jk) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(ih, jk) + O(h^4)$$

sumando estas dos últimas expresiones y despejando el término  $u_{xx}$  se tiene,

$$u_{xx}(ih, jk) = \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} + O(h^2)$$

sustituyendo en la ecuación (3.0.1) las expresiones de  $u_t$  y  $u_{xx}$  se obtiene el siguiente esquema en diferencias,

$$A \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} - B \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k} = 0.$$

Denotando,

$$\Lambda[u] = Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t)$$

y

$$\Lambda_{h,k}[u] = A \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} - B \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k}$$

notemos que el esquema en diferencia obtenido es *consistente* con la ecuación en derivadas parciales (3.0.1), es decir verifica que,

$$\|\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi]\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h, k \rightarrow 0$$

siendo  $\phi(x, t)$  cualquier función suave, i.e., cualquier función suficientemente derivable.

En efecto, denotando  $\Phi(i, j) = \phi(ih, jk)$  se tienen,

$$\Lambda_{h,k}[\phi] = A \frac{\Phi((i+1), j) - 2\Phi(i, j) + \Phi((i-1), j)}{h^2} - B \frac{\Phi(i, (j+1)) - \Phi(i, j)}{k}$$

desarrollando por Taylor, alrededor del punto  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ , la función  $\Phi(i, j+1)$  en  $t$  y las funciones  $\Phi(i+1, j)$ ,  $\Phi(i-1, j)$  en  $x$ , se obtiene,

$$\Phi(i, j+1) = \Phi(i, j) + k\Phi_t(i, j) + \frac{k^2}{2!}\Phi_{tt}(i, j) + O(k^3)$$

$$\Phi(i+1, j) = \Phi(i, j) + h\Phi_x(i, j) + \frac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(i, j) + \frac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(i, j) + \frac{h^4}{4!}\Phi_{xxxx}(i, j) + O(h^5)$$

$$\Phi(i-1, j) = \Phi(i, j) - h\Phi_x(i, j) + \frac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(i, j) - \frac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(i, j) + \frac{h^4}{4!}\Phi_{xxxx}(i, j) + O(h^5)$$

sustituyendo en  $\Lambda_{h,k}[\phi]$ , se tiene

$$\Lambda_{h,k}[\phi] = A \left( \Phi_{xx}(i,j) + \frac{h^2}{12} \Phi_{xxxx}(i,j) \right) - B \left( \Phi_t(i,j) + \frac{k}{2} \Phi_{tt}(i,j) \right) + O(k^2) + O(h^3)$$

por otra parte se tiene  $\Lambda[\phi] = A\phi_{xx}(x,t) - B\phi_t(x,t)$ , y tomando en cuenta la notación anterior se tiene para el punto  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ ,

$$\Lambda[\phi] = A\Phi_{xx}(i,j) - B\Phi_t(i,j)$$

de donde,

$$\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi] = -A \frac{h^2}{12} \Phi_{xxxx}(i,j) + B \frac{k}{2} \Phi_{tt}(i,j) + O(k^2 + h^3)$$

tomando norma en esta última expresión,

$$\|\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi]\| \leq \|A\| O(h^2) + \|B\| O(k)$$

se concluye que el esquema en diferencias finitas es *consistente* con la ecuación (3.0.1). Esto implica que la solución de la ecuación en derivadas parciales, si es suave, es una solución aproximada del esquema en diferencias.

Denotando  $U(i,j) = u(ih, jk)$  y aproximando las derivadas parciales que aparecen en (3.0.1) por las aproximaciones en diferencias,

$$u_t(ih, jk) \approx \frac{U(i, j+1) - U(i, j)}{k}$$

$$u_{xx}(ih, jk) \approx \frac{U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j)}{h^2}.$$

La ecuación (3.0.1) toma la forma,

$$\frac{B}{k} [U(i, j+1) - U(i, j)] = \frac{A}{h^2} [U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j)],$$

donde  $h = \frac{1}{N}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , y  $j \geq 0$ . Sea  $r = \frac{k}{h^2}$ , escribimos la última ecuación en la forma,

$$rA [U(i+1, j) + U(i-1, j)] + (B - 2rA)U(i, j) - BU(i, j+1) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$1 \leq i \leq N-1, j \geq 0.$$

Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales (3.0.1)-(3.0.4) toman la forma,

$$U(0, j) = 0, \quad j \geq 0 \quad (3.1.2)$$

$$B_1 U(N, j) + NB_2 [U(N, j) - U(N - 1, j)] = 0, \quad j \geq 0 \quad (3.1.3)$$

$$U(i, 0) = f(i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.1.4)$$

con  $f(i) = F(ih)$ .

## 3.2. EL PROBLEMA DE FRONTERA EN DIFERENCIA PARCIAL

En esta sección se buscarán soluciones de la forma,

$$U(i, j) = G(j)H(i), \quad G(j) \in \mathbf{C}^{m \times m}, \quad H(i) \in \mathbf{C}^m \quad (3.2.1)$$

$$1 \leq i \leq N - 1, \quad j \geq 0.$$

Las siguientes ecuaciones se obtienen reemplazando la condición (3.2.1) en las ecuaciones (3.1.1)-(3.1.3). Además  $Nh = 1$ ,  $r = \frac{k}{h^2}$ ,

$$rAG(j) [H(i + 1) - H(i - 1)] + (B - 2rA) G(j)H(i) = BG(j + 1)H(i) \quad (3.2.2)$$

$$G(j)H(0) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$B_1 G(j)H(N) + NB_2 G(j) [H(N) - H(N - 1)] = 0. \quad (3.2.4)$$

Si  $\rho$  es un número real, adicionando y sustrayendo el término  $\rho AG(j)H(i)$  en el lado izquierdo de (3.2.2) se obtiene,

$$rAG(j) \left[ H(i + 1) + \left( \frac{-2r - \rho}{r} \right) H(i) + H(i - 1) \right] + \quad (3.2.5)$$

$$[(B + \rho A) G(j) - BG(j + 1)] H(i) = 0$$

Nótese que la ecuación (3.2.5) se satisface si las sucesiones  $\{G(j)\}$ ,  $\{H(i)\}$  satisfacen

$$BG(j + 1) - (B + \rho A) G(j) = 0, \quad j \geq 0 \quad (3.2.6)$$

$$H(i + 1) + \left( \frac{-2r - \rho}{r} \right) H(i) + H(i - 1) = 0, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (3.2.7)$$

Además, los coeficientes de la ecuación vectorial (3.2.7) son escalares, y las entradas de  $H(i)$  son las soluciones de la ecuación escalar

$$h(i+1) - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right)h(i) + h(i-1) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

con la ecuación característica algebraica asociada

$$z^2 - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right)z + 1 = 0 \quad (3.2.8)$$

para aquellos números reales  $\rho$  tal que  $-4r \leq \rho \leq 0$  se obtiene  $\left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2 \leq 1$ . Así, si  $-4r < \rho < 0$ , entonces la ecuación (3.2.8) tiene dos soluciones diferentes

$$z_{0,1} = \left\{ \frac{2r+\rho}{2r} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2} \right\} \quad (3.2.9)$$

$$z_{0,1} = e^{\pm i\theta}$$

donde  $\cos \theta = \frac{2r+\rho}{2r}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. Así se obtiene

$$z_0^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta), \quad z_1^n = \cos(n\theta) - j\sin(n\theta), \quad (3.2.10)$$

donde el conjunto solución de la ecuación vectorial (3.2.7) esta dada por

$$H(i) = z_0^i c + z_1^i d, \quad c, d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.2.11)$$

Este  $H(i)$  deberá ser satisfecha por (3.2.3), en orden de determinar soluciones no triviales  $U(i, j)$  del problema (3.2.2)-(3.2.4), es necesario que  $H(0) = 0$ . Por (3.2.11) se sigue que  $c = -d$ , luego

$$H(i) = (z_0^i - z_1^i)d, \quad d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$H(i) = \sin(i\theta)d, \quad d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.2.12)$$

Sustituyendo (3.2.12) en la ecuación (3.2.4) se obtiene

$$\left\{ B_1 \left( z_0^N - z_1^N \right) + NB_2 \left[ \left( z_0^N - z_1^N \right) - \left( z_0^{N-1} - z_1^{N-1} \right) \right] \right\} G(j)d = 0,$$

ó

$$\{ B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)] \} G(j)d = 0, \quad j \geq 0. \quad (3.2.13)$$

Como se buscan soluciones no triviales, se supone que ni  $G(j)$ , ni  $d \in \mathbb{C}^m$  son ceros. Con el requerimiento de que el vector  $d \in \mathbb{C}^m$  debe ser diferente de cero, la condición (3.2.13) es equivalente a la siguiente condición

$$T(\theta) = B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)] \quad \text{singular, } \theta \in ]0, \pi[. \quad (3.2.14)$$

Observe que para  $\theta = \pi$  la matriz  $T(\pi) = 0$  y por tanto es singular, pero para  $\theta = \pi$  de (3.2.12) se obtiene  $H(i) = 0$  la solución trivial. Así, se buscarán valores de  $\theta \in ]0, \pi[$  tales que  $T(\theta)$  sea singular.

Veamos que si  $\sin(N\theta) = 0$  entonces para  $\theta = \frac{k\pi}{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  la matriz  $T(\theta)$  es invertible dado que  $\sin(\frac{k\pi}{N}) \neq 0$  y  $B_2$  es invertible,

$$\begin{aligned} T(\theta) &= NB_2 \left[ \sin(k\pi) - \sin\left((N-1)\frac{k\pi}{N}\right) \right] \\ &= 2NB_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\frac{k\pi}{N}\right) \\ &= 2NB_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= 2NB_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= N(-1)^k B_2 \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

Consecuentemente los valores  $\theta \in ]0, \pi[$  tales que la matriz  $T(\theta)$  definida por (3.2.14) sea singular debe satisfacer que  $\sin(N\theta) \neq 0$ , y entonces  $T(\theta)$  es

singular si y sólo si

$$B_2^{-1}B_1 + \frac{2N \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\theta\right)}{\sin(N\theta)} I \text{ es singular, } \theta \in ]0, \pi[ \quad (3.2.15)$$

ó

$$\frac{2N \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\theta\right)}{\sin(N\theta)} \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right) \quad (3.2.16)$$

Supóngase que

$$\text{existe un valor propio real } \mu < 1, \mu \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right) \quad (3.2.17)$$

Note que la condición (3.2.14) es equivalente a

$$(B_1 + NB_2) \sin(N\theta) - NB_2 \sin((N-1)\theta) \text{ es singular} \quad (3.2.18)$$

expandiendo  $\sin((N-1)\theta)$  y premultiplicando la matriz que aparece en (3.2.18) por  $B_2^{-1}$ , se obtiene la condición equivalente,

$$\text{existe } \mu \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right) \cap \mathbb{R} \text{ con } -\frac{\mu}{N} + 1 - \cos\theta + \sin\theta \cot(N\theta) = 0 \quad (3.2.19)$$

donde  $\theta \in ]0, \pi[$ , entonces  $\sin\theta \neq 0$  y la ecuación (3.2.19) para  $\theta$  puede escribirse de la forma

$$\cot(N\theta) = \frac{\cos\theta - \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)}{\sin\theta}. \quad (3.2.20)$$

Suponiendo que  $\mu < 1$  existe una única solución  $\theta \in I_k = \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[ \subset ]0, \pi[$  en cada  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , en efecto,  $\forall \theta \in I_k = \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[ \subset ]0, \pi[$  en cada  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{k-1}{N}\pi^+} \cot(N\theta) &= +\infty; & \lim_{\theta \rightarrow \frac{k}{N}\pi^-} \cot(N\theta) &= -\infty; \\ \frac{d[\cot(N\theta)]}{d\theta} &= -\frac{N}{\sin^2(N\theta)} < 0 \implies \cot(N\theta) \text{ es decreciente;} \end{aligned}$$

$\cot(N\theta)$  es continua.

Por tanto,

Existe  $\theta_k = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi \in I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  tal que  $\cot(N\theta_k) = 0$ .

Se obtiene que  $\cot(N\theta)$  es una aplicación continua de  $I_k = \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[$  sobre la recta real en cada  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Si  $\mu \leq 0$  entonces para  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\left[ \frac{\cos\theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin\theta} \right] \leq 0$  es una función continua negativa y al ser  $\cot(N\theta)$  una función que recorre todos los valores en  $\mathbb{R}$ , en cada  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , estas funciones se cortan en un único punto en cada  $I_k$ , es decir,

Existe  $\theta_k \in I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  tal que  $\cot(N\theta_k) = \left[ \frac{\cos(\theta_k) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_k)} \right]$ .

Si  $0 < \mu < 1$ , la ecuación (3.2.20) tiene una única solución para  $I_1 = \left] 0, \frac{k}{N}\pi \right[$  ya que  $\cot(N\theta) - \left[ \frac{\cos\theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin\theta} \right]$  cambia de signo una vez. Para  $I_k = \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[$ ,  $k = 2, \dots, N-1$  también existe única solución en cada  $I_k$  porque  $\left[ \frac{\cos\theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin\theta} \right]$  es una función acotada continua decreciente en cada  $I_k$ , como

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{k-1}{N}\pi^+} \left[ \frac{\cos\theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin\theta} \right] \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{k}{N}\pi^-} \left[ \frac{\cos\theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin\theta} \right]$$

son números reales entonces,

Existe  $\theta_k \in I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  tal que  $\cot(N\theta_k) = \left[ \frac{\cos(\theta_k) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_k)} \right]$

Esto garantiza la existencia de soluciones  $\theta_k \in I_k$  tales que,

$$\cot(N\theta_k) = \frac{\cos(\theta_k) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_k)}, \quad \theta_k \in I_k \quad (3.2.21)$$

para  $\mu < 1$ ,  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ . Por lo tanto, una familia de soluciones viene dada por

$$H_k(i) = \sin(i\theta_k)d_k, \quad \theta_k \in I_k, \quad d_k \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq k \leq N-1. \quad (3.2.22)$$

Además, por (3.2.9) y (3.2.10) se tiene que

$$\cos \theta = \frac{2r + \rho}{2r}, \quad \rho = \rho_k = -2r(1 - \cos \theta_k) = -4r \sin^2 \left( \frac{\theta_k}{2} \right) \quad (3.2.23)$$

$$k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Tomando estos valores de  $\rho_k$  en (3.2.6) se obtiene

$$BG_k(j + 1) = (B + \rho_k A)G_k(j), \quad j \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.2.24)$$

Ahora, si para cada  $k$ , se cumple la condición,

$$\text{existe } \lambda_k, \text{ tal que } [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A] \text{ es invertible} \quad (3.2.25)$$

entonces la solución general de (3.2.24) esta dada por

$$G_k(j) = \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right]^j v_k, \quad v_k \in \mathbb{C}^m, \quad (3.2.26)$$

donde

$$\widehat{B}_k = [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1} B$$

$$\widehat{(B + \rho_k A)} = [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1} (B + \rho_k A)$$

$v_k \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente para  $BG_k(j + 1) = (B + \rho_k A)G_k(j)$ , es decir,  $v_k \in R \left( \widehat{B}_k^{L_k} \right)$ , donde  $L_k = \text{Ind} \left( \widehat{B}_k \right)$  y  $\widehat{B}_k^D$  denota la inversa Drazin de  $\widehat{B}_k$ .

Las soluciones  $G_k(j)$  tienen la forma,

$$\begin{aligned} G_k(j + 1) &= \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right]^{j+1} v_k \\ &= \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right] \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right]^j v_k \\ &= \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right] G_k(j). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $B$  se obtiene

$$\begin{aligned} BG_k(j + 1) &= B \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right] G_k(j) \\ &= B \left[ \left( [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1} B \right)^D (B + \rho_k A) \right] G_k(j) \\ &= B \left[ B^D \left( [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1} \right)^D (B + \rho_k A) \right] G_k(j), \end{aligned}$$

donde  $[(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]$  es no singular, es decir,

$$[(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^D = [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} BG_k(j+1) &= B \left[ B^D [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A] (\widehat{B + \rho_k A}) \right] G_k(j) \\ &= BB^D [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A] [(\lambda_k - 1)B - \rho_k A]^{-1} (B + \rho_k A) G_k(j) \\ &= BB^D (B + \rho_k A) G_k(j) \\ &= (BB^D B + \rho_k BB^D A) G_k(j). \end{aligned}$$

Si  $\text{Ind}(B) \leq 1$  entonces

$$\begin{aligned} BG_k(j+1) &= (B + \rho_k BB^D A) G_k(j) \\ &= B (I + \rho_k B^D A) G_k(j). \end{aligned}$$

Nótese que si  $B$  es invertible con  $\rho_k \neq 0$ , entonces  $G_k(j) = (I + \rho_k B^{-1} A)^j$  satisfaciendo que  $G_k(0) = I$ , es solución de

$$G_k(j+1) = (I + \rho_k B^{-1} A) G_k(j).$$

La familia de soluciones del problema (3.2.2)-(3.2.4) viene dada por

$$U_k(i, j) = \left[ \widehat{B}_k^D (\widehat{B + \rho_k A}) \right]^j \sin(i\theta_k) v_k \quad (3.2.27)$$

$v_k \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente y  $\theta_k \in I_k$ .

Observe que si  $B_1$  es una matriz singular,  $\mu = 0 \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces la matriz  $T(\theta)$  es singular para los valores  $\theta_k = \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right)\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . En efecto por (3.2.14),

$$T(\theta_k) = B_1 \sin\left(N \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right)\pi\right) + 2N \sin\left(\frac{2k-1}{2(2N-1)}\pi\right) \cos\left(\frac{(2N-1)(2k-1)}{2(2N-1)}\pi\right) B_2$$

$$\begin{aligned}
T(\theta_k) &= B_1 \sin \left( \frac{2Nk}{2N-1} \pi - \frac{N\pi}{2N-1} \right) \\
&= B_1 \sin \left( k\pi + \frac{k-N}{2N-1} \pi \right) \\
&= (-1)^k B_1 \sin \left( \frac{k-N}{2N-1} \pi \right),
\end{aligned}$$

donde  $\sin \left( \frac{k-N}{2N-1} \pi \right) \neq 0$ , la matriz  $T(\theta_k)$  es una matriz singular la cual es diferente de cero si  $B_1 \neq 0$ . Notemos que  $T(\theta_N) = T(\pi) = 0$ , y el caso  $\theta = \pi$  se excluye porque este valor da la solución trivial. Sea  $\mu < 1$  un valor propio de la matriz  $(-B_2^{-1}B_1)$  y sea  $\theta_k$  una solución de (3.2.21). Introducimos la matriz en  $\mathbb{C}^{m \times m}$  definida por

$$S(\mu) = \frac{B_2^{-1}T(\theta_k)}{\sin(N\theta_k)} = B_2^{-1}B_1 + \mu I \quad (3.2.28)$$

y la matriz  $\tilde{S}(\mu)$  en  $\mathbb{C}^{mp \times m}$  por

$$\tilde{S}(\mu) = \begin{bmatrix} S(\mu) \\ S(\mu)Q \\ S(\mu)Q^2 \\ \vdots \\ S(\mu)Q^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (3.2.29)$$

donde  $Q = \widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)$  y  $p$  es el grado del polinomio minimal de  $Q$ . Veamos que usando  $\tilde{S}(\mu)$ , la condición (3.2.13) toma la forma,

$$\{B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)]\} \left[ \widehat{B}_k^D(B + \rho_k A) \right]^j v_k = 0 \quad (3.2.30)$$

con  $0 \leq j$ , esto es equivalente a

$$\tilde{S}(\mu)v_k = 0, \quad v_k \in \mathbb{C}^m. \quad (3.2.31)$$

La ecuación (3.2.31) tiene soluciones no nulas  $v_k \in \mathbb{C}^m$  si y sólo si

$$\text{rank} \left[ \tilde{S}(\mu) \right] < m, \quad (3.2.32)$$

y bajo esta condición, por el teorema 2.3.1 de [22], el conjunto solución de (3.2.31) está dado por

$$v_k = \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}^m - \{0\}. \quad (3.2.33)$$

Por lo anterior el siguiente conjunto de soluciones no triviales del problema (3.2.2)-(3.2.4) ha sido construido,

$$\left. \begin{aligned} U_k(i, j) &= \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right]^j \sin(i\theta_k) v_k, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \\ v_k &= \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}^m - \{0\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.34)$$

NOTA 2.1: Si  $B$  es una matriz no singular, entonces  $L_k = \text{Ind}(\widehat{B}_k) = 0$ ,  $\widehat{B}_k^D = \widehat{B}_k^{-1}$  y en este caso si  $\rho_k \neq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) &= B^{-1} [(\lambda_k - 1) B - \rho_k A] [(\lambda_k - 1) B - \rho_k A]^{-1} (B + \rho_k A) \\ &= (I + \rho_k B^{-1} A) \end{aligned}$$

y así,  $G(j)$  estará dada por  $G(j) = (I + \rho_k B^{-1} A)^j$  con  $G(0) = I$ . Por lo tanto, el siguiente conjunto de soluciones no triviales del problema (3.2.2)-(3.2.4) ha sido construido para  $k = 1, 2, \dots, N-1$ ,

$$\begin{aligned} U_k(i, j) &= (I + \rho_k B^{-1} A)^j \sin(i\theta_k) v_k, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0, \\ v_k &= \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}^m - \{0\}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $\rho_k = 0$ , el cual corresponde a  $\theta_k = 0$  en (3.2.9)-(3.2.10). En este caso la ecuación (3.2.8) toma la forma

$$\begin{aligned} (z-1)^2 &= z^2 - 2z + 1 = 0 \\ z_{0,1} &= 1, \end{aligned}$$

y el conjunto solución de la ecuación (3.2.7) está dado por

$$H(i) = cz^i + idz^{i-1} = c(1)^i + id(1)^{i-1}$$

$$H(i) = 1^i c + id = c + id, \quad c, d \in \mathbb{C}^m. \quad (3.2.35)$$

La condición  $H(0) = 0$  implica que  $c = 0$  y (3.2.35) toma la forma

$$H(i) = id_0, \quad d_0 \in \mathbb{C}^m. \quad (3.2.36)$$

Imponiendo  $G(j)$  de (3.2.6) con  $B \neq 0$  se tiene

$$BG(j+1) - BG(j) = 0$$

$$B[G(j+1) - G(j)] = 0$$

$$G(j+1) = G(j), \quad j \geq 0$$

$$G(j) = G(0), \quad j \geq 0,$$

teniendo en cuenta  $U(i, j)$  como es dada en (3.2.1) se tiene

$$U(i, j) = G(j)H(i)$$

$$= iG(0)d_0$$

$$= i\omega_0, \quad \omega_0 \in \mathbb{C}^m$$

la condición (3.2.4) toma la forma

$$B_1G(j)H(N) + NB_2G(j)[H(N) - H(N-1)] = 0$$

$$B_1G(0)Nd_0 + NB_2G(0)[Nd_0 - (N-1)d_0] = 0$$

$$N(B_1 + B_2)G(0)d_0 = 0$$

$$(B_1 + B_2)\omega_0 = 0, \quad \omega_0 \in \mathbb{C}^m.$$

Como  $B_2$  es invertible esto es equivalente a

$$(B_2^{-1}B_1 + I)\omega_0 = 0, \quad \omega_0 \in \mathbb{C}^m \quad (3.2.37)$$

La ecuación (3.2.37) tiene soluciones vectoriales no nulas  $\omega_0 \in \mathbb{C}^m$  si y sólo si,

$$B_1 + B_2 \text{ es singular} \quad (3.2.38)$$

esto es equivalente a

$$\mu = 1 \in \sigma \left( -B_2^{-1}B_1 \right). \quad (3.2.39)$$

Suponiendo que existe  $\mu = 1 \in \sigma \left( -B_2^{-1}B_1 \right)$ , a fin de determinar  $\omega_0$ , partiendo de (3.2.28) introducimos la matriz  $S(1) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,

$$S(1) = B_2^{-1}B_1 + I \quad (3.2.40)$$

y por el teorma 2.12. de [22], el conjunto solución de (3.2.37) está dado por

$$\omega_0 = (I - S(1)^+S(1)) \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \mathbb{C}^m - \{0\}. \quad (3.2.41)$$

En este caso tenemos una solución no acotada de (3.2.2)-(3.2.4), cuando  $N \rightarrow \infty$ , definida por

$$U_0(i, j) = i\omega_0, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad j \geq 0 \quad (3.2.42)$$

donde  $\omega_0$  esta dado por (3.2.41). Resumiendo se establece el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.1** *Considere el problema de frontera (3.2.2)-(3.2.4) donde  $B_2$  es una matriz invertible que satisface la condición (3.2.17). Sea  $S(\mu)$  la matriz en  $\mathbb{C}^{m \times m}$  definida por (3.2.28),  $\tilde{S}(\mu)$  la matriz en  $\mathbb{C}^{mp \times m}$  definida por (3.2.29). Sea  $p$  el grado del polinomio minimal de  $Q = \widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)$ , y  $\widehat{B}_k^D$  la inversa de Drazin de  $\widehat{B}_k$ , entonces:*

(i) *El problema (3.2.2)-(3.2.4) tiene soluciones no triviales  $\{U(i, j)\}$  de la forma (3.2.1) si existe  $\theta \in ]0, \pi[$  tal que la matriz  $T(\theta)$  definida por (3.2.14) es singular y  $\text{rank} \left[ \tilde{S}(\mu) \right] < m$ .*

(ii) *Si  $B_1$  es singular, tomando  $\mu = 0$  en (3.2.17) y  $\theta_k = \left( \frac{2k-1}{2N-1} \right) \pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ , se obtiene  $T(\theta) = (-1)^k B_1 \sin \left( \frac{k-N}{2N-1} \pi \right)$ . Bajo la hipótesis (3.2.16), la*

sucesión vectorial  $\{U_k(i, j)\}$  dada en (3.2.34) define soluciones no triviales del problema (3.2.2)-(3.2.4) para  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ .

(iii) Si  $\mu < 1$  y  $\mu \neq 0$  es un valor propio de  $(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces existen soluciones  $\theta_k \in I_k = \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ , de la ecuación (3.2.21) para la cual  $T(\theta_k)$  es singular. Bajo la hipótesis (3.2.16), la sucesión vectorial  $\{U_k(i, j)\}$  dada en (3.2.34) define soluciones no triviales del problema (3.2.2)-(3.2.4) para  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ .

(iv) Si  $\mu = 1$  es un valor propio de  $(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces existen soluciones no triviales del problema (3.2.2)-(3.2.4) dadas por

$$U(i, j) = i\omega_0, \quad \omega_0 \in \ker[S(1)], \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad j \geq 0,$$

las cuales son no acotadas cuando  $N \rightarrow \infty$ .

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES PARA EL PROBLEMA MIXTO

Ahora se construirán soluciones exactas del problema mixto discreto (3.1.1)-(3.1.4). Note que la ecuación (3.2.7) junto con las condiciones  $H(0) = 0$  y  $B_1H(N) + NB_2[H(N) - H(N - 1)] = 0$  que fueron obtenidas respectivamente de  $U(0, j) = G(j)H(0) = 0$  y de la ecuación (3.1.3) al tomar  $j = 0$  y  $G(0) = I$  cumpliendo que la solución no fuera la trivial, llevan a considerar el siguiente problema discreto vectorial subyacente,

$$\left. \begin{aligned} H(i + 1) - 2H(i) + H(i - 1) &= \frac{\rho}{r}H(i), \quad 1 \leq i \leq N - 1 \\ H(0) &= 0 \\ B_1H(N) + NB_2[H(N) - H(N - 1)] &= 0 \end{aligned} \right\} (P)$$

ya que  $B_2$  es invertible, para  $\mu < 1$ ,  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ , por el teorema de la aplicación espectral la segunda condición de frontera del problema (P) puede

transformarse en,

$$\begin{aligned}
B_1 H(N) + NB_2 [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
-B_2^{-1} B_1 H(N) - N [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
\mu H(N) - N [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
(N - \mu) H(N) &= NH(N-1) \\
H(N) &= \frac{N}{N - \mu} H(N-1)
\end{aligned}$$

y el problema discreto vectorial queda de la siguiente forma,

$$\left. \begin{aligned}
\Delta^2 H(i-1) - \frac{\rho}{r} H(i) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
H(0) &= 0 \\
H(N) &= \frac{N}{N-\mu} H(N-1)
\end{aligned} \right\} (P^*)$$

donde

$$\{H(i) = \sin(i\theta_k) d_k\}_{k=1}^{N-1} \in \mathbf{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \text{con} \quad \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in I_k = \left] \frac{k-1}{N} \pi, \frac{k}{N} \pi \right[ ,$$

verificando las ecuaciones

$$\cot(N\theta_k) = \frac{\cos(\theta_k) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_k)} \quad \text{y} \quad \{d_k\}_{k=1}^{N-1} \in \ker \tilde{S}(\mu)$$

son las soluciones de dicho problema. Asociado al problema  $(P^*)$  se introduce el problema discreto escalar de Sturm-Liouville,

$$\left. \begin{aligned}
h(i+1) - 2h(i) + h(i-1) &= \frac{\rho}{r} h(i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
h(0) &= 0 \\
h(N) &= \frac{N}{N-\mu} h(N-1).
\end{aligned} \right\} (P^{**})$$

El problema  $(P^{**})$  puede ser escrito como un problema matricial de autovalores,

$$\tilde{A}h = \frac{\rho}{r} Rh$$

donde  $\tilde{A}$  es una matriz  $(N-1) \times (N-1)$ , simétrica y tridiagonal y  $R = I$ . El sistema queda de la forma,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2\mu-N}{N-\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(N-2) \\ h(N-1) \end{pmatrix} = \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(N-2) \\ h(N-1) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la teoría de Sturm-Liouville para problemas de autovalores matriciales se obtienen los siguientes resultados:

(i) El problema  $(P^{**})$  tiene exactamente  $N - 1$  autovalores reales distintos,  $\{\frac{\rho_k}{r}\}_{k=1}^{N-1}$ , los cuales vienen definidos por  $\rho_k = -4r \sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$ , donde los  $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$  verifican la ecuación,

$$\cot(N\theta_k) = \frac{\cos(\theta_k) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_k)}, \quad \theta_k \in \left] \frac{k-1}{N}\pi, \frac{k}{N}\pi \right[ , \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

(ii) Para cada autovalor  $\{\frac{\rho_k}{r}\}$  existe una autofunción  $h_k(i)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , dada por  $h_k(i) = \sin(i\theta_k)$ . Estas autofunciones  $\{h_k(i)\}_{k=1}^{N-1}$  son mutuamente ortogonales con respecto a la función de peso 1. En particular, estas autofunciones son linealmente independientes en  $(1, 2, \dots, N-1)$ .

Debido a la linealidad de la ecuación (3.1.1) y la homogeneidad de las condiciones de frontera (3.1.2)-(3.1.3), es claro que la suma de soluciones del problema (3.1.1)-(3.1.3) es también una solución de tal problema. Supóngase la hipótesis (3.2.17) con  $\mu \neq 1$  y (3.2.16). Si  $B_1$  es singular, tomando  $\mu = 0$  y usando la notación del teorema 3.2.1, el vector

$$U(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_k^D (\widehat{B} + \rho_k A) \right]^j \sin(i\theta_k) \left( I - \widetilde{S}(0)^+ \widetilde{S}(0) \right) a_k \quad (3.3.1)$$

con  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $j \geq 0$ , satisface (3.1.1)-(3.1.3) para  $a_k \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ . Por imposición de la condición inicial (3.1.4),

$$\begin{aligned} U(i,0) = f(i) &= \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) \left( I - \tilde{S}(0)^+ \tilde{S}(0) \right) a_k \\ f(i) &= \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) v_k. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Con  $v_k = \left( I - \tilde{S}(0)^+ \tilde{S}(0) \right) a_k$ . Como  $f(i)$  y  $v_k$  son vectores en  $\mathbb{C}^m$  se puede escribir (3.3.2) escalarmente,

$$f_\delta(i) = \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) v_{k,\delta}, \quad (3.3.3)$$

donde  $f_\delta(i)$  y  $v_{k,\delta}$  denotan la  $\delta$ -ésima componente de  $f(i)$  y  $v_k$  respectivamente, para  $\delta = 1, 2, \dots, m$ . La expresión (3.3.3) es una serie de Fourier discreta, donde las funciones  $\{\sin(i\theta_k)\}_{k=1}^{N-1}$  son las autofunciones del problema Sturm-Liouville discreto escalar ( $P^{**}$ ). Para determinar los coeficientes de Fourier se multiplicará ambos lados de (3.3.3) por  $\sin(i\theta_\xi)$ ,  $1 \leq \xi \leq N-1$ , se sumarán los resultados desde  $i = 1$  hasta  $i = N-1$  y se usará la ortogonalidad de las autofunciones  $\{\sin(i\theta_k)\}_{k=1}^{N-1}$  del problema Sturm-Liouville discreto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_\xi) f_\delta(i) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_\xi) \sin(i\theta_k) v_{k,\delta} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sin(i\theta_\xi) \sin(i\theta_1) v_{1,\delta} + \dots + \sin(i\theta_\xi) \sin(i\theta_{N-1}) v_{N-1,\delta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_\xi) v_{\xi,\delta} \\ &= v_{\xi,\delta} \sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_\xi), \quad 1 \leq \xi \leq N-1 \end{aligned}$$

entonces teniendo en cuenta que  $\theta_k = \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , para  $\mu = 0$  se tiene

$$v_{\xi, \delta} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(i \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi\right) f_{\delta}(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2\left(i \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi\right)}$$

$$1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq \xi \leq N-1$$

o bien

$$v_{\xi, \delta} = \frac{4}{2N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(i \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi\right) f_{\delta}(i), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

escribiendo vectorialmente

$$v_k = \frac{4}{2N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(i \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi\right) f(i), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.3.4)$$

Como  $v_k = \left(I - \tilde{S}(0)^+ \tilde{S}(0)\right) a_k \in \ker \tilde{S}(0)$ , es suficiente imponer  $f(i) \in \ker \tilde{S}(0)$ , para que el vector,

$$U(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_k^D (B + \rho_k A) \right]^j \sin\left[i \left(\frac{2k-1}{2N-1}\right) \pi\right] v_k, \quad 1 \leq i \leq N-1, j \geq 0 \quad (3.3.5)$$

sea una solución del problema (3.1.1)-(3.1.4), con  $v_k$  definido por (3.2.33) vector inicial consistente para (3.2.24). Por la definición  $\tilde{S}(0)$  dada por (3.2.29), la condición

$$f(i) \in \ker \left[ \tilde{S}(0) \right], \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.3.6)$$

se satisface si,

$$\ker [S(0)] \text{ es subespacio invariante de } Q \quad (3.3.7)$$

este último requerimiento puede ser escrito de la siguiente forma

$$S(0)Q(I - S(0)^+S(0)) = 0 \quad (3.3.8)$$

dado que el  $\ker [S(0)] = \mathbb{I}m(I - S(0)^+S(0))$ . La conclusión para el caso  $\mu < 1$ ,  $\mu \neq 0$  es la misma con la única diferencia que

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k)},$$

para  $1 \leq i \leq N-1$ . Veamos ésto, si  $B_1$  es singular, usando la notación del teorema 2.2.1 con  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$  y suponiendo que  $\text{rank}[\tilde{S}(\mu)] < m$ , el vector

$$U(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_k^D(B + \rho_k A) \right]^j \sin(i\theta_k) \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_k, \quad 1 \leq i \leq N-1, j \geq 0$$

es una solución del problema (3.1.1)-(3.1.3) para cualquier vector  $a_k \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ . Imponiendo la condición inicial (3.1.4),

$$f_\delta(i) = \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) v_{k,\delta} \\ 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq \delta \leq m$$

por la teoría de series de Fourier discretas [14], los coeficientes de Fourier vienen dados por,

$$v_{k,\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) f_\delta(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k)} \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq \delta \leq m$$

equivalentemente en forma vectorial

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k)}$$

$$1 \leq k \leq N-1$$

como se verifica que  $v_k \in \ker \tilde{S}(\mu)$ , es suficiente que,

$$f(i) \in \ker [\tilde{S}(\mu)], \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.3.9)$$

por la definición de  $\tilde{S}(\mu)$ , esta condición se satisface si  $f(i) \in \ker [S(\mu)]$ , es decir,

$$\ker [S(\mu)] \text{ es subespacio invariante de } Q, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.3.10)$$

ó equivalentemente,

$$S(\mu)Q(I - S(\mu)^+ S(\mu)) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.3.11)$$

para tener una solución exacta del problema (3.1.1)-(3.1.4) definida por,

$$U(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} [\widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)]^j \sin(i\theta_k) v_k, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \quad (3.3.12)$$

resumiendo, el siguiente resultado ha sido establecido,

**Teorema 3.3.1** Considerando la notación del teorema 3.2.1 y tomando  $\mu \neq 1$  un valor propio real de  $(-B_2^{-1}B_1)$ . Suponiendo que la sucesión  $\{f(i)\}_{i=1}^{N-1}$  satisface (3.3.8) y que la matriz  $Q$  satisface (3.3.10), entonces

$$U(i, j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} [\widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)]^j \sin\left[i\left(\frac{2k-1}{2N-1}\right)\pi\right] v_k, & \mu = 0, \\ \text{con } v_k = \frac{4}{2N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(i\left(\frac{2k-1}{2N-1}\right)\pi\right) f(i) \\ \sum_{k=1}^{N-1} [\widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)]^j \sin(i\theta_k) v_k, & \mu < 1, \mu \neq 0, \\ \text{con } v_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k)} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

donde  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $j \geq 0$ , y  $v_k$  es vector inicial consistente para (3.2.24) dado por (3.2.33), define una solución del problema (3.1.1)-(3.1.4).

Una condición más general que (3.3.6) puede ser impuesta sobre  $\{f(i)\}_{i=0}^N$  si la matriz  $(-B_2^{-1}B_1)$  tiene  $s$  valores propios diferentes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  para los cuales,

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\} \subset \sigma(-B_2^{-1}B_1) \cap ]-\infty, 1[, \quad \mu_\tau \neq 1, \quad 1 \leq \tau \leq s. \quad (3.3.14)$$

Sea  $S(\mu_\tau) = B_2^{-1}B_1 + \mu_\tau I$  y para  $1 \leq \tau \leq s$ , sea

$$R(\mu_j) = S(\mu_1) \dots S(\mu_{\tau-1}) S(\mu_{\tau+1}) \dots S(\mu_s), \quad R = S(\mu_\tau) R(\mu_\tau) \quad (3.3.15)$$

Sea  $M$  el subespacio vectorial definido por

$$M = \ker(R) \quad (3.3.16)$$

por el teorema de descomposición [23], se sigue que

$$M = \ker S(\mu_1) \oplus \ker S(\mu_2) \oplus \dots \oplus \ker S(\mu_s). \quad (3.3.17)$$

Sea  $Q_\tau(x)$  el polinomio de grado  $s - 1$  definido por

$$Q_\tau(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2) \dots (x - \mu_{\tau-1})(x - \mu_{\tau+1}) \dots (x - \mu_s). \quad (3.3.18)$$

Entonces los polinomios  $\{Q_\tau(x)\}_{\tau=1}^s$  son coprimos y por el teorema de Bezout [23], existen números complejos  $\{\alpha_\tau\}_{\tau=1}^s$  tales que

$$Q(x) = \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau Q_\tau(x) = 1, \quad (3.3.19)$$

donde

$$\alpha_\tau = \left[ \prod_{\gamma=1, \gamma \neq \tau}^s (\mu_\tau - \mu_\gamma) \right]^{-1}, \quad 1 \leq \tau \leq s. \quad (3.3.20)$$

Esto es,  $Q(x)$  es el polinomio interpolante de Lagrange que toma el valor 1 en cada  $x = \mu_\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq s$ . Por la ecuación (3.3.17) y el cálculo funcional matricial actuando sobre la matriz  $-B_2^{-1}B_1$ , se sigue que

$$\begin{aligned} I &= Q\left(-B_2^{-1}B_1\right) = \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau Q_\tau\left(-B_2^{-1}B_1\right) \\ I &= \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau \left(-B_2^{-1}B_1 - \mu_1 I\right) \dots \left(-B_2^{-1}B_1 - \mu_{\tau-1} I\right) \left(-B_2^{-1}B_1 - \mu_{\tau+1} I\right) \\ &\quad \dots \left(-B_2^{-1}B_1 - \mu_s I\right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\tau=1}^s \alpha_j (-S(\mu_1)) (-S(\mu_2)) \dots (-S(\mu_{\tau-1})) (-S(\mu_{\tau+1})) \dots (-S(\mu_s)) \\ &= (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_j (S(\mu_1)) (S(\mu_2)) \dots (S(\mu_{\tau-1})) (S(\mu_{\tau+1})) \dots (S(\mu_s)) \\ &= (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau), \end{aligned}$$

por tanto se ha obtenido,

$$I = (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) = \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau Q_\tau\left(-B_2^{-1}B_1\right). \quad (3.3.21)$$

Sea  $\{f_\tau(i)\}_{i=0}^N$  la proyección de  $\{f(i)\}_{i=0}^N$  sobre el correspondiente subespacio  $\ker[S(\mu_\tau)]$ , definida por

$$f_\tau(i) = (-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) f(i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad 1 \leq \tau \leq s \quad (3.3.22)$$

observe que

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^s f_\tau(i) &= (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) f(i) \\ &= \left[ (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) \right] f(i) \\ &= If(i) \\ &= f(i) \end{aligned}$$

ó

$$f_1(i) + f_2(i) + \dots + f_s(i) = f(i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.3.23)$$

Supongamos  $f(i) \in M$ ,  $1 \leq i \leq N$ , es decir,

$$Rf(i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq \tau \leq s \quad (3.3.24)$$

entonces por (3.3.14), (3.3.21), (3.3.23) se obtiene

$$S(\mu_\tau) f_\tau(i) = (-1)^{s-1} \alpha_\tau S(\mu_\tau) R(\mu_\tau) f(i) = (-1)^{s-1} \alpha_\tau Rf(i) = 0 \quad (3.3.25)$$

ó

$$f_\tau(i) \in \ker [S(\mu_\tau)]. \quad (3.3.26)$$

Observe que las condiciones (3.3.23) y (3.3.25) son equivalentes. Consideremos ahora el nuevo problema en el cual la condición inicial (3.1.4) del problema (3.1.1)-(3.1.4), es reemplazada por

$$U(i,0) = f_\tau(i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq \tau \leq s. \quad (3.3.27)$$

Se obtienen los  $s$  problemas siguientes,

$$\begin{aligned} rA [U(i+1, j) + U(i-1, j)] + (B - 2rA)U(i, j) - BU(i, j+1) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ U(0, j) &= 0 \\ B_1 U(N, j) + NB_2 [U(N, j) - U(N-1, j)] &= 0 \\ U(i, 0) = f_\tau(i), \quad 0 \leq i \leq N \end{aligned}$$

con  $j \geq 0$ , considere el siguiente problema discreto,

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 H(i-1) - \frac{\rho}{r} H(i) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ H(0) &= 0 \\ H(N) &= \frac{N}{N-\mu_\tau} H(N-1) \end{aligned} \right\} (P^*)$$

donde  $\left\{ H(i) = \sin(i\theta_k^{(\tau)}) d_k^{(\tau)} \right\}_{k=1}^{N-1} \in \mathbf{C}^m$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , con  $\left\{ \theta_k^{(\tau)} \right\}_{k=1}^{N-1} \in I_k$ ,

$I_k = \left] \frac{k-1}{N} \pi, \frac{k}{N} \pi \right[$ ,  $1 \leq k \leq N-1$ , verificando las ecuaciones

$$\cot(N\theta_k^{(\tau)}) = \frac{\cos\left(\theta_k^{(\tau)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_\tau}{N}\right)}{\sin\left(\theta_k^{(\tau)}\right)} \text{ y } \left\{ d_k^{(\tau)} \right\}_{k=1}^{N-1} \in \ker \tilde{S}(\mu_\tau)$$

son las soluciones de de estos  $s$  problemas. Asociados a  $(P^*)$  se tienen  $s$  problemas discretos escalares de Sturm-Liouville,

$$\left. \begin{aligned} h(i+1) - 2h(i) + h(i-1) &= \frac{\rho}{r} h(i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ h(0) &= 0 \\ h(N) &= \frac{N}{N-\mu} h(N-1) \end{aligned} \right\} (P^{**})$$

para cada uno de ellos se obtiene:

(i) Se tiene exactamente  $N-1$  autovalores reales distintos,  $\left\{ \frac{\rho_k^{(\tau)}}{r} \right\}_{k=1}^{N-1}$ , los cuales vienen definidos por  $\rho_k^{(\tau)} = -4r \sin^2\left(\frac{\theta_k^{(\tau)}}{2}\right)$ , donde los  $\left\{ \theta_k^{(\tau)} \right\}_{k=1}^{N-1} \in \left] \frac{k-1}{N} \pi, \frac{k}{N} \pi \right[$  verifican la ecuación,

$$\cot(N\theta_k^{(\tau)}) = \frac{\cos\left(\theta_k^{(\tau)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_\tau}{N}\right)}{\sin\left(\theta_k^{(\tau)}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

(ii) Para cada autovalor  $\frac{\rho_k^{(\tau)}}{r}$  existe una autofunción  $h_k^{(\tau)}(i)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , dada por  $h_k^{(\tau)}(i) = \sin\left(i\theta_k^{(\tau)}\right)$ . Estas autofunciones  $\left\{ h_k^{(\tau)}(i) \right\}_{k=1}^{N-1}$  son mutuamente ortogonales con respecto a la función de peso 1. En particular, estas autofunciones son linealmente independientes en  $(1, 2, \dots, N-1)$ . De (3.3.12) se sabe que la solución del problema de frontera discreto (3.1.1)-(3.1.3) para cada  $\tau$  tal que  $1 \leq \tau \leq s$ , es de la forma:

$$U_\tau(i, j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} [\widehat{B}_k^D(B + \rho_k A)]^j \sin(i\theta_k^{(\tau)}) v_k^{(\tau)}, \\ v_k^{(\tau)} = (I - \widetilde{S}(\mu_\tau) + \widetilde{S}(\mu_\tau)) a_k^{(\tau)}, \quad v_k^{(\tau)} \text{ vector inicial consistente} \\ \mu < 1, \mu \neq 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j, \quad 1 \leq \tau \leq s \end{cases} \quad (3.3.28)$$

los vectores  $v_k^{(\tau)}$  deben verificar,

$$f_\tau(i) = \sum_{k=1}^{N-1} \sin(i\theta_k^{(\tau)}) v_k^{(\tau)} \quad (3.3.29)$$

por la teoría de las series de Fourier discretas [14], se tiene

$$\begin{aligned} v_k^{(\tau)} &= \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k^{(\tau)}) f_\tau(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k^{(\tau)})}, \quad 1 \leq k \leq N-1 \\ &= \frac{(-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) \sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k^{(\tau)}) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k^{(\tau)})} \\ &= (-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k^{(\tau)}) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k^{(\tau)})} \end{aligned}$$

denotando,

$$v_k^{(\tau)} f(i) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_k^{(\tau)}) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_k^{(\tau)})}$$

se tiene,

$$v_k^{(\tau)} = (-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) v_k^{(\tau)} f(i).$$

Imponiendo la condición,

$$f_\tau(i) \in \ker \tilde{S}(\mu_\tau) \quad (3.3.30)$$

y  $\ker \tilde{S}(\mu_\tau)$  es subespacio invariante de  $Q$ , es decir,

$$S(\mu_\tau) Q (I - S(\mu_\tau)^+ S(\mu_\tau)) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq s \quad (3.3.31)$$

se sigue que la solución al problema mixto discreto está definido por,

$$U(i, j) = \sum_{\tau=1}^s U_\tau(i, j). \quad (3.3.32)$$

Por los comentarios previos y el teorema 3.3.1, el siguiente resultado ha sido establecido,

**Teorema 3.3.2** *Sea  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  dados por (3.3.13),  $S(\mu_\tau) = B_2^{-1} B_1 + \mu_\tau I$ , y  $S(\mu_\tau)$ ,  $R$  definidos por (3.3.14) para  $1 \leq \tau \leq s$ , donde  $R = S(\mu_\tau) R(\mu_\tau)$ . Supóngase que las condiciones (3.3.26) y (3.3.27) se cumplen y sea  $\{U_\tau(i, j)\}$  dado por (3.3.11) donde  $v_k$  es reemplazado por  $v_k^{(\tau)}$  definido por*

$$v_k^{(\tau)} = (-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) v_k^{(\tau)} f(i), \quad 1 \leq \tau \leq s$$

luego

$$U(i, j) = \sum_{\tau=1}^s U_\tau(i, j)$$

es una solución del problema (3.1.1)-(3.1.4).

## CAPÍTULO 4

### CASO II

Ahora se tratará con problemas de la forma:

$$Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t) - u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (4.0.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.0.2)$$

$$B_1u(1, t) + B_2u_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.0.3)$$

$$u(x, 0) = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.0.4)$$

Este caso esta organizado en forma semejante al *CASO I*. Veamos inicialmente la discretización del problema.

#### 4.1. DISCRETIZACIÓN

Se considera una discretización similar a la del *CASO I*. Se divide el dominio  $[0, 1] \times [0, +\infty[$  en rectángulos iguales de lado  $\Delta x = h$  y  $\Delta t = k$ , de este modo se ha construido una red rectangular formada por los puntos  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ . Usando un método en diferencias finitas progresivas se reemplazaran las derivadas parciales  $u_t$  y  $u_{xx}$  de la ecuación (4.0.1), transformado el problema continuo en un problema discreto. Del desarrollo en series de Taylor alrededor del punto  $(ih, jk)$ , se tiene

$$u_t(ih, jk) = \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k} + O(k^2)$$

y

$$u_{xx}(ih, jk) = \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} + O(h^2)$$

sustituyendo en la ecuación (4.0.1) las expresiones de  $u_t$  y  $u_{xx}$  se obtiene el siguiente esquema en diferencias,

$$A \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} - B \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k} - u(ih, jk) = 0.$$

Denotando,

$$\Lambda[u] = Au_{xx}(x, t) - Bu_t(x, t) - u(x, t)$$

y

$$\Lambda_{h,k}[u] = A \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} - B \frac{u(ih, (j+1)k) - u(ih, jk)}{k} - u(ih, jk)$$

observe que el esquema en diferencia obtenido es *consistente* con la ecuación en derivadas parciales (4.0.1), es decir, verifica

$$\|\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi]\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h, k \rightarrow 0$$

siendo  $\phi(x, t)$  cualquier función suave, i.e., cualquier función suficientemente derivable. En efecto, denotando  $\Phi(i, j) = \phi(ih, jk)$  se tienen,

$$\Lambda_{h,k}[\phi] = A \frac{\Phi((i+1), j) - 2\Phi(i, j) + \Phi((i-1), j)}{h^2} - B \frac{\Phi(i, (j+1)) - \Phi(i, j)}{k} - \Phi(i, j)$$

desarrollando por Taylor, alrededor del punto  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ , la función  $\Phi(i, j+1)$  en  $t$  y las funciones  $\Phi(i+1, j)$ ,  $\Phi(i-1, j)$  en  $x$ , se obtiene,

$$\Phi(i, j+1) = \Phi(i, j) + k\Phi_t(i, j) + \frac{k^2}{2!}\Phi_{tt}(i, j) + O(k^3)$$

$$\Phi(i+1, j) = \Phi(i, j) + h\Phi_x(i, j) + \frac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(i, j) + \frac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(i, j) + \frac{h^4}{4!}\Phi_{xxxx}(i, j) + O(h^5)$$

$$\Phi(i-1, j) = \Phi(i, j) - h\Phi_x(i, j) + \frac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(i, j) - \frac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(i, j) + \frac{h^4}{4!}\Phi_{xxxx}(i, j) + O(h^5)$$

sustituyendo en  $\Lambda_{h,k}[\phi]$ , se tiene

$$\Lambda_{h,k}[\phi] = A\left(\Phi_{xx}(i, j) + \frac{h^2}{12}\Phi_{xxxx}(i, j)\right) - B\left(\Phi_t(i, j) + \frac{k}{2}\Phi_{tt}(i, j)\right) - \Phi(i, j) + O(k^2) + O(h^3)$$

por otra parte se tiene,  $\Lambda[\phi] = A\phi_{xx}(x, t) - B\phi_t(x, t) - \phi(x, t)$ , y tomando en cuenta la notación anterior se tiene para el punto  $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ ,

$$\Lambda[\phi] = A\Phi_{xx}(i, j) - B\Phi_t(i, j) - \Phi(i, j)$$

de donde,

$$\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi] = -A\frac{h^2}{12}\Phi_{xxxx}(i, j) + B\frac{k}{2}\Phi_{tt}(i, j) + O(k^2 + h^3)$$

tomando norma en esta última expresión,

$$\|\Lambda[\phi] - \Lambda_{h,k}[\phi]\| \leq \|A\| O(h^2) + \|B\| O(k)$$

se concluye que el esquema en diferencias finitas es *consistente* con la ecuación (4.0.1). Esto implica que la solución de la ecuación en derivadas parciales, si es suave, entonces es una solución aproximada del esquema en diferencias. Denotando  $U(i, j) = u(ih, jk)$  y aproximando las derivadas parciales que aparecen en (4.0.1) por las aproximaciones en diferencias,

$$u_t(ih, jk) \approx \frac{U(i, j+1) - U(i, j)}{k}$$

$$u_{xx}(ih, jk) \approx \frac{U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j)}{h^2}.$$

La ecuación (4.0.1) toma la forma,

$$\frac{A}{h^2} [U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j)] - \frac{B}{k} [U(i, j+1) - U(i, j)] - U(i, j) = 0$$

donde  $h = \frac{1}{N}$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , y  $j \geq 0$ . Sea  $r = \frac{k}{h^2}$ , escribimos la última ecuación en la forma siguiente,

$$rA [U(i+1, j) + U(i-1, j)] - (2rA - B + kI)U(i, j) - BU(i, j+1) = 0 \quad (4.1.1)$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0.$$

Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales (4.0.2)-(4.0.4) toman la forma,

$$U(0, j) = 0, \quad j \geq 0 \quad (4.1.2)$$

$$B_1U(N, j) + NB_2 [U(N, j) - U(N-1, j)] = 0, \quad j \geq 0 \quad (4.1.3)$$

$$U(i, 0) = f(i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (4.1.4)$$

con  $f(i) = F(ih)$ .

## 4.2. EL PROBLEMA DE FRONTERA EN DIFERENCIA PARCIAL

En esta sección se buscarán soluciones de la forma,

$$U(i, j) = G(j)H(i), \quad G(j) \in \mathbf{C}^{m \times m}, \quad H(i) \in \mathbf{C}^m \quad (4.2.1)$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0.$$

Las siguientes ecuaciones se obtienen reemplazando la condición (4.2.1) en las ecuaciones (4.1.1)-(4.1.3). Además  $Nh = 1$ ,  $r = \frac{k}{h^2}$ ,

$$rAG(j) [H(i+1) - H(i-1)] - [(2rA - B + kI)G(j) + BG(j+1)]H(i) = 0 \quad (4.2.2)$$

$$G(j)H(0) = 0 \quad (4.2.3)$$

$$B_1G(j)H(N) + NB_2G(j) [H(N) - H(N - 1)] = 0. \quad (4.2.4)$$

Si  $\rho$  es un número real, adicionando y sustrayendo el término  $\rho AG(j)H(i)$  en el lado izquierdo de (4.2.2) se obtiene,

$$AG(j) \left[ H(i+1) - \left( \frac{2r+\rho}{r} \right) H(i) + H(i-1) \right] + [(\rho A + B - kI) G(j) - BG(j+1)H(i)] = 0. \quad (4.2.5)$$

Nótese que la ecuación (4.2.5) se satisface si las sucesiones  $\{G(j)\}$ ,  $\{H(i)\}$  satisfacen

$$BG(j+1) - (\rho A + B - kI) G(j) = 0, \quad j \geq 0 \quad (4.2.6)$$

$$H(i+1) - \left( \frac{2r+\rho}{r} \right) H(i) + H(i-1) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (4.2.7)$$

Además los coeficientes de la ecuación vectorial (4.2.7) son escalares, y las entradas de  $H(i)$  son las soluciones de la ecuación escalar

$$h(i+1) - \left( \frac{2r+\rho}{r} \right) h(i) + h(i-1) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

con la ecuación característica algebraica asociada

$$z^2 - \left( \frac{2r+\rho}{r} \right) z + 1 = 0 \quad (4.2.8)$$

para aquellos números reales  $\rho$  tal que  $-4r \leq \rho \leq 0$  se obtiene  $\left( \frac{2r+\rho}{2r} \right)^2 \leq 1$ . Así, si  $-4r < \rho < 0$ , entonces la ecuación (4.2.8) tiene dos soluciones diferentes

$$z_{0,1} = \left\{ \frac{2r+\rho}{2r} \pm j \sqrt{1 - \left( \frac{2r+\rho}{2r} \right)^2} \right\} \quad (4.2.9)$$

$$z_{0,1} = e^{\pm i\theta}$$

donde  $\cos \theta = \frac{2r+\rho}{2r}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y donde  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. Así se obtiene

$$z_0^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta), \quad z_1^n = \cos(n\theta) - j \sin(n\theta), \quad (4.2.10)$$

donde el conjunto solución de la ecuación vectorial (4.2.7) esta dada por

$$H(i) = z_0^i c + z_1^i d, \quad c, d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (4.2.11)$$

Este  $H(i)$  deberá ser satisfecha por (4.2.3), en orden de determinar soluciones no triviales  $U(i, j)$  del problema (4.2.2)-(4.2.4), es necesario que  $H(0) = 0$ . Por (4.2.11) se sigue que  $c = -d$ , luego

$$\begin{aligned} H(i) &= (z_0^i - z_1^i)d, \quad d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ H(i) &= \sin(i\theta)d, \quad d \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Sustituyendo (4.2.12) en la ecuación (4.2.4) se obtiene

$$\left\{ B_1 (z_0^N - z_1^N) + NB_2 \left[ (z_0^N - z_1^N) - (z_0^{N-1} - z_1^{N-1}) \right] \right\} G(j)d = 0,$$

ó

$$\{ B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)] \} G(j)d = 0, \quad j \geq 0. \quad (4.2.13)$$

Como se buscan soluciones no triviales, se asume que ni  $G(j)$ , ni  $d \in \mathbb{C}^m$  son ceros. Con el requerimiento de que el vector  $d \in \mathbb{C}^m$  debe ser diferente de cero, la condición (4.2.13) es equivalente a la siguiente condición

$$T(\theta) = B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)] \quad \text{es singular, } 0 < \theta < \pi. \quad (4.2.14)$$

Note que para  $\theta = \pi$  la matriz  $T(\pi) = 0$  y por tanto singular pero para  $\theta = \pi$  de (4.2.12) se obtiene  $H(i) = 0$  la solución trivial. Así, se buscarán valores de  $\theta \in ]0, \pi[$  tales que  $T(\theta)$  sea singular. Veamos que si  $\sin(N\theta) = 0$  entonces para  $\theta = \frac{\ell\pi}{N}, \ell = 1, 2, \dots, N-1$  la matriz  $T(\theta)$  es invertible dado que  $\sin(\frac{\ell\pi}{N}) \neq 0$

y  $B_2$  es invertible,

$$\begin{aligned}
T(\theta) &= NB_2 \left[ \sin(\ell\pi) - \sin\left((N-1)\frac{\ell\pi}{N}\right) \right] \\
&= 2NB_2 \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\frac{\ell\pi}{N}\right) \\
&= 2NB_2 \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) \cos\left(\ell\pi - \frac{\ell\pi}{2N}\right) \\
&= 2NB_2 \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) (-1)^\ell \cos\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) \\
&= N(-1)^\ell B_2 \sin\left(\frac{\ell\pi}{N}\right).
\end{aligned}$$

Consecuentemente, los valores  $\theta \in ]0, \pi[$  tales que la matriz  $T(\theta)$  definida por (4.2.14) sea singular debe satisfacer que  $\sin(N\theta) \neq 0$ , y entonces  $T(\theta)$  es singular si y sólo si

$$B_2^{-1}B_1 + \frac{2N \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\theta\right)}{\sin(N\theta)} I \text{ es singular, } \theta \in ]0, \pi[ \quad (4.2.15)$$

ó

$$\frac{2N \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2N-1}{2}\right)\theta\right)}{\sin(N\theta)} \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right). \quad (4.2.16)$$

Supóngase que

$$\text{Existe un valor propio real } \mu < 1, \quad \mu \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right). \quad (4.2.17)$$

Note que la condición (4.2.14) es equivalente a

$$(B_1 + NB_2) \sin(N\theta) - NB_2 \sin((N-1)\theta) \text{ es singular} \quad (4.2.18)$$

expandiendo  $\sin((N-1)\theta)$  y premultiplicando la matriz que aparece en (4.2.18) por  $B_2^{-1}$ , se obtiene la condición equivalente,

$$\text{existe } \mu \in \sigma\left(-B_2^{-1}B_1\right) \cap \mathbb{R} \text{ con } -\frac{\mu}{N} + 1 - \cos\theta + \sin\theta \cot(N\theta) = 0 \quad (4.2.19)$$

donde  $\theta \in ]0, \pi[$ , entonces  $\sin \theta \neq 0$  y la ecuación (4.2.19) para  $\theta$  puede escribirse de la forma

$$\cot(N\theta) = \frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta}. \quad (4.2.20)$$

Supóngase  $\mu < 1$  existe una única solución  $\theta \in I_\ell = ]\frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi[ \subset ]0, \pi[$  para cada  $I_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ . En efecto,  $\forall \theta \in I_\ell = ]\frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi[ \subset ]0, \pi[$  en cada  $I_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\ell-1}{N}\pi^+} \cot(N\theta) &= +\infty; & \lim_{\theta \rightarrow \frac{\ell}{N}\pi^-} \cot(N\theta) &= -\infty; \\ \frac{d[\cot(N\theta)]}{d\theta} &= -\frac{N}{\sin^2(N\theta)} < 0 \implies \cot(N\theta) \text{ es decreciente;} \end{aligned}$$

$\cot(N\theta)$  es continua.

Por tanto,

$$\text{Existe } \theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2N}\right)\pi \in I_\ell, \ell = 1, 2, \dots, N-1 \text{ tal que } \cot(N\theta_\ell) = 0.$$

Se obtiene que  $\cot(N\theta)$  es una aplicación continua de  $I_\ell = ]\frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi[$  sobre la recta real en cada  $I_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ . Si  $\mu \leq 0$  entonces para  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\left[\frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta}\right] \leq 0$  es una función continua negativa y al ser  $\cot(N\theta)$  una función que recorre todos los valores en  $\mathbb{R}$  en cada  $I_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ , estas funciones se cortarán en un único punto en cada  $I_k$ , es decir,

$$\text{Existe } \theta_\ell \in I_\ell, \ell = 1, 2, \dots, N-1 \text{ tal que } \cot(N\theta_\ell) = \left[\frac{\cos \theta_\ell - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta_\ell}\right].$$

Si  $0 < \mu < 1$ , la ecuación (4.2.20) tiene una única solución para  $I_1 = ]0, \frac{1}{N}\pi[$  ya que  $\cot(N\theta) - \left[\frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta}\right]$  cambia de signo una vez. Para  $I_\ell = ]\frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi[$ ,  $\ell = 2, \dots, N-1$  existe también una única solución para cada  $I_\ell$  porque  $\left[\frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta}\right]$

es una función acotada continua decreciente en cada  $I_\ell$ , por ser

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{k-1}{N}\pi^+} \left[ \frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta} \right] \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{k}{N}\pi^-} \left[ \frac{\cos \theta - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta} \right] \quad \text{números reales}$$

por tanto,

$$\text{Existe } \theta_\ell \in I_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{tal que} \quad \cot(N\theta_\ell) = \left[ \frac{\cos \theta_\ell - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin \theta_\ell} \right].$$

Esto garantiza la existencia de soluciones  $\theta_\ell \in I_\ell$  tales que,

$$\cot(N\theta_\ell) = \frac{\cos(\theta_\ell) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_\ell)} \quad (4.2.21)$$

para  $\mu < 1$ ,  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ . Por lo tanto, una familia de soluciones viene dada por

$$H_\ell(i) = \sin(i\theta_\ell)d_\ell, \quad \theta_\ell \in I_\ell, \quad d_\ell \in \mathbb{C}^m, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq \ell \leq N-1. \quad (4.2.22)$$

Además, por (4.2.9) y (4.2.10) se tiene que

$$\cos \theta = \frac{2r + \rho}{2r}, \quad \rho = \rho_\ell = -2r(1 - \cos \theta_\ell) = -4r \sin^2 \left( \frac{\theta_\ell}{2} \right) \quad (4.2.23)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, N-1.$$

Tomando estos valores de  $\rho_\ell$  en (4.2.6) se obtiene

$$BG_\ell(j+1) = (\rho_\ell A + B - kI)G_\ell(j), \quad j \geq 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.2.24)$$

Ahora, si para cada  $\ell$  se cumple la condición,

$$\text{Existe } \lambda_\ell, \quad \text{tal que} \quad [\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)] \quad \text{es invertible} \quad (4.2.25)$$

entonces la solución general de (4.2.24) viene dada por

$$G_\ell(j) = \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j v_\ell, \quad j \geq 0, \quad v_\ell \in \mathbb{C}^m \quad (4.2.26)$$

donde

$$\widehat{B}_\ell = [\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1} B = [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1} B$$

$$(\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) = [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1} (\rho_\ell A + B - kI)$$

$v_\ell \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente para  $BG_\ell(j+1) = (\rho_\ell A + B - kI)G_\ell(j)$ , es decir,  $v_\ell \in R(\widehat{B}_\ell^{L_\ell})$ , donde  $L_\ell = \text{Ind}(\widehat{B}_\ell)$ , y  $\widehat{B}_\ell^D$  denota la inversa Drazin de  $\widehat{B}_\ell$ . Las soluciones  $G_\ell(j)$  tienen la forma,

$$\begin{aligned} G_\ell(j+1) &= \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right]^{j+1} v_\ell \\ &= \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right]^j v_\ell \\ &= \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] G_\ell(j). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $B$  se obtiene

$$\begin{aligned} BG_\ell(j+1) &= B \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] G_\ell(j) \\ &= B \left[ \left( [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1} B \right)^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] G_\ell(j) \\ &= B \left[ B^D \left( [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1} \right)^D (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] G_\ell(j), \end{aligned}$$

donde  $[(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]$  es no singular, es decir,

$$[(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^D = [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} BG_\ell(j+1) &= B \left[ B^D [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI] (\rho_\ell \widehat{A} + \widehat{B} - kI) \right] G_\ell(j) \\ &= BB^D \left[ [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI] [(\lambda_\ell - 1) B - \rho_\ell A + kI]^{-1} (\rho_\ell A + B - kI) \right] G_\ell(j) \\ &= BB^D (\rho_\ell A + B - kI) G_\ell(j). \end{aligned}$$

Si  $\text{Ind}(B) \leq 1$  entonces

$$\begin{aligned} BG_k(j+1) &= \left( B + \rho_k BB^D A \right) G_k(j) \\ &= B \left( I + \rho_k B^D A \right) G_k(j). \end{aligned}$$

Note que, si  $B$  es invertible con  $\rho_\ell \neq 0$ , entonces  $G_\ell(j) = [(1-k)I + \rho_\ell B^{-1}A]^j$  satisfaciendo que  $G_\ell(0) = I$ , es solución de

$$G_\ell(j+1) = [(1-k)I + \rho_\ell B^{-1}A] G_\ell(j).$$

La familia de soluciones del problema (4.2.2)-(4.2.4) viene dada por

$$U_\ell(i, j) = \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell \quad (4.2.27)$$

$v_\ell \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente y  $\theta_\ell \in I_\ell$

Observe que si  $B_1$  es una matriz singular,  $\mu = 0 \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces la matriz  $T(\theta)$  es singular para los valores  $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2N-1}\right)\pi$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ . En efecto por (4.2.14),

$$\begin{aligned} T(\theta_\ell) &= B_1 \sin\left(N\left(\frac{2\ell-1}{2N-1}\right)\pi\right) + 2N \sin\left(\frac{2\ell-1}{2(2N-1)}\pi\right) \cos\left(\frac{(2N-1)(2\ell-1)}{2(2N-1)}\pi\right) B_2 \\ &= B_1 \sin\left(\frac{2N\ell}{2N-1}\pi - \frac{N\pi}{2N-1}\right) \\ &= B_1 \sin\left(\ell\pi + \frac{\ell-N}{2N-1}\pi\right) \\ &= (-1)^\ell B_1 \sin\left(\frac{\ell-N}{2N-1}\pi\right) \end{aligned}$$

donde  $\sin\left(\frac{\ell-N}{2N-1}\pi\right) \neq 0$ , la matriz  $T(\theta_\ell)$  es una matriz singular la cual es diferente de cero si  $B_1 \neq 0$ . Notemos que  $T(\theta_N) = T(\pi) = 0$ , y el caso  $\theta = \pi$  se excluye porque este valor da la solución trivial. Sea  $\mu < 1$  un valor propio de la matriz  $(-B_2^{-1}B_1)$  y sea  $\theta_\ell$  una solución de (4.2.22). Introducimos la matriz en  $\mathbb{C}^{m \times m}$  definida por

$$S(\mu) = \frac{B_2^{-1}T(\theta_\ell)}{\sin(N\theta_\ell)} = B_2^{-1}B_1 + \mu I \quad (4.2.28)$$

y la matriz  $\tilde{S}(\mu)$  en  $\mathbb{C}^{mp \times m}$  por

$$\tilde{S}(\mu) = \begin{bmatrix} S(\mu) \\ S(\mu)Q \\ S(\mu)Q^2 \\ \vdots \\ S(\mu)Q^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (4.2.29)$$

donde  $Q = \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI)$  y  $p$  es el grado del polinomio minimal de  $Q$ . Veamos que usando  $\tilde{S}(\mu)$ , la condición (4.2.13) toma la forma,

$$\{B_1 \sin(N\theta) + NB_2 [\sin(N\theta) - \sin((N-1)\theta)]\} \left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j v_\ell = 0 \quad (4.2.30)$$

$$0 \leq j$$

equivalente a

$$\begin{aligned} S(\mu) \left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j v_\ell &= 0 \\ \tilde{S}(\mu)v_\ell &= 0, \quad v_\ell \in \mathbb{C}^m. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

La ecuación (4.2.31) tiene soluciones no cero  $v_\ell \in \mathbb{C}^m$  si y sólo si

$$\text{rank} \left[ \tilde{S}(\mu) \right] < m \quad (4.2.32)$$

y bajo esta condición, por el teorema 2.3.1 de [22], el conjunto solución de (4.2.31) esta dado por

$$v_\ell = \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_\ell, \quad a_\ell \in \mathbb{C}^m. \quad (4.2.33)$$

Por todo lo anterior el siguiente conjunto de soluciones no triviales del problema (4.2.2)-(4.2.4) ha sido construido,

$$U_\ell(i, j) = \left. \begin{aligned} &\left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j, \\ &v_\ell = \left( I - \tilde{S}(\mu)^+ \tilde{S}(\mu) \right) a_\ell, \quad a_\ell \in \mathbb{C}^m - \{0\} \end{aligned} \right\}. \quad (4.2.34)$$

NOTA 3.1.: Si  $B$  es una matriz no singular, entonces  $L_\ell = \text{Ind}(\widehat{B}_\ell) = 0$ ,  $\widehat{B}_\ell^D = \widehat{B}_\ell^{-1}$  y en este caso si  $\rho_\ell \neq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{B}_\ell^D(\widehat{\rho_\ell A + B - kI}) &= \left\{ [(\lambda_\ell - 1)B - \rho_\ell A + kI]^{-1} B \right\}^{-1} [(\lambda_\ell - 1)B - \rho_\ell A + kI]^{-1} (\rho_\ell A + B - kI) \\ &= B^{-1} [(\lambda_\ell - 1)B - \rho_\ell A + kI] [(\lambda_\ell - 1)B - \rho_\ell A + kI]^{-1} (\rho_\ell A + B - kI) \\ &= B^{-1} (\rho_\ell A + B - kI) \\ &= [(1 - k)I + \rho_\ell B^{-1}A]\end{aligned}$$

y así  $G_\ell(j)$  estará dada por  $G_\ell(j) = [(1 - k)I + \rho_\ell B^{-1}A]^j$  con  $G_\ell(0) = I$ . Por lo tanto el siguiente conjunto de soluciones no triviales del problema (4.2.2)-(4.2.4) ha sido construido para  $\ell = 1, 2, \dots, N - 1$ ,

$$\begin{aligned}U_\ell(i, j) &= [(1 - k)I + \rho_\ell B^{-1}A]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad j \geq 0 \\ v_\ell &= \left( I - \widetilde{S}(\mu)^+ \widetilde{S}(\mu) \right) a_\ell, \quad a_\ell \in \mathbb{C}^m - \{0\}.\end{aligned}$$

Supóngase ahora que  $\rho_\ell = 0$ , el cual corresponde a  $\theta_\ell = 0$  en (4.2.9)-(4.2.10). En este caso la ecuación (4.2.8) toma la forma

$$\begin{aligned}(z - 1)^2 &= z^2 - 2z + 1 = 0 \\ z_{0,1} &= 1\end{aligned}$$

y el conjunto solución de la ecuación (4.2.7) esta dado por

$$H(i) = cz^i + idz^{i-1} = c(1)^i + id(1)^{i-1}$$

$$H(i) = c + id, \quad c, d \in \mathbb{C}^m \tag{4.2.35}$$

La condición  $H(0) = 0$  implica que  $c = 0$  y (4.2.35) toma la forma

$$H(i) = id_0, \quad d_0 \in \mathbb{C}^m. \tag{4.2.36}$$

Si  $\rho_l = 0$  en (4.2.6) se tiene

$$BG(j + 1) = (B - kI)G(j)$$

y si se cumple la condición

existe  $\lambda$ , tal que  $[(\lambda - 1)B - kI]$  es invertible

entonces la solución general viene dada por

$$G(j) = \left[ \widehat{B}^D (\widehat{B - kI}) \right]^j v_0, \quad v_0 \in \mathbb{C}^m, \quad 0 \leq j, \quad (4.2.37)$$

donde  $v_0 \in \mathbb{C}^m$  es un vector inicial consistente para  $BG(j+1) = (B - kI)G(j)$ , además

$$\widehat{B} = [\lambda B - (B - kI)]^{-1} B = [(\lambda - 1)B - kI]^{-1} B$$

$$(\widehat{B - kI}) = [(\lambda - 1)B - kI]^{-1} B$$

con  $\widehat{B}^D$  denotando la inversa de Drazin de  $\widehat{B}$ . La familia de soluciones del problema (4.2.2)-(4.2.4) viene dada por

$$U_0(i, j) = i \left[ \widehat{B}^D (\widehat{B - kI}) \right]^j v_0$$

como  $H(i), G(j)$  deben satisfacer (4.2.4), entonces

$$B_1 G(j) H(N) + N B_2 G(j) [H(N) - H(N-1)] = 0$$

$$B_1 G(j) N d_0 + N B_2 G(j) [N d_0 - (N-1) d_0] = 0, \quad j \geq 0$$

$$(B_1 + B_2) G(j) d_0 = 0, \quad d_0 \in \mathbb{C}^m.$$

Además como se tiene interés en soluciones no triviales, se asume que ni  $G(j)$ , ni  $d_0 \in \mathbb{C}^m$  son cero. Esto equivale a la condición

$$\mu = 1 \in \sigma \left( -B_2^{-1} B_1 \right). \quad (4.2.38)$$

Así, en vista de (4.2.28) se tiene

$$S(1) = B_2^{-1} B_1 + I \quad (4.2.39)$$

entonces

$$(B_1 + B_2) \left[ \widehat{B}^D (\widehat{B - kI}) \right]^j v_0 = 0, \quad 0 \leq j \quad (4.2.40)$$

equivalente a

$$\begin{aligned} S(1) \left[ \widehat{B}^D (\widehat{B - kI}) \right]^j v_0 &= 0, \quad 0 \leq j \\ \widetilde{S}(1)v_0 &= 0 \end{aligned}$$

si  $\text{rank} [\widetilde{S}(1)] < m$  teniendo en cuenta el Teorema 2.1.2. de [22], el conjunto de soluciones de (4.2.40) es dado por

$$v_0 = \left( I - \widetilde{S}(1)^+ \widetilde{S}(1) \right) a_0, \quad a_0 \in \mathbb{C}^m - \{0\} \quad (4.2.41)$$

Por lo tanto en este caso se tienen soluciones no acotadas de (4.2.2)-(4.2.4), cuando  $N \rightarrow \infty$ , definidas por

$$\left. \begin{aligned} U_0(i, j) &= i \left[ \widehat{B}^D (\widehat{B - kI}) \right]^j v_0, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad 0 \leq j \\ v_0 &= \left( I - \widetilde{S}(1)^+ \widetilde{S}(1) \right) a_0, \quad a_0 \in \mathbb{C}^m - \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.42)$$

Resumiendo, se ha establecido el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.1** *Considere el problema de frontera (4.1.1)-(4.1.3) donde  $B_2$  es una matriz invertible que satisface la condición (4.2.17). Sea  $S(\mu)$  la matriz en  $\mathbb{C}^{m \times m}$  definida por (4.2.28),  $\widetilde{S}(\mu)$  la matriz en  $\mathbb{C}^{mp \times m}$  definida por (4.2.29);  $Q = \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell \widehat{A} + B - kI)$  y  $\widehat{B}_\ell^D$  es la inversa de Drazin de  $\widehat{B}_\ell$ , entonces:*

(i) *El problema (4.1.1)-(4.1.3) tiene soluciones no triviales  $\{U(i, j)\}$  de la forma (4.2.1) si existe  $\theta \in ]0, \pi[$  tal que la matriz  $T(\theta)$  definida por (4.2.14) es singular,  $\mu \in ]-\infty, 1[$  y  $\text{rank} [\widetilde{S}(\mu)] < m$ .*

(ii) *Si  $B_1$  es singular, tomando  $\mu = 0$  en (4.2.21) y  $\theta_\ell = \left( \frac{2\ell-1}{2N-1} \right) \pi$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N - 1$ , se obtiene  $T(\theta_\ell) = (-1)^\ell B_1 \sin \left( \frac{\ell-N}{2N-1} \pi \right)$ . Bajo la hipótesis (4.2.16), la sucesión vectorial  $\{U_k(i, j)\}$  dada en (4.2.34) define soluciones no triviales del problema*

(4.1.1)-(4.1.3) para  $\ell = 1, 2, \dots, N - 1$ .

(iii) Si  $\mu \neq 0$  y  $\mu < 1$  es un valor propio de  $(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces existen soluciones  $\theta_\ell \in I_\ell = \left[ \frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi \right]$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N - 1$ , de la ecuación (4.2.21) para la cual  $T(\theta_\ell)$  es singular. Bajo la hipótesis  $\text{rank} \left[ \widetilde{S}(\mu) \right] < m$ , la sucesión vectorial  $\{U_k(i, j)\}$  dada en (4.2.34) define soluciones no triviales del problema (4.1.1)-(4.1.3) para  $\ell = 1, 2, \dots, N - 1$ .

(iv) Si  $\mu = 1$  es un valor propio de  $(-B_2^{-1}B_1)$ , entonces existen soluciones no triviales del problema (4.1.1)-(4.1.3) dadas por

$$U_0(i, j) = i \left[ \widehat{B}^D(\widehat{B} - kI) \right]^j v_0, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad 0 \leq j$$

$$v_0 = \left( I - \widetilde{S}(1)^+ \widetilde{S}(1) \right) a_0, \quad a_0 \in \mathbb{C}^m - \{0\}$$

las cuales son no acotadas cuando  $N \rightarrow \infty$ .

### 4.3. CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES PARA EL PROBLEMA MIXTO

Ahora se construirán soluciones exactas del problema mixto discreto (4.1.1)-(4.1.4).

Note que la ecuación (4.2.7) junto con las condiciones

$$H(0) = 0 \quad \text{y} \quad B_1 H(N) + NB_2 [H(N) - H(N-1)] = 0$$

que fueron obtenidas respectivamente de  $U(0, j) = G(j)H(0) = 0$  y de la ecuación (4.1.3) al tomar  $j = 0$  y  $G(0) = I$ , cumpliendo que la solución no fuera la trivial, llevan a considerar el siguiente problema discreto vectorial subyacente,

$$\left. \begin{aligned} H(i+1) - 2H(i) + H(i-1) &= \frac{\rho}{r} H(i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ H(0) &= 0 \\ B_1 H(N) + NB_2 [H(N) - H(N-1)] &= 0 \end{aligned} \right\} (P)$$

ya que  $B_2$  es invertible, para  $\mu < 1$ ,  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$ , por el teorema de la aplicación espectral la segunda condición de frontera del anterior problema puede

transformarse en,

$$\begin{aligned}
B_1 H(N) + NB_2 [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
-B_2^{-1} B_1 H(N) - N [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
\mu H(N) - N [H(N) - H(N-1)] &= 0 \\
(N - \mu) H(N) &= NH(N-1) \\
H(N) &= \frac{N}{N - \mu} H(N-1)
\end{aligned}$$

y el problema discreto vectorial queda de la siguiente forma,

$$\left. \begin{aligned}
\Delta^2 H(i-1) - \frac{\rho}{r} H(i) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
H(0) &= 0 \\
H(N) &= \frac{N}{N-\mu} H(N-1)
\end{aligned} \right\} (P^*)$$

donde  $\{H(i) = \sin(i\theta_\ell)d_\ell\}_{\ell=1}^{N-1} \in \mathbf{C}^m$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , con  $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{N-1} \in I_\ell = \left] \frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi \right[$  verificando la ecuación  $\cot(N\theta_\ell) = \frac{\cos(\theta_\ell) - (1 - \frac{\mu}{N})}{\sin(\theta_\ell)}$  y  $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{N-1} \in \ker \tilde{S}(\mu)$  son las soluciones de dicho problema. Asociado al problema  $(P^*)$  se introduce el problema discreto escalar de Sturm-Liouville,

$$\left. \begin{aligned}
h(i+1) - 2h(i) + h(i-1) &= \frac{\rho}{r} h(i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
h(0) &= 0 \\
h(N) &= \frac{N}{N-\mu} h(N-1)
\end{aligned} \right\} (P^{**})$$

El problema  $(P^{**})$  puede ser escrito como un problema matricial de autovalores,

$$\tilde{A}h = \frac{\rho}{r} Rh$$

donde  $\tilde{A}$  es una matriz  $(N-1) \times (N-1)$ , simétrica y tridiagonal y  $R = I$ . El sistema queda de la forma,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2\mu-N}{N-\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(N-2) \\ h(N-1) \end{pmatrix} = \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(N-2) \\ h(N-1) \end{pmatrix}$$

Aplicando la teoría de Sturm-Liouville para problemas de autovalores matriciales se obtienen los siguientes resultados: (i) El problema  $(P^{**})$  tiene exactamente  $N - 1$  autovalores reales distintos,  $\{\frac{\rho_\ell}{r}\}_{\ell=1}^{N-1}$ , los cuales vienen definidos por  $\rho_\ell = -4r \sin^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ , donde los  $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{N-1}$  verifican la ecuación,

$$\cot(N\theta_\ell) = \frac{\cos(\theta_\ell) - \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)}{\sin(\theta_\ell)}, \quad \theta_\ell \in \left] \frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi \right[ , \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1$$

(ii) Para cada autovalor  $\{\frac{\rho_\ell}{r}\}$  existe una autofunción  $h_\ell(i)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , dada por  $h_\ell(i) = \sin(i\theta_\ell)$ . Estas autofunciones  $\{h_\ell(i)\}_{\ell=1}^{N-1}$  son mutuamente ortogonales con respecto a la función de peso 1. En particular estas autofunciones son linealmente independientes en  $(1, 2, \dots, N-1)$ . Debido a la linealidad de la ecuación (4.1.1) y la homogeneidad de las condiciones de frontera (4.1.2)-(4.1.3), es claro que la suma de soluciones del problema (4.1.1)-(4.1.3) es también una solución de tal problema. Asumiendo la hipótesis (4.2.17) con  $\mu \neq 1$  y (4.2.21). Si  $B_1$  es singular, tomando  $\mu = 0$  y usando la notación del Teorema 4.2.1, el vector de sucesiones

$$U(i, j) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) \left( I - \widetilde{S}(0)^+ \widetilde{S}(0) \right) a_\ell, \quad (4.3.1)$$

$$1 \leq i \leq N-1, 0 \leq j$$

satisface (4.1.1)-(4.1.3) para cualquier vector  $a_\ell \in \mathbb{C}^m - \{0\}$  que verifique  $v_\ell = \left( I - \widetilde{S}(0)^+ \widetilde{S}(0) \right) a_\ell$ . Por imposición de la condición inicial (4.1.4),

$$U(i, 0) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \sin(i\theta_\ell) \left( I - \widetilde{S}(0)^+ \widetilde{S}(0) \right) a_\ell = f(i) \quad (4.3.2)$$

$$f(i) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \sin(i\theta_\ell) v_\ell, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

Con  $v_\ell = \left( I - \widetilde{S}(0)^+ \widetilde{S}(0) \right) a_\ell$ . La expresión (4.3.2) es una serie de Fourier discreta, donde las funciones  $\{\sin(i\theta_\ell)\}_{\ell=1}^{N-1}$  son las autofunciones del problema Sturm-Liouville discreto las cuales son ortogonales.

Por la teoría de series de Fourier discreta [14] y (4.3.2) se obtiene la siguiente condición para  $\{f(i)\}$ ,

$$v_\ell = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_\ell) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_\ell)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.3.3)$$

con  $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2N-1}\right) \pi$ ,

$$v_\ell = \frac{4}{2N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sin \left[ i \left( \frac{2\ell-1}{2N-1} \right) \pi \right] f(i), \quad 1 \leq \ell \leq N-1$$

Como  $v_\ell = \left(I - \tilde{S}(0)^+ \tilde{S}(0)\right) a_\ell \in \ker \tilde{S}(0)$ , es suficiente imponer  $f(i) \in \ker \tilde{S}(0)$ , para que el vector,

$$U(i, j) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin \left[ i \left( \frac{2\ell-1}{2N-1} \right) \pi \right] v_\ell \quad (4.3.4)$$

sea solución del problema (4.1.1)-(4.1.4). Con  $v_\ell$  definido por (4.3.3). Por la definición de  $\tilde{S}(\mu)$  dada por (4.2.29), la condición

$$f(i) \in \ker \left[ \tilde{S}(0) \right], \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.5)$$

se satisface si

$$f(i) \in \ker [S(0)], \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.6)$$

y

$$\ker [S(0)] \text{ es subespacio invariante de } Q, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.7)$$

este último requerimiento puede ser escrito en la forma

$$S(0)Q \left( I - S(0)^+ S(0) \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.8)$$

Tomando  $\mu < 1$ ,  $\mu \neq 0$ . Sea  $\mu \in \sigma(-B_2^{-1}B_1)$  y asumiendo que  $\text{rank}[\tilde{S}(\mu)] < m$ , usando la notación del Teorema 4.2.1, bajo la hipótesis

$$f(i) \in \ker[S(\mu)], \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.9)$$

y

$$\ker[S(\mu)] \text{ es subespacio invariante de } Q, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.10)$$

ó

$$S(\mu)Q(I - S(\mu)^+S(\mu)) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.3.11)$$

entonces una solución del problema (4.1.1)-(4.1.4) es definido por

$$U(i, j) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j. \quad (4.3.12)$$

Resumiendo, el siguiente teorema ha sido establecido,

**Teorema 4.3.1** *Considerando la notación del teorema 4.2.1 y tomando  $\mu \neq 1$  un valor propio real de  $(-B_2^{-1}B_1)$ . Asumiendo que la sucesión  $\{f(i)\}_{i=1}^{N-1}$  satisface (4.3.6)-(4.3.9). Además la matriz  $Q$  satisface (4.3.8) y (4.3.11). Entonces:*

$$U(i, j) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin \left[ i \left( \frac{2\ell-1}{2N-1} \right) \pi \right] v_\ell, & \mu = 0 \\ v_\ell = \frac{4}{2N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sin \left[ i \left( \frac{2\ell-1}{2N-1} \right) \pi \right] f(i) & \\ \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell, & \mu < 1, \quad \mu \neq 0 \\ v_\ell \text{ es definido por (4.3.3)} & \end{cases} \quad (4.3.13)$$

donde  $1 \leq i \leq N-1$  y  $0 \leq j$ , define una solución del problema (4.1.1)-(4.1.4).

Una condición más general que (4.3.6) y (4.3.9) puede ser impuesta sobre  $\{f(i)\}_{i=0}^N$  si la matriz  $(-B_2^{-1}B_1)$  tiene  $s$  valores propios diferentes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  en  $]-\infty, 1[$ ,

esto permite resolver el problema (4.1.1)-(4.1.4) para una clase general de sucesiones  $\{f(i)\}$ . Dados  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  introduzcamos las siguientes matrices de  $\mathbb{C}^{m \times m}$  para  $1 \leq \tau \leq s$ ,

$$\begin{aligned} S(\mu_\tau) &= B_2^{-1}B_1 + \mu_\tau I \\ R(\mu_\tau) &= S(\mu_1) \dots S(\mu_{\tau-1}) S(\mu_{\tau+1}) \dots S(\mu_s) \\ R &= S(\mu_\tau)R(\mu_\tau). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Sea  $M$  el subespacio vectorial definido por

$$M = \ker(R) \quad (4.3.15)$$

por el teorema de descomposición [23], se sigue que

$$M = \ker S(\mu_1) \oplus \ker S(\mu_2) \oplus \dots \oplus \ker S(\mu_s). \quad (4.3.16)$$

Consideremos la sucesión de polinomios coprimos de grado  $s - 1$  definidos por

$$Q_\tau(x) = \prod_{\substack{\psi=1, \psi \neq \tau \\ 1 \leq \tau \leq s}}^s (x - \mu_\psi) \quad (4.3.17)$$

Entonces los polinomios  $\{Q_\tau(x)\}_{\tau=1}^s$  son coprimos y por el teorema de Bezout [23], existen números complejos  $\{\alpha_\tau\}_{\tau=1}^s$  tales que

$$Q(x) = \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau Q_\tau(x) = 1 \quad (4.3.18)$$

donde

$$\alpha_\tau = \left[ \prod_{\substack{\psi=1, \psi \neq \tau \\ 1 \leq \tau \leq s}}^s (\mu_\tau - \mu_\psi) \right]^{-1} \quad (4.3.19)$$

Esto es,  $Q(x)$  es el polinomio interpolante de Lagrange que toma el valor 1 en cada  $x = \mu_\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq s$ . Por la ecuación (4.3.18) y el calculo funcional matricial actuando sobre la matriz  $-B_2^{-1}B_1$ , se sigue que

$$I = Q(-B_2^{-1}B_1) = \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau Q_\tau(-B_2^{-1}B_1) = (-1)^{s-1} \sum_{n=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) \quad (4.3.20)$$

Sea  $\{f_\tau(i)\}_{i=0}^N$  la proyección de  $\{f(i)\}_{i=0}^N$  sobre el subespacio  $\ker [S(\mu_\tau)]$ , definida por

$$f_\tau(i) = (-1)^{s-1} \alpha_\tau R(\mu_\tau) f(i) \quad (4.3.21)$$

$$1 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq i \leq N$$

note que

$$\sum_{\tau=1}^s f_\tau(i) = (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) f(i) = \left[ (-1)^{s-1} \sum_{\tau=1}^s \alpha_\tau R(\mu_\tau) \right] f(i) = If(i) = f(i) \quad (4.3.22)$$

suponiendo  $f(i) \in M$ , i.e.,

$$Rf(i) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq i \leq N \quad (4.3.23)$$

entonces por (4.3.14), (4.3.21) y (4.3.23),

$$\begin{aligned} S(\mu_\tau) f_\tau(i) &= (-1)^{s-1} \alpha_\tau S(\mu_\tau) R(\mu_\tau) f(i) \\ &= (-1)^{s-1} \alpha_\tau Rf(i) \\ &= 0 \\ &1 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq i \leq N \end{aligned}$$

ó

$$f_\tau(i) \in \ker [S(\mu_\tau)], \quad 1 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (4.3.24)$$

Considere ahora el nuevo problema en cual la condición inicial (4.1.4) del problema (4.1.1)-(4.1.4), es remplazado por

$$U(i, 0) = f_\tau(i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad 1 \leq \tau \leq s \quad (4.3.25)$$

Observemos que las condiciones (4.3.24)-(4.3.25) son equivalentes. Consideremos ahora el nuevo problema en el cual la condición inicial (4.1.4) del problema (4.1.1)-(4.1.4), es reemplazada por (4.3.25). Sea  $(M_\tau)$  el problema definido por (4.1.1)-(4.1.3) y (4.3.25). El cambio en las condiciones iniciales en cada problema  $(M_\tau)$

sólo modifica los vectores  $v_\ell$  que aparecen en (4.3.13). Los coeficientes de Fourier toman la forma

$$v_\ell^{(\tau)} = (-1)^{s-1} \alpha_\tau S(\mu_\tau) R(\mu_\tau) v_\ell^{(\tau)} f(i) \quad (4.3.26)$$

$$1 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq \ell \leq N-1$$

Por los comentarios previos y el Teorema 4.3.1, el siguiente resultado ha sido establecido:

**Teorema 4.3.2** *Sea  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  autovalores de la matriz  $B_2^{-1}B_1$ ;  $S(\mu_\tau)$ ,  $R(\mu_\tau)$ , y  $R$  definidos por (4.3.14) para  $1 \leq \tau \leq s$ . Supóngase que  $\text{rank}[S(\mu_\tau)] < s$  para  $1 \leq \tau \leq s$ ,  $\{f(i)\}_{i=0}^N$  satisfacen la condición (4.3.23) y que  $Q$  cumple*

$$S(\mu_\tau)Q [I - S(\mu_\tau)^+ S(\mu_\tau)] = 0, \quad 1 \leq \ell \leq N-1$$

luego

$$U(i, j) = \sum_{\tau=1}^s U_\tau(i, j) \quad (4.3.27)$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j$$

es una solución del problema (4.1.1)-(4.1.4), donde

$$U_\tau(i, j) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell^{(\tau)}$$

y  $v_\ell^{(\tau)}$  es dado por (4.3.26).

## CAPÍTULO 5

# EJEMPLOS

A continuación se presentarán tres ejemplos particulares en los que se analizará la estabilidad. El primero será un sistema tipo *CASO II*, donde se describirá el funcionamiento del método. En el segundo ejemplo se analizará sólo la convergencia y se comparará con la obtenida por un método diferente, debido a que es complicado encontrar sistemas matriciales con matrices singulares se analizará un sistema similar a *CASO I* pero con matriz  $B$  invertible. Finalmente se analizará un sistema tipo *CASO II*, donde no se tiene convergencia.

### 5.1. EJEMPLO 1

Consideremos el problema (4.0.1)-(4.0.4) con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$F(ih) = f(i) = (f_1(i), f_2(i), f_3(i))^T \in \mathbb{C}^3,$$

donde  $f$  es una función real a elegir,  $h = \frac{1}{N}$  y  $1 \leq i \leq N-1$ , además  $r = \frac{k}{h^2} > 0$ .

Se tienen,

$$-B_2^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\sigma(-B_2^{-1}B_1) = \{-1, -0,6180, 1,6180\}$$

nombramos  $\mu_1 = -1$ ,  $\mu_2 = -0,6180$ ,  $\mu_3 = 1,6180$  y consideremos las matrices en  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ ,

$$S(\mu_1) = B_2^{-1}B_1 + (\mu_1)I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S(\mu_2) = B_2^{-1}B_1 + (\mu_2)I = \begin{pmatrix} 0,3820 & 1 & -1 \\ 0 & -0,6180 & -1 \\ 0 & -1 & -1,6180 \end{pmatrix}$$

$$S(\mu_3) = B_2^{-1}B_1 + (\mu_3)I = \begin{pmatrix} 2,6180 & 1 & -1 \\ 0 & 1,6180 & -1 \\ 0 & -1 & 0,6180 \end{pmatrix}.$$

Notemos que el caso  $\mu_3 = 1,6180 > 1$  es un caso para el cual no se analizó la solución del sistemas, sin embargo para este tambien se toman las matrices  $S(\mu)$  y  $\tilde{S}(\mu)$  definidas por (3.36) y (3.37) respectivamente, (ver [10]).

Determinemos  $\tilde{S}(\mu)$ , para esto debemos hallar  $Q = \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell A + B - kI)$  y el grado de su polinomio minimal. Encontramos la matriz  $[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1}$

para algun  $\lambda_\ell$ , tomando  $\lambda_\ell = 2$  se tiene que se puede encontrar dicha matriz para cualquier  $\rho_\ell$  número real y  $k = \frac{r}{N^2}$  pequeño.

Además se debe cumplir  $-4r < \rho_\ell < 0$ , por lo que se tiene la matriz  $[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1}$  dependiendo de las divisiones de malla que se tomen. En la literatura se encuentra comunmente  $r < \frac{1}{2}$  para tener estabilidad en sistemas escalares, (ver [21]). Teniendo en cuenta lo anterior tomaremos  $\rho_\ell = -1,9999$  y  $\frac{r}{N^2} = 4,9999 \times 10^{-5}$  con  $N = 100$  para analizar nuestro caso. De donde se tiene,

$$[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0000 & -0,5000 & 0 \\ 0 & 0,5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5000 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{B}_\ell = [\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1} B = \begin{pmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\rho_\ell A + B - kI) = \begin{pmatrix} 0,9999 & 1,9999 & 0 \\ 0 & -1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1,0000 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{B}_\ell^D = \begin{pmatrix} 0,9999 & 0,9999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,9998 & 0,9998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los resultados se presentan con cuatro cifras decimales, aunque en los cálculos se trabajó con cifras completas. Para  $Q$  el grado del polinomio minimal  $p = 3$ , hallemos  $\widetilde{S}(\mu)$ ,

$$\tilde{S}(\mu_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $\text{rango}(\tilde{S}(\mu_1)) = 2 < 3$ , además se cumple,

$$S(\mu_1) Q (I - S(\mu_1)^\dagger S(\mu_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,  $\ker(S(\mu_1))$  es subespacio invariante de la matriz  $Q$ . Para  $\mu_2$  y  $\mu_3$  se tiene,

$$\tilde{S}(\mu_2) = \begin{pmatrix} 0,3820 & 1,0000 & -1,0000 \\ 0 & -0,6180 & -1,0000 \\ 0 & -1,0000 & -1,6180 \\ 0,3819 & 0,3819 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,3818 & 0,3818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}(\mu_3) = \begin{pmatrix} 2,6180 & 1,0000 & -1,0000 \\ 0 & 1,6180 & -1,0000 \\ 0 & -1,0000 & 0,6180 \\ 2,6175 & 2,6175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2,6170 & 2,6170 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde,  $\text{rango}(\tilde{S}(\mu_2)) = 3 \neq 3$  y  $\text{rango}(\tilde{S}(\mu_3)) = 3 \neq 3$ , por tanto se descartan estos valores propios. Trabajaremos sólo con el valor propio  $\mu_1 = -1 < 1$ , para la elección de  $f(i)$  tendremos en cuenta la condición  $f(i) \in \ker(S(-1))$ , es decir,

$$S(\mu_1) f(i) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(i) \\ f_2(i) \\ f_3(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$f(i) = \begin{pmatrix} f_1(i) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como  $\text{rango}(\tilde{S}(-1)) = 2 < 3$ ,

$$f(i) \in \ker(S(-1)) \text{ y } S(-1) Q \left( I - S(-1)^\dagger S(-1) \right) = 0,$$

por el Teorema 4.3.1, la sucesión vectorial,

$$U(i, j) = \prod_{\ell=1}^{N-1} \left[ \widehat{B}_\ell^D (\rho_\ell A + B - kI) \right]^j \sin(i\theta_\ell) v_\ell$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0$$

es una solución exacta del problema mixto discreto (4.0.1) – (4.0.4), con  $\theta_\ell \in \left] \frac{\ell-1}{N}\pi, \frac{\ell}{N}\pi \right[$ ,  $1 \leq \ell \leq N-1$ , soluciones de la ecuación,

$$\cot(N\theta_\ell) = \frac{\cos(\theta_\ell) - \left(1 - \frac{\mu_1}{N}\right)}{\sin(\theta_\ell)}$$

y

$$v_\ell = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(i\theta_\ell) f(i)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(i\theta_\ell)}.$$

Los cuales pueden obtenerse usando Matlab, y la teoría relacionada con el problema escalar de Sturm-Liouville ( $P^{**}$ ). Ahora debemos asegurar que la solución es estable, para esto es suficiente probar que la matriz  $\widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI)$  es convergente, (ver [18]).

$$\begin{aligned}\sigma\left(\widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI)\right) &= \{0,9998, 0, 0\} \\ |0,9998| &< 1 \\ |0| &< 1,\end{aligned}$$

es decir, el radio espectral es menor que 1 y la parte real es positiva. Esto garantiza que la matriz  $\widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI)$  es convergente.

## 5.2. EJEMPLO 2

Consideremos el problema (3.0.1)-(3.0.4) con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como nos concentraremos en el problema de la estabilidad, sólo tendremos en cuenta las matrices  $A$  y  $B$  anteriores. Tomando en cuenta el Teorema 5.1 de [3], la matriz  $\left(I - 4rA \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$  es convergente si

$$r < \frac{\lambda_{\min}(A_1)}{2 \left[\rho(A) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2},$$

donde,  $A_1 = \frac{(A+A^H)}{2}$ ,  $\lambda_{\min}$  es el menor de los valores propios de  $A_1$  y  $\rho(A)$  es el radio espectral de la matriz  $A$ . Este requerimiento se satisface si las matrices

$\left(I - 4rA \sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)$  para cada  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  son convergentes, ya que los coeficientes  $v_k$  son acotados si  $\{f(i)\}_{i \geq 1}$  es acotada. Una condición suficiente para la convergencia de la matriz  $\left(I - 4rA \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$  es que  $r < \frac{\lambda_{\min}(A_1)}{2[\rho(A) \sin(\frac{\theta}{2})]^2}$  se cumpla para  $1 \leq k \leq N - 1$ , esto es,

$$r < \frac{\lambda_{\min}(A_1)}{2[\rho(A)]^2}.$$

Teniendo en cuenta estas condiciones determinemos para que valores de  $r$  el sistema es estable.

$$A_1 = \frac{A + A^H}{2} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_1) = \{2, 2071, 0, 7929, 2\}$$

$$\lambda_{\min}(A_1) = 0,7929$$

además,

$$\rho(A) = 2$$

entonces,

$$r < \frac{0,7929}{2[2]^2} = 0,0991$$

de donde la solución será estable para  $r < 0,0991$ .

Por un análisis alterno, teniendo en cuenta la estabilidad de sistemas matriciales, (ver [19]), se tiene,

$$G = I - 4rA \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1,6 r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

donde,

$$G^n = \begin{pmatrix} \left(1 - 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-1,6 r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \end{pmatrix}$$

es convergente para  $r < \frac{1}{2}$ . Es decir para una relación menos restrictiva,  $r$ , se tiene que el sistema es estable.

### 5.3. EJEMPLO 3

Consideremos el problema (4.0.1)-(4.0.4) con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{pmatrix},$$

como en el ejemplo anterior sólo veremos la convergencia.

Encontremos la matriz  $[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1}$  para algun  $\lambda_\ell$ , tomando  $\lambda_\ell = 2$  se tiene que se puede encontrar dicha matriz para cualquier número real  $\rho_\ell \neq 0$  y  $k = \frac{r}{N^2}$  pequeño.

Además se debe cumplir  $-4r < \rho_\ell < 0$ , por lo que se tiene la matriz  $[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1}$  dependiendo de las divisiones de malla que se tomen. En la literatura se encuentra comunmente  $r < \frac{1}{2}$  para tener estabilidad en sistemas escalares, (ver [21]). Teniendo en cuenta lo anterior escogemos  $\rho_\ell = -1,9999$  y  $\frac{r}{N^2} = 4,9999 \times 10^{-5}$  con  $N = 100$  para analizar nuestro caso. De donde se tiene,

$$[\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1} = \begin{pmatrix} -0,2222 & -0,2500 & -0,2639 \\ 0,5556 & 0,3333 & 0,3889 \\ -0,4445 & -0,0833 & -0,0694 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_\ell = [\lambda_\ell B - (\rho_\ell A + B - kI)]^{-1} B = \begin{pmatrix} 2,0000 & 1,5833 & 1,1667 \\ -2,0000 & -1,3333 & -0,6667 \\ 1,0000 & 0,4167 & -0,1667 \end{pmatrix},$$

además,

$$(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI) = \begin{pmatrix} 3,0000 & 3,1667 & 2,3333 \\ -4,0001 & -3,6667 & -1,3333 \\ 2,0001 & 0,8333 & -1,3334 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{B}_\ell^D = \begin{pmatrix} 4,6667 & 3,8334 & 3,0000 \\ -4,6668 & -1,9999 & 0,6669 \\ 2,3335 & -0,8335 & -4,0004 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4,6667 & 3,2222 & 1,7778 \\ -4,6667 & -6,8893 & -9,1120 \\ 2,3333 & 7,1117 & 11,8902 \end{pmatrix}.$$

Los resultados se presentan con cuatro cifras decimales, aunque en los cálculos se trabajó con cifras completas. Analizando la convergencia de la matriz  $Q = \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI)$ , se tiene que,

$$\sigma \left( \widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI) \right) = \{2,3333, 0, 7,3342\},$$

es decir, el radio espectral de  $Q$  no es menor que 1. Por lo que la matriz  $\widehat{B}_\ell^D(\rho_\ell \widehat{A + B} - kI)$  no es convergente y el sistema es inestable. Al analizar con espaciamiento de malla más pequeños el sistema sigue siendo no convergente.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Jódar and J.A. Sánchez, *Construction of Stable Numerical Solutions of Strongly Coupled Paratial Differential Systems*, Int. J. Computers and Math. Vol. 73 No. 2 (1999)L.
- [2] L. Jódar, J.A. Sánchez, and M.V. Ferrer, *On the Stable Discrete Numerical Solutions of Strongly Coupled Mixed Partial Differential Systems*, Computer Math. Appl. Vol. 39 (2000), 169-182
- [3] L. Jódar and J.A. Sánchez, *Discrete Numerical Solutions of Strongly Coupled Mixed Diffusion Problems*, Computer Math. Appl. Vol. 40 (2000), 471-489
- [4] M.C. Casabán, L. Jódar and J.A. Sánchez, *Stable Numerical Solution of Strongly Coupled Mixed Diffusion Problems*, Applied Mathematics Letter. **15** (2002) 115-119
- [5] L. Jódar, M.V. Ferrer, *Resolución Numérica de Sistemas Acoplados de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Rev. Int., Métodos Num. Cál. y Dis. en Ing. 7(3), (1991), 289-299
- [6] J. Camacho, M.V. Ferrer, E. Navarro, *Analytic-numerical solutions with a prefixed accuracy for partial differential systems with acoupled separated boundary valued conditions*, Appl. Sci. Comp. 4(2), (1997), pp 104-117
- [7] J. Camacho, L. Jódar, E. Navarro, *Exact Solutions of coupled mixed diffusion problems with coupled boundary conditions*, M. Comp. Modelling, Vol. 28, No. 1 (1998), 65-76

- [8] M.N. Özisik, *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, CRC press, London, 1994.
- [9] M. Legua, L. Jódar, A. Law, *Existence of Numerical Solutions for Singular Partial Differential Systems*, *Iterative Methods in Linear Algebra* (R. Beawens and P. de Groen, Editors), Elsevier, 1992, p. 395-400
- [10] C. Casaban, L. Jodar, G.A. Ossadon, *A discrete Fourier Method for Solving Strongly Coupled Mixed Hyperbolic Problems*, *J. Math. Anal. Appl.* **313** (2006) 163-176.
- [11] J.A. Sánchez, *Construcción de Soluciones Numericas Estables de Problemas de Difusión Fuertemente Acoplados*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Febrero de 2000.
- [12] M.C. Casabán, *Construcción de Soluciones Numericas Discretas de Sistemas Acoplados de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Trabajo de Investigación, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Julio de 2000.
- [13] R. Courant and D. Hilbert, *Methods in Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience, New York, 1962.
- [14] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*, New York: Marcel Dekker, 1992. 777p. 1v.(Analytical Methods and Special Functions and International Series Of Ma).
- [15] S.L. Campbell, C.D Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, New York: Dover Publications, 1979. 272p. (Serie de Compendios Schaum).
- [16] J. Schwartz, N. Dunford, *Linear Operators*. New York: John Wiley

- [17] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford: Clarendon Press, 1999. 337p. (Oxford Applied Mathematics and Computing Science).
- [18] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Philadelphia: Siam, 2000. 572p. (The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics).
- [19] J.C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Pacific Grove: Wadsworth, 1989
- [20] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, New York: Cambridge University Press, 1994. 654p. 1v. (Annals of Mathematics Studies).
- [21] K.W. Morton, D.F. Mayers, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1994.
- [22] C.R. Rao, S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, Estados Unidos: John Wiley, 1971. 240p.
- [23] R. Godement, *Course d'Algebre*, París: Hermann, 1957.
- [24] R. Wylie, *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, Mexico: McGraw-Hill, 1982.
- [25] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis: a Modern Approach to Advanced Calculus*, Reading Mass.: Addison-Wesley, 1957. 559p. (Burndy Library Publications ).
- [26] L. Sirovich, *Introduction to Applied Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1988. 370p. 1v. (Texts in Applied Mathematics).
- [27] A. Jeffrey, *Linear Algebra and Ordinary Differential Equations*, London: Crc Press, 1993. 1123p.

- [28] E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. II, New York: John Wiley, 2006.
- [29] R. Barbolla, P. Sanz, *Algebra Lineal y Teoria de Matrices*, España: Pearson Educacion, 1998. 529p.