

**SOBRE ASPECTOS MATEMÁTICOS EN  
TERMOESTADÍSTICA GENERALIZADA.**

**RUBÉN DARÍO BORJA TAMAYO**

**ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS**

**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**MEDELLÍN**

**MAYO 2010**



# Sobre aspectos matemáticos en termoestadística generalizada

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de  
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Rubén Darío Borja Tamayo

Director

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Doctor en Ciencias Matemáticas



Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Medellín

Mayo 2010



**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

---

---

Coordinador de la Maestría

---

Director del proyecto

---

Ciudad y fecha (día, mes, año):

---



# Agradecimientos

Mis sinceros agradecimientos a todos aquellos que contribuyeron en el desarrollo y culminación de este trabajo, en especial a la universidad Eafit por brindarme la oportunidad de hacer parte del proyecto de investigación del cual el presente trabajo es fruto.

Al Dr. Gabriel Ignacio Loaiza Ossa, por su excelente trabajo de asesoría; las discusiones sostenidas con él, así como sus observaciones y correcciones, fueron un gran apoyo para la culminación de estas notas.

Así mismo, expreso mi agradecimiento al profesor Carlos Mario Cartagena Marín; gran parte de las ideas aquí desarrolladas surgieron de sus exposiciones. Además, siempre estuvo atento a brindarme asesoría en temas propios de la termoestadística.

Por último, a mi familia, Nena, Julio y Ayda, a quienes dedico este trabajo. Su paciencia y apoyo durante el desarrollo del mismo, me brindaron la fuerza y motivación sin las cuales estas notas no hubieran llegado a feliz término.



# Resumen

El presente trabajo está orientado a presentar los aspectos más relevantes de la termoestadística generalizada de Tsallis, obtenida a partir del formalismo de funciones  $\phi$ -deformadas de Naudts y particularmente funciones  $q$ -deformadas. Más allá del carácter divulgativo, se establecen tres tipos de aplicaciones de las funciones  $q$ -deformadas, las cuales hacen referencia, respectivamente, a la obtención de cotas para la entropía  $S_q$ , propia de la termoestadística de Tsallis, en términos de normas en espacios de Orlicz; la construcción de un criterio para hallar el índice  $q$ -entrópico para un observable  $u$  en un medio de turbulencia para el cual es aplicable el formalismo de Tsallis, y que aprovecha la propiedad de pérdida de memoria para exponenciales  $q$ -deformadas según la propuesta de Ghitany [1]; y la obtención de soluciones del tipo  $exp_q(kt)$  para dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Propuesta inicial</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivos . . . . .	5
<b>2. Aspectos matemáticos relacionados con T. G.</b>	<b>7</b>
2.1. $\kappa$ -deformadas . . . . .	8
2.1.1. Definiciones . . . . .	8
2.1.2. Propiedades y álgebra de $q$ -deformadas . . . . .	11
2.1.3. Otras Generalizaciones . . . . .	23
2.1.4. $\phi$ -logarítmica y $\phi$ -exponencial . . . . .	32
2.2. Termoestadística Generalizada . . . . .	32
2.2.1. Termoestadística clásica . . . . .	33
2.2.2. Formalismo de Naudts . . . . .	39
2.2.3. Entropía $S_q$ de Tsallis: descripción preliminar . . . . .	43
2.2.4. Caracterizaciones de $S_q$ . . . . .	43
2.2.5. Optimización de $S_q$ . . . . .	45
<b>3. Funciones de enlace y el parámetro de no extensividad</b>	<b>51</b>
3.1. Propiedad de pérdida de memoria y funciones de enlace . . . . .	51
3.2. Parámetro de no extensividad y propiedad de pérdida de memoria. . . . .	52
3.3. Estimación del parámetro de no extensividad . . . . .	53
<b>4. Sobre espacios de Orlicz y entropía</b>	<b>59</b>
4.1. Espacios de Orlicz. . . . .	59
4.1.1. Teoría de espacios de Orlicz . . . . .	60
4.1.2. Entropía basada en una variable aleatoria . . . . .	61
4.2. Entropía y espacios de Orlicz . . . . .	63

<b>5. E. D. no lineales y q-exponenciales</b>	<b>69</b>
5.1. E.D. no lineal con coeficientes constantes de orden 2 . . . . .	69
5.2. E.D. no lineal de orden superior con coeficientes constantes . . . . .	75
<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Problemas abiertos</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Introducción

Durante el siglo pasado, el formalismo desarrollado por Boltzmann y Gibbs - en adelante BG - para describir desde el punto de vista microscópico los fenómenos termodinámicos, y conocido hoy como mecánica estadística, fué objeto de profundos estudios y de diferentes interpretaciones, lo que permitió que se obtuvieran notorios resultados, no sólo en el desarrollo de la termoestadística, sino también en el de su aplicación a diferentes campos, tales como la teoría de información, el análisis de riesgo, las ecuaciones diferenciales no lineales, el análisis de sistemas complejos, entre otros.

Dentro de los aportes más relevantes a la estructura de la mecánica estadística de BG, se encuentra la definición de diferentes funcionales para describir la entropía de un sistema. Pueden citarse, como ejemplos de tales propuestas, los funcionales de entropía de Shannon [2] y Kolmogorov [3] (relacionados con teoría de la información en sistemas clásicos), la entropía de Von Neuman (equivalente a la de Shannon en sistemas cuánticos), La entropía  $S_R$  de Renyí [4], la cual logra un gran avance respecto a las anteriores, dado que caracteriza diferentes tipos de entropías haciendo uso de un índice entrópico  $\alpha$ ; casos similares están dados por la entropía  $S_\kappa$  de Kaniadakis [5] relacionada con estadística relativista, y la entropía  $S_q$  de Tsallis [6], la cual se aplica a fenómenos donde la evidencia experimental muestra que no se cumple el principio de extensividad de la entropía clásica para sistemas probabilísticamente independientes. Las dos últimas son, al igual que la de Renyí, entropías dependientes de parámetros  $k$ -entrópicos, o en modo más general, casos especiales de entropías biparamétricas [5], como también lo son dos entropías dependientes de parámetros  $q$  y  $r$ , y las cuales permiten obtener como casos particulares a las entropías de Renyí y Tsallis; tales entropías son la entropía de Sharma-Mitral y la entropía supraextensiva [7].

El presente trabajo pretende abordar precisamente algunos de los aspectos más relevantes de la entropía no extensiva de Tsallis, sus aplicaciones en la descripción de sistemas termodinámicos y en la solución de ecuaciones diferenciales no lineales y su relación con teorías de mecánica estadística más generales, como la que actualmente desarrolla Naudts [8] [9]. A partir de esta última propuesta, se estudia la posible aplicación de los espacios de Orlicz en la obtención de nuevos funcionales de entropía.

Como ya se ha dicho, la entropía de Tsallis no es la única que se encuentra parametrizada por un índice entrópico, en este caso  $q$ -índice; por ello, el trabajo se inicia con la descripción de las funciones exponencial y logarítmica generalizadas, según el desarrollo propuesto por Naudts en [8]. Dicho formalismo permite obtener algunas de las diferentes entropías que se han citado, o definir nuevos funcionales de entropía, partiendo de la definición del  $\phi$ -logaritmo deformado, en adelante  $ln_\phi(x)$ , dada por:

$$\ln_{\phi}(x) = \int_x^1 \frac{du}{\phi(u)}, \quad (1)$$

donde  $\phi(u)$  es una función definida en  $[0, \infty)$ , continua, creciente y convexa en  $(0, \infty)$ . La función inversa de  $\ln_{\phi}(x)$  es denominada  $\exp_{\phi}(x)$ . La importancia de ambas funciones ( $\ln_{\phi}$  y  $\exp_{\phi}$ ) en la mecánica estadística, se encuentra en el hecho de que la entropía es definida en términos de la función logarítmica y la densidad de probabilidades que optimiza la entropía, y por tanto, que describe la manera como el sistema se comporta en el estado de equilibrio, se da en términos de la función exponencial.

Dado que el interés se centrará en la termoestadística de Tsallis, en el segundo capítulo se hace uso del  $q$ -cálculo para enunciar o probar las propiedades de las funciones  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$  en términos de las cuales se desarrolla el formalismo de Tsallis. Siguiendo varios de los resultados que el lector podrá encontrar en forma más detallada en [10] y [11], se desarrollan el álgebra para las funciones  $q$ -deformadas, así como propiedades referentes a la derivación e integración de dichas funciones. Se exponen así mismo otras generalizaciones, en relación con funciones trigonométricas, tanto circulares como hiperbólicas, la transformada de Laplace y las funciones  $q$ -Gaussianas. Estas últimas guardan una estrecha relación con el estudio de distribuciones de probabilidad en estadística generalizada y en especial, con el proceso de optimización de la entropía  $S_q$ . El capítulo finaliza con un recuento de los aspectos más representativos del formalismo BG y su posterior ampliación en el contexto de la termoestadística no extensiva; primero se expone un análisis de tipo cualitativo, desde el punto de vista macroscópico, de las diferentes variables que se involucran en la descripción de un sistema termodinámico; el estudio es complementado con un análisis similar desde el punto de vista microscópico, siguiendo el modelo de ensamble propuesto por Gibbs, y para lo cual se ha tenido en cuenta [12]. Para tal fin, se estudia el equilibrio de sistemas en los tres tipos de ensambles usuales: microcanónico, canónico y grancanónico, encontrando la forma de las correspondientes densidades de probabilidad asociadas al equilibrio de cada sistema, a partir de las restricciones de normalización, intercambio de energía con el medio e intercambio de moléculas con el medio, en términos de las cuales se caracteriza cada ensamble. Continúa la sección con la propuesta de termoestadística generalizada de Naudts, para lo cual se ha seguido [8], [13], [14] y [9]; la descripción se fundamenta a partir de la evidencia experimental de sistemas no extensivos. La definición de nuevos funcionales de entropía a partir de funciones  $\phi$ -deformadas se hace constructivamente, y está dada de forma tal, que en el caso límite  $\phi(x) = x$ , el funcional de entropía se reduzca al del formalismo BG. En este punto se hace énfasis en la particularización del formalismo de Naudts a la entropía  $S_q$  de Tsallis. Para ello se inicia con una descripción preliminar, siguiendo [6], [15] y [17], en la que se establecen las motivaciones que llevaron a definir  $S_q$ ; se resaltan distintas interpretaciones de  $S_q$ , como objeto matemático o cantidad asociada a un observable de un sistema físico, desde diferentes caracterizaciones [18]. Se aborda la característica de no extensividad y se finaliza con la obtención de diferentes funciones de densidad de probabilidad para el equilibrio del sistema (máxima entropía), las cuales dependen de las restricciones que se impongan a la energía en el ensamble canónico, y que guardan estrecha relación con la familia de densidades de probabilidad escort, tal como es presentada por Ferri, Martínez y Plastino [19]

Desde sus inicios en 1988 uno de los principales retos que ha tenido el formalismo de Tsallis es el de encontrar un criterio de elección para el parámetro de no extensividad, o como se ha llamado anteriormente, índice entrópico  $q$ . En la literatura se encuentran varios cálculos para determinar  $q$  en determinados sistemas físicos (ver [18] página 23 y siguientes). En algunos casos los procedimientos parten de principios primeros o leyes derivadas, para determinar el

valor o valores de  $q$  correspondientes a distribuciones de probabilidad que se ajusten a los datos observados en un sistema. Otros procedimientos consisten en partir de datos experimentales para encontrar una función de ajuste (asumiendo características no extensivas) y plantear un valor o valores de  $q$  óptimos. En 2007, Sunehag P. escribió un artículo titulado *On a connection between entropy, extensive measurement and memoryless characterization*, el cual hace referencia a la propiedad de pérdida de memoria caracterizada por Ghitany M. [1] y su relación con entropías no extensivas. Siguiendo algunas de las ideas propuestas por Sunehag y Ghitany, el tercer capítulo pretende introducir una nueva forma de relacionar el parámetro  $q$  para un observable  $u$ , con su función de densidad de probabilidad estacionaria  $f$ , siempre que ésta tenga media cero en un sistema superaditivo y la energía efectiva asociada a  $u$  esté sujeta a ciertas condiciones; este capítulo está basado en el artículo de éste autor, titulado, *Sobre el parámetro de no extensividad para algunos sistemas super-aditivos* [20]. La relación se plantea mediante la comparación de funciones de enlace que permitan describir la pérdida de memoria, utilizando la caracterización de Ghitany para ciertas variables aleatorias. La comparación entre las funciones de enlace se usa para plantear un criterio con el cual se puede obtener el parámetro  $q$  a partir de una estimación de la función de densidad de probabilidad estacionaria. Dicho criterio es constructivo en cuanto no requiere suponer un valor específico para  $q$ . En la primera sección se establece la manera como las funciones de enlace caracterizan la propiedad de pérdida de memoria, para variables aleatorias con distribuciones no exponenciales. La segunda sección esta orientada a establecer una biyección entre la distribución obtenida en forma experimental para una variable aleatoria correspondiente a un observable  $u$ , y una distribución dada en términos del parámetro de no extensividad, la cual a su vez, será la correspondiente a la función de densidad de probabilidad que en teoría optimiza la entropía. A partir de tal biyección se establece el criterio de obtención de  $q$ , proceso que se desarrolla en la sección 3. El criterio es aplicado para describir un sistema compuesto por un cuerpo sobre el que actúa un fluido con turbulencia. Dicho problema ha sido abordado por Beck [21], y más recientemente por Beck y Daniels [22]

El cuarto capítulo está dedicado, aprovechando algunas propiedades de las normas en espacios de Orlicz y pares normalizados de funciones de Young, a establecer cotas para la entropía  $S_q$  de Tsallis en términos de normas de funciones de Young. Además, como un ejemplo novedoso, se plantea la posibilidad de considerar espacios de Orlicz y un funcional de entropía, en el sentido de Naudts, a partir de una variable aleatoria asociada a un observable  $u$  de un sistema termodinámico. Estos resultados hacen parte del artículo, del mismo autor, *Non-extensive entropy and Orlicz sequence spaces* [23].

Otro de los campos donde se propone una aplicación del funcional  $q$ -deformado en términos del cual se soluciona el problema de la entropía  $S_q$ , es el campo de las ecuaciones diferenciales no lineales. Para empezar, la definición misma de  $\ln_q(x)$  está relacionada con la obtención de una solución al problema con valores iniciales asociado a la simple ecuación diferencial de Bernoulli:

$$y' = y^q \quad \text{con} \quad y'(1) = 0$$

cuya solución está dada por:

$$y = \exp_q(x) = (1 + (1 - q)x)_+^{1/(1-q)}$$

Ahora bien, en 1998 Borges [24] propuso una solución para una ecuación diferencial no lineal asociada a un oscilador, la cual pudiera escribirse en términos de  $\exp_q(kt)$ . Un año más tarde, Mendes y Pedrón [25] propusieron estudiar algunas ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes cuya solución pudiera ser escrita en términos de  $\exp_q(kt)$ . El quinto capítulo aprovecha las propiedades de las funciones  $q$ -deformadas, relativas al álgebra y  $q$ -cálculo de las

funciones  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$ , para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes, en términos de funciones  $q$ -exponenciales. Como es usual, el análisis se inicia con la ecuación diferencial de orden 2, y posteriormente se generaliza el método para ecuaciones diferenciales de orden  $n$ . El primer paso del método consiste en caracterizar el tipo de ecuaciones diferenciales sobre las cuales se desarrollará el análisis. El primero de estos tipos está dado por la ecuación diferencial, denominada aquí ecuación diferencial de tipo 1, definida mediante la expresión:

$$a_n \frac{d^n y^{\alpha_n}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y^{\alpha_{n-1}}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy^{\alpha_1}}{dt} + a_0 y^{\alpha_0} = 0$$

Para esta ecuación se establecen condiciones de ligadura sobre los exponentes  $\alpha_n$  y el parámetro  $q$ . A partir de las ligaduras establecidas, se procede a encontrar la ecuación polinómica auxiliar en la variable  $k$  cuyas soluciones proporcionan los valores complejos para los cuales  $\exp_q(kt)$  es solución de la ecuación diferencial. El proceso anterior prácticamente es replicado para la ecuación diferencial de tipo 2 definida por:

$$a_n \left( \frac{d^n y}{dt^n} \right)^{\alpha_n} + a_{n-1} \left( \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 \left( \frac{dy}{dt} \right)^{\alpha_1} + a_0 y^{\alpha_0} = 0$$

En este caso, la ecuación auxiliar que se obtiene, si bien es una ecuación algebraica no polinómica, mediante un cambio de variable se transforma a polinómica. El capítulo finaliza con un breve análisis acerca de las dificultades de aplicar el método de  $q$ -transformada de Laplace, la cual se define en la sección 2.1, para la solución de problemas con valores iniciales asociados a ecuaciones diferenciales no homogéneas, donde la no homogeneidad está dada en términos de  $q$ -exponenciales.

El sexto capítulo está destinado a exponer las conclusiones más relevantes de los capítulos anteriores. Finalmente se exponen algunos problemas abiertos, los cuales están asociados con temas de interés, tanto teórico como aplicado.

# Capítulo 1

## Propuesta inicial

### 1.1. Objetivos

#### Objetivo general

Exponer aspectos matemáticos de la termoestadística no extensiva de Tsallis y, haciendo uso de tal formalismo, proponer algunas aplicaciones en tres contextos concretos, como son: la elección del índice entrópico a partir de la relación entre la función de densidad de probabilidad que optimiza la entropía de un sistema y dicho índice; la obtención de cotas para la entropía de Tsallis mediante normas en espacios de Orlicz; y la solución de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes, en términos de  $q$ -deformadas

#### Objetivos específicos

1. Utilizar el formalismo de Naudts para describir los aspectos más relevantes de la entropía no extensiva de Tsallis, haciendo uso de la familia de  $q$ -deformadas.
2. Obtener un criterio para definir el índice de no extensividad  $q$  para un sistema donde es aplicable la entropía  $S_q$  de Tsallis, haciendo uso de funciones de enlace.
3. Aplicar la teoría de espacios de Orlicz en la obtención de cotas para las entropías de Shannon y Tsallis, en términos de normas en dichos espacios.
4. Aplicar las propiedades de la familia  $q$ -exponencial para caracterizar la solución o soluciones de ecuaciones no lineales con coeficientes constantes, cuya no linealidad está relacionada con potencias de la variable dependiente y de sus derivadas hasta orden  $n$ .



## Capítulo 2

# Aspectos matemáticos relacionados con termoestadística generalizada

Dada la diversidad de temas que se exponen en el presente trabajo, las ideas preliminares sobre las cuales se desarrollarán los capítulos siguientes deben ser de tal generalidad que puedan ser retomadas sin mayor riesgo en los diferentes contextos en los cuales serán citadas, y de tal profundidad que no se necesiten aclaraciones posteriores que hagan perder el objetivo de cada capítulo. Pensando en lo anterior y a modo de darle un carácter de unidad a un grupo de contenidos en apariencia disímil, este segundo capítulo está compuesto en primer lugar por una aproximación a la teoría de funciones  $q$ -deformadas y en segundo lugar, por los aspectos más relevantes de la termoestadística generalizada. Se espera que tales contenidos no sólo sean suficientes para la lectura de las secciones posteriores, sino que además, estén presentados en la manera más clara y sintética posible. La primera sección está destinada a las definiciones de las funciones  $\kappa$ -deformadas, para lo cual se ha seguido la propuesta de Naudts [8]. Dentro de esta familia de funciones se da especial interés a las funciones  $q$ -deformadas propias de la teoría de Tsallis, se estudian sus propiedades y el álgebra de las mismas, y finaliza la sección con algunas generalizaciones propias del  $q$ -cálculo, las cuales hacen referencia a funciones  $q$ -análogas, tales como las trigonométricas circulares e hipérbólicas, la  $q$ -transformada de Laplace y las  $q$ -gaussianas; estas generalizaciones serán de especial interés en el último capítulo, donde se presentan algunos resultados novedosos relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales.

La segunda sección, referente a la termoestadística generalizada, se inicia con una breve mención de la termoestadística clásica y los problemas que dieron origen a la termoestadística no extensiva; para darle un carácter de unidad al capítulo, se generaliza la familia  $\kappa$ -deformada de Naudts a una nueva familia, denominada  $\phi$ -deformada, la cual será de especial interés en el desarrollo del capítulo 4. Se establecen los resultados y relaciones básicas de la termoestadística no extensiva, y finaliza la sección con un estudio detallado de la termoestadística de Tsallis, dado que en el capítulo 3 se expone un importante resultado asociado a tal formalismo, y en el capítulo 4 se establecen algunas cotas notables para la entropía de Tsallis, en términos de normas en espacios de Orlicz.

## 2.1. $\kappa$ -deformadas

Aunque el estudio del  $q$ -cálculo no estaría catalogado precisamente como una teoría reciente, dado que sus orígenes podrían situarse en los trabajos de Euler y Gauss, su construcción rigurosa se ha realizado en el último siglo y más concretamente, en la primera mitad del siglo  $XX$ . En este periodo, el desarrollo del  $q$ -análisis fue notorio en los trabajos de Jackson, Carmichael, Ramanujan, Watson, sólo por citar a algunos, quienes trabajaron en series  $q$ -hipergeométricas, aplicaciones al análisis combinatorio y ecuaciones  $q$ -diferenciales. Dentro de todos estos trabajos, cabe resaltar el realizado por Jackson, a quien se debe un gran número de escritos relacionados con  $q$ -diferenciación,  $q$ -trigonométricas y teoría general del  $q$ -cálculo, como aparece bien reseñado por Ernst [11]. En la última década del siglo  $XX$ , algunas de las ideas desarrolladas durante la primera mitad del mismo siglo tomaron gran fuerza en diferentes campos de la ciencia y la matemática; uno de los campos donde se ha aprovechado en gran medida el  $q$ -análisis, es el de la termoestadística no extensiva, razón por la cual, esta sección está destinada a la descripción de dos importantes funciones  $q$ -deformadas,  $exp_q(x)$  y  $log_q(x)$ , y su posterior aplicación en los fundamentos de la termoestadística generalizada.

### 2.1.1. Definiciones

Una función exponencial  $\kappa$ -deformada, donde el parámetro  $\kappa$  es un número, se denota por  $exp_\kappa(x)$  y cumple las siguientes propiedades:

1.  $exp_\kappa(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se permite  $exp_\kappa(x) = \infty$
2.  $exp_\kappa(x)$  es una función convexa y es estrictamente creciente en todos los puntos donde no se anula o no se hace infinita.
3.  $exp_\kappa(0) = 1$
4.  $exp_\kappa(x)$  tiende rápidamente a cero cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , en otras palabras:

$$\int_0^\infty exp_\kappa(-x)dx < \infty: \quad (2.1)$$

Similarmente, puede definirse una función logarítmica  $\kappa$ -deformada, que se denota por  $ln_\kappa(x)$ , está definida para todo número positivo  $x$  y cumple las siguientes propiedades:

1.  $ln_\kappa(x)$  es una función cóncava y es estrictamente creciente.
2.  $ln_\kappa(1) = 0$
3.  $\int_0^1 ln_\kappa(x)dx < \infty$

Es fácil mostrar que la inversa de una función exponencial  $\kappa$ -deformada es una función logarítmica  $\kappa$ -deformada. Puesto que  $exp_\kappa(x)$  es estrictamente creciente, diverge cuando  $x \rightarrow \infty$ . Además,  $exp_\kappa(x)$  tiende rápidamente a cero cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ ; las dos situaciones anteriores indican que el rango de  $exp_\kappa(x)$  incluye el intervalo  $(0, +\infty)$ . Esto implica que la función inversa está definida para todo número positivo  $x$ . Recíprocamente, si una función logarítmica  $\kappa$ -deformada está dada, entonces la función exponencial  $\kappa$ -deformada correspondiente es:

$$\exp_{\kappa}(x) = \begin{cases} y, & \text{si existe } y > 0 \text{ para el cual } x = \ln_{\kappa}(y), \\ 0, & \text{si } x < \ln_{\kappa}(y) \text{ para todo } y > 0, \\ +\infty, & \text{si } x > \ln_{\kappa}(y) \text{ para todo } y > 0. \end{cases}$$

Una propiedad de la función exponencial usual, que podría ser de interés en la función exponencial  $\kappa$ -deformada está dada por:  $\exp_{\kappa}(-x)\exp_{\kappa}(x) = 1$  siempre que  $\exp_{\kappa}(-x)$  y  $\exp_{\kappa}(x)$  no sean ni cero ni infinito. Para el caso de la función logarítmica, la propiedad correspondiente sería  $\ln_{\kappa}(1/x) = \ln_{\kappa}(-x)$ . Sin embargo, estas propiedades no siempre se cumplen para funciones  $\kappa$ -deformadas. Cuando esto sucede, es posible definir funciones deformadas duales. Para el caso de la función exponencial  $\kappa$ -deformada, la obtención de la dual correspondiente se da siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:

1.  $\int_0^{\infty} (\exp_{\kappa}(x))^{-1} dx < \infty$
2.  $(\exp_{\kappa}(x))^{-1}$  es una función convexa de  $x$

En tal caso, la función dual para la exponencial deformada estará dada por:

$$\exp_{\kappa}^*(x) = \frac{1}{\exp_{\kappa}(x)} \quad (2.2)$$

Similarmente, la función dual para la función logarítmica deformada se define por:

$$\ln_{\kappa}^*(x) = -\ln_{\kappa}(1/x) \quad (2.3)$$

Para la función logarítmica  $\kappa$ -deformada, considerese la siguiente integral:

$$F_{\kappa}(x) = \int_1^x \ln_{\kappa}(y) dy, \quad x > 0 \quad (2.4)$$

La expresión anterior se utiliza para definir una nueva función logarítmica  $\kappa$ -deformada, conocida como logarítmica deducida y denotada por  $\omega_{\kappa}(x)$ , la cual se define como:

$$\omega_{\kappa}(x) = (x - 1)F_{\kappa}(0) - xF_{\kappa}(1/x) \quad (2.5)$$

siempre que se cumpla la condición para la existencia de la función dual  $\ln_{\kappa}^*(x)$  dada por:

$$\int_0^1 \ln_{\kappa}(1/x) dx < \infty \quad (2.6)$$

Ahora, dados dos parámetros  $\lambda > 0$  y  $\mu > 0$  y una función logarítmica  $\kappa$ -deformada, se puede definir una nueva función logarítmica  $\kappa$ -deformada, llamada escalada, denotada por  $\ln_{\kappa}^{esc}(x)$  y la cual se define como:

$$\ln_{\kappa}^{esc}(x) = \lambda(\ln_{\kappa}(\mu x) - \ln_{\kappa}(\mu)) \quad (2.7)$$

Para el caso de exponenciales  $\kappa$ -deformadas, se tiene la relación:

$$\exp_{\kappa}^{esc}(x) = \mu^{-1} \exp_{\kappa}(\lambda^{-1}x + \ln_{\kappa}(\mu)) \quad (2.8)$$

En tanto que si existe la logarítmica deducida, la relación estará dada por:

$$\omega_{\kappa}^{esc}(x) = \lambda(\omega_{\kappa}(\mu^{-1}x) - \omega_{\kappa}(\mu^{-1})) \quad (2.9)$$

**Ejemplo 2.1.1. Logarítmica deformada de Tsallis** Consideréense las siguientes funciones  $\kappa$ -deformadas, donde  $-1 < \kappa < 1$ :

$$\ln_{\kappa}(x) = \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) (x^{\kappa} - 1) \quad (2.10)$$

$$\exp_{\kappa}(x) = \left[1 + \frac{\kappa}{1 + \kappa}x\right]_{+}^{1/\kappa} \quad (2.11)$$

Como es usual:

$$[u]_{+} = \max(0, u)$$

En este caso se tendrá:

$$\ln_{\kappa}^{*}(x) = -\ln_{\kappa}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \ln_{-\kappa}(x) \quad (2.12)$$

Por otro lado:

$$F_{\kappa}(x) = \frac{1}{\kappa}(x^{\kappa} - 1) - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) (x - 1) \quad (2.13)$$

En particular,  $F_{\kappa}(0) = 1$ . Así se obtiene:

$$\omega_{\kappa}(x) = \frac{1}{1 - \kappa} \ln_{-\kappa}(x) = \frac{1}{1 + \kappa} \ln_{\kappa}^{*}(x) \quad (2.14)$$

De donde se concluye que  $\omega_{\kappa}(x) = \ln_{-\kappa}^{esc}(x)$  con los parámetros de escalonamiento  $\lambda$  y  $\mu$  cualquier par de positivos que cumplan la relación:

$$(1 - \kappa)\lambda = \mu^{\kappa}$$

*Observación 1.* En el contexto de Tsallis se utiliza la función logarítmica  $\kappa$ -deformada definida por:

$$\omega_{\kappa}(x) = \frac{1}{\kappa}(1 - x^{-\kappa})$$

la cual se puede obtener fácilmente de (2.5) y (2.13) Por otro lado, la notación en tal formalismo está dada por  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$  con  $q = 1 + \kappa$ . Cuando se haga explícito que se está trabajando en el contexto de Tsallis, se escribirá  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$ , y por tanto:

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (2.15)$$

y

$$\exp_q(x) = (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)} \quad (2.16)$$

**Ejemplo 2.1.2. Funciones deformadas de Kaniadakis** Para  $-1 < \kappa < 1$ ,  $\kappa \neq 0$  Kaniadakis define:

$$\exp_{\kappa}(x) = (\kappa x + \sqrt{1 + \kappa^2 x^2})^{1/\kappa} \quad (2.17)$$

La cual es una función positiva y finita para todo número real  $x$ . La función inversa es:

$$\ln_{\kappa}(x) = \frac{1}{2\kappa}(x^{\kappa} - x^{-\kappa}) \quad (2.18)$$

En el caso límite  $\kappa = 0$  estas funciones coinciden con las definiciones usuales de funciones exponencial y logarítmica respectivamente. En este caso se tiene:

$$F_{\kappa}(x) = \frac{1}{1 - \kappa^2} + \frac{1}{2\kappa} \left[ \frac{1}{1 + \kappa} x^{1+\kappa} - \frac{1}{1 - \kappa} x^{1-\kappa} \right] \quad (2.19)$$

En particular:

$$F_\kappa(0) = \frac{1}{1 - \kappa^2} \quad (2.20)$$

La función logarítmica deducida está dada por:

$$\omega_\kappa(x) = -\frac{1}{1 - \kappa^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \ln_q \left( \left( \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right)^{1/2\kappa} x \right) \quad (2.21)$$

Por tanto se tiene  $\omega_\kappa(x) = \ln_\kappa^{\text{esc}}(x)$  con los parámetros de escalonamiento:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad \mu = \left( \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right)^{1/2\kappa} \quad (2.22)$$

### 2.1.2. Propiedades y álgebra de $q$ -deformadas

En secciones siguientes se desarrollará una descripción detallada de la propuesta de Tsallis, razón por la cual es de interés resaltar las propiedades básicas de las funciones  $q$ -deformadas  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$ . Así mismo, se resaltan otras posibilidades de generalizaciones que pueden obtenerse a partir de ellas. Considérense las funciones  $q$ -deformadas definidas por (2.15) y (2.16). En tal caso se tiene:

**Proposición 2.1.1.** *La función  $\exp_q(x)$  tiene las siguientes propiedades geométricas:*

1. Para  $q < 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\exp_q(x)$  es una función positiva, continua, creciente, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_q(x) = \infty$$

2. Para  $0 < q < 1$   $x \in [0, \infty)$ ,  $\exp_q(x)$  es una función positiva, continua, creciente, convexa, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_q(x) = \infty$$

3. Para  $1 < q < \frac{1}{q-1}$ ,  $x \in [0, \frac{1}{q-1})$ ,  $\exp_q(x)$  es una función positiva, continua, creciente, convexa, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{q-1})^-} \exp_q(x) = \infty$$

*Demostración.* Si se considera  $y = \exp_q(x)$ , entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - q} (1 + (1 - q)x)^{\frac{q}{1-q}} = (\exp_q(x))^q \quad (2.23)$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q[\exp_q(x)]^{2q-1} \quad (2.24)$$

Por tanto se cumple:

1. De (2.16) se tiene que, para  $q < 1$ ,  $\exp_q(x)$  es continua en  $(-\infty, \infty)$ , mientras que para  $q > 1$   $\exp_q(x)$  es continua en  $(-\infty, \frac{1}{q-1}) \cup (\frac{1}{q-1}, \infty)$ .

2. (2.23) implica que la derivada de  $\exp_q(x)$ , con  $q < 1$ , sea positiva para  $0 < x$ , (con  $q > 1$ , la derivada es positiva para  $0 < x < \frac{1}{q-1}$ ) y por tanto,  $\exp_q(x)$  es creciente en  $(0, \infty)$  para  $q < 1$ , mientras que será creciente en  $(0, \frac{1}{q-1})$  para  $q > 1$ .
3. (2.24) implica que para  $q < 0$ , la segunda derivada de  $\exp_q(x)$  es negativa en  $(0, \infty)$ ; para  $0 < q < 1$ , tal derivada es positiva en  $(0, \infty)$  y para  $q > 1$  es positiva en  $(0, \frac{1}{q-1})$ . Así se dan las condiciones de concavidad y convexidad expresadas en la proposición.
4. para  $q > 1$  se tiene  $1 - q < 0$ . Por tanto, si se hace  $n = 1/(q - 1)$  (2.16) se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{q-1}^-} [1 + (1 - q)x]^{1/1-q} &= \lim_{x \rightarrow n^-} \left[1 - \frac{x}{n}\right]^{-n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n^-} \left[\frac{n}{n-x}\right]^n \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

□

A continuación se muestran algunas gráficas que ilustran el comportamiento de  $\exp_q(x)$  para diferentes valores de  $q$ .

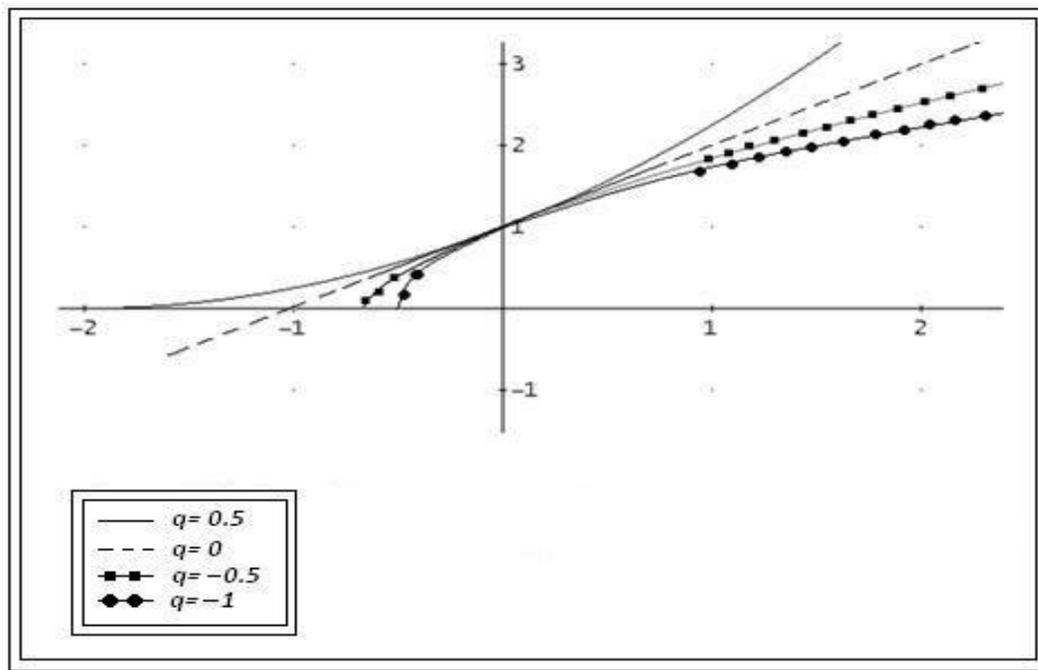


Figura 2.1: Gráficas  $\exp_q(x)$  para  $q < 1$

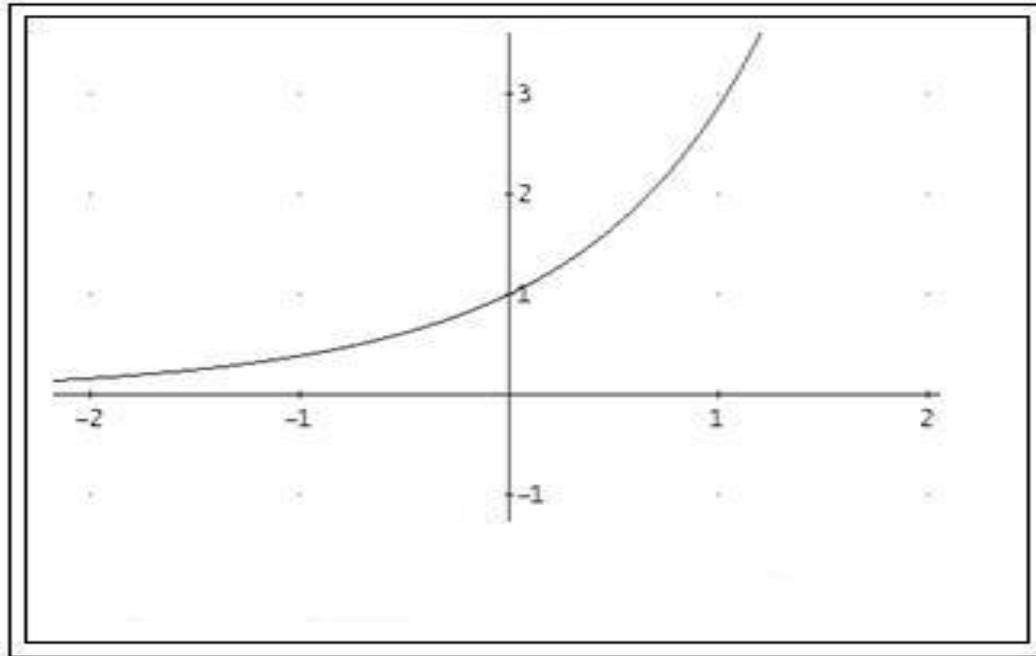


Figura 2.2: Gráfica de  $\exp_{1,1}(x)$

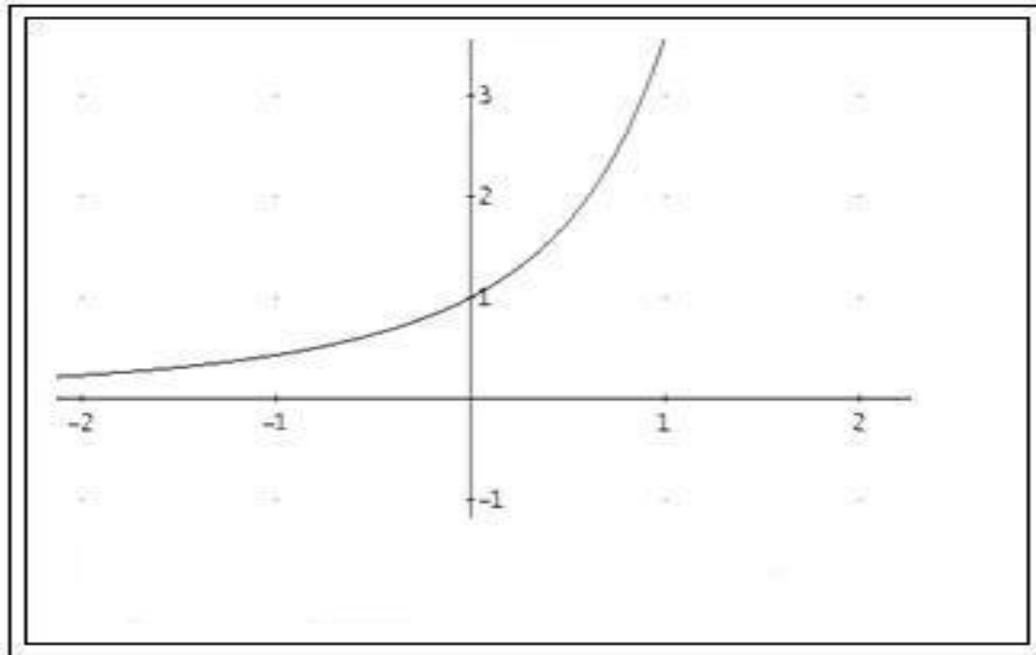
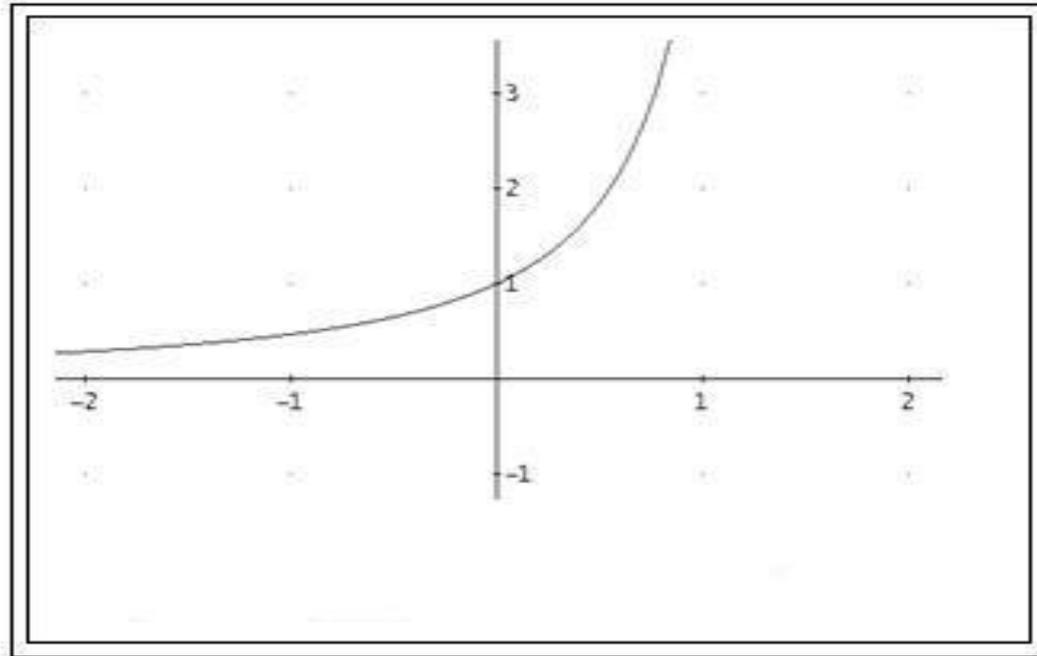
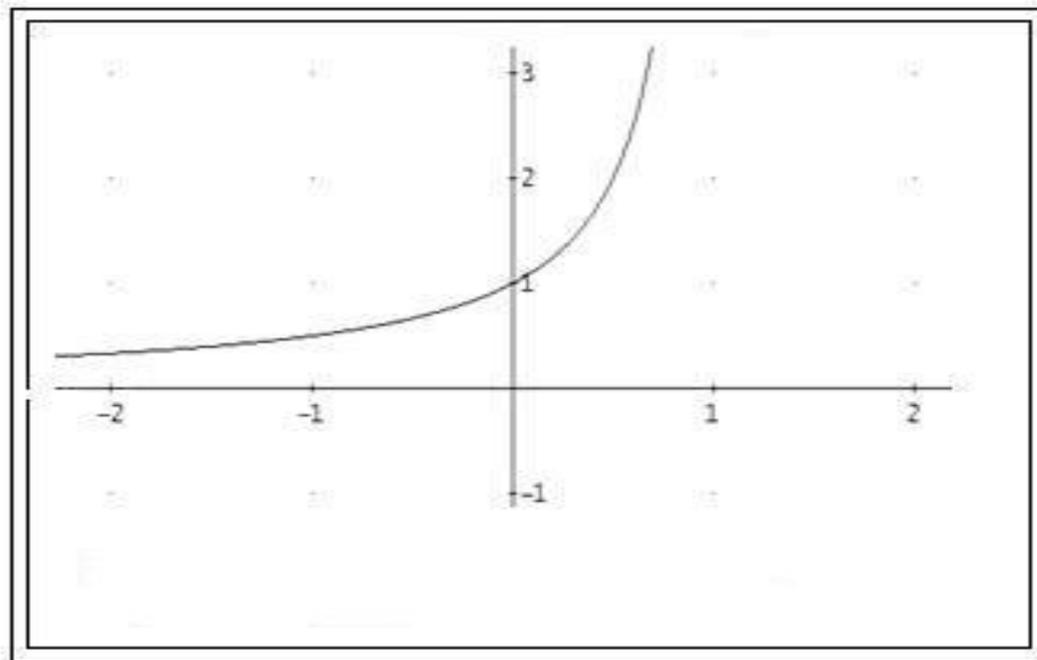


Figura 2.3: Gráfica de  $\exp_{1,4}(x)$

Figura 2.4: Gráfica de  $\exp_{1.7}(x)$ Figura 2.5: Gráfica de  $\exp_2(x)$ 

**Proposición 2.1.2.** *La función  $\ln_q(x)$  tiene las siguientes propiedades geométricas:*

1. *Para  $q < 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\ln_q(x)$  es una función continua, creciente, convexa, y tal que:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \infty$$

2. Para  $0 < q < 1$   $x \in [0, \infty)$ ,  $\ln_q(x)$  es una función continua, creciente, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \infty$$

3. Para  $1 < q < \frac{1}{q-1}$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\ln_q(x)$  es una función creciente en  $[0, \frac{1}{q-1})$ , continua, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \frac{1}{q-1}$$

La prueba de la proposición (2.1.2) es similar a la de la proposición (2.1.1). Algunas gráficas de  $\ln_q(x)$  se muestran a continuación.

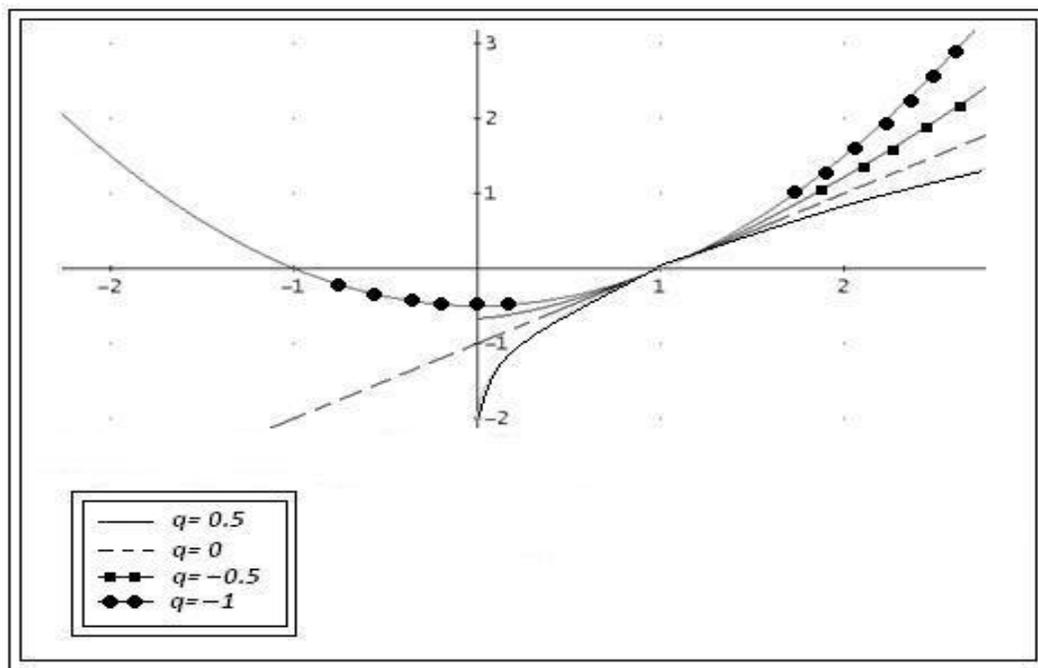
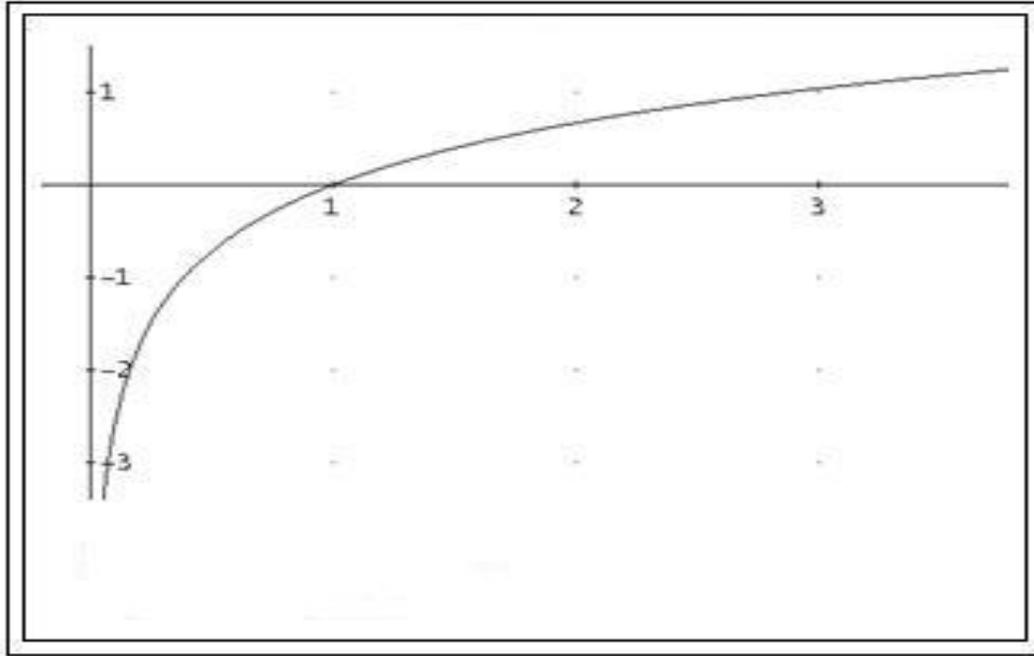
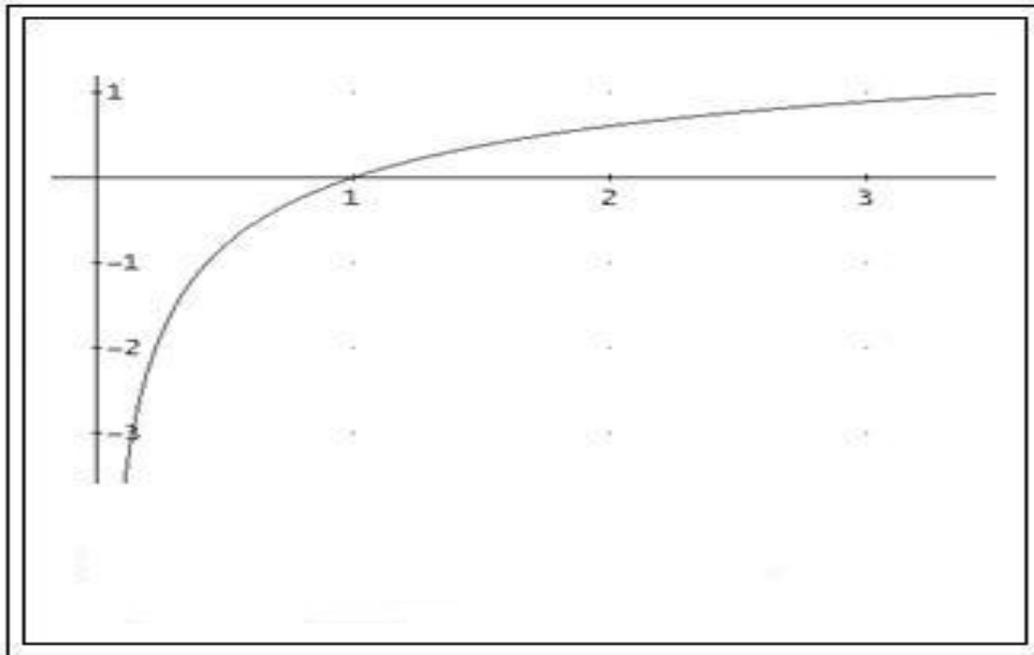
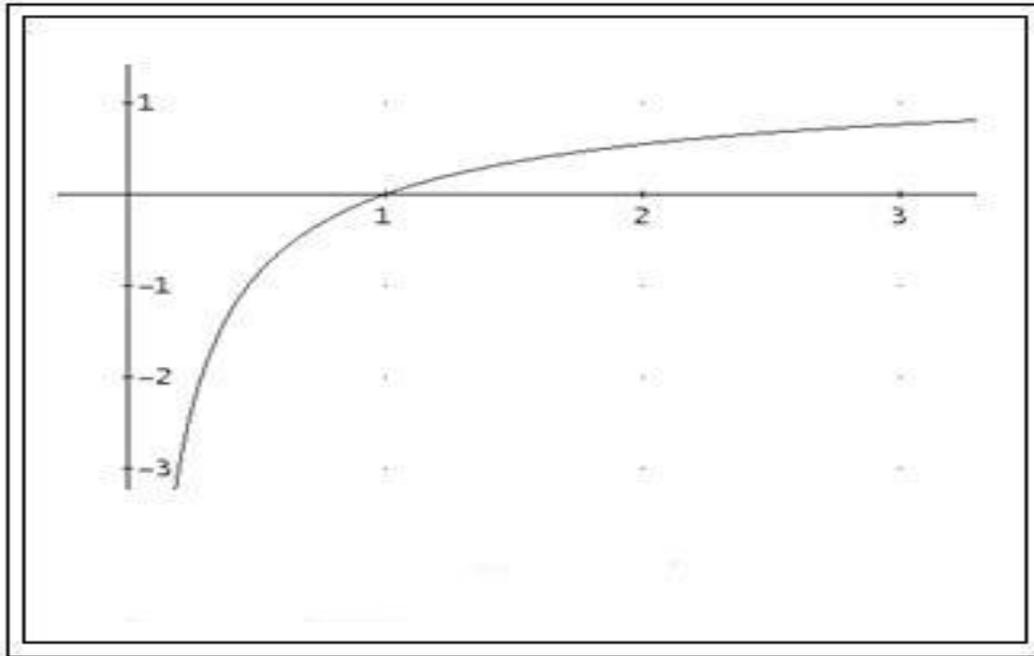
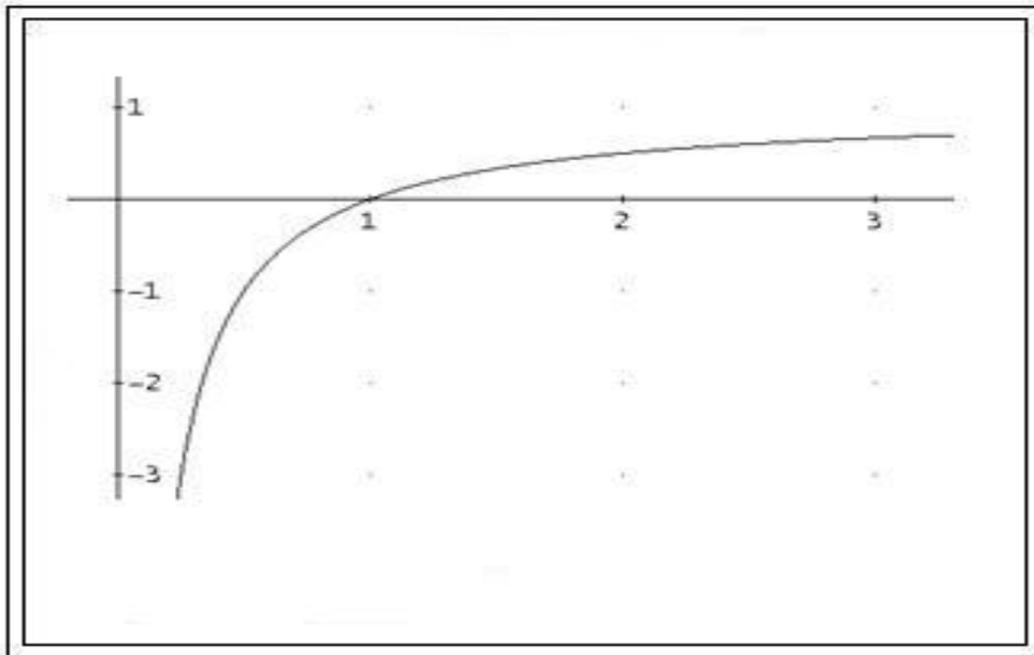


Figura 2.6: Gráficas  $\ln_q(x)$  para  $q < 1$

Figura 2.7: Gráfica de  $\ln_{1.1}(x)$ Figura 2.8: Gráfica de  $\ln_{1.4}(x)$

Figura 2.9: Gráfica de  $\ln_{1.7}(x)$ Figura 2.10: Gráfica de  $\ln_2(x)$ 

A continuación se presentan dos proposiciones que dan cuenta de propiedades similares a las de las funciones exponencial y logarítmica usuales:

**Proposición 2.1.3.** *La función  $\exp_q(x)$  cumple las siguientes propiedades:*

1. *Producto*

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1 - q)xy) \quad (2.25)$$

2. *Cociente*

$$\frac{\exp_q(x)}{\exp_q(y)} = \exp_q\left(\frac{(x - y)}{1 + (1 - q)(y)}\right) \quad (2.26)$$

3. *Potencia*

$$(\exp_q x)^n = \exp_{1-(1-q)/n}(nx) \quad (2.27)$$

4. *Inverso*

$$(\exp_q(x))^{-1} = \exp_q\left(\frac{-x}{1 + (1 - q)(x)}\right) = \exp_{2-q}(-x) \quad (2.28)$$

5. *Derivada*

$$\frac{d}{dx}[\exp_q(x)] = (\exp_q(x))^q = \exp_{2-1/q}(qx) \quad (2.29)$$

6. *Integral*

$$\int \exp_q(nx)dx = \frac{1}{(2 - q)n} (\exp_q(nx))^{2-q} \quad (2.30)$$

*Demostración.* Para cada una de las propiedades se tiene:

1. El lado izquierdo de la expresión (2.25) puede escribirse como:

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = [(1 + (1 - q)x)(1 + (1 - q)y)]^{\frac{1}{1-q}}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \exp_q(x)\exp_q(y) &= [1 + (1 - q)x + (1 - q)y + (1 - q)^2xy]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= [1 + (1 - q)(x + y + (1 - q)xy)]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \exp_q(x + y + (1 - q)xy) \end{aligned}$$

2. Partiendo del lado derecho de (2.26) se tiene:

$$\begin{aligned} \exp_q\left(\frac{x - y}{1 + (1 - q)y}\right) &= \left(1 + (1 - q)\frac{x - y}{1 + (1 - q)y}\right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \left(\frac{1 + (1 - q)y + (1 - q)(x - y)}{1 + (1 - q)y}\right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \frac{\exp_q(x)}{\exp_q(y)} \end{aligned}$$

3. De la definición de  $\exp_q(x)$

$$\begin{aligned} (\exp_q(x))^n &= (1 + (1 - q)x)^{\frac{n}{1-q}} \\ &= \left(1 + \frac{1 - q}{n}(nx)\right)^{\frac{1}{(1-q)/n}} \\ &= \exp_{1-\frac{1-q}{n}}(nx) \end{aligned}$$

Las propiedades 4, 5 y 6 son inmediatas. Para la 4, basta con reemplazar  $n$  por  $-1$  en (2.27) y se obtiene (2.28). En el caso de 5, nótese que:

$$\frac{d}{dx} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{1-q} (1 + (1 - q)x)^{\frac{q}{1-q}} (1 - q) = (exp_q(x))^q$$

Ahora, reemplazando  $n$  por  $q$  en la expresión (2.27), se obtiene la segunda parte de (2.29). Por otro lado,

$$\int exp_q(nx) dx = \int (1 + (1 - q)nx)^{\frac{1}{1-q}}$$

que mediante el cambio de variable  $u = (1 + (1 - q)nx)$  se convierte en

$$\int \frac{u^{\frac{1}{1-q}} du}{n(1-q)} = \frac{1}{n(2-q)} u^{\frac{2-q}{1-q}} = \frac{(exp_q(nx))^{2-q}}{2-q}.$$

□

**Proposición 2.1.4.** *La función  $ln_q(x)$  cumple las siguientes propiedades:*

1. **Producto**

$$ln_q(xy) = ln_q(x) + ln_q(y) - (1 - q)ln_q(x)ln_q(y) \quad (2.31)$$

2. **Cociente**

$$ln_q(x/y) = \frac{ln_q(x) - ln_q(y)}{1 + (1 - q)ln_q(y)} \quad (2.32)$$

3. **Potencia**

$$ln_q(x^n) = \frac{n}{1 - q} ln_{1-n}(x^{1-q}) \quad (2.33)$$

4. **Inverso**

$$ln_q(x^{-1}) = \frac{ln_q(x)}{1 + (1 - q)ln_q(x)} = \frac{-1}{x^{1-q}} ln_q(x) \quad (2.34)$$

5. **Derivada**

$$\frac{d}{dx} [ln_q(x)] = \frac{1}{x^q} \quad (2.35)$$

6. **Integral**

$$\int ln_q(x) dx = \frac{x(ln_q(x) - 1)}{2 - q} \quad (2.36)$$

*Demostración.* Al igual que en las propiedades para  $exp_q(x)$ , se procederá propiedad por propiedad.

1. Partiendo del lado derecho de (2.31) se tiene:

$$\begin{aligned} ln_q(x) + ln_q(y) + (1 - q)ln_q(x)ln_q(y) &= \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} + \frac{y^{1-q} - 1}{1 - q} + \frac{(x^{1-q} - 1)(y^{1-q} - 1)}{1 - q} \\ &= \frac{x^{1-q} - 1 + y^{1-q} - 1 + (xy)^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1 - q} \\ &= \frac{(xy)^{1-q} - 1}{1 - q} \\ &= ln_q(xy) \end{aligned}$$

2. Si se aplica la definición de  $ln_q(x)$  al lado derecho de (2.32), entonces:

$$\begin{aligned}
 ln_q\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{1-q} - 1}{1-q} \\
 &= \frac{\left(\frac{x^{1-q}-y^{1-q}}{1-q}\right)}{y^{1-q}} \\
 &= \frac{\frac{x^{1-q}-1}{1-q} - \frac{y^{1-q}-1}{1-q}}{1 + (1-q)\frac{y^{1-q}-1}{1-q}} \\
 &= \frac{ln_q(x) - ln_q(y)}{1 + (1-q)ln_q(y)}
 \end{aligned}$$

3. En este caso:

$$\begin{aligned}
 ln_q(x^n) &= \frac{(x^n)^{1-q} - 1}{1-q} \\
 &= \frac{(x^{1-q})^n - 1}{1-q} \\
 &= \frac{n}{1-q} \frac{(x^{1-q})^n - 1}{n} \\
 &= \frac{n}{1-q} ln_{1-n}(x^{1-q})
 \end{aligned}$$

4. Claramente

$$\begin{aligned}
 ln_q(x^{-1}) &= \frac{\left(\frac{1}{x^{1-q}} - 1\right)}{1-q} \\
 &= -\frac{1}{x^{1-q}} ln_q(x)
 \end{aligned}$$

Las propiedades 5 y 6 son triviales, dado que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[ln_q(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \right] \\
 &= \frac{1}{x^q}
 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 \int ln_q(x) dx &= \int (x^{1-q} - 1) dx \\
 &= \frac{1}{1-q} \left( \frac{x^{2-q}}{2-q} - x \right) \\
 &= \frac{x}{2-q} \left( \frac{x^{1-q} - 1 - (1-q)}{1-q} \right) \\
 &= \frac{x}{2-q} (ln_q(x) - 1).
 \end{aligned}$$

□

## Álgebra

Definánse las siguientes  $q$ -operaciones :

1. La  $q$ -suma  $\oplus_q$ , de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , está dada por:

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy \quad (2.37)$$

2. El  $q$ -producto  $\otimes_q$ , de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , está dado por:

$$x \otimes_q y = [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, (x > 0, y > 0) \quad (2.38)$$

**Proposición 2.1.5.** *Las operaciones  $\oplus_q$  y  $\otimes_q$  cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y modulativa, siendo 0 el módulo para  $\oplus_q$  y 1 el módulo para  $\otimes_q$ .*

*Demostración.* En el caso de la operación  $\oplus_q$ :

$$\begin{aligned} (x \oplus_q y) \oplus_q z &= (x + y + (1 - q)xy) + z + (1 - q)(x + y + (1 - q)xy)z \\ &= x + (y + z + (1 - q)yz) + (1 - q)x(y + z + (1 - q)yz) \\ &= x \oplus_q (y \oplus_q z) \end{aligned}$$

La prueba de las propiedades conmutativa y modulativa son ambas triviales.

Por otro lado, para  $\otimes_q$  se tiene:

$$\begin{aligned} (x \otimes_q y) \otimes_q z &= (x^{1-q} + y^{1-q} - 1) + z^{1-q} - 1 \\ &= x^{1-q} + (y^{1-q} + z^{1-q} - 1) - 1 \\ &= x \otimes_q (y \otimes_q z) \end{aligned}$$

Las propiedades conmutativa y modulativa, con 1 como módulo, se prueban de forma trivial.  $\square$

*Observación 2.* Dado que  $\otimes_q$  está bien definida para  $x, y > 0$  números reales, las propiedades asociativa y conmutativa tienen sentido siempre que  $0 < x \otimes_q y < \infty$  y  $0 < y \otimes_q z < \infty$

**Proposición 2.1.6.** *Para  $x \neq \frac{1}{q-1}$  existe un inverso único de  $x$  bajo  $\oplus_q$ .*

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \oplus_q x = 0$ . En tal caso se tendría:

$$a + x + (1 - q)ax = 0$$

Con lo cual:

$$a = \frac{-x}{1 + (1 - q)x} \quad (2.39)$$

$a$  es por tanto único para  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \neq \frac{1}{q-1}$ .  $\square$

Al elemento  $a$  encontrado en (2.39) se le representará por  $\ominus_q x$ . Así:

$$x \oplus_q (\ominus_q x) = 0$$

Con la definición de inverso de  $x$  para  $\oplus_q$  es posible definir la  $q$ -diferencia para dos elementos  $x, y$ , la cual estaría dada por:

$$x \ominus_q y = x \oplus_q (\ominus_q y) = x - \frac{y}{1 + (1 - q)y} - \frac{(1 - q)xy}{1 + (1 - q)y} = \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \quad (2.40)$$

*Observación 3.* Las siguientes propiedades se cumplen para  $\oplus$  y  $\ominus$ :

$$x \ominus_q y = \ominus_q y \oplus_q x \quad (2.41)$$

$$x \ominus_q (y \ominus_q z) = (x \ominus_q y) \oplus_q z \quad (2.42)$$

**Proposición 2.1.7.** Para  $x > 0$  existe un inverso único bajo  $\otimes_q$

*Demostración.* Como antes, supóngase que existe  $b > 0$  tal que  $x \otimes_q b = 1$ . En tal caso:

$$[x^{1-q} + b^{1-q} - 1]^{\frac{1}{1-q}} = 1$$

o lo que es equivalente

$$b = (2 - x^{1-q})_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.43)$$

□

Al elemento  $b$  encontrado en (2.43) se le representa por  $\oslash_q x$  y permite definir la  $q$ -razón, la cual está dada para dos reales  $x, y$ , ambos mayores que cero, y tales que  $(x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1)$ , por:

$$x \oslash_q y = x \otimes_q (\oslash_q y) = (x^{1-q} + (2 - y^{1-q})_+ - 1)^{\frac{1}{1-q}} = (x^{1-q} - y^{1-q} + 1)_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.44)$$

*Observación 4.* Para  $0 < x \leq 2$  se cumple  $1 \oslash_q (1 \otimes_q x) = x$ . Así mismo, si  $q < 1$ , la expresión bastante singular  $1 \oslash_q 0$  no diverge.

*Observación 5.* Es de interés tener en cuenta las siguientes propiedades, similares a las del producto y cociente usuales:

$$x \oslash_q y = 1 \oslash_q (y \otimes_q x) \quad (x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1) \quad (2.45)$$

$$x \oslash_q (y \oslash_q z) = (x \oslash_q y) \otimes_q z = (x \otimes_q z) \oslash_q y \quad (z^{1-q} - 1 \leq y^{1-q} \leq x^{1-q} + 1) \quad (2.46)$$

Las definiciones de  $\oplus_q$  y  $\otimes_q$  dadas por (2.37) y (2.38) así como las propiedades para las funciones exponencial y logarítmica  $q$ -deformadas que se demostraron en las proposiciones (2.1.3) y (2.1.4), permiten establecer la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.8.** La relación entre las operaciones  $\oplus_q$ ,  $\otimes_q$ ,  $\ominus_q$ , y  $\oslash_q$  para las funciones  $\exp_q(x)$  y  $\ln_q(x)$ , están dadas por las siguientes propiedades:

▪ **Propiedades del álgebra para  $\exp_q(x)$**

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x \oplus_q y) \quad (2.47)$$

$$\exp_q(x)/\exp_q(y) = \exp_q(x \ominus_q y) \quad (2.48)$$

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y) \quad (2.49)$$

$$\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x - y) \quad (2.50)$$

▪ **Propiedades del álgebra para  $\ln_q(x)$**

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) \oplus_q \ln_q(y) \quad (2.51)$$

$$\ln_q(x/y) = \ln_q(x) \ominus_q \ln_q(y) \quad (2.52)$$

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y) \quad (2.53)$$

$$\ln_q(x \oslash_q y) = \ln_q(x) - \ln_q(y) \quad (2.54)$$

### 2.1.3. Otras Generalizaciones

En vista de que existen varias expresiones matemáticas de uso común que pueden ser escritas en términos de la función exponencial, parece claro que una generalización de dichas expresiones puede darse de forma natural, haciendo uso de la función  $exp_q(x)$ . Es este el caso de las funciones trigonométricas, hiperbólicas, la transformada de Laplace, o las distribuciones gaussianas. A continuación se presentan de forma sucinta algunas de estas posibles generalizaciones. Para más detalles consúltese [26] o [10].

#### $q$ -trigonométricas

Sea  $q \in \mathbb{R}$ , y considérese la expresión:

$$Q_n(q) = q(2q - 1)(3q - 2) \cdots (nq - (n - 1)) = \prod_{i=1}^n (iq - (i - 1)) \quad (2.55)$$

y  $Q_0(q) = 1$ . Se tiene así la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.9.** *Sea  $exp_q(x)$  definida como antes, entonces:*

$$\frac{d^n}{dx^n} [exp_q(x)] = Q_{n-1}(q) [exp_q(x)]^{(nq - (n-1))} \quad (2.56)$$

*Demostración.* como ya se mostró en la fórmula (2.29), se tiene:

$$\frac{d}{dx} [exp_q(x)] = (exp_q(x))^q \quad (2.57)$$

Por otro lado, si para  $n = k$

$$\frac{d^k}{dx^k} [exp_q(x)] = Q_{k-1}(q) [exp_q(x)]^{(kq - (k-1))} \quad (2.58)$$

entonces, para  $n = k + 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} [exp_q(x)] &= (kq - (k - 1)) Q_{k-1}(q) [exp_q(x)]^{(kq - k)} (exp_q(x))^q \\ &= Q_k(q) [exp_q(x)]^{(q(k+1) - ((k+1) - 1))} \\ &= Q_{n-1}(q) [exp_q(x)]^{(nq - (n-1))}. \end{aligned}$$

□

Ahora, si se considera la serie de Taylor al rededor de  $x = 0$  para  $f(x) = exp_q(x)$  se tiene:

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots &= exp_q(0) + \frac{d}{dx} [exp_q(x)] \Big|_{x=0} x + \frac{d^2}{dx^2} [exp_q(x)] \Big|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ &= 1 + x + q \frac{x^2}{2!} + q(2q - 1) \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Esta serie converge para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Así pues, la expresión en serie de Taylor para  $exp_q(x)$  viene dada por:

$$exp_q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1} \frac{x^n}{n!} \quad (2.59)$$

Teniendo en cuenta las series de Taylor para  $e^x$ ,  $sen(x)$  y  $cos(x)$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

entonces, la expresión (2.59) sugiere una generalización natural para las funciones trigonométricas en términos del parámetro  $q$ . De acuerdo con (2.59), las  $q$ -trigonométricas  $sen_q(x)$  y  $cos_q(x)$  están dadas por:

$$sen_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.60)$$

$$cos_q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.61)$$

Las cuales convergen para  $x < |1 - q|^{-1}$ . Nótese que con las definiciones anteriores se cumple la conocida identidad de Euler:

$$exp_q(ix) = cos_q(x) + isen_q(x) \quad (2.62)$$

Ahora puede probarse la siguiente caracterización de las funciones  $q$ -trigonométricas en términos de las funciones trigonométricas usuales

**Proposición 2.1.10.** *Las funciones  $sen_q(x)$  y  $cos_q(x)$  se pueden escribir, respectivamente, en términos de las funciones  $sen(x)$  y  $cos(x)$  como:*

$$sen_q(x) = \rho_q(x) sen(\theta_q(x)) \quad (2.63)$$

$$cos_q(x) = \rho_q(x) cos(\theta_q(x)) \quad (2.64)$$

Donde:

$$\rho_q(x) = \sqrt{(1 + (1 - q)^2 x^2)^{1/(1-q)}} = [exp_q((1 - q)x^2)]^{1/2} \quad (2.65)$$

$$\theta_q(x) = \frac{\arctan((1 - q)x)}{1 - q} \quad (2.66)$$

*Demostración.* En primer lugar, obsérvese que  $exp_q(x)$  puede escribirse en términos de  $exp(x)$  y  $ln(x)$  como:

$$exp_q(x) = exp\left(\frac{ln(1 + (1 - q)x)}{1 - q}\right) \quad (2.67)$$

Por otro lado, si  $z = a + bi$ , entonces:

$$z = |z| e^{i\phi} \quad (2.68)$$

Donde

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.69)$$

y

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2.70)$$

Así, una expresión para  $\ln(z)$  está dada por:

$$\ln(z) = \ln|z| + i\phi \quad (2.71)$$

Considérese ahora la expresión  $\exp_q(ix)$ . Utilizando (2.67) se puede escribir:

$$\exp_q(ix) = \exp\left(\frac{\ln(1 + (1 - q)xi)}{1 - q}\right) \quad (2.72)$$

Sea  $z = 1 + (1 - q)xi$ , entonces, de (2.71) y (2.72) se tiene:

$$\exp_q(ix) = \exp\left(\frac{\ln|z|}{1 - q} + \frac{i\phi}{1 - q}\right) = |z|^{\frac{1}{1-q}} \exp\left(i\frac{\phi}{1 - q}\right) \quad (2.73)$$

Si se reemplazan (2.65),(2.66),(2.69) y (2.70) en (2.73) se tiene:

$$\exp_q(ix) = \rho_q(x) \exp(i\theta_q(x)) \quad (2.74)$$

Aplicando la identidad de Euler a ambos lados de (2.74) se llega a:

$$\cos_q(x) + i\operatorname{sen}_q(x) = \rho_q(x)(\cos(\theta_q(x)) + i\operatorname{sen}(\theta_q(x))) = \rho_q(x)\cos(\theta_q(x)) + i\rho_q(x)\operatorname{sen}(\theta_q(x)) \quad (2.75)$$

Igualando las partes real e imaginaria en (2.75) se termina la prueba.  $\square$

Las funciones  $q$ -trigonométricas restantes se definen siguiendo la forma usual. Por ejemplo, para el caso de  $\tan_q(x)$  se tiene:

$$\tan_q(x) = \frac{\operatorname{sen}_q(x)}{\cos_q(x)} = \tan(\theta_q(x))$$

Por otro lado, es posible mostrar que las propiedades más relevantes de las funciones circulares usuales tienen propiedades correspondientes para las  $q$  generalizadas, las cuales recuperan a las primeras cuando  $q \rightarrow 1$ . Algunas de ellas:

1. Teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}_q(x) + \cos_q(x) = \rho_q^2(x)$$

2.  $x \sim \operatorname{sen}_q(x)$  para  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}_q(x)}{x} = 1$$

3. Derivada de  $\operatorname{sen}_q(x)$ :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}_q(x) = \cos_{2-1/q}(qx)$$

4. Derivada  $\cos_q(x)$ :

$$\frac{d}{dx}\cos_q(x) = -\operatorname{sen}_{2-1/q}(qx)$$

5. Fórmula de De Moivre:

$$(\cos_q \pm i\operatorname{sen}_q)^n = \cos_{1-(1-q)/n}(nx) \pm \operatorname{sen}_{1-(1-q)/n}(nx)$$

6. Definición de las trigonométricas en términos de exponencial (forma alterna de la identidad de Euler):

$$\cos_q(x) = \frac{\exp_q(ix) + \exp_q(-ix)}{2}$$

$$\operatorname{sen}_q(x) = \frac{\exp_q(ix) - \exp_q(-ix)}{2}$$

### $q$ -hiperbólicas

Los resultados obtenidos en las generalizaciones anteriores para el caso de las funciones  $q$ -exponencial,  $q$ -logarítmica y  $q$ -trigonométricas permiten realizar de forma natural la extensión a las funciones hiperbólicas mediante las expresiones:

$$\operatorname{senh}_q(x) = \frac{\exp_q(x) - \exp_q(-x)}{2} \quad (2.76)$$

$$\operatorname{cosh}_q(x) = \frac{\exp_q(x) + \exp_q(-x)}{2} \quad (2.77)$$

A partir de las definiciones dadas por (2.76) y (2.77) se tiene la expresión para  $\operatorname{tanh}_q(x)$  dada por:

$$\operatorname{tanh}_q(x) = \frac{\operatorname{senh}_q(x)}{\operatorname{cosh}_q(x)} \quad (2.78)$$

Por otro lado, es fácil probar que las siguientes propiedades se cumplen:

1. Teorema de Pitágoras para hiperbólicas:

$$\operatorname{cosh}_q^2(x) + \operatorname{senh}_q^2(x) = \exp_q(x)\exp_q(-x)$$

2. Fórmula de De Moivre:

$$(\operatorname{cosh}_q(x) + \operatorname{senh}_q(x))^n = \operatorname{cosh}_{1-(1-q)/n}(nx) + \operatorname{senh}_{1-(1-q)/n}(nx)$$

3. Derivada de  $\operatorname{senh}_q(x)$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}_q(x)] = \operatorname{cosh}_{2-(1/q)}(x)$$

4. Derivada de  $\operatorname{cosh}_q(x)$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosh}_q(x)] = \operatorname{senh}_{2-(1/q)}(x)$$

### $q$ -Transformada de Laplace

La definición usual de transformada de Laplace para una variable de valor real no negativo  $f(t)$  está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)\exp_1(-st)dt$$

Pueden darse tres maneras de generalización de la transformada de Laplace utilizando  $q$ -exponenciales, dependiendo de las sustituciones posibles para  $\exp_1(-st)$  dadas por:

1.  $\exp_q(-st)$
2.  $(\exp_q t)^s$
3.  $(\exp_q t)^{-s}$

Todas las posibilidades anteriores recuperan la transformada usual cuando  $q \rightarrow 1$ . Se sigue aquí la propuesta de [10], por lo cual se escogerá la opción 2 para la generalización buscada.

**Definición 2.1.1.** La  $q$ -transformada de Laplace para una función  $f(t)$ , con  $t \geq 0$ , está dada por la función

$$F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)[\exp_q(-t)]^s dt \quad (2.79)$$

Donde  $s = \alpha + \beta i$  es un número complejo.

Para proceder con la generalización dada por (2.79) son necesarias las dos definiciones siguientes:

**Definición 2.1.2.** Sea  $f(t)$  una función definida en el intervalo  $[a, \infty)$ . Se dice que  $f(t)$  es de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$ , con  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ , si existe  $M \in \mathbb{R}$ , tal que  $|[\exp_q(-t)]^{\alpha_0} f(t)| \leq M$

**Definición 2.1.3.** Se dice que una función  $f(t)$  definida para todo  $t \in [a, \infty)$  es continua por trozos en  $(a, \infty)$  si para todo intervalo finito  $[a, b]$  se cumple que:

1.  $f(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en  $[a, b]$ .
2. En cada punto  $t_0$  donde  $f(t)$  presenta discontinuidad

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

existen, y se dirá que en  $t_0$   $f(t)$  presenta discontinuidad finita.

Ahora puede probarse la siguiente proposición, la cual establece condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace.

**Proposición 2.1.11.** Sea  $f(t)$  continua a trozos y de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$  para  $0 \leq t < \infty$ . Entonces,  $F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\}$  ( $s = \alpha + \beta i$ ) existe para  $\alpha > \alpha_0 + (q - 1)$

*Demostración.* Para empezar, considérese la función

$$\begin{aligned} F_{(q,T)}(s) &= \int_0^T [\exp_q(-t)]^s |f(t)| dt \\ &= \int_0^T [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que  $f(t)$  es continua por trozos en  $[0, \infty)$ ,  $f(t)$  tiene un número finito  $m$  de discontinuidades en el intervalo  $[0, T]$ . Sean  $t_1, t_2, \dots, t_m$  los valores de  $t$  donde se presentan tales discontinuidades; sea además  $t_0 = 0$ . Entonces, la última de las integrales puede escribirse como:

$$\int_0^T \left| [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} \right| |f(t)| dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt + \int_{t_m}^T [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt \quad (2.80)$$

Por otro lado, como  $f(t)$  es de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$ , existe  $M > 0$  tal que:

$$|f(t)| \leq M[\exp(-t)]^{-\alpha_0} = M[1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha_0}{q-1}} \quad (2.81)$$

Al reemplazar (2.81) en (2.80) se tiene:

$$\int_0^T \left| [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} \right| |f(t)| dt \leq \sum_{i=0}^{m-1} M \int_{t_i}^{t_{i+1}} [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha-\alpha_0}{q-1}} dt + M \int_{t_m}^T [1 - (1-q)t]^{-\frac{\alpha-\alpha_0}{q-1}} dt \quad (2.82)$$

Ahora, después de resolver las integrales del lado derecho de (2.82) y agrupar términos semejantes, se llega a:

$$F_{(q,T)}(s) \leq \frac{M}{\alpha - \alpha_0 + (1-q)} \left[ 1 - (1 - (1-q)T)^{1 - \frac{\alpha-\alpha_0}{q-1}} \right] \quad (2.83)$$

Además, dado que  $1 - \frac{\alpha-\alpha_0}{q-1} < 0$ , pues por hipótesis  $\alpha > \alpha_0 + (q-1)$ , se concluye que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1 - (1-q)T)^{1 - \frac{\alpha-\alpha_0}{q-1}} = 0 \quad (2.84)$$

Pero por otro lado:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_{(q,T)}(s) = F_q(s) \quad (2.85)$$

Con lo cual, si se consideran (2.83), (2.84) y (2.85), entonces:

$$F_q(s) \leq \frac{M}{\alpha - \alpha_0 + (1-q)}$$

Con lo cual queda probada la existencia de  $F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\}$ .  $\square$

Al igual que en los casos anteriores, la generalización propuesta para la transformada de Laplace a partir de la función  $\exp_q(x)$  permite definir propiedades para  $F_q(s)$  que se reducen a las propiedades usuales de  $F(s)$  cuando  $q \rightarrow 1$ . Algunas de estas propiedades se presentan a continuación. Los detalles de la prueba para cada propiedad pueden consultarse en [10].

### Propiedades de la $q$ -transformada

1. La inversa de  $F_q(s)$  está dada por la función:

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_q(s) [\exp_q(-t)]^{-s-(1-q)} ds$$

Donde  $c$  es una constante real que supera a la parte real de todas las singularidades de  $F_q(s)$ . De la definición de  $\mathcal{L}_q^{-1}F_q(s)$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{\mathcal{L}_q\{f(t)\}\} = f(t) \quad y \quad \mathcal{L}_q\{\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\}\} = F_q(s)$$

2. Valores límite:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad y \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - (1 - q)t]f(t)$$

3. Linealidad:

$$\mathcal{L}_q\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}_q\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}_q\{f_2(t)\}$$

4. Cambio de escala:

$$\mathcal{L}_q\{f(at)\} = \frac{1}{a} F_{q'}\left\{\frac{s}{a}\right\}, \quad \text{con} \quad q' = 1 - \frac{1 - q}{a}$$

5. Primera propiedad de traslación (traslación en  $s$ ):

$$\mathcal{L}_q\{[exp_q(-t)]^{-s_0} f(t)\} = F_q(s - s_0)$$

6. Segunda propiedad de traslación (traslación en  $t$ ):

$$\mathcal{L}_q\left\{f\left(\frac{t - t_0}{1 - (1 - q)t_0}\right) u\left(\frac{t - t_0}{1 - (1 - q)t_0}\right)\right\} = [exp_q(-t_0)]^{s - (1 - q)} F_q(s)$$

Donde  $u(t)$  es la función escalón unitario de Heaviside definida por:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

7.  $q$ -transformada de derivadas (orden 1 y 2)

$$\mathcal{L}_q\{f'(t)\} = s \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{1 - (1 - q)t}\right\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}_q\{f''(t)\} = s(s - (1 - q)) \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{[1 - (1 - q)t]^2}\right\} - f'(0) - sf(0)$$

8. Derivada de  $q$ -transformada:

$$F_q'(s) = \mathcal{L}_q\{[\ln(exp_q(-t))]f(t)\}$$

$$F_q^{(n)}(s) = \mathcal{L}_q\{[\ln^n(exp_q(-t))]f(t)\}$$

9.  $q$ -transformada de la integral:

$$\mathcal{L}_q\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s - (q - 1)} \mathcal{L}_q\{(1 - (1 - q)t)f(t)\}$$

10. Integral de la  $q$ -transformada

$$\int_s^\infty F_q(u)du = \mathcal{L}_q\left\{\frac{-f(t)}{\ln[exp_q(-t)]}\right\}$$

$$\int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F_q(u)du^n = \mathcal{L}_q\left\{\frac{(-1)^n f(t)}{\ln^n[exp_q(-t)]}\right\}$$

Otras propiedades importantes de la  $q$ -transformada pueden obtenerse a partir de la generalización de la convolución de dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ . La  $q$ -convolución propuesta por Tsallis y Prato [10] está dada por:

$$(f *_q g)(t) = \int_0^t f\left(\frac{t-\tau}{1-(1-q)\tau}\right) \frac{g(\tau)}{1-(1-q)\tau} d\tau \quad (2.86)$$

A partir de (2.86) se tienen las siguientes propiedades:

1. Asociativa:

$$[f *_q (g *_q h)](t) = [(f *_q g) *_q h](t)$$

2. Conmutativa:

$$(f *_q g)(t) = (g *_q f)(t)$$

3. Múltiplo escalar:

$$(c_1 f *_q g)(t) = c_1 (f *_q g)(t) \quad y \quad (f *_q c_2 g)(t) = c_2 (f *_q g)(t)$$

4. Distributiva:

$$[f *_q (g + h)](t) = (f *_q g)(t) + (f *_q h)(t)$$

5.  $q$ -transformada de la convolución

$$\mathcal{L}_q\{(f *_q g)(t)\} = \mathcal{L}_q\{f(t)\}\mathcal{L}_q\{g(t)\}$$

### $q$ -Gaussianas

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones de probabilidad con mayores aplicaciones, tanto en el desarrollo del conocimiento matemático, como en diversas áreas de las ciencias básicas y humanas. Para una variable aleatoria  $X$  que distribuya normal, dicha distribución está definida mediante la expresión:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

donde, como es habitual,  $\mu$  representa el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , y  $\sigma$  el valor de la desviación estándar. Naudts [14] propone una generalización de la distribución gaussiana; la propuesta de Naudts se apoya en trabajos anteriores de Tsallis, Plastino, Moyano y Hilhors; para el estudio detallado de la  $q$ -generalización de la distribución gaussiana y del teorema del límite central ver [26]. La generalización propuesta por Naudts [14] para la función gaussiana está dada por la distribución  $q$ -gaussiana:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right) dt \quad \text{con} \quad q < 3. \quad (2.87)$$

La función de densidad de probabilidad asociada a esta distribución puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-x^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.88)$$

Donde  $c_q$  está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp_q(-x^2) \quad (2.89)$$

Al resolver la integral en (2.89) se tiene:

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{q-1}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \quad \text{para } 1 < q < 3 \quad (2.90)$$

y

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)} \quad \text{para } q < 1. \quad (2.91)$$

Para el caso de la termoestadística generalizada, la densidad de probabilidad que optimiza la entropía se escribe como:

$$f_\beta(x) = c(x) \exp_q(-\alpha(\beta) - \beta H(x)), \quad (2.92)$$

donde  $H(x)$  representa el hamiltoniano de la energía,  $\beta$  es un parámetro que depende del inverso de la temperatura  $\frac{1}{T}$  y  $\alpha(\beta)$  es un parámetro que se obtiene del proceso de optimización por multiplicadores de Lagrange. Para obtener la forma  $q$ -gausiana para (2.92) se realizan las sustituciones:

$$c(x) = \frac{1}{c_q}; \quad H(x) = x^2; \quad \beta = \sigma^{3-q}; \quad \alpha(\beta) = \ln_{2-q}(\sigma)$$

Es claro que para  $q = 1$  se obtiene la distribución normal estándar. Un camino un poco más general, aunque equivalente, es abordado por Moyano [26]. En este caso (2.92) se escribe como:

$$f(x) = \mathcal{A}_q [1 + (q-1)\mathcal{B}_q(x - \mu_q)^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad \text{para } q < 3, \quad (2.93)$$

donde la media generalizada  $\mu_q$  puede escribirse, en términos de la densidad de probabilidad

$$P(x) = \frac{p(x)^q}{\int_{\Gamma} [p(x)]^q dx}, \quad (2.94)$$

como:

$$\mu_q = \int_{\Gamma} x P(x) dx. \quad (2.95)$$

Las probabilidades  $P(x)$  son conocidas como *probabilidades escort* y son propuestas por Tsallis en el proceso de optimización de la entropía para el ensamble canónico. Como es usual  $\Gamma$  es el espacio de fase correspondiente al sistema y  $p(x)$  la densidad de probabilidad para los diferentes estados del sistema.

Además:

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } 1 < q < 3 \quad (2.96)$$

y

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } q < 1, \quad (2.97)$$

con:

$$\mathcal{B}_q = [(3 - q)\sigma_q^2]^{-1} = [(5 - 3q)\sigma^2]^{-1}, \quad (2.98)$$

donde la varianza  $\sigma_q$  generalizada se relaciona con la varianza usual mediante la expresión:

$$\sigma_q^2 = \frac{5 - 3q}{3 - q}\sigma^2.$$

Finalmente, (2.93) puede escribirse como la  $q$ -gaussiana:

$$f(x) = \mathcal{A}_q \exp_q(-\mathcal{B}_q(x - \mu_q)^2) \quad (2.99)$$

### 2.1.4. $\phi$ -logarítmica y $\phi$ -exponencial

Recientemente Naudts [13] ha propuesto una familia de funciones exponenciales y logarítmicas deformadas, denominadas  $\phi$ -deformadas, las cuales están dadas, ya no en términos de un parámetro fijo  $q$ , sino de una función  $\phi(u)$  positiva no decreciente, definida para  $u \geq 0$ . A continuación se define dicha familia:

**Definición 2.1.4.** *Sea  $\phi$  una función creciente en  $[0, \infty)$ , estrictamente positiva en  $(0, \infty)$ . La función  $\ln_\phi$  se define como:*

$$\ln_\phi(u) = \int_1^u \frac{dv}{\phi(v)}, \quad u > 0$$

$\ln_\phi$  es una función cóncava, negativa en  $(0, 1)$  y positiva en  $(1, \infty)$ . La función inversa se denota por  $\exp_\phi$ . Esta función se define de forma similar a como se definió la función  $\exp_\kappa(x)$  en términos de la  $\ln_\kappa(x)$ . Dada  $\phi$  como arriba, se introduce la función  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  por:

$$\psi(u) = \begin{cases} \phi(\exp_\phi(u)), & \text{si } u \text{ está en el rango de } \ln_\phi, \\ 0, & \text{si } u < \ln_\phi(y) \text{ para todo } y > 0, \\ +\infty, & \text{si } u > \ln_\phi(y) \text{ para todo } y > 0. \end{cases}$$

Claramente  $\phi(u) = \psi(\ln_\phi(u))$  para todo  $u > 0$ . Una propiedad de gran utilidad que puede probarse para la función  $\exp_\phi(u)$ , viene dada por:

$$\frac{d}{du} \exp_\phi(u) = \phi(\exp_\phi(u)). \quad (2.100)$$

## 2.2. Termoestadística Generalizada

Si bien la propuesta de Boltzmann-Gibbs ha mostrado efectividad, su uso se restringe a los sistemas conocidos como aditivos o extensivos; tales sistemas son aquellos que cumplen la propiedad de aditividad  $S(A + B) = S(A) + S(B)$ , donde A y B son dos sistemas independientes en el sentido probabilístico. Para sistemas no extensivos, es necesario generalizar la entropía de forma tal que se cubran los casos subaditivos o superaditivos. En este sentido, la termoestadística no extensiva es considerada como un nuevo paradigma en mecánica estadística.

### 2.2.1. Termoestadística clásica

#### Consideraciones cualitativas de tipo macroscópico

El estudio de los procesos termodinámicos se inició analizando la relación entre variables extensivas e intensivas de sistemas sujetos a transferencias de calor y cambios de temperatura, desde un punto de vista macroscópico; las variables extensivas son entendidas como cantidades globales y que dependen de la cantidad de materia que se considere, teniendo presente que para dos sistemas simples independientes  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  que componen un sistema más complejo  $\Gamma$ , la variable extensiva  $A$ , asociada al sistema  $\Gamma$  es tal que, si  $A_1$  y  $A_2$  representan la misma variable en los sistemas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, entonces se cumple que:

$$A = A_1 + A_2$$

Las variables intensivas son variables de tipo local, y su valor es el mismo en cualquier región del sistema  $\Gamma$ . Así, dada la variable intensiva  $B$  para el sistema anterior, con las correspondientes  $B_1$  y  $B_2$  asociadas a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente ( $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como antes), entonces se cumple que:

$$B = B_1 = B_2$$

Ejemplos de variables extensivas son el volumen o el número de moléculas; en tanto que la temperatura o la presión son ejemplos de variables intensivas.

Un tipo de variable que aparece en los procesos termodinámicos y cuya clasificación no está dada dentro de los dos tipos arriba mencionados, es la conjugada, la cual está definida en términos de una variable extensiva y una intensiva. Tal es el caso de la energía en forma de trabajo para el caso de un gas ideal, la cual, en términos diferenciales, puede escribirse como:

$$dE = PdV$$

Donde  $P$ , es la presión (intensiva), y  $dV$  el diferencial de volumen (extensiva).

Se considera como sistema de estudio termodinámico o simplemente sistema termodinámico, a un sistema rodeado de un entorno; sistema y entorno están separados por una superficie que puede o no permitir el paso tanto de energía como de materia. En el primero de los casos el sistema se denomina abierto y en el segundo cerrado. La materia estará determinada por el número de partículas de la misma, número que será representado en general para sistemas discretos y cerrados por  $N$  (o  $n$  si se toma el número de moles). Además, un sistema cerrado puede estar compuesto por sistemas internos e independientes, los cuales se denominan sistemas simples. El caso usual que ilustra esta situación es la de un gas confinado en un recipiente con una pared móvil interna. Si bien el gas dentro del recipiente representa como tal un sistema cerrado, cada una de las regiones en que se divide el recipiente, debido a la presencia de la pared interna, es a su vez un sistema cerrado. En tal caso, se representa por  $N_i$  el número de moléculas del  $i$ -ésimo sistema simple, con  $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , de los  $n$  sistemas simples que componen el sistema cerrado. Un sistema compuesto por sistemas simples se denomina sistema complejo. El objetivo principal de la termodinámica será determinar el estado o estados de equilibrio de un sistema cerrado. Retomando el caso del gas confinado en un recipiente con pared móvil interna, se busca establecer las condiciones bajo las cuales la pared no se movería. Si al llegar a este estado se modifican las condiciones del gas en uno o ambos lados de la pared, es de suponer que la pared comenzará a moverse. Por ejemplo, si se representa como antes el sistema total por  $\Gamma$ , y cada uno de los sistemas simples por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , y se tiene el sistema en equilibrio, intuitivamente puede

concluirse que un aumento de gas en el sistema  $\Gamma_1$  hará que la pared se mueva, y encuentre el equilibrio en un punto tal que el volumen correspondiente a  $\Gamma_1$  aumente respecto al volumen que tenía antes de que ingresara gas en dicho sistema. La pregunta sería en tal caso, ¿cuáles serán los valores de los volúmenes finales de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ? Los principios y relaciones que permiten dar respuesta a esta pregunta, y en términos generales, caracterizar las relaciones entre las variables termodinámicas extensivas, intensivas y conjugadas, se exponen a continuación.

**Postulado 1.** *Sea  $\Gamma$  un sistema termodinámico, entonces, cualquier estado de equilibrio de  $\Gamma$  se puede caracterizar completamente por el conjunto  $\{U, V, N_i\}$ , donde  $U$  representa la energía interna del sistema,  $V$  el volumen y  $N_i$  el número de moléculas.*

*Observación 6.* En algunos sistemas, el volumen  $V$  puede ser sustituido por otra variable macroscópica, tal como la polarización eléctrica  $\mathcal{P}$  o el momento magnético  $\mathcal{M}$

**Postulado 2.** *Sea  $\Gamma$  un sistema compuesto por  $k$  sistemas simples. Entonces, existe una función llamada entropía  $S$ , la cual se maximiza cuando el sistema llega al equilibrio.*

Los postulados 1 y 2 establecen que  $S = S(U, V, N_i)$

**Postulado 3.** *La entropía  $S$  para un sistema compuesto  $\Gamma$  es aditiva; además es continua, monótona creciente y diferenciable respecto a  $U$*

El postulado 3 establece que  $S$  es extensiva, y además que:

$$\frac{\partial S}{\partial U} > 0 \quad (2.101)$$

forma equivalente de la segunda ley de la termodinámica, la cual a su vez sirve para caracterizar los procesos reversibles y los irreversibles; Así mismo, establece la imposibilidad de un móvil perpetuo.

**Postulado 4.** *La entropía  $S$  para cualquier sistema  $\Gamma$  se anula cuando  $T = 0$*

El postulado 4 es una forma equivalente de la tercera ley de la termodinámica, la cual establece la imposibilidad de que la temperatura pueda llegar al cero absoluto.

Algunas relaciones matemáticas que pueden obtenerse a partir de consideraciones macroscópicas de las variables que se relacionan y de los principios anteriores, se muestran a continuación. Dentro de ellas se destacan las ecuaciones de estado, las cuales se obtienen de los principios 1 y 2, de donde, como ya se mencionó  $S = S(U, V, n_i)$  o lo que es equivalente  $U = U(S, V, n_i)$ . Es de anotar que un sistema termodinámico queda plenamente determinado por las tres ecuaciones de estado que se obtienen a partir de las relaciones mencionadas.

1. Principio de conservación de energía:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (2.102)$$

Donde el símbolo  $\delta$  hace referencia a que el diferencial imperfecto depende del camino que se tome para medir el cambio infinitesimal.

2. Si  $\Gamma$  es un sistema compuesto por los dos sistemas simples  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , entonces:

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2} \quad (2.103)$$

3. La expresión diferencial de  $U$ , en términos de  $S, V, n_i$  permite definir los parámetros intensivos asociados a  $U$  como sigue:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV + \sum_{i=1}^k \frac{\partial U}{\partial n_i} dn_i \quad (2.104)$$

Se tiene de (2.104) las siguientes asignaciones, conocidas como *ecuaciones de estado*:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T; \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P; \quad \frac{\partial U}{\partial n_i} = \mu_i$$

Donde, como es usual,  $T$  es la temperatura,  $P$  la presión, y  $\mu_i$  están relacionadas al potencial químico asociado a cambios en el número de moléculas o moles.

4. Las *ecuaciones de estado* también pueden darse en términos de la energía  $U$ . Si se considera la forma diferencial:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial U} dU + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial n_i} dn_i \quad (2.105)$$

entonces de (2.105) las *ecuaciones de estado* están dadas por:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}; \quad \frac{\partial S}{\partial V} = -\frac{P}{T}; \quad \frac{\partial S}{\partial n_i} = \frac{\mu_i}{T}$$

5. Relación calor/entropía sin variación de materia (moles constantes):

$$TdS = \delta Q \quad (2.106)$$

Esta relación establece el aumento de entropía debido al flujo de calor hacia el interior del sistema.

6. Energías libres

$$\text{Energía Libre de Helmholtz} \quad F = U - TS \quad (2.107)$$

$$\text{Entalpía} \quad H = U + PV \quad (2.108)$$

$$\text{Energía Libre de Gibbs} \quad F = U - TS + PV \quad (2.109)$$

*Observación 7.* En las expresiones (2.107), (2.108) y (2.109) se han utilizado las transformaciones de Legendre, según las cuales, dada una relación  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_j)$ , se tiene la asignación

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si se desea escribir la relación  $f$  en términos de las  $y_i$ , es preciso realizar un proceso de integración para despejar a  $x_i$  en términos de  $y_i$ . Si se toma el proceso respecto a una sola variable, lo que se tiene es  $y = \frac{\partial f}{\partial x}$ . En tal caso, en el proceso de integración aparece una constante  $c(y)$  (el hecho de escribir  $c(y)$  obedece a que en realidad  $x$  y  $y$  se consideran independientes, mientras que  $c$  depende de  $y$ ). El número  $y$  estaría caracterizando la pendiente de una recta tangente a la curva definida por  $(x, f(x))$  con intercepto  $c$  en el eje  $f(x)$ . Por tanto, es posible escribir:

$$y = \frac{f(x) - c(y)}{x - 0}$$

Con lo cual:

$$c(y) = f(y) - xy \quad (2.110)$$

Al pasar a varias variables, la relación correspondiente estaría dada por:

$$c(y) = f - \sum_{i=1}^j x_i y_i \quad (2.111)$$

Y por tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i \quad y \quad \frac{\partial c}{\partial y_i} = -x_i$$

Las transformaciones de Legendre que se utilizaron fueron:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \rightarrow S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad \text{en (2.107)} \quad (2.112)$$

$$-P = \frac{\partial U}{\partial V} \rightarrow V = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \text{en (2.108)} \quad (2.113)$$

En (2.109) se utilizaron simultáneamente (2.112) y (2.113)

### La propuesta Boltzmann-Gibbs

Las relaciones anteriores hacen referencia a la descripción macroscópica de un sistema termodinámico. Sin embargo, la descripción de los estados de equilibrio fue complementada por los trabajos de Boltzmann y Gibbs, quienes en forma independiente, trabajaron en un formalismo para describir los procesos termodinámicos desde un punto de vista probabilístico. Dicho trabajo dió origen a lo que hoy se conoce como mecánica estadística, y está basado en la descripción de variables asociadas a las partículas microscópicas que componen el sistema. En tal formalismo, cantidades como la energía o la velocidad son asumidas como variables aleatorias, a las cuales se puede asignar una función de densidad de probabilidad. La descripción de los procesos termodinámicos asume un carácter estadístico en términos de valores esperados y medidas de desviación de dichas variables aleatorias. Los estados de equilibrio se definen ahora en términos de la función de densidad de probabilidad correspondiente a tales estados, para la cual se optimiza la entropía. Dependiendo de las restricciones que se impongan al sistema, se pueden obtener diferentes distribuciones de probabilidad para los estados de equilibrio. Algunos detalles de tal formalismo se exponen a continuación.

Desde el punto de vista clásico, un sistema cerrado compuesto por  $N$  partículas que interactúan puede ser descrito por las ecuaciones de Hamilton, para lo cual se tendrán  $3N$  grados de libertad. El espacio de  $6N$  dimensiones, correspondientes a  $3N$  posiciones y  $3N$  impulsos, se denomina espacio de fase  $\Gamma$  y las diferentes partículas quedan plenamente identificadas (ignorando los grados de libertad referentes a características cuánticas) por las componentes de  $\Gamma$  (aunque el análisis expuesto aquí es discreto, su extensión al caso continuo se hace siguiendo procesos similares). Ahora bien, el estudio de un sistema con tales condiciones siempre traerá consigo un alto grado de incertidumbre, dado que es sumamente complicado establecer con total precisión todas las posibilidades para los microestados en los cuales puede encontrarse el sistema (la dificultad aumenta si se tienen consideraciones cuánticas). La propuesta de Gibbs para sortear tal dificultad, fue la de dividir el sistema en pequeños sistemas con condiciones similares entre sí y a su vez, similares a la del sistema original, distribuidos en los diferentes microestados posibles; a tal conjunto de pequeños sistemas equivalentes Gibbs le dio el nombre de *ensamble*.

Finalmente, si se desea dar una descripción de una característica termodinámica del sistema total, dicha característica se puede aproximar al valor medio de las mediciones de la misma característica tomadas en cada uno de los subsistemas que componen el ensamble. Como en el caso macroscópico, el interés se centra en describir cuál es el estado más probable, de todos los posibles estados que puede tener el sistema bajo condiciones predeterminadas de ligadura, de modo que dicho sistema se encuentre en equilibrio. Bajo esta óptica, la definición de entropía en términos estadísticos está dada por:

$$S = -k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (2.114)$$

Donde  $p_i$  corresponde a la probabilidad de que el sistema, compuesto por  $n$  estados, se encuentre en el estado  $i$  y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. La expresión anterior puede ser interpretada como un promedio, siempre que se tenga

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

lo cual es claro en este contexto, ya que se tiene certeza de que el sistema debe encontrarse en alguno de los  $n$  estados. La restricción anterior es la más simple de las restricciones impuestas al sistema, aunque pueden existir otro tipo de restricciones asociadas a cantidades tales como la energía interna o los intercambios de masa. Dichas restricciones siempre se establecen a priori, pero una vez fijadas todos los análisis posteriores se hacen bajo tales presupuestos. El principio fundamental de la entropía estadística, relacionado con el segundo principio expuesto en la sección precedente, es:

**Principio I:** Bajo las restricciones a priori impuestas a un sistema, la entropía estadística  $S$  siempre alcanza un máximo

Ahora bien, la descripción estadística de los fenómenos termodinámicos debe cubrir los aspectos ya estudiados referentes al análisis macroscópico. En este sentido, el valor óptimo para  $S$  corresponde precisamente al estado o estados en los cuales el sistema se encuentra en equilibrio. El camino para encontrar dichos estados de equilibrio o estados más probables para que el sistema se encuentre en equilibrio, está determinado por el proceso de optimización de  $S$ , proceso que a su vez depende de las condiciones impuestas al sistema. Las restricciones sobre el sistema permiten determinar tres tipos de ensambles diferentes.

### Ensamble Microcanónico

El ensamble microcanónico está asociado a un sistema con  $n$  posibles estados de acceso y la única restricción, impuesta sobre  $\{p_i\}$ , dada por:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.115)$$

Este ensamble corresponde a un sistema cerrado, es decir, sin intercambios de energía ni de masa con el medio en el que se encuentra. Al aplicar el principio variacional sobre  $S$ , con la restricción dada por (2.115), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[ -k \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + \alpha \sum_{i=1}^n p_i \right] = 0$$

O en forma equivalente, teniendo en cuenta que la igualdad se cumple para cada  $p_i$ :

$$k \ln p_i = (\alpha - k)$$

Despejando  $p_i$  se tiene:

$$p_i = e^{\frac{\alpha}{k} - 1}$$

Dado que tanto  $\alpha$  como  $k$  son constantes, se encuentra así la conocida expresión:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad (2.116)$$

Y por tanto,  $S$  se reduce a la célebre fórmula que aparece como epitafio de Boltzmann:

$$S = k \ln(n) \quad (2.117)$$

### Ensamble Canónico

El ensamble canónico corresponde a un sistema en un baño térmico, es decir, aunque el sistema se encuentra aislado en términos de la imposibilidad de intercambiar partículas con el medio, puede haber transferencias de energía con el mismo. En el ensamble canónico, además de la restricción dada por (2.115), se tiene una segunda restricción, la cual se establece sobre la energía interna del sistema. Según tal condición se debe tener:

$$\langle U \rangle = \sum_{i=1}^n e_i p_i \quad (2.118)$$

Donde  $\langle U \rangle$  es la energía interna media del sistema, y los  $e_i$  corresponden a la energía en el nivel  $i$ . De nuevo el método de multiplicadores de Lagrange se utilizó para optimizar  $S$  y obtener la densidad de probabilidad para el estado de equilibrio. Por el principio variacional se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[ -k \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + \alpha \sum_{i=1}^n p_i + \beta \sum_{i=1}^w e_i p_i \right] = 0$$

En este caso se llega a:

$$p_i = \frac{\exp(-\beta e_i)}{Z(\beta)} \quad (2.119)$$

con  $Z$ , la función de partición con la cual se normaliza  $p_i$ , dada por  $Z = \sum_{i=1}^n \exp(-\beta e_i)$ , y el multiplicador de Lagrange  $\beta = \frac{1}{kT}$ , con  $T$  la temperatura.

### Ensamble Gran Canónico

El último de los ensambles considerados dentro de la teoría de la mecánica estadística clásica es el Gran Canónico. Se supone que en tal caso el sistema puede intercambiar tanto moléculas como energía con el entorno. En este caso, además de las restricciones sobre la familia  $\{p_i\}$  y sobre la energía representada por el conjunto  $\{e_i\}$ , se debe tener una condición restrictiva sobre el número de moléculas presentes en el sistema. Así, la tercera restricción para el ensamble Gran Canónico está dada por:

$$\langle N \rangle = \sum_{i=1}^n N_i p_i \quad (2.120)$$

Donde  $\langle N \rangle$  representa el número promedio de partículas en el sistema y  $N_i$  el número de partículas en el sistema  $i$  del ensamble. De nuevo al aplicar el principio variacional:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[ -k \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + \alpha \sum_{i=1}^n p_i + \beta \sum_{i=1}^n e_i p_i + \lambda \sum_{i=1}^n N_i p_i \right] = 0$$

Y en tal caso, identificando  $\beta = \frac{1}{kT}$  y  $\lambda = \frac{\mu}{kT}$ , donde  $T$  es la temperatura y  $\mu$  está asociado al potencial químico en relación con el cambio de moléculas,  $p_i$  se puede escribir como:

$$p_i = \frac{\exp(-\beta(e_i - \mu N_i))}{Z} \quad (2.121)$$

En este caso, la función de partición  $Z$  está dada por:

$$Z = \sum_{i=1}^n \exp(-\beta(e_i - \mu N_i))$$

Este formalismo cumple los postulados en la sección anterior.

### 2.2.2. Formalismo de Naudts

Como acaba de exponerse en las secciones anteriores, en la termoestadística clásica, la entropía de un sistema está dada por la conocida expresión:

$$S = -k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

o en forma equivalente:

$$S = k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln \left( \frac{1}{p_i} \right),$$

En este caso, el principio de máxima entropía establece que bajo la única restricción  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , la densidad de estados que optimiza la entropía estará dada por:

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.122)$$

y si, además, se tiene en cuenta la restricción para la energía del sistema, dada por la relación  $\langle E \rangle = \sum_{i=1}^n e_i p_i$ , con  $e_i$  asociado al valor de la energía en el estado  $i$ , entonces, la distribución de probabilidad asociada a la entropía máxima estará dada por:

$$p_i = \frac{\exp(-\beta e_i)}{Z(E)} \quad \text{donde} \quad Z(E) = \sum_{i=1}^n \exp(-\beta e_i). \quad (2.123)$$

Como es usual, el parámetro  $\beta$  está dado por el recíproco de la temperatura  $1/T$ , donde por simplicidad, se ha tomado  $k_B = 1$ , con las respectivas unidades de energía. En el caso continuo, la entropía puede definirse como:

$$S(p) = \int_{\Gamma} p(E) \ln \left( \frac{1}{p(E)} \right) d\mu, \quad (2.124)$$

donde  $p(E)$  representa la distribución de probabilidad de la energía  $E$  para un sistema en un estado de fase  $\Gamma$  y  $d\mu = \rho(E)dE$ , con  $\rho$  la densidad de estados asociada al sistema en  $\Gamma$ . La densidad de probabilidad asociada a la máxima entropía, bajo las restricciones  $\int_{\Gamma} p(E)d\mu = 1$  y  $\langle E \rangle = \int_{\Gamma} H(E)p(E)d\mu$ , tomando  $H(E)$  como el hamiltoniano de la energía, que en adelante se representará simplemente como  $E$ , está dada por:

$$p(E) = \frac{\exp(-\beta E)}{Z(E)} \quad \text{donde} \quad Z(E) = \int_{\Gamma} \exp(-\beta E)d\mu \quad (2.125)$$

Esta densidad de probabilidad se obtiene mediante el método de multiplicadores de Lagrange (principio variacional) aplicado a un sistema en el ensamble canónico. Bajo estas condiciones se cumple el principio de estabilidad termodinámica  $\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \geq 0$ .

Ahora bien, una de las hipótesis iniciales para llegar a describir los fenómenos termodinámicos desde el punto de vista de la mecánica estadística, consiste en suponer que la densidad de estados obedece la ley de potencias respecto a la energía total del sistema, es decir, existe una proporción directa entre  $\rho(E)$  y  $E^{nN}$ . Este incremento compensa el decaimiento exponencial de la distribución de probabilidad asociada a la distribución de energía, con lo cual es posible escribir:

$$\rho(E)p(E) = \frac{\exp(\ln(\rho) - \beta E)}{Z} \quad (2.126)$$

Si se aplica de nuevo el proceso de optimización a la expresión (2.126), entonces el lado izquierdo es máximo siempre que el exponente sea máximo. En tal caso:

$$\frac{\rho'}{\rho} - \beta = 0 \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{T} \quad (2.127)$$

El resultado de (2.127) y la ley de potencias permite establecer que  $E \sim nNT$ , donde  $N$  es el número de estados del sistema, cada uno de los cuales puede tener  $j$  grados de libertad, dependiendo de las variables cuánticas que definen el sistema, y  $n$  es una constante asociada con  $k_B$ . Esta es una forma de establecer el teorema de equipartición de la energía.

Si bien, los resultados experimentales muestran que la distribución encontrada mediante (2.123), para el caso discreto, o por (2.125), en el caso continuo, se acomoda a los datos empíricos, existen fenómenos donde la correspondencia falla. Dentro de las propuestas para corregir las diferencias entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas, se resaltan los trabajos de Rényi, Tsallis, Kanadiakis y Naudts. El trabajo de éste último se enmarca en la teoría de las funciones exponencial y logarítmica  $\phi$ -deformadas, y es una generalización de las propuestas de Tsallis y Kaniadakis. A continuación se presentan las ideas básicas del formalismo de Naudts y se abordará con mayor profundidad la propuesta de Tsallis.

La propuesta de generalización de Naudts parte de un variación de la ecuación (2.127). Considérese una función  $\phi(x)$  positiva y creciente en  $[0, \infty)$  tal que:

$$\frac{p'(E)}{\phi(p(E))} = \beta \quad (2.128)$$

Si se considera el producto  $\rho(E)p(E)$ , entonces el máximo de esta función se da siempre que:

$$\rho'(E)p(E) + \rho(E)p'(E) = 0,$$

con lo cual, la relación entre  $\rho$  y  $p$  queda establecida por:

$$\frac{\rho'(E)}{\rho(E)} = -\frac{p'(E)}{p(E)} = \beta \frac{\phi(p(E))}{p(E)}. \quad (2.129)$$

Al tomar  $\phi(x) = x$  se recupera la distribución BG. Si se considera la función  $\ln_\phi$ , con su correspondiente inversa  $\exp_\phi(x)$ , definidas en la sección anterior, entonces:

$$\exp'_\phi(\ln_\phi(x))\ln'(x) = 1 \quad (2.130)$$

Por otro lado, a partir de:

$$\ln_\phi(x) = \int_1^x \frac{dv}{\phi(v)}$$

y del teorema fundamental del cálculo, se tiene:

$$\frac{1}{\phi(x)} = \ln'_\phi(x). \quad (2.131)$$

Por tanto se puede establecer, haciendo el cambio de variable  $x \rightarrow p(E)$  y utilizando las expresiones (2.128), (2.130) y (2.131):

$$\phi(p(E)) = -\beta \exp'_\phi(\ln_\phi(p(E))). \quad (2.132)$$

Al integrar la expresión (2.132), la solución que se obtiene puede escribirse en la forma:

$$p(E) = \exp_\phi(G(T) - \beta E) = \exp_\phi(G(T) - \frac{1}{T}E) \quad (2.133)$$

Donde la función  $G(T)$  está asociada a la constante de integración, y por tanto al recíproco de la función de partición  $Z$ ; es decir,  $G(T)$  se escoje de forma tal que se cumpla la restricción:

$$\int_{\Gamma} p(E) d\mu = 1$$

Si se toma  $\phi(x) = x$ , entonces el modelo descrito se reduce a BG, y en tal caso  $G(T) = \ln(\frac{1}{Z})$ . Nótese además que esta caracterización para  $S(p)$  conserva las relaciones termodinámicas usuales. Para comprobarlo, se define la probabilidad *scort* asociada a  $p(E)$ , dada por:

$$P(E) = \frac{\phi(p(E))}{Z_P} \quad (2.134)$$

Donde  $Z_P = \int \phi(p(E))$ , con lo cual,  $P(E)$  define una nueva distribución de probabilidad. Si se toma la derivada de  $p(E)$  respecto a  $T$  en (2.133), dicha derivada se puede escribir como:

$$\frac{d[p(E)]}{dT} = Z_P P(E) \left[ \frac{dG(T)}{dT} + \frac{E}{T^2} \right] \quad (2.135)$$

Teniendo presente que:

$$\int_{\Gamma} p(E) d\mu = 1$$

La expresión (2.135) permite escribir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dT} \left[ \int_{\Gamma} p(E) d\mu \right] \\ &= \int_{\Gamma} Z_P P(E) \left[ \frac{dG(T)}{dT} + \frac{E}{T^2} \right] \\ &= Z_P \left[ \frac{dG(T)}{dT} \int_{\Gamma} P(E) d\mu + \frac{1}{T^2} \int_{\Gamma} EP(E) d\mu \right] \end{aligned}$$

Y como  $Z_P \neq 0$ , se llega a:

$$\frac{dG(T)}{dT} + \frac{1}{T^2} \langle E \rangle_P = 0 \quad \text{o de forma equivalente} \quad \frac{dG(T)}{dT} = -\frac{1}{T^2} \langle E \rangle_P \quad (2.136)$$

Donde la cantidad  $\langle E \rangle_P$  representa el valor esperado de la energía respecto a la distribución  $P(E)$ . Por tanto, la derivada de  $p(E)$  respecto a  $T$  puede escribirse en la forma:

$$\frac{d[p(E)]}{dT} = \frac{P(E)Z_P}{T^2} [E - \langle E \rangle_P] \quad (2.137)$$

Ahora bien, si se toma  $\frac{dE}{dT}$ , entonces, haciendo uso del hecho de que  $\langle E \rangle = \int_{\Gamma} E p(E) d\mu$  y de (2.137), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle E \rangle}{dT} &= \int_{\Gamma} E \frac{d[p(E)]}{dT} d\mu \\ &= \int_{\Gamma} E \frac{P(E)Z_P}{T^2} [E - \langle E \rangle_P] d\mu \\ &= \frac{1}{T^2} Z_P [\langle E^2 \rangle_P - \langle E \rangle_P^2] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Con lo que se comprueba que la energía es una función no decreciente de la temperatura. Un proceso similar, introduciendo la función  $F_{\phi} = \int_1^x \ln_{\phi}(u) du$ , y definiendo:

$$S(p) = \int_{\Gamma} (1 - p(E)) F_{\phi}(0) - F_{\phi}(p(E)) d\mu$$

puede ser utilizado para comprobar que:

$$\frac{dS}{dT} = \beta \frac{dE}{dT}$$

Concluyendo de esta manera la conocida relación termodinámica:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}.$$

Así pues, el formalismo anterior es una generalización de la termoestadística BG, y se reduce a ella para  $\phi(x) = x$ . Además, ofrece la posibilidad de abarcar fenómenos que no se ajustan experimentalmente al modelo BG, y como se mostrará a continuación, los resultados teóricos obtenidos a partir de  $\phi(x)$  diferente a la identidad tienen un mejor ajuste con la evidencia experimental.

En adelante, cuando se haga uso del funcional de entropía propuesto por Naudts, éste se escribirá, en términos de  $\ln_{\phi}(\cdot)$ , según la expresión:

$$S_{\phi}(p) = \int_{\gamma} p \ln_{\phi} \left( \frac{1}{p} \right) d\mu. \quad (2.138)$$

La expresión correspondiente a la versión discreta para el funcional es:

$$S_{\phi}(p_i) = \sum_i p_i \ln_{\phi} \left( \frac{1}{p_i} \right). \quad (2.139)$$

### 2.2.3. Entropía $S_q$ de Tsallis: descripción preliminar

Considérese un sistema con  $n$  estados posibles, cada uno con probabilidad  $p_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) tales que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . La entropía de Boltzman-Gibbs-Schannon (BGS) es el fundamento de la mecánica estadística clásica y se define para  $p = (p_1, \dots, p_n)$  por  $S(p) = k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln(1/p_i)$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzman (que para efectos de este trabajo se ha tomado como uno). La entropía  $S_q$  definida por Tsallis en [6], para cada real  $q$ , está dada por:

$$S_q(p) = \begin{cases} k \frac{1 - \sum_{i=1}^n (p_i)^q}{q-1}, & \text{si } q \neq 1, \\ S(p), & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$S_q$  verifica las siguientes propiedades (ver [15]):

1.  $S_q$  es extensión de  $S$  en el siguiente sentido, si  $q \rightarrow 1$  se tiene  $S_q \rightarrow S$ .
2.  $S_q(p) = 0$  sólo en el caso de que alguna  $p_i = 1$ .
3. El máximo para  $S_q$ , bajo la única restricción  $\sum_i p_i = 1$ , se obtiene con  $p_i = \frac{1}{n}$ , para  $1 \leq i \leq n$ .
4. (Propiedad de no extensividad) Supóngase que se tienen dos sistemas independientes  $A$  y  $B$ , en sentido probabilístico, esto es  $P_{ij}^{A+B} = P_i^A P_j^B$ . Entonces se tiene:

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)S_q(B)}{k^2}$$

O de forma equivalente:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k} S_q(A)S_q(B) \quad (2.140)$$

Del último numeral se concluye que, para  $q > 1$  se tienen sistemas superextensivos, para  $q = 1$  se tienen sistemas extensivos y para  $q < 1$  sistemas subextensivos. El caso de Boltzmann-Gibbs se reduce así a los sistemas extensivos.

### 2.2.4. Caracterizaciones de $S_q$

Ya se ha mencionado que la entropía  $S_q$  de Tsallis ha proporcionado grandes ventajas frente al modelo  $BG$  en la explicación de fenómenos termodinámicos que carecían de explicación en el último modelo. A continuación se presentan algunas caracterizaciones para tal entropía.

1. **Caracterización desde la ecuación lineal ordinaria.** Considérese el problema con valores iniciales asociado a la sencilla E.D. de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = y; y(0) = 1 \quad (2.141)$$

que tiene por solución:

$$y = e^x \quad (2.142)$$

La función inversa de dicha solución está dada por:

$$y = \ln(x) \quad (2.143)$$

que cumple con la propiedad de aditividad:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (2.144)$$

Esta última propiedad es una de las características principales de la entropía bajo el modelo BG. Si se considera el problema con valores iniciales asociado a la E.D. más general:

$$\frac{dy}{dx} = y^q; y(0) = 1, q \in \mathbb{R} \quad (2.145)$$

entonces se obtiene como solución:

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv \exp_q(x) \quad (2.146)$$

En este caso, la función inversa estará dada por:

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q(x) \quad (2.147)$$

la cual cumple la propiedad de *pseudo-aditividad*

$$\ln_q(AB) = \ln_q(A) + \ln_q(B) + (1 - q)\ln_q(A)\ln_q(B) \quad (2.148)$$

Considerando la inversa de la solución al problema con valores iniciales (2.141) como modelo para la entropía BG, con  $W$  el número de estados del sistema, se tendría como máxima entropía la conocida expresión:

$$S_{BG} = \ln(W) \quad (2.149)$$

Una generalización a dicho modelo, que parece surgir de forma natural, vendría dada por la inversa de la solución al problema con valores iniciales (2.147), con lo cual:

$$S_q = \ln_q(W) \quad (2.150)$$

Como es de esperar,  $S_q$  debe reproducir a  $S_{BG}$ , lo cual es claro, dado que:

$$q \rightarrow 1 \Rightarrow S_q \rightarrow S_{BG} \quad (2.151)$$

2. **Caracterización desde valores medios: sorpresa de un evento.** En la termodinámica clásica y con mayor frecuencia en teoría de la información, dado un sistema compuesto por  $W$  eventos  $A_1, A_2, \dots, A_W$  cada uno con probabilidad de ocurrencia  $p_i$  para  $i \in \{1, 2, \dots, W\}$ , la *sorpresa* asignada al evento  $A_i$  está dada por  $\ln(\frac{1}{p_i})$ . El término *sorpresa* hace referencia al hecho de que si  $p_i = 1$  para alguna  $i$  entonces no es nada sorprendente que el evento  $A_i$  ocurra, en tanto que para  $p_i \rightarrow 0$ ,  $\ln(1/p_i) \rightarrow \infty$ , lo que indicaría que sería bastante *sorprendente* la ocurrencia de  $A_i$ . Bajo esta asignación, es conocido que el contenido de información o entropía asociada al sistema puede calcularse mediante la expresión:

$$S = \left\langle \ln \left( \frac{1}{p_i} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^W p_i \ln \left( \frac{1}{p_i} \right) \quad (2.152)$$

Es decir, la entropía será el producto del número de estados  $W$  multiplicado por el valor esperado de la sorpresa. Para el caso de la termoestadística generalizada, puede considerarse la sorpresa dada por  $\ln_q(\frac{1}{p_i})$ , con lo cual, la entropía tiene la forma:

$$S_q = \left\langle \ln_q \left( \frac{1}{p_i} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \left( \frac{1}{p_i} \right) \quad (2.153)$$

Al desarrollar (2.153), utilizando la expresión para  $ln_q$  dada por (2.147) se obtiene:

$$S_q = \sum_{i=1}^W \frac{(\frac{1}{p_i})^{1-q} - 1}{1-q} = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q - p_i}{1-q} = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \quad (2.154)$$

La última parte de la ecuación (2.154) es precisamente la dada para la entropía de Tsallis en la ecuación (??)

3. **Caracterización por funcional lineal** La primera propuesta de Tsallis [6] estuvo dada en los siguientes términos: Sea  $f(u)$  una función suave, y considérese  $S_q$  definida por  $S_q(p_i) = f(\sum_{i=1}^W (p_i)^q)$ . La propuesta más sencilla para  $f(u)$  estaría dada por la función lineal  $f(u) = a + bu$ :

$$S_q(p_i) = a + b \sum_{i=1}^W (p_i)^q \quad (2.155)$$

En este caso, si alguna de las  $p_i = 1$  se cumple que  $\sum_{i=1}^W (p_i)^q = 1$  y  $S_q = 0$ , con lo cual  $a + b = 0$  y por tanto:

$$S_q(p_i) = a(1 - \sum_{i=1}^W (p_i)^q) \quad (2.156)$$

Por último, para reproducir  $BG$  cuando  $q \rightarrow 1$ , se puede utilizar el hecho de que  $p_i^q = p_i e^{(q-1)\ln(p_i)}$  expresión está última que puede escribirse, en términos de  $q$ -deformadas, como  $p_i e^{(q-1)\ln(p_i)} = p_i(1 + (1-q)\ln(p_i))$ , con lo cual,  $S_1 \sim -a(q-1) \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i)$ . Esto lleva concluir que  $a(q-1) = 1$ , con lo cual:

$$S_q(p_i) = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^W (p_i)^q \right) \quad (2.157)$$

4. **Caracterización usando la derivada generalizada de Jackson.** Considérese la siguiente generalización de la derivada usual, debida a Jackson:

$$D_q h(x) = \frac{h(qx) - h(x)}{qx - x} \quad (2.158)$$

Cuando  $q \rightarrow 1$ , se tiene  $D_q h(x) \rightarrow \frac{dh(x)}{dx}$ . Haciendo uso de  $D_q$  se puede escribir:

$$S_q(p_i) = -[D_q \sum_{i=1}^W (p_i)^x]_{x=1} \quad (2.159)$$

### 2.2.5. Optimización de $S_q$

En las últimas tres décadas se ha encontrado evidencia experimental sobre casos de sistemas termodinámicos (con suficiente complejidad) que son no extensivos, hecho que en gran medida ha servido como muestra de la importancia de la teoría de Tsallis en la termo-estadística. Una situación entre estos casos anómalos se ofrece en consideraciones hidrodinámicas de los fenómenos de turbulencia en tres dimensiones. Como caso particular pueden citarse los estudios presentados en [21] y [22], referentes a la diferencia de la velocidad radial  $u$  entre dos puntos en un líquido separados por una distancia  $r$ , la cual

se describe mediante su relación con la energía cinética  $\frac{1}{2}u^2$ . Las propiedades dinámicas de estos sistemas como la difusión anómala, la simetría y la ley de potencia para el decaimiento de correlaciones, están en buena coincidencia con las predicciones de los modelos no extensivos en un amplio rango de parámetros.

La manifestación de las propiedades no extensivas de la entropía de Tsallis, ha conducido a la representación de  $S_q$  en términos de generalizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, llamadas  $q$ -logaritmo y  $q$ -exponencial, y como antes, en el límite  $q \rightarrow 1$ , la expresiones para  $q$ -logaritmo y  $q$ -exponencial se reducen, respectivamente, a las funciones logaritmo natural y exponencial respectivamente. Como ya se ha mencionado, la función  $q$ -logaritmo permite representar la entropía  $S_q$ , donde el parámetro  $q$  recibe el nombre de índice entrópico o de no extensividad, mediante:

$$S_q(p) = k_B \sum_i p_i \log_q \left( \frac{1}{p_i} \right).$$

Donde, como es usual,  $K_B > 0$  es una constante (en este caso se ha tomado igual a 1),  $p_i$  es un conjunto normalizado de probabilidades de los diferentes estados energéticos del sistema, y  $n$  es el número total de estados accesibles. La distribución de probabilidades de equilibrio  $p = \{p_i\}$ , se obtiene maximizando  $S_q$  con respecto a los  $p_i$ , sujeto a la restricción  $\sum_i p_i = 1$ . Para el conjunto microcanónico (sistema aislado), ésta será la única restricción; en tal caso el resultado de la optimización es  $p_i = \frac{1}{n}$ . Si se considera un sistema en contacto con un baño térmico, en el conjunto canónico, además de la anterior restricción, es necesaria una de las tres siguientes

$$a) U_q = \sum_i p_i e_i \quad b) U_q = \sum_i p_i^q e_i \quad c) U_q = \frac{\sum_i p_i^q e_i}{\sum_i p_i^q},$$

cada una de las cuales da cuenta de la energía interna del sistema. En todas las expresiones anteriores,  $U_q$  es el valor esperado de energía  $E$  asociada al sistema y los  $e_i$  son los autovalores del Hamiltoniano cuántico del sistema. Cada restricción fue introducida en los trabajos de Tsallis [6], [16] y [17]. La forma paramétrica de las distribuciones de probabilidad de equilibrio para los diferentes microestados del sistema, describe las diferentes termoestadísticas que surgen dependiendo del uso de cualquiera de las anteriores restricciones. Un análisis cualitativo detallado del significado de cada una de estas probabilidades de equilibrio puede ser consultado en [19]; aquí se presenta el mecanismo para llegar a la parametrización de dichas probabilidades.

Si consideran las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{y} \quad U_q = \sum_{i=1}^n p_i^q e_i \quad (2.160)$$

entonces, al utilizar el método de multiplicadores de Lagrange, se tiene:

$$L = S_q - \alpha \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \beta \left( \sum_{i=1}^n p_i^q e_i - U_q \right). \quad (2.161)$$

Al derivar (2.161) respecto a  $p_i$  se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \frac{q}{1-q} p_i^{q-1} - \alpha - \beta q p_i^{q-1} e_i = 0. \quad (2.162)$$

Para despejar  $\alpha$ , primero se multiplica (2.162) por  $p_i$  y luego se suma desde  $i = 1$  hasta  $n$ , con lo cual:

$$\alpha = \frac{q}{1-q} \sum_{i=1}^n p_i^q - q\beta U_q \quad (2.163)$$

y utilizando (2.162) y (2.163) se llega a:

$$p_i = \frac{(1 - (1-q)\beta e_i)^{\frac{1}{1-q}}}{\left[\sum_{i=1}^n p_i^q - (1-q)\beta U_q\right]^{\frac{1}{1-q}}}. \quad (2.164)$$

Teniendo en cuenta el lado izquierdo de (2.160), se puede escribir:

$$\left[\sum_{i=1}^n p_i^q - (1-q)\beta U_q\right]^{\frac{1}{1-q}} = \sum_{i=1}^n (1 - (1-q)\beta e_i)^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.165)$$

con lo cual, la distribución para las probabilidades de equilibrio está dada por el conjunto de  $\{p_i\}$ , con  $p_i$  dada por:

$$p_i = \frac{(1 - (1-q)\beta e_i)^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{i=1}^n (1 - (1-q)\beta e_i)^{\frac{1}{1-q}}} \quad (2.166)$$

al escribir  $p_i$  en términos de  $exp_q(x)$ , se llega finalmente a una expresión similar la dada por el modelo  $BG$  en la termoestadística extensiva

$$p_i = \frac{exp_q(-\beta e_i)}{\sum_{i=1}^n exp_q(-\beta e_i)} \quad \text{válido para } 0 < q \leq 2.$$

Para recuperar la distribución  $BG$  en el límite  $q \rightarrow 1$  es necesario tener  $\beta = 1/kT$ . Si se consideran ahora las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{y} \quad U_q = \sum_{i=1}^n p_i e_i \quad (2.167)$$

entonces el proceso anterior lleva a la expresión para  $p_i$

$$p_i = \frac{\left[1 - \frac{(q-1)\beta(e_i - U_q)}{q \sum_{i=1}^n p_i^q}\right]^{\frac{1}{q-1}}}{\sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{(q-1)\beta(e_i - U_q)}{q \sum_{i=1}^n p_i^q}\right]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (2.168)$$

en tanto que si las restricciones que se consideran son:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{y} \quad U_q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^q e_i}{\sum_{i=1}^n p_i^q}, \quad (2.169)$$

entonces  $p_i$  puede escribirse como:

$$p_i = \frac{\left[1 - \frac{(1-q)\beta(e_i - U_q)}{\sum_{i=1}^n p_i^q}\right]^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{(1-q)\beta(e_i - U_q)}{q \sum_{i=1}^n p_i^q}\right]^{\frac{1}{1-q}}}. \quad (2.170)$$

Sin embargo aún debe resolverse el problema de autoreferencia que se presenta en las ecuaciones (2.168) y (2.170), dado que en ambas ecuaciones  $p_i$  está dada en términos de  $U_q$ , que a su vez está dada en términos de  $p_i$ . Considérese inicialmente la expresión (2.168), la cual se puede escribir en la forma:

$$p_i = \frac{\left[1 + \frac{(q-1)\beta U_q}{q\delta_q}\right]^{\frac{1}{q-1}} \left[1 - \frac{(q-1)\beta e_i}{q\delta_q + (q-1)\beta U_q}\right]^{\frac{1}{q-1}}}{\left[1 + \frac{(q-1)\beta U_q}{q\delta_q}\right]^{\frac{1}{q-1}} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{(q-1)\beta e_i}{q\delta_q + (q-1)\beta U_q}\right]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (2.171)$$

donde:

$$\delta_q = \sum_{i=1}^n p_i^q.$$

Si se toma:

$$\beta^* = \frac{\beta}{q\delta_q + (q-1)\beta U_q} \quad (2.172)$$

la expresión (2.171) se reduce a:

$$p_i = \frac{[1 - (q-1)\beta^* e_i]^{\frac{1}{q-1}}}{\sum_{i=1}^n [1 - (q-1)\beta^* e_i]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (2.173)$$

en este caso, la relación de  $\beta^*$  con  $\beta$  permite obtener la relación con el inverso de la temperatura, haciendo  $\beta^* = 1/kT^*$ , y utilizando (2.172), con lo cual:

$$kT = \frac{kT^* - (q-1)U_q}{q\delta_q} \quad (2.174)$$

De igual manera, para (2.170) se tiene la expresión paramétrica:

$$p_i = \frac{[1 - (1-q)\beta^* e_i]^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{i=1}^n [1 - (1-q)\beta^* e_i]^{\frac{1}{1-q}}} \quad (2.175)$$

En tal caso, los parámetros  $\beta^*$  y  $T^*$  se relacionan, respectivamente, con  $\beta$  y  $T$  mediante las expresiones:

$$\beta^* = \frac{\beta}{\delta_q + (1-q)\beta U_q} \quad (2.176)$$

$$kT = \frac{kT^* - (1-q)U_q}{\delta_q} \quad (2.177)$$

*Observación 8.* Tanto (2.173) como (2.175) pueden escribirse en términos de la función  $exp_q(x)$ . Las respectivas expresiones están dadas por:

$$p_i = \frac{1}{\left(\frac{exp_q(\beta^* e_i)}{\sum_{i=1}^n exp_q(\beta^* e_i)}\right)} \quad \text{para (2.173)} \quad (2.178)$$

$$p_i = \frac{exp_q(\beta^* e_i)}{\sum_{i=1}^n exp_q(\beta^* e_i)} \quad \text{para (2.175)} \quad (2.179)$$

Los resultados anteriores se resumen en la siguiente tabla

Resultados para la distribución de equilibrio de la entropía $S_q$			
Forma general para la distribución de probabilidades:			
$p_i = \frac{[1-(1-q^*)\beta^*e_i]^{\frac{1}{1-q^*}}}{\sum_{i=0}^n [1-(1-q^*)\beta^*e_i]^{\frac{1}{1-q^*}}} \quad \text{para } \beta^*e_i < \frac{1}{1-q^*}$ $p_i = 0 \quad \text{para } \beta^*e_i \geq \frac{1}{1-q^*}$			
Restricción para la energía $U_q$	Parámetro $q^*$	Parámetro $\beta^*$	Expresión para $kT$
$U_q = \sum_{i=0}^n p_i e_i$	$q^* = 2 - q$	$\beta^* = \frac{\beta}{q\delta_q + (q-1)\beta U_q}$	$kT = \frac{kT^* - (q-1)U_q}{q\delta_q}$
$U_q = \sum_{i=0}^n p_i^q e_i$	$q^* = q$	$\beta^* = \beta$	$kT = kT^*$
$U_q = \frac{\sum_{i=0}^n p_i^q e_i}{\sum_{i=0}^n p_i^q}$	$q^* = q$	$\beta^* = \frac{\beta}{\delta_q + (1-q)\beta U_q}$	$kT = \frac{kT^* - (1-q)U_q}{\delta_q}$

En el caso continuo, el funcional de entropía se define por

$$S_q(f) = k \frac{1 - \int (f(x))^q dx}{q - 1}.$$

A continuación se presentan resultados sobre optimización de  $S_q$  con notación tomada de [16] y [26], pero el proceso como tal se puede consultar en [16].

Considérese el problema de maximizar  $S_q$ , sujeto a las restricciones:

$$\int f(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad \int (x - \bar{\mu}_q)^2 \frac{[f(x)]^q}{\int [f(x)]^q dx} dx = \bar{\sigma}_q^2, \quad (2.180)$$

donde  $\bar{\sigma}_q^2$  y  $\bar{\mu}_q$  son la varianza y la media generalizadas de  $x$  respectivamente. El resultado de la optimización, válido para  $q < 3$ , es:

$$f(x) = \frac{1}{z_q} [1 + (q-1)\beta_q(x - \bar{\mu}_q)]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{z_q} \text{exp}_q(-\beta_q(x - \bar{\mu}_q)),$$

donde la constante  $\beta_q > 0$  se puede determinar usando la segunda restricción (de (2.180)) y  $z_q$  corresponde a  $z_q := \int \exp_q(-\beta_q(x - \bar{\mu}_q))dx$ .

Para modelos estacionarios, es necesario considerar una tercera restricción (en (2.180)) dada por:

$$\int x \frac{[f(x)]^q}{\int [f(x)]^q dx} dx = \bar{\mu}_q.$$

En este caso, la función de densidad de probabilidad estacionaria que resulta de la optimización (escribiendo respectivamente  $\frac{1}{z_q}$  y  $\frac{\beta}{2}$  en lugar de la notación  $\mathcal{A}_q$  y  $\beta_q$  de [26]) es

$$f(x) = \frac{1}{z_q} [1 + (q-1) \frac{\beta}{2} (x - \bar{\mu}_q)^2]^{-\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{z_q} \exp_q(-\frac{\beta}{2} (x - \bar{\mu}_q)^2) \quad \text{válido para } q < 3, \quad (2.181)$$

donde  $z_q := \int \exp_q(-\frac{\beta}{2} (x - \bar{\mu}_q)^2) dx$ , el parámetro  $\beta$  puede ser determinado por  $\beta = \frac{2}{\bar{\sigma}_q^2(3-q)}$  y las (varianzas usual y generalizada) están relacionadas por  $\bar{\sigma}_q^2 = \bar{\sigma}^2 \frac{5-3q}{3-q}$ . Además,  $\beta = \frac{2}{\bar{\sigma}^2(5-3q)}$  y  $z_q$  se puede calcular por

$$\frac{1}{z_q} = \begin{cases} \frac{\Gamma[(5-3q)/(2-2q)]}{\Gamma[(2-q)/(1-q)]} \sqrt{\frac{(1-q)\beta}{2\pi}} & \text{si } q < 1 \\ \frac{\Gamma[1/(q-1)]}{\Gamma[(3-q)/(2q-2)]} \sqrt{\frac{(q-1)\beta}{2\pi}} & \text{si } q > 1. \end{cases}$$

Se observa que la expresión (2.181) es equivalente a la (2.99), obtenida la sección 2.1.3

## Capítulo 3

# Funciones de enlace y el parámetro de no extensividad

El presente capítulo expone los resultados obtenidos por el autor, en un trabajo aceptado para publicación en la revista Ingeniería y Ciencia, ver [20]. Precisamente, se mostrará que la propiedad de pérdida de memoria, en la forma (3.1), para una variable aleatoria  $X$  que distribuya siguiendo una función de densidad de probabilidad continua definida mediante una función  $q$ -exponencial, permite caracterizar a  $X$  mediante una relación análoga a  $\bar{F}_Y(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} = \lambda f_Y(t)$  ( $t > 0$ ); la expresión es válida para una variable aleatoria  $Y$  que distribuya exponencial con media  $\lambda$ , siendo  $\bar{F}_Y(t)$  la función de supervivencia y  $f_Y(t)$  la función de densidad de probabilidad. Finalmente, en ciertos sistemas super-aditivos, esta propiedad será utilizada para proponer una forma de relacionar (mediante comparación de funciones de enlace) la función de densidad estacionaria estimada con una función que permite decidir el parámetro de no extensividad correspondiente a un sistema no extensivo. Dicho proceso será aplicado al análisis de un fenómeno de turbulencia discutido por Beck y Daniels en [21] y [22], respectivamente.

### 3.1. Propiedad de pérdida de memoria y funciones de enlace

Si se considera una función de distribución exponencial, la función de distribución acumulada asociada está dada por  $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}$  con  $t > 0$ , donde el parámetro  $\lambda > 0$  representa la media de la variable aleatoria que tiene asociada dicha distribución. En tal caso, la función de supervivencia asociada es  $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}}$ . Por otro lado, es conocida la propiedad de pérdida de memoria dada por  $P(X > t + a) = P(X > t)P(X > a)$ , que cumple una variable aleatoria con distribución exponencial.

*Observación 9.* Considérese una variable aleatoria  $X$  con función de distribución de probabilidad  $F$ , continua y estrictamente creciente en un intervalo. Dado que en tal caso  $F$  y  $\bar{F}$  distribuyen uniformemente en  $(0, 1)$ , se tiene que  $g(X) := \ln((F(X))^{-1})$  y  $h(X) := \ln((\bar{F}(X))^{-1})$  están exponencialmente distribuidas con media uno.

Así, la propiedad de pérdida de memoria para  $F$  y  $\bar{F}$  respectivamente (o bien, para  $X$  mediante  $g$  y  $h$  respectivamente), es caracterizada por Ghitany [1] por medio de las funciones de enlace  $g$  y  $h$  de la siguiente manera:

$$P(g(X) > s + t) = P(g(X) > s)P(g(X) > t), \quad \text{para algún } s, t$$

$$P(h(X) > a + b) = P(h(X) > a)P(h(X) > b), \quad \text{para algún } a, b \quad (3.1)$$

o igualmente

$$P(X > h^{-1}(a + b)) = P(X > h^{-1}(a))P(X > h^{-1}(b)), \quad \text{para algún } a, b. \quad (3.2)$$

De tal forma, existen  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$  tal que

$$P(g(X) > t) = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \quad \text{y} \quad P(h(X) > t) = e^{-\frac{t}{\lambda_2}}. \quad (3.3)$$

### 3.2. Parámetro de no extensividad y propiedad de pérdida de memoria.

Para modelos canónicos no extensivos, se han propuesto funciones de densidad estacionarias  $f$  asociadas a un observable  $u$ , maximizando el funcional de entropía con las restricciones adecuadas, descritas por

$$f(u) = \frac{1}{z_q} \exp_q(-\beta E(u)), \quad \text{con } z_q = \int \exp_q(-\beta E(u)) du. \quad (3.4)$$

En adelante, se supondrá que  $f$  es una función de densidad de probabilidad continua y simétrica para un observable  $u$  asociado a un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad  $q > 1$ .

Se define una probabilidad en  $[0, \infty)$ , para alguna variable aleatoria  $Y$ , mediante

$$\bar{F}_Y(t) = P(Y > t) = z_q f(t) = \exp_q(-\beta E(t)). \quad (3.5)$$

Para cada  $r > 1$  en el intervalo  $[0, \frac{1}{r-1})$ , se define la probabilidad para una variable aleatoria  $X_r$  por medio de

$$\bar{F}_{X_r}(t) = P(X_r > t) = \frac{1}{\exp_r(t)}. \quad (3.6)$$

Sea  $\bar{F}$  la restricción de  $\bar{F}_Y$  al intervalo  $[0, \frac{1}{q-1})$ , claramente  $\bar{F}$  no es una función de supervivencia. Nótese que la asignación  $\Psi$  dada por  $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$  es una biyección en  $[0, \frac{1}{q-1})$ .

**Proposición 3.2.1.** *La única biyección en  $[0, \frac{1}{q-1})$  definida por  $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$  ocurre cuando  $r = q$*

*Demostración.* Nótese que para  $q < r$  no es posible tener una biyección dada por  $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$  porque el dominio de la primera incluye propiamente al dominio de la segunda (aún si se redefiniera  $\bar{F}_{X_r}(t) = 0$  para  $\frac{1}{r-1} \leq t < \frac{1}{q-1}$ , la asignación no sería inyectiva). Análogamente, cuando  $q > r$  no es posible un biyección como la planteada anteriormente, ya que  $[0, \frac{1}{q-1})$  se incluye propiamente en  $[0, \frac{1}{r-1})$ . Gracias al decrecimiento estricto tanto de  $\bar{F}_{X_q}$  como de  $\bar{F}$ , la única biyección (como las sugeridas) que puede plantearse es  $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_q}(t)$  para todo  $t \in [0, \frac{1}{q-1})$ .  $\square$

A continuación se muestra que la biyección  $\Psi$  permite caracterizar la pérdida de memoria de  $X_q$  en términos de  $\bar{F}(t)$  y por tanto de  $Y$ . En efecto, siendo  $\bar{F}_{X_q}$  y  $\bar{F}_Y$  las funciones de supervivencia para  $X_q$  e  $Y$  respectivamente, las funciones de enlace mediante las cuales se expresa la pérdida de memoria para  $X_q$  e  $Y$  están definidas respectivamente por:

$$h_{X_q}(t) := \ln(\exp_q(t)), \quad \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{q-1} \quad (3.7)$$

$$h_Y(t) := \ln\left(\frac{1}{\exp_q(-\beta(t))}\right), \quad \text{para } 0 \leq t < \infty. \quad (3.8)$$

En consecuencia, existen  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , tales que

$$P(h_{X_q}(X_q) > t) = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \quad \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{q-1} \quad (3.9)$$

$$P(h_Y(Y) > t) = e^{-\frac{t}{\lambda_2}} \quad \text{para } 0 \leq t < \infty. \quad (3.10)$$

En particular, si  $t \in [0, \frac{1}{q-1})$ , se satisfacen las dos igualdades anteriores y si se toma  $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , entonces se tiene

$$P(h_{X_q}(X_q) > t) = P((h_Y(Y) > t))^k,$$

o igualmente,  $P(X_q > h_{X_q}^{-1}(t)) = P(Y > h_Y^{-1}(t))^k$ . que se puede escribir como  $\bar{F}_{X_q}(h_{X_q}^{-1}(t)) = (\bar{F}_Y(h_Y^{-1}(t)))^k$  o bien.

$$\Psi(\bar{F}_Y(h_Y^{-1}(t))) = (\bar{F}_{X_q}(h_{X_q}^{-1}(t)))^k. \quad (3.11)$$

con lo cual, la pérdida de memoria de  $Y$  se puede expresar mediante las funciones de enlace y la biyección.

### 3.3. Estimación del parámetro de no extensividad

Consideremos una función de densidad de probabilidad continua y simétrica  $f$ , para un observable  $u$  asociado a un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad  $q > 1$ .

Relacionar a  $f$  con una función que permita decidir el parámetro de no extensividad, es equivalente a plantear una relación entre dicho parámetro y la familia de funciones  $\bar{F}_{x_r}$  (con  $1 < r < 3$ ) construidas como en la sección anterior. Dicha relación será establecida mediante un criterio que determine cuándo una de las gráficas correspondiente a las funciones de la familia, corta a la gráfica de  $\bar{F}_u$  en un único punto  $(a, b)$  tal que  $a > 0$ . Lo anterior equivale a comparar la familia de funciones de enlace  $h_r(t) = \ln(\exp_r(t))$  con  $h_Y(t) = \ln[1/\exp_q(-\beta E(t))]$ , o más directamente, la familia de funciones  $\exp_r(t)$  con la función  $e_f(t) := \frac{1}{\exp_q(-\beta E(t))}$ .

El siguiente resultado plantea que  $e_f$  cumple condiciones para ser considerada como exponencial  $k$ -deformado en el sentido de Naudts [8].

**Proposición 3.3.1.** *Considérese una función de densidad de probabilidad estacionaria, continua y simétrica correspondiente a un observable  $u$ , de un sistema no extensivo, con parámetro de no extensividad  $q > 1$  y sea  $E(u)$  la energía asociada a  $u$  según la expresión (3.4). Si además, para todo  $t > 0$  se cumplen  $E(t) > 0$ ,  $\frac{d}{dt}E(t) > 0$  y*

$$[1 - (1 - q)\beta E(t)]\beta \frac{d^2}{dt^2}E(t) + 2\beta^2(1 - q)\left(\frac{d}{dt}E(t)\right)^2 > 0, \quad (3.12)$$

entonces se tiene:  $e_f(0) = 1$ ,  $e_f(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $e_f$  es función continua, estrictamente creciente y cóncava en el intervalo  $[0, \infty)$ . Además,  $e_f$  tiene derivada cero a derecha de cero.

*Demostración.* Sólo se justificará las propiedades de crecimiento y concavidad de  $e_f$ , ya que las demás afirmaciones son fáciles de probar a partir de las propiedades de  $exp_q$ .

Para considerar las dos primeras derivadas de  $e_f$  respecto a  $t$ , resultan útiles las siguientes expresiones, que aparecen en las páginas 38 y 39 de [10]:

$$\frac{1}{exp_q(x)} = exp_q\left(\frac{-x}{1 + (1 - q)x}\right), \quad x \neq \frac{1}{q - 1} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx}exp_q(x) = (exp_q(x))^q \quad (3.14)$$

$$(exp_q(x))^a = exp_{1 - (1 - q)/a}(ax) \quad (3.15)$$

Aplicando la expresión (3.13) para reescribir a  $e_f(t)$ , derivando en ambos lados y simplificando, se obtiene

$$\frac{d}{dt}e_f(t) = \left[\frac{1}{exp_q(-\beta E(t))}\right]^q \left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^2}\right] \quad (3.16)$$

Para calcular  $\frac{d^2}{dt^2}e_f(t)$ , primero obsérvese que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{exp_q(-\beta E(t))}\right]^q &= \frac{d}{dt}(e_f(t))^q \\ &= qe_f^{(2q-1)}(t) \left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^2}\right] \\ &= q \left[\frac{1}{exp_q(-\beta E(t))}\right]^{(2q-1)} \left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^2}\right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^2}\right] &= \frac{\beta \frac{d^2}{dt^2}E(t)[1 - (1 - q)\beta E(t)]^2 + 2\beta^2(1 - q)[1 - (1 - q)\beta E(t)][\frac{d}{dt}E(t)]^2}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^4} \\ &= \frac{\beta \frac{d^2}{dt^2}E(t)[1 - (1 - q)\beta E(t)] + 2\beta^2(1 - q)[\frac{d}{dt}E(t)]^2}{[1 - (1 - q)\beta E(t)]^3} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Además, las expresiones (3.13), (3.14), (3.15) permiten escribir:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\exp_q(-\beta E(t))} \right)^q &= \left( \exp_q \left( \frac{\beta E(t)}{1 - (1-q)\beta E(t)} \right) \right)^q \\ &= \exp_{(2q-1)/q} \left( \frac{q\beta E(t)}{1 - (1-q)\beta E(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Así mismo:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\exp_q(-\beta E(t))} \right)^{2q-1} &= \left[ \left( \frac{1}{\exp_q(-\beta E(t))} \right)^q \right]^{(2q-1)/q} \\ &= \left( \exp_{(2q-1)/q} \left( \frac{q\beta E(t)}{1 - (1-q)\beta E(t)} \right) \right)^{(2q-1)/q} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizando las expresiones (3.16) a (3.20), la segunda derivada se puede expresar como:

$$\frac{d^2}{dt^2} e_f(t) = A(t) \left( [1 - (1-q)\beta E(t)] \beta \frac{d^2}{dt^2} E(t) + 2\beta^2(1-q) \left( \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \right) + B(t), \quad (3.21)$$

Donde  $A(t)$  y  $B(t)$  están dados por:

$$A(t) = \left[ \frac{1}{(1 - (1-q)\beta E(t))^3} \right] \left[ \exp_{(2q-1)/q} \left( \frac{q\beta E(t)}{1 - (1-q)\beta E(t)} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$B(t) = q \left[ \frac{\beta \frac{d}{dt} E(t)}{[1 - (1-q)\beta E(t)]^2} \right]^2 \left[ \exp_{(2q-1)/q} \left( \frac{q\beta E(t)}{1 - (1-q)\beta E(t)} \right) \right]^{(2q-1)/q}. \quad (3.23)$$

Ahora bien, si se cuenta con un sistema para el cual  $E(t) > 0$  y  $\frac{d}{dt} E(t) > 0$  para  $t > 0$ , entonces  $\frac{d}{dt} e_f(t)$  positiva para todo  $t > 0$  y por tanto  $e_f$  estrictamente creciente en los reales positivos,  $\mathbb{R}^+$ .

Además, las funciones  $A(t)$  y  $B(t)$  son estrictamente positivas en  $\mathbb{R}^+$ , por lo que  $\frac{d^2}{dt^2} e_f(t)$  es estrictamente positiva y  $e_f(t)$  es función cóncava en  $\mathbb{R}^+$ , siempre y cuando se cumpla (3.12).  $\square$

*Observación 10.* Es de importancia resaltar que la familia de funciones  $\exp_r$  para  $1 < r < 3$  presenta el siguiente comportamiento.

- Cada  $\exp_r$  es una función: continua en  $[0, \frac{1}{r-1})$ , estrictamente creciente, cóncava, que pasa por  $(0, 1)$  y tiene asíntota vertical en  $\frac{1}{r-1}$ . Además,  $\exp_r$  tiene derivada uno a derecha de cero.
- Es familia ordenada en el siguiente sentido: Si  $r_1 < r_2$  entonces para todo  $t \in [0, \frac{1}{r_2-1})$ ,  $\exp_{r_1}(t) < \exp_{r_2}(t)$ .

Ahora, por las características dadas en la observación (10) para la familia de funciones  $e_r(t)$  y por las características de  $e_f$  según la proposición (3.3.1), existe un único  $r_0$  para el cual la gráfica de  $e_{r_0}$  corta a la gráfica de  $e_f$  en un único punto que tenga coordenadas positivas. A continuación

se presentan condiciones para que  $r_0$  sea precisamente el parámetro de no extensividad  $q$ .

Si se considera  $q$  como el parámetro de no extensividad según la proposición (3.3.1) y  $\exp_q(t_0) = e_f(t_0)$  para algún  $t_0 > 0$ , se tiene que  $\exp_q(t_0) = [\exp_q(-\beta E(t_0))]^{-1}$ . Aplicando la ecuación (3.13) se llega a  $\exp_q(t_0) = \exp_q(\frac{\beta E(t_0)}{1-(1-q)\beta E(t_0)})$ , de donde se obtiene  $t_0 = \frac{\beta E(t_0)}{1-(1-q)\beta E(t_0)}$ . Ahora, la función

$$w(t) = \frac{\beta E(t)}{1 - (1 - q)\beta E(t)} \quad (3.24)$$

es acotada por  $\frac{1}{q-1}$  siempre que  $E(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además si  $t_0$  es el único punto fijo de  $w(t)$ , entonces la gráfica de  $e_q$  corta a la de  $e_f$  únicamente en  $t_0$ . Las consideraciones anteriores dependen de la forma explícita para la función de energía efectiva  $E(t)$  y de  $\beta$ .

Si la energía asociada a un observable  $u$ , con función de densidad estacionaria  $f$ , es de la forma  $E(u) = \frac{u^2}{2}$ , entonces se satisfacen las condiciones de la proposición (3.3.1). Si además se considera  $\beta = \frac{2}{\sigma^2(5-3q)}$ , entonces  $w(t)$  se transforma en

$$w(t) = \frac{t^2}{\sigma^2(5 - 3q) - (1 - q)t^2} \quad (3.25)$$

y en este caso, al plantear la existencia de un punto fijo para  $w(t)$  se llega a la ecuación cuadrática  $(1 - q)t^2 + t - \sigma^2(5 - 3q) = 0$ , cuya única solución es  $t = \frac{1}{2(q-1)}$  siempre y cuando sea cero su discriminante

$$D = 1 + 4\sigma^2(1 - q)(5 - 3q) = 0, \quad (3.26)$$

es decir, cuando  $q = \frac{8\sqrt{\sigma^2 \pm \sqrt{4\sigma^2 - 3}}}{6\sqrt{\sigma^2}}$  y  $\sigma^2 \geq \frac{3}{4}$ . Con las anteriores condiciones y teniendo presente que  $\beta = \frac{2}{\sigma^2(5-3q)}$ , se obtiene que la expresión (3.26) es cierta, si y sólo, si  $\beta = 8(q - 1)$ . Lo anterior justifica el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.2.** *Para una función de densidad de probabilidad estacionaria  $f$ , continua correspondiente a un observable  $u$  con media cero, de un sistema no extensivo, con parámetro de no extensividad  $q > 1$  y energía efectiva  $E(u) = \frac{u^2}{2}$  se tiene que: si la varianza es  $\sigma^2 \geq \frac{3}{4}$  y se considera  $\beta = 8(q - 1)$ , entonces las gráficas de  $e_f(t)$  y  $\exp_q(t) = \exp(-\frac{\beta}{2}t^2)$  se cortan en un único punto de coordenadas positivas.*

De acuerdo a lo anterior, se puede establecer el criterio dado a continuación.

*Criterio 1.* Sea  $\hat{f}$  la función de densidad estacionaria estimada y tal que  $\hat{\sigma}^2 \geq \frac{3}{4}$  para una función  $f$  que cumpla las hipótesis de la proposición (3.3.2). Sea  $\hat{z}_q$  el inverso multiplicativo de la máxima altura de  $\hat{f}$  (por la simetría de  $f$ , se sabe que  $\frac{1}{z_q}$  es la máxima altura de  $f$ , o bien, la imagen bajo  $f$  de la media  $\mu = 0$ ). El método para determinar el valor de  $q$  consiste en comparar las gráficas de  $\exp_r$  (para  $1 < r < 3$ ), con la gráfica de

$$e_{\hat{f}} := \frac{1}{\hat{z}_q \hat{f}}. \quad (3.27)$$

El parámetro de no extensividad  $q$  será el correspondiente a  $q = r$  tal que la gráfica de  $e_r$  corte a la gráfica de  $e_{\hat{f}}$  en un único punto que sea de coordenadas positivas.

Para ilustrar el funcionamiento del método se considera la situación presentada en [21], que ha sido estudiada en varios trabajos de Cristian Beck, para un caso de defectos de turbulencia, donde la entropía de Tsallis es aplicable. En tal caso, el observable  $u$  es la velocidad media radial entre dos partículas en un fluido, que cumple  $\bar{\mu}=0$ . Considérese: la energía cinética efectiva  $E(u) = \frac{u^2}{2}$  como la energía efectiva asociada a  $u$ ,  $\sigma^2 = 1$  y que en [21] se presenta evidencia experimental de que el parámetro de no extensividad correspondiente debe ser  $q \approx 1.5$ . Con lo anterior, a partir de la expresión (2.181) se obtiene que la función de distribución de probabilidad estacionaria que maximiza la entropía es

$$f(u) = \frac{2}{\pi(1+u^2)^2}. \quad (3.28)$$

A manera de test para el método, se considerará  $\hat{f} = f$  y se espera que aplicando el criterio se obtenga  $q = 1.5$ . En efecto, dado que la máxima altura de  $\hat{f}$  es  $\hat{z}_q = \frac{\pi}{2}$  y por consiguiente  $e_{\hat{f}}(u) = (1+u^2)^2$ , resulta de la comparación entre la familia de funciones  $exp_r$  (con  $1 < r < 3$ ) y la función  $e_{\hat{f}}$ , que la única gráfica de las  $exp_r$  que corta a la de  $e_{\hat{f}}$  en un único punto de coordenadas positivas  $(t_0, e_{\hat{f}}(t_0))$ , es la correspondiente a  $r = 1.5$ . Para el caso, el único  $t_0 > 0$  que verifica  $exp_{1.5}(t_0) = e_{\hat{f}}(t_0)$  es  $t_0 = 1$ ; para  $1 < r < 1.5$ , la gráfica de  $exp_r$  corta en dos puntos de coordenadas positivas a la de  $e_{\hat{f}}$  y para  $1.5 < r < 3$ , la gráfica de  $exp_r$  no corta a la de  $e_{\hat{f}}$ .



## Capítulo 4

# Sobre espacios de Orlicz y entropía

El uso de funciones convexas en la definición de funcionales de entropía, haciendo uso del formalismo de Naudts, muestra la importancia de dichas funciones en el contexto de la termoestadística extensiva y la teoría de contenido de información. Como caso particular, en secciones anteriores se ha mostrado como, a partir de la familia de funciones  $t^q$ , puede obtenerse la entropía de Tsallis, en términos de las funciones  $q$ -deformadas. Este hecho motiva la consideración de funciones convexas más generales dentro de la estructura formal del funcional de entropía. De las diferentes funciones convexas que podrían elegirse, las funciones de Young ofrecen la posibilidad de aprovechar algunas de sus propiedades más relevantes, así como la teoría de espacios de Orlicz propia de tales funciones. Los espacios de Orlicz son vistos como una generalización natural de dos tipos de espacios: los espacios de sucesiones  $\ell^p$  y los espacios de funciones  $L^p$ . Son pocos los trabajos que pueden encontrarse en la línea de generalización aquí propuesta; dentro de ellos puede citarse el publicado en 2005 por Bobkov y Zegarliniski [27], en el cual se relacionan los espacios de Orlicz con la entropía clásica; trabajos similares en la línea de la entropía de Tsallis aún no se han abordado con suficiente profundidad.

Este capítulo busca dar algunas ideas en esta dirección; la primera sección ofrece una breve descripción sobre espacios de sucesiones de Orlicz - un desarrollo completo de la teoría de espacios de sucesiones de Orlicz y funciones de Orlicz puede ser consultado por el lector en Lindenstrauss y Tzafriri [28] y Rao y Ren [30]; al final de la misma se plantea, a manera de ejemplo, la posibilidad de construir una función de Young  $\Phi$  a partir de una variable aleatoria asociada a un sistema no extensivo, para el cual, la entropía se define en términos de  $\Phi$  y el formalismo de Naudts referente a funciones  $\phi$ -exponenciales y  $\phi$ -logarítmicas. La segunda sección está destinada a establecer algunas cotas para la entropía de Tsallis en términos de normas en espacios de Orlicz.

### 4.1. Espacios de Orlicz.

La extensión natural de los espacios clásicos de sucesiones escalares  $\ell^p$  son los espacios de sucesiones de Orlicz  $\ell_H$ . Precisamente, en un intento natural de generalizar los espacios clásicos  $L^p(\mu)$  y  $\ell^p$  aparece en la literatura la teoría de Orlicz, de funciones medibles y de sucesiones. En estos espacios el papel de la función  $t^p$  es esencial y resulta natural tratar de reemplazarla por otro tipo de función convexa más general. En principio Young, en sus estudios sobre series de Fourier [31], ya había estudiado una clase de funciones convexas que hoy día se denominan funciones de Young, pero fueron Orlicz y sus estudiantes quienes plantearon el estudio de espacios de Orlicz,

definidos a partir de funciones de Young. A continuación se presentan algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de Orlicz.

#### 4.1.1. Teoría de espacios de Orlicz

Una función de Orlicz  $H$ , es una función definida para  $x \geq 0$ , continua, convexa, no decreciente, con  $H(0) = 0$  y  $H(x) > 0$  para  $x > 0$ , tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \infty$ . Una función  $H$  definida en  $(-\infty, \infty)$  convexa, continua a izquierda, tal que  $H(x) = H(-x)$ ,  $H(0) = 0$ , no decreciente en  $(0, \infty)$  y no negativa se denomina función de Young. así, toda función de Orlicz es a su vez una función de Young.

Dada una función de Young  $H$  se define el espacio de sucesiones de Orlicz  $\ell_H$  como el espacio de sucesiones escalares  $(\alpha_i)$ , tales que existe  $\rho > 0$  para el cual  $\sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) < \infty$ ; dotado de la norma

$$\Pi_H((\alpha_i)) := \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H\left(\frac{|\alpha_i|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}.$$

Se dice que una función de Young  $H$  satisface la condición  $\Delta_2$  en 0, si

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{H(2x)}{H(x)} < +\infty.$$

En general, el espacio  $\ell_H$  no es regular, pero si lo es cuando  $H$  cumple la propiedad  $\Delta_2$  en 0, en tal caso  $\ell_H$  coincide con la clausura en  $\ell_H$  del espacio generado por los vectores unitarios  $e_i$ .

Dada una función de Young  $H$ , existe otra función de Young  $H^*$ , definida para cada  $y \geq 0$  por

$$H^*(y) = \sup\{xy - H(x) : x \geq 0\}$$

denominada función complementaria de  $H$ .

Es de anotar que  $(H^*)^* = H$  y que mediante  $H^*$ , el espacio  $\ell_H$  se puede dotar de otra norma  $\|\cdot\|_H$ , usualmente llamada norma de Orlicz, definida para cada  $(\alpha_i)$  en  $\ell_H$  por

$$\|(\alpha_i)\|_H = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(|\beta_i|) \leq 1 \right\}$$

y se cumple para cada  $(\alpha_i)$  en  $\ell_H$  que

$$\Pi_H((\alpha_i)) \leq \|(\alpha_i)\|_H \leq 2\Pi_H((\alpha_i)).$$

Si además  $H$  cumple la propiedad  $\Delta_2$  en 0, se verifica que  $\ell'_H$  es isomorfo a  $\ell_{H^*}$ . Para tener una isometría entre estos dos espacios es necesario tomar  $\Pi_H(\cdot)$  en  $\ell_H$  y  $\|\cdot\|_{H^*}$  en  $\ell_{H^*}$ , ver [30] pp. 58-61 y [28] pp. 147-148.

Siguiendo los pasos del capítulo cuatro de [30], tomando como espacio de medida el conjunto de números naturales con una medida puramente atómica (es decir,  $\mu\{i\} = 1$  para todo  $i$ ), se puede establecer la siguiente versión de la desigualdad de Hölder para espacios de sucesiones de Orlicz: para  $(a_i)$  en  $\ell_H$  y  $(b_i)$  en  $\ell_{H^*}$ , se cumple

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \min\{ \Pi_H((a_i)) \| (b_i) \|_{H^*}, \Pi_{H^*}((a_i)) \| (b_i) \|_H \} \quad (4.1)$$

También se cumple que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq 2\Pi_H((a_i))\Pi_{H^*}((b_i)). \quad (4.2)$$

Un caso particular de espacios de sucesiones de Orlicz corresponde al de los espacios clásicos  $\ell_p$ , que son fundamentales en la teoría de los espacios de sucesiones escalares. Se mencionan ahora con el fin de fijar la notación.

Para  $1 \leq p < \infty$ , la función  $H(t) = t^p$  es una función de Young y al correspondiente espacio de sucesiones de Orlicz se le denota por  $\ell_p$ . Así,  $\ell_p$  es el conjunto de sucesiones escalares  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ , tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

En este caso, se denota la norma  $\Pi_H(\cdot)$  por  $\|\cdot\|_p$  y se puede probar que,

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Pi_H((a_i)) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para el caso en que  $p = \infty$ ,  $\ell_{\infty}$  denota al conjunto de las sucesiones acotadas  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ , es decir, aquellas en que  $\sup_i |x_i| < \infty$ , con norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} := \sup_i |x_i|, \quad \text{para } p = \infty.$$

Es bien conocido que  $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , es un espacio de Banach.

A cada número real  $1 \leq p < \infty$  se asocia otro número  $1 < p' \leq \infty$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  y se dice que  $p$  y  $p'$  son exponentes conjugados. Se verifica que el dual del espacio  $\ell_p$  es isométricamente isomorfo al espacio  $\ell_{p'}$ . Como consecuencia se obtiene que los espacios  $\ell_p$  son reflexivos para  $1 < p < \infty$ . Es de anotar, que la función complementaria de  $H(t) = t^p$  no es  $G(t) = t^{p'}$ , pero la función complementaria de  $H_p(t) = \frac{t^p}{p}$  es  $H_{p'}(t) = \frac{t^{p'}}{p'}$ .

Se denota  $c_0$  al subespacio de  $\ell_{\infty}$  que consiste de todas las sucesiones convergentes a 0. El espacio  $c_0$  es de Banach con la norma inducida  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

En los espacios  $\ell_p$  con  $1 \leq p < \infty$ , y en  $c_0$ , la sucesión de vectores  $e_n$ , constituye una base de Schauder, es decir,  $\ell_p$  y  $c_0$  son espacios regulares. Es de resaltar que el espacio  $\ell_{\infty}$  no es regular.

### 4.1.2. Entropía basada en una variable aleatoria

Como ejemplos no tradicionales de funciones de Young, y por tanto de espacios de Orlicz, a continuación se muestra una importante relación entre variables aleatorias de esperanza finita y funciones de Young, relación que puede ser aprovechada para definir el funcional de entropía (2.138) haciendo uso de una función convexa cuya caracterización está determinada por la variable aleatoria mencionada. En el último capítulo, referente a los problemas abiertos, se aprovechan algunas de las relaciones que aquí se presentan para proponer un nuevo camino de relacionar las propiedades estocásticas de un sistema con las características termodinámicas del mismo.

Considérese una FDP  $F_X$  asociada a una variable aleatoria  $X$ , estrictamente positiva con esperanza finita. Defínanse:

$$M_1(t) = \begin{cases} \int_{1/t}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx, & \text{para } t > 0, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$M_2(t) = \int_0^t (1 - F_X(x)) dx.$$

Claramente, la función  $M_2$  está bien definida. En el caso de la función  $M_1$ , el hecho de que esté bien definida dependerá de que la integral converja; para mostrar la convergencia de la integral, téngase en cuenta que  $X$  es una variable aleatoria con esperanza finita, razón por la cual:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt.$$

Así mismo, es posible comprobar que las funciones  $M_1$  y  $M_2$  son no decrecientes. En efecto, dado que  $F$  es continua, se tiene que  $\int_1^{\infty} (1 - F(x)) dx < \infty$ , además para  $t > 0$ ,

$$M_1(t) = \int_{\frac{1}{t}}^1 (1 - F(x)) dx + \int_1^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} (1 - F(x)) dx \right) &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\frac{1}{t}}^1 (1 - F(x)) dx + \int_1^{\infty} (1 - F(x)) dx \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \int_1^{\frac{1}{t}} (1 - F(x)) dx \right) = - \left( 1 - F \left( \frac{1}{t} \right) \right) \left( -\frac{1}{t^2} \right) \\ &= \frac{1 - F \left( \frac{1}{t} \right)}{t^2} \end{aligned}$$

La cual es una cantidad positiva y por tanto  $M_1$  es estrictamente creciente. Para  $M_2$  se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^t (1 - F(x)) dx \right) = 1 - F(t)$$

Cantidad claramente no negativa, con lo cual,  $M_2$  es no decreciente.

Dentro de la propuesta de Naudts para construir el funcional de entropía como en (2.138), se considera una función  $\phi(u)$ , tal que se cumpla la condición  $\int_1^0 \frac{u}{\phi(u)} < \infty$ . Bajo tales condiciones, se puede definir una nueva función creciente y positiva dada por:

$$\chi(v) = \int_0^{1/v} \frac{u}{\phi(u)} du$$

A partir de de la última definición, Naudts introduce en [13] el funcional de entropía:

$$S_{\phi} = \int_{\Gamma} p(x) \ln_{\chi}(p(x)) d\mu,$$

el cual está expresado en la forma dada por (2.138).

Ahora se utilizarán  $M_i(t)$  con  $i \in \{1, 2\}$  para construir dos nuevas funciones, las cuales servirán como parámetros para las funciones logarítmicas deformadas en el sentido de Naudts. Sea  $\Psi(t)$  una función de Young, y defínase  $\Phi_i(t) = M_i(t)\Psi(t)$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Bajo estas condiciones,  $\Phi(t)$  cumple las condiciones suficientes para definir una función logarítmica  $\Phi$ -deformada. Por otro lado, al expresar el funcional de entropía en forma expandida se tiene:

$$S_{\Phi}(p) = \int_{\Gamma} p(x) \ln_{\chi}(p(x)) d\mu = \int_{\Gamma} p(x) \int_1^{1/p(x)} \int_0^{1/v} \frac{dt}{\phi(t)} dv d\mu$$

Si se consideran ahora las expresiones para  $S_{\Phi_{iX}}(p)$  y para  $I_{\Psi}(p)$ , y se tiene en cuenta que bajo las condiciones impuestas sobre  $X$ , se cumple que:

$$\Phi_{iX}(t) \leq E[X]\Psi(t),$$

donde  $E[X]$  es el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , es posible afirmar que:

$$S_{\Phi_{iX}}(p) \geq \frac{S_{\Psi}(p)}{E[X]}$$

Si además, la variable aleatoria tiene la propiedad adicional:

$$0 < E[X] \leq 1$$

Entonces se puede concluir que:

$$S_{\Phi_{iX}}(p) \geq S_{\Psi}(p)$$

Con lo cual se logra, no sólo definir un funcional de entropía para un sistema dado, a partir de una variable aleatoria asociada a un observable propio del sistema, sino también encontrar una cota para tal entropía en términos de una función de Young.

Por otro lado, si se considera:

$$\Phi(t) = tM_1(t)$$

y la entropía en términos de  $\Phi$  como:

$$S_{\phi} = \int_{\Gamma} p(x) \ln_{\Phi}(p(x)) d\mu$$

entonces la entropía queda bien definida.

## 4.2. Entropía y espacios de Orlicz

En el contexto de espacios de Orlicz se pueden obtener algunas cotas para el funcional de entropía de Naudts o el de Tsallis. En principio se mostrarán dos ejemplos que si bien son conocidos, su planteamiento es novedoso por basarse en el uso de la desigualdad de Hölder para las normas en espacios de Orlicz. Más adelante, se usan relaciones entre normas en espacios de sucesiones de Orlicz, para obtener nuevas cotas para el funcional de entropía de Tsallis.

Considérese una función de Young  $H$ , el funcional de entropía  $S_H$  (2.139) y el correspondiente espacio de sucesiones de Orlicz  $\ell_H$ .

En términos de las normas en espacios de sucesiones de Orlicz, la desigualdad de Hölder permite establecer que

$$S_H((p_i)) = \sum_i p_i \left[ \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} |p_i \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right)| \leq \Pi_H((p_i)) \| (\ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right)) \|_{H^*},$$

es decir,

$$S_H((p_i)) \leq \Pi_H((p_i)) \| \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \|_{H^*}. \quad (4.3)$$

Nótese que la expresión (4.3) es válida para cualquier función de Young  $H$ . De (4.3), para  $(p_i)$  con  $\sum_i p_i = 1$  y  $0 < p_i < 1$ , se puede concluir:

1. En el caso que  $H(x) = x$ , se tiene  $\ell_H = \ell_1$ , y por tanto,  $\ell_{H^*} = \ell_\infty$ . De lo anterior, la desigualdad (4.3) se convierte en:

$$S_H(p_i) \leq \left( \sum_i p_i \right) \sup \left\{ \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \right\} = \sup \left\{ \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \right\}.$$

La desigualdad anterior establece un hecho bien conocido, que el funcional de entropía es menor o igual que la máxima sorpresa para un evento asociado a  $(p_i)$ .

2. Si se tiene:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$$

resulta que  $\ell_H = \ell_\infty$  y  $H^*(x) = x$ . En consecuencia  $\ell_{H^*} = \ell_1$ , y por tanto (4.3) establece que:

$$S_H(p_i) \leq \sup\{(p_i)\} \sum_i \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \leq \sum_i \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right).$$

Así, se tiene que el funcional de entropía es una cota inferior para el contenido total de información asociado a  $(p_i)$ .

A continuación se establecen nuevas cotas para el funcional de entropía de Tsallis. Para cada sistema con  $w$  estados, denótese por  $p_i$  la probabilidad en cada estado y  $P = (p_1, p_2, \dots, p_w, 0, 0, 0, \dots)$  para  $(1 \leq i \leq w)$ , así  $\sum p_i = 1$ . Dado un par normalizado de funciones de Young  $(H, H^*)$ , se define el funcional  $G_H(\cdot)$  por:

$$G_H((p_i)) = H(1) \left\| \left( p_i \ln_H \left( \frac{1}{p_i} \right) \right)_{i=1}^w \right\|_H.$$

Con base en la definición anterior, la relación entre  $S_H$  y la entropía de Shannon puede establecerse como sigue. Considerése  $H$  como la función identidad. En tal caso, el  $H$ -logaritmo se reduce al logaritmo usual,  $H(1) = 1$ ,  $\ell_H = \ell_1$  y además,  $\| \cdot \|_H = \| \cdot \|_1$ . Así se puede escribir:

$$G_H((p_i)) = S_S((p_i)).$$

En adelante, cuando se haga referencia a  $H$  como una función de Young, se descartará el caso en que  $H$  sea la función identidad. Por otro lado, para todo  $q \geq 1$ , con  $H_q(t) = \frac{t^q}{q}$ , se tiene:

$$\Pi_{H_q}((a_i)) = \frac{\|(a_i)\|_q}{q^{\frac{1}{q}}},$$

donde  $\|\cdot\|_q$  denota la norma usual en el espacio de sucesiones  $\ell^q$  y

$$\ln_{H_q}(x) = \int_1^x \frac{dw}{H(w)} = \int_1^x \frac{qdw}{w^q} = q(\ln_q(x)).$$

Además, si  $q$  y  $r$  son tales que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , entonces:

$$H_q^*(t) = H_r(t) = \frac{t^r}{r}$$

con  $(H_q, H_r)$  un par normalizado de funciones de Young. De esta manera:

$$\begin{aligned} \|(a_i)\|_{H_r} &= \sup\left\{\sum |a_i b_i| : \sum H_q(b_i) \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\sum |a_i b_i| : \sum \left(\frac{b_i}{q^{\frac{1}{q}}}\right)^q \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\sum |a_i k_i q^{\frac{1}{q}}| : \sum (k_i)^q \leq 1\right\} \quad \text{donde, } k_i = \frac{b_i}{q^{\frac{1}{q}}} \\ &= q^{\frac{1}{q}} \sup\left\{\sum |a_i k_i| : \sum (k_i)^q \leq 1\right\} \\ &= q^{\frac{1}{q}} \sup\left\{\sum |a_i k_i| : \|(k_i)\|_q \leq 1\right\} = q^{\frac{1}{q}} \|a_i\|_r. \end{aligned}$$

Así, para  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  se puede escribir

$$\|(a_i)\|_{H_r} = q^{\frac{1}{q}} \|(a_i)\|_r.$$

La última expresión implica que:

$$\|(a_i)\|_{H_q} = r^{\frac{1}{r}} \|(a_i)\|_r$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} S_{H_q}(p) &= r^{\frac{1}{r}} \|p_i \ln_{H_q}\left(\frac{1}{p_i}\right)\|_q \\ &= q r^{\frac{1}{r}} \|p_i \ln_q\left(\frac{1}{p_i}\right)\|_q \end{aligned}$$

La relación entre  $G_H(p)$  y  $S_q(p)$  queda establecida en los dos resultados siguientes.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $H_q(x) = \frac{x^q}{q}$ , para  $1 < q < 2$ . Si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_w, 0, 0, 0, \dots)$  es sucesión de reales no negativos, con  $\sum_{i=1}^w p_i = 1$ , entonces:*

$$G_{H_q}(p) \leq 2q^{-\frac{1}{q}} S_q(p).$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Por aproximación a la mínima cota superior, existe una sucesión  $(m_i)$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} H^*(m_i) \leq 1$  y además

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^w |p_i [\ln(1/p_i)]_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(\beta_i) \leq 1 \right\} < \sum_{i=1}^w |p_i [\ln(1/p_i)] m_i| + \epsilon.$$

Por otra parte  $\sum_{i=1}^{\infty} H^*(m_i) \leq 1$  implica  $\Pi_{H^*}((m_i)) \leq 1$ . Ahora,

$$\begin{aligned} G_H(p) &= H(1) \|(p_i [\ln_H(1/p_i)])\|_H \\ &= \frac{1}{q} \|(p_i q [\ln_q(1/p_i)])\|_H \\ &= \|(p_i [\ln_q(1/p_i)])\|_H \\ &= H(1) \sup \left\{ \sum_{i=1}^w |p_i [\ln_q(1/p_i)]_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(\beta_i) \leq 1 \right\} \\ &< \sum_{i=1}^w |p_i [\ln_q(1/p_i)] m_i| + \epsilon. \end{aligned}$$

Si  $r$  es el exponente conjugado de  $q$ , es decir,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , entonces de lo anterior tenemos que  $H^*(t) = \frac{t^r}{r}$  y además,

$$\begin{aligned} G_H(p) &< \sum_{i=1}^w |p_i [\ln_q(1/p_i)] m_i| + \epsilon \\ &\leq 2\Pi_H((p_i [\ln_q(1/p_i)])) \Pi_{H^*}((m_i)) + \epsilon \\ &\leq 2\Pi_H((p_i [\ln_q(1/p_i)])) + \epsilon \\ &= 2 \frac{\|(p_i [\ln_q(1/p_i)])\|_q}{q^{\frac{1}{q}}} + \epsilon \\ &\leq 2q^{-\frac{1}{q}} \|(p_i [\ln_q(1/p_i)])\|_q + \epsilon \\ &\leq 2q^{-\frac{1}{q}} \|(p_i [\ln_q(1/p_i)])\|_1 + \epsilon \\ &= 2q^{-\frac{1}{q}} S_q((p_i)) + \epsilon \end{aligned}$$

Así  $G_H(p) < 2q^{-\frac{1}{q}} S_q(p) + \epsilon$  para una elección arbitraria de  $\epsilon$  con lo cual  $G_H(p) \leq 2q^{-\frac{1}{q}} S_q(p)$ . □

Aunque la desigualdad  $S_q(p) \leq G_{H_q}(p)$  no siempre es cierta, dicha desigualdad se cumple cuando  $w \leq r := (1 - \frac{1}{q})^{-1}$ , es decir, siempre que  $q \leq \frac{w}{w-1}$ , lo que se establece mediante el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.2.** *Considérese  $H_q(x) = \frac{x^q}{q}$ , para  $1 < q < 2$  tal que  $w \leq r$ , donde  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ . Si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_w, 0, 0, 0, \dots)$  es una sucesión de reales no negativos, con  $\sum_{i=1}^w p_i = 1$  entonces:*

$$S_q(p) \leq G_{H_q}(p).$$

*Demostración.* Considérese la sucesión  $b = (b_i)$  tal que  $b_i = 1$  for  $i = 1, \dots, w$  y  $b_i = 0$  for  $i > w$ . Sean además  $H = H_q$  and  $H^* = H_r$  con  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ . Por tanto se satisface

$$\sum_{i=1}^{\infty} H^*(|b_i|) = \sum_{i=1}^w \frac{|b_i|^r}{r} = \sum_{i=1}^w \frac{1^r}{r} = \frac{w}{r} \leq 1,$$

y así:

$$\begin{aligned} G_H(p) &= H(1) |(p_i [\ln_H(1/p_i)])|_H \\ &= \frac{1}{q} \sup \left\{ \sum_{i=1}^w |p_i [\ln_H(1/p_i)]_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(|\beta_i|) \leq 1 \right\} \\ &\geq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} |p_i [\ln_H(1/p_i)] b_i| \\ &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^w p_i [\ln_H(1/p_i)] = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} |p_i q [\ln_q(1/p_i)] b_i| \\ &= \sum_{i=1}^w p_i [\ln_q(1/p_i)] \\ &= S_q(p) \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene  $S_q(p) \leq G_H(p)$ . □

Un caso particular se expone en el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.1.** *Sea  $H_q(x) = \frac{x^q}{q}$ , para  $1 < q < 2$ . Si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_w, 0, 0, 0, \dots)$  es una sucesión de reales no negativos, con  $\sum_{i=1}^w p_i = 1$  entonces*

$$S_q(p) \leq G_{H_q}(p) \leq 2q^{-\frac{1}{q}} S_q(p) \leq 2S_q(p).$$



## Capítulo 5

# E. D. no lineales y $q$ -exponenciales

A continuación se presentan resultados sobre métodos de solución, en el contexto de  $q$ -deformadas, de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes. Aunque a primera vista este capítulo no hace parte del estudio presentado sobre temas de mecánica estadística, en la literatura se encuentran aplicaciones de la entropía  $S_q$  de Tsallis a la solución de ecuaciones diferenciales no lineales, entre las que se destacan la solución de la ecuación Fokker-Plank en la forma generalizada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi \delta}{\partial x^2}; \quad \delta \in \mathbb{R}$$

o la solución de la ecuación Thomas-Fermi:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^{-1/2} y^{3/2}$$

Si bien dichas aplicaciones, u otras de igual interés, no son desarrolladas en el presente trabajo, el contenido siguiente es una invitación para estudiar nuevos desarrollos y aplicaciones de las funciones  $q$ -deformadas en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales.

### 5.1. E.D. no lineal con coeficientes constantes de orden 2

En [24] se muestra, a manera de comentario, una aplicación de las funciones  $q$ -generalizadas para encontrar la solución a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden asociada al oscilador:

$$\frac{d^2 [y(t)]^h}{dt^2} + \gamma^2 [y(t)]^n = 0 \tag{5.1}$$

Se puede obtener una solución para (5.1) en la forma  $y(t) = \exp_q(ikt)$ , bajo ciertas restricciones del  $q$ -índice y la constante  $k$ , las cuales, como era de esperarse, dependen de los valores de  $h$  y  $n$ , y del coeficiente  $\gamma$ . A continuación se presentan dos generalizaciones para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. La propuesta expuesta en (5.1) será un caso particular de uno de estos dos resultados.

Antes de mostrar los resultados para la solución de una E.D. de segundo orden no lineal con coeficientes constantes, es importante definir el tipo de ecuaciones a las que se hace referencia. Como se ha mencionado al inicio del presente capítulo, dos tipos de no linealidad se estudiarán

a continuación. El primero de ellos está dado por la E.D.

$$a \frac{d^2[y(t)]^h}{dt^2} + b \frac{d[y(t)]^m}{dt} + c[y(t)]^n = 0 \quad \text{Ecuación Tipo 1} \quad (5.2)$$

Posteriormente se estudiarán las soluciones para la E.D.

$$a \left( \frac{d^2[y(t)]}{dt^2} \right)^h + b \left( \frac{d[y(t)]}{dt} \right)^m + c[y(t)]^n = 0 \quad \text{Ecuación Tipo 2} \quad (5.3)$$

En ambos casos  $a, b, c, h, m, n$  son constantes reales.

Considérese la ecuación diferencial definida por (5.2). En tal caso se puede establecer la siguiente:

**Proposición 5.1.1.** *Dada la ecuación diferencial de tipo 1 definida por (5.2), la sustitución*

$$y(t) = \exp_q(kt) \quad (5.4)$$

con  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$ , convierte a (5.2) en una ecuación polinómica en la variable  $k$ ,  $p(k) = 0$ , siempre que se cumpla:

$$q = 1 + \frac{n-h}{2} \quad \text{y} \quad m = \frac{n+h}{2} \quad (5.5)$$

En tal caso, los valores de  $k$  para obtener las soluciones en la forma  $y(t) = \exp_q(kt)$  para (5.2) están dados por:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{8ahc}{n+h}}}{2ah} \quad (5.6)$$

El número de soluciones estará dado por el número de raíces complejas diferentes.

*Demostración.* Utilizando el hecho de que:

$$\frac{d[\exp_q(t)]}{dt} = [\exp_q(t)]^q$$

se tiene:

$$\frac{d[\exp_q(kt)]^m}{dt} = km[\exp_q(kt)]^{q+m-1} \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2[\exp_q(kt)]^h}{dt^2} = k^2 h(q+h-1)[\exp_q(kt)]^{2q+h-2} \quad (5.8)$$

y reemplazando (5.8), la expresión (5.2) se convierte en:

$$a[k^2 h(q+h-1)[\exp_q(kt)]^{2q+h-2}] + b[km[\exp_q(kt)]^{q+m-1}] + c[\exp_q(kt)]^n = 0 \quad (5.9)$$

Por otro lado, si se tiene en cuenta que:

$$t \neq \frac{1}{k(q-1)}$$

entonces  $\exp_q(kt) \neq 0$  y  $\exp_q(kt) < \infty$ . Además, para:

$$q = 1 + \frac{n-h}{2} \quad \text{y} \quad m = \frac{n+h}{2}$$

se cumple

$$2q + h - 2 = q + m - 1 = n \quad \text{y} \quad q + h - 1 = \frac{n + h}{2}$$

y por tanto, la expresión (5.9) implica que:

$$ah \left( \frac{n + h}{2} \right) k^2 + b \left( \frac{n + h}{2} \right) k + c = 0 \quad \text{o también} \quad ahk^2 + bk + \frac{2c}{n + h} = 0 \quad (5.10)$$

cuya solución para  $k$  está dada por:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{8ahc}{n+h}}}{2ah}. \quad (5.11)$$

□

De la proposición anterior se deduce el siguiente corolario, el cual establece la propuesta hecha en [24]

**Corolario 5.1.1.** *Dada la ecuación diferencial no lineal asociada al oscilador:*

$$\frac{d^2[y(t)]^h}{dt^2} + \gamma^2[y(t)]^n = 0$$

*Dicha ecuación diferencial tiene como solución particular la función:*

$$y(t) = \exp_q(kt) \quad (5.12)$$

Donde:

$$q = 1 + \frac{n - h}{2} \quad \text{y} \quad k^2 = -\frac{2\gamma^2}{h(n + h)} \quad (5.13)$$

*Observación 11.* Como era de esperarse, si dos de los exponentes  $h, m, n$  son iguales entre si, el tercer exponente también sera igual a estos y  $q = 1$ , con lo cual, la solución será de la forma  $y = \exp(kt/h)$ . La solución puede encontrarse por el método propuesto aquí, o mediante la sustitución  $u = y^n$  y el proceso usual para ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

*Observación 12.* Cuando  $k$  es real, la solución en la forma  $y = \exp_q(kt)$  para la ecuación diferencial (5.2), encontrada mediante el proceso anterior, está definida en uno de dos intervalos abiertos a saber:

$$\left( -\infty, \frac{1}{k(q-1)} \right) \quad \text{ó} \quad \left( \frac{1}{k(q-1)}, \infty \right)$$

Se escoge el primer intervalo en el caso que  $k(q-1) > 0$ ; si por el contrario  $k(q-1) < 0$ , el intervalo de solución sería el segundo.

**Ejemplo 5.1.1.** *Considérense las ecuaciones:*

$$1. \quad 2 \frac{d^2[y]^3}{dt^2} + 6 \frac{d[y]^{5/2}}{dt} + 3[y]^2 = 0$$

$$2. \quad 2 \frac{d^2[y]^3}{dt^2} - 6 \frac{d[y]^{5/2}}{dt} + 3[y]^2 = 0$$

$$3. \quad \frac{d^2[y]^3}{dt^2} + 25[y]^2 = 0$$

$$4. \quad 2 \frac{d^2[y]^3}{dt^2} + 6 \frac{d[y]^3}{dt} + 3[y]^3 = 0$$

En el primer caso se tiene  $h = 3, n = 2$  y claramente

$$m = \frac{n + h}{2} = \frac{5}{2}.$$

Además,

$$q = 1 + \frac{n - h}{2} = 1.5.$$

Por tanto,

$$k = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

y se tienen así dos soluciones particulares a la ecuación diferencial

$$2 \frac{d^2[y]^3}{dt^2} + 6 \frac{d[y]^{5/2}}{dt} + 3[y]^2 = 0$$

que pueden escribirse como:

$$y(t) = \exp_{1.5} \left[ \frac{-5 + \sqrt{5}}{10} t \right] = \frac{(t(\sqrt{5} - 1) - 4\sqrt{5})^2}{80}$$

y

$$y(t) = \exp_{1.5} \left[ \frac{(-5 - \sqrt{5})}{10} t \right] = \frac{(t(\sqrt{5} + 1) - 4\sqrt{5})^2}{80}.$$

Cada solución está definida en el intervalo abierto  $I_i = \left(-\infty, \frac{1}{k_i(q-1)}\right)$ , donde:

$$i \in \{1, 2\} \quad y \quad k_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{10}, \quad k_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{10}$$

En el segundo caso, el cambio en el índice del coeficiente  $b$  no modifica los valores para  $q$  y para el discriminante de las soluciones para  $k$ . Sin embargo, el signo de  $k$  se modifica en ambas soluciones, y por tanto, también el signo de  $\frac{1}{k(q-1)}$ . En vista de ello, las soluciones estarían dadas en este caso por:

$$y(t) = \exp_{1.5} \left[ \frac{5 + \sqrt{5}}{10} t \right] = \frac{(t(\sqrt{5} + 1) + 4\sqrt{5})^2}{80} \quad \text{para } t \in \left(\frac{1}{k_1(q-1)}, \infty\right)$$

y

$$y(t) = \exp_{1.5} \left[ \frac{5 - \sqrt{5}}{10} t \right] = \frac{(t(\sqrt{5} - 1) + 4\sqrt{5})^2}{80} \quad \text{para } t \in \left(\frac{1}{k_2(q-1)}, \infty\right)$$

para:

$$k_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad y \quad k_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

El ejemplo 3 tiene una solución asociada a valores complejos de  $k$ . Aplicando el resultado del corolario (5.1.1) se tiene:

$$q = 1.5, \quad k = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

La solución en este caso se toma como:

$$y(t) = \exp_{1.5} \left( \sqrt{\frac{10}{3}} it \right)$$

si se utilizan (2.62), la solución puede escribirse en términos de  $\cos_q(t)$  y  $\operatorname{sen}_q(t)$ :

$$y = \cos_{1.5} \left( \frac{\sqrt{30}}{3} t \right) + i \operatorname{sen}_{1.5} \left( \frac{\sqrt{30}}{3} t \right).$$

Si además se hace uso de la proposición (2.1.10), entonces la expresión se convierte en:

$$y(t) = \sqrt{(1 + (1 - q)^2 t^2)^{\frac{1}{1-q}}} \left( \cos \left( \frac{\arctan((1 - q) \frac{\sqrt{30}}{3} t)}{1 - q} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\arctan((1 - q) \frac{\sqrt{30}}{3} t)}{1 - q} \right) \right)$$

y al reemplazar  $q = 1.5$  se tiene finalmente:

$$y(t) = \frac{4}{t^2 + 4} \left[ \cos \left( -2 \arctan \left( \frac{-\sqrt{30}t}{6} \right) \right) + i \operatorname{sen} \left( -2 \arctan \left( \frac{-\sqrt{30}t}{6} \right) \right) \right]$$

Es de anotar que en este caso, a diferencia del caso usual  $q = 1$ , las funciones  $\cos_q(kt)$  y  $\operatorname{sen}_q(kt)$  en forma individual no son soluciones particulares de la ecuación diferencial.

En el último caso, se tiene  $n = h = m$ . Así  $q = 1$  y se tienen dos soluciones dadas por:

$$y(t) = \exp \left( \frac{(-3 + \sqrt{3})t}{6} \right)$$

y

$$y(t) = \exp \left( \frac{(-3 - \sqrt{3})t}{6} \right)$$

Ambas soluciones válidas para  $t \in (-\infty, \infty)$

Por otro lado, para la ecuación diferencial de tipo 2 definida por (5.3) se tiene la siguiente:

**Proposición 5.1.2.** Dada la ecuación diferencial no lineal de segundo orden definida por (5.3), la sustitución

$$y(t) = \exp_q(kt) \tag{5.14}$$

con  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$ , convierte a (5.3) en una ecuación algebraica en la variable  $k$ ,  $p(k) = 0$ , siempre que se den las siguientes relaciones:

$$q = \frac{n + h}{2h} \quad y \quad m = \frac{2nh}{n + h} \tag{5.15}$$

En tal caso, el número de soluciones particulares para (5.3) que se pueden encontrar mediante la sustitución (5.14) es igual al número de soluciones complejas diferentes de  $p(k) = 0$

*Demostración.*

$$\frac{d[\exp_q(kt)]}{dt} = k[\exp_q(t)]^q \quad y \quad \frac{d^2[\exp_q(kt)]}{dt^2} = qk^2[\exp_q(t)]^{2q-1} \tag{5.16}$$

Con lo cual

$$\left(\frac{d[\exp_q(kt)]}{dt}\right)^m = (k[\exp_q(kt)]^q)^m = k^m[\exp_q(kt)]^{mq} \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{d^2[\exp_q(kt)]}{dt^2}\right)^h = (qk^2[\exp_q(t)]^{2q-1})^h = q^h k^{2h}[\exp_q(kt)]^{h(2q-1)} \quad (5.18)$$

Pero

$$q = \frac{n+h}{2h} \quad y \quad m = \frac{2nh}{n+h}$$

convirten a (5.17) y (5.18) en:

$$\left(\frac{d[\exp_q(kt)]}{dt}\right)^m = k^m[\exp_q(kt)]^n \quad y \quad \left(\frac{d^2[\exp_q(kt)]}{dt^2}\right)^h = q^h k^{2h}[\exp_q(kt)]^n \quad (5.19)$$

Reemplazando los resultados de (5.19) en (5.3), se tiene:

$$a[q^h k^{2h}[\exp_q(kt)]^n] + b[k^m[\exp_q(kt)]^n] + c[\exp_q(kt)]^n = 0$$

Y dado que, para  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$  se cumple que  $\exp_q(kt) \neq 0$  y  $\exp_q(kt) < \infty$ , se tiene entonces:

$$aq^h k^{2h} + bk^m + c = 0 \quad (5.20)$$

o en forma equivalente

$$a\left(\frac{n+h}{2h}\right)^h k^{2h} + bk^{\frac{2nh}{n+h}} + c = 0 \quad (5.21)$$

La expresión  $p(k) = a\left(\frac{n}{m}\right)^h k^{2h} + bk^m + c$  dada por (5.21) define una expresión algebraica en la variable  $k$ . Si  $k$  es una raíz de  $p(k)$ , entonces el proceso anterior lleva a que  $\exp_q(kt)$  sea solución de (5.3).  $\square$

*Observación 13.* Si  $n = m$ , entonces  $h = n$  y  $q=1$ . Al igual que en las ecuaciones de tipo 1, la solución en este caso se reduce a la exponencial usual. En este caso se encontrarán  $2h$  soluciones complejas a la ecuación auxiliar en la variable  $k$ . Para aquellas soluciones no repetidas se puede obtener una solución en la forma  $y(t) = \exp_1(kt)$ .

*Observación 14.* Los intervalos de solución para la ecuación diferencial del tipo 2 se escogen de forma similar a los intervalos de solución para la ecuación diferencial de tipo 1.

*Observación 15.* La siguiente tabla muestra la forma de la ecuación algebraica  $p(k) = 0$  que se obtiene para algunos valores de  $h$  y  $n$ .

$h$	$n$	$m$	$q$	$p(k) = 0$	Forma plinómica mediante cambio de variable
-3	-2	$-\frac{12}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{216}{125}ak^{-6} + bk^{-\frac{12}{5}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^5 + b\bar{k}^2 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{216}{125}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{6}{5}}\right)$
-2	-3	$-\frac{12}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{16}{25}ak^{-4} + bk^{-\frac{12}{5}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^5 + b\bar{k}^3 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{16}{25}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{4}{5}}\right)$
-3	-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{8}ak^{-6} + bk^{-\frac{3}{2}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^4 + b\bar{k} + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{27}{8}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{3}{2}}\right)$
-1	-3	$-\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}ak^{-2} + bk^{-\frac{3}{2}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^4 + b\bar{k}^3 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{1}{2}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{1}{2}}\right)$
-2	-1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{9}ak^{-4} + bk^{-\frac{4}{3}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^3 + b\bar{k} + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{16}{9}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{4}{3}}\right)$
-1	-2	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}ak^{-2} + bk^{-\frac{4}{3}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^3 + b\bar{k}^2 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{2}{3}a, \quad \bar{k} = k^{-\frac{2}{3}}\right)$
1	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}ak^2 + bk^{\frac{4}{3}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^3 + b\bar{k}^2 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{3}{2}a, \quad \bar{k} = k^{\frac{2}{3}}\right)$
2	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}ak^4 + bk^{\frac{4}{3}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^3 + b\bar{k} + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{9}{16}a, \quad \bar{k} = k^{\frac{4}{3}}\right)$
1	3	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{2}{a}k^2 + bk^{\frac{3}{2}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^4 + b\bar{k}^3 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = 2a, \quad \bar{k} = k^{\frac{4}{3}}\right)$
3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}ak^6 + bk^{\frac{3}{2}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^4 + b\bar{k} + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{8}{27}a, \quad \bar{k} = k^{\frac{3}{2}}\right)$
2	3	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}ak^4 + bk^{\frac{12}{5}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^5 + b\bar{k}^3 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{25}{16}a, \quad \bar{k} = k^{\frac{4}{5}}\right)$
3	2	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{125}{216}ak^6 + bk^{\frac{12}{5}} + c = 0$	$\bar{a}\bar{k}^5 + b\bar{k}^2 + c = 0 \quad \left(\bar{a} = \frac{125}{216}a, \quad \bar{k} = k^{\frac{6}{5}}\right)$

## 5.2. E.D. no lineal de orden superior con coeficientes constantes

En esta sección se estudiará la forma de la solución general a la E.D. con coeficientes constantes de orden  $n$ . El tipo de ecuaciones diferenciales que se examinarán son similares en su no linealidad a las expuestas en (5.2) y (5.3). Un caso particular de estas ecuaciones es mencionado en [25].

### Ecuación diferencial de orden $n$ tipo 1

Se llamará ecuación diferencial no lineal de orden  $n > 2$  con coeficientes constantes de tipo 1, a la ecuación de la forma:

$$a_n \frac{d^n y^{\alpha_n}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y^{\alpha_{n-1}}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy^{\alpha_1}}{dt} + a_0 y^{\alpha_0} = 0 \quad (5.22)$$

Para establecer una solución del tipo  $\exp_q(kt)$  para (5.22) se tiene la siguiente:

**Proposición 5.2.1.** *Considérese la ecuación diferencial (5.22). Si dicha ecuación puede escribirse en forma compacta como:*

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y^{(n-i)(q-1)+\alpha_n} = 0 \quad (5.23)$$

donde:

$$q = 1 + \alpha_{n-1} - \alpha_n \quad (5.24)$$

entonces, la sustitución  $y = \exp_q(kt)$ , para  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$ , convierte a (5.22) en una ecuación algebraica en la variable  $k$ . En tal caso, los valores de  $k$  para los cuales  $\exp_q(kt)$  satisfacen (5.23) se encuentran resolviendo la ecuación algebraica auxiliar:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i k^i \prod_{j=n-i}^{n-1} \alpha_n + i(q-1) \right) + a_0 = 0 \quad (5.25)$$

y tomando las raíces complejas diferentes de (5.25)

*Demostración.* En primer lugar, nótese que la regla de la cadena y (2.56) permiten escribir:

$$\frac{d^i}{dt^i} [\exp_q(kt)]^m = \left[ k^i \prod_{j=0}^{i-1} m + j(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{m+i(q-1)}; \quad i \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{R} \quad (5.26)$$

Para ver esto, es claro que para  $i = 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\exp_q(kt)]^m &= m [\exp_q(kt)]^{m-1} [\exp_q(kt)]^q k \\ &= km [\exp_q(kt)]^{m+(q-1)} \end{aligned}$$

Suponiendo ahora que para  $i = N$  (5.26) se cumple, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} [\exp_q(kt)]^m &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[ k^N \prod_{j=0}^{N-1} m + j(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{m+N(q-1)} \right\} \\ &= \left[ k^N \prod_{j=0}^{N-1} m + j(q-1) \right] [m + N(q-1)] [\exp_q(kt)]^{m+N(q-1)-1} [\exp_q(kt)]^q k \\ &= \left[ k^{N+1} \prod_{j=0}^N m + j(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{m+(N+1)(q-1)} \end{aligned}$$

Con lo cual, si (5.26) es válida para  $i = N$ , también lo es para  $i = N + 1$ .

Supóngase ahora que  $y = \exp_q(kt)$ . Si se tienen en cuenta (5.23), (5.24) y (5.26), entonces:

$$\frac{d^n}{dt^n} [\exp_q(kt)]^{\alpha_n} = \left[ k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_n + i(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{\alpha_n+n(q-1)} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\exp_q(kt)]^{\alpha_{n-1}} &= \left[ k^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-1} + i(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{\alpha_{n-1}+(n-1)(q-1)} \\ &= \left[ k^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_n + i(q-1) \right] [\exp_q(kt)]^{\alpha_n+n(q-1)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [exp_q(kt)]^{\alpha_1} &= \alpha_1 k [exp_q(kt)]^{\alpha_1-1} [exp_q(kt)]^q \\ &= [k(\alpha_n + (n-1)(q-1))] [exp_q(kt)]^{\alpha_n+n(q-1)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$[exp_q(kt)]^{\alpha_0} = [exp_q(kt)]^{\alpha_n+n(q-1)} \quad (5.30)$$

Las expresiones (5.27) a (5.30) permiten que (5.23) se pueda escribir como:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y^{(n-i)(q-1)+\alpha_n} = \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i k^i \prod_{j=n-i}^{n-1} \alpha_n + i(q-1) \right) + a_0 \right] [exp_q(kt)]^{\alpha_n+n(q-1)} = 0 \quad (5.31)$$

Y considerando que para  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$  se tiene  $exp_q(kt) \neq 0$  y  $exp_q(kt) < \infty$ , se concluye que:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i k^i \prod_{j=n-i}^{n-1} \alpha_n + i(q-1) \right) + a_0 = 0 \quad (5.32)$$

con lo cual se completa la prueba.  $\square$

### Ecuación diferencial de orden $n$ tipo 2

Se llamará ecuación diferencial no lineal de orden  $n > 2$  con coeficientes constantes de tipo 2, a la ecuación de la forma:

$$a_n \left( \frac{d^n y}{dt^n} \right)^{\alpha_n} + a_{n-1} \left( \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 \left( \frac{dy}{dt} \right)^{\alpha_1} + a_0 y^{\alpha_0} = 0 \quad (5.33)$$

A continuación se da una proposición, similar a la proposición (5.2.1), que caracteriza las soluciones del tipo  $exp_q(kt)$  para (5.33).

**Proposición 5.2.2.** *Considérese la ecuación diferencial (5.33). Si dicha ecuación puede escribirse en forma compacta como:*

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{d^i y}{dt^i} \right)^{\frac{[nq-(n-1)]}{[iq-(i-1)]} \alpha_n} = 0 \quad (5.34)$$

donde:

$$q = \frac{(n-1)\alpha_n - (n-2)\alpha_{n-1}}{n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}} \quad (5.35)$$

entonces, la sustitución  $y = exp_q(kt)$ , para  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$ , convierte a (5.33) en una ecuación algebraica en la variable  $k$ . En tal caso, los valores de  $k$  para los cuales  $exp_q(kt)$  satisfacen (5.34) son las raíces complejas diferentes de la ecuación algebraica auxiliar:

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j [k^j Q_{(j-1)}(q)]^{\frac{[nq-(n-1)]}{[iq-(i-1)]} \alpha_n} \right) + a_0 = 0 \quad (5.36)$$

Donde  $Q_j(q)$  está definido por la expresión (2.55)

*Demostración.* Para la prueba de la proposición (5.2.2) se procede de manera análoga a como se procedió en prueba de la proposición (5.2.1). En primer lugar, para  $i \in \mathbb{N}$  y  $m \in \mathbb{R}$ , la regla de la cadena y (2.56) permiten escribir:

$$\left[ \frac{d^i}{dt^i} \exp_q(kt) \right]^m = [k^i Q_{i-1}(q) (\exp_q(kt))^{iq-(i-1)}]^m \quad (5.37)$$

Si se supone que  $y = \exp_q(kt)$  y se consideran (5.34), (5.35) y (5.37) se tiene:

$$\left[ \frac{d^n}{dt^n} \exp_q(kt) \right]^{\alpha_n} = [k^n Q_{n-1}(q) (\exp_q(kt))^{nq-(n-1)}]^{\alpha_n} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \exp_q(kt) \right]^{\alpha_{n-1}} &= [k^{n-1} Q_{n-2}(q) (\exp_q(kt))^{(n-1)q-(n-2)}]^{\alpha_{n-1}} \\ &= [k^{n-1} Q_{n-2}(q)]^{\left( \frac{nq-(n-1)}{(n-1)q-(n-2)} \right) \alpha_n} [(\exp_q(kt))]^{[nq-(n-1)] \alpha_n} \end{aligned} \quad (5.39)$$

⋮

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \exp_q(kt) \right]^{\alpha_1} &= [k (\exp_q(kt))]^{q \alpha_1} \\ &= [k (\exp_q(kt))]^{[nq-(n-1)] \alpha_n} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$[\exp_q(kt)]^{\alpha_0} = [\exp_q(kt)]^{[nq-(n-1)] \alpha_n} \quad (5.41)$$

Las expresiones (5.38) a (5.41) permiten escribir (5.34) como:

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{d^i y}{dt^i} \right)^{\frac{[nq-(n-1)] \alpha_n}{[iq-(i-1)] \alpha_n}} = \left[ \left( \sum_{j=1}^n a_j [k^j Q_{(j-1)}(q)]^{\frac{[nq-(n-1)] \alpha_n}{[iq-(i-1)] \alpha_n}} \right) + a_0 \right] [\exp_q(kt)]^{[nq-(n-1)] \alpha_n} = 0 \quad (5.42)$$

Para  $t \neq \frac{1}{k(q-1)}$  se tiene  $\exp_q(kt) \neq 0$  y  $\exp_q(kt) < \infty$ , con lo cual:

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j [k^j Q_{(j-1)}(q)]^{\frac{[nq-(n-1)] \alpha_n}{[iq-(i-1)] \alpha_n}} \right) + a_0 = 0 \quad (5.43)$$

Obteniendo así el resultado que se buscaba.

□

Observación 16. En cuanto al uso de transformada de Laplace para la solución de ecuaciones diferenciales, las dificultades que se presentan hacen que el método sea inoperante. Considerando la siguiente tabla de transformadas:

Función	Transformada
$f(t)$	$\int_0^\infty f(t)[exp_q(-t)]^s dt$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 \mathcal{L}_q\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}_q\{f_2(t)\}$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F_{q'}(s/a)$ con $q' = 1 - (1 - q)/a$
$[exp_q(-t)]^{-s_0} f(t)$	$F_q(s - s_0)$
$f'(t)$	$s \mathcal{L}_q \left\{ \frac{f(t)}{1 - (1 - q)t} \right\} - f(0)$
$f''(t)$	$s(s - (1 - q)) \mathcal{L}_q \left\{ \frac{f(t)}{[1 - (1 - q)t]^2} \right\} - s f'(0) - f(0)$
1	$\frac{1}{s + 1 - q}$ con $s > q - 1$ si $q \geq 1$ , $s > 0$ si $q < 1$
$t^{\alpha - 1}$	$\Gamma(\alpha) \frac{\Gamma(\frac{s}{q-1} - \alpha)}{(q-1)^\alpha \Gamma(\frac{s}{q-1})}$ con $s > \alpha(q - 1)$ para $q \geq 1$
$t^{\alpha - 1}$	$\Gamma(\alpha) \frac{\Gamma(\frac{s}{1-q} + 1)}{(1-q)^\alpha \Gamma(\frac{s}{1-q} + \alpha + 1)}$ con $s > 0$ para $q < 1$
$exp_{q'}(at)$	$\frac{1}{s + 1 - q - a}$ con $s > a + q - 1$ para $q > 1$ y $s > 0$ para $q < 1$
$exp_{q>2}(at)$	$\frac{1}{a(q-2)} {}_2F_1 \left( \frac{s}{q-1}, 1; 2 - \frac{1}{q-1}; -a^{-1} \right)$ con $s > 0$ $a > 1$
$exp_{q>1}(-at)$	$\frac{1}{s+2-q} {}_2F_1 \left( \frac{1}{q-1}, 1; \frac{s+1}{q-1}; 1 - a \right)$ con $s > q - 2$ $0 < a < 2$
$exp_{q<1}(\pm at)$	$\frac{1}{s+1-q} {}_2F_1 \left( \frac{-1}{1-q}, 1; \frac{s}{1-q} + 2; \mp a \right)$ con $s > 0$ $ a  < 1$
$exp_{q<1}(-at)$	$\frac{1}{a(2-q)} {}_2F_1 \left( \frac{-s}{1-q}, 1; \frac{1}{1-q} + 2; a^{-1} \right)$ con $s > 0$ $a > 1$

**Notas:**

1. En la fila 10  $q' = 1 + (1 - q)/a$ ;  $q \neq 1$
2. La función  ${}_2F_1$  que aparece en las diferentes expresiones para la transformada de  $exp_q(at)$  es la función gaussiana hipergeométrica:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} x^n$$

Donde  $(a)_n$  es el símbolo de Pochhammer:

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & si \ n=0 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & si \ n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

De las expresiones para las transformadas de derivadas se puede escribir:

para la primera derivada:

$$\mathcal{L}_q\{f'(t)\} = s\mathcal{L}_q\{[exp_q(-t)]^{-1}f(t)\} - f(0)$$

mientras que para la segunda derivada:

$$\mathcal{L}_q\{f''(t)\} = s(s - (1 - q))\mathcal{L}_q\{[exp_q(-t)]^{-2}f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Estas expresiones pueden escribirse, haciendo uso de la propiedad de traslación como:

$$\mathcal{L}_q\{f'(t)\} = sF_q(s - 1) - f(0) \quad (5.44)$$

$$\mathcal{L}_q\{f''(t)\} = s(s - (1 - q))F_q(s - 2) - sf(0) - f'(0) \quad (5.45)$$

La forma para  $F_q(\cdot)$  en cada una de las expresiones anteriores, dificulta el cálculo de  $f(t)$ , dado que el argumento de la transformada de  $f(t)$  cambia de  $s$  a  $(s - n)$ , cada vez que se toma transformada a la derivada de orden  $n$  de  $f(t)$ . Por otro lado, las expresiones para  $\mathcal{L}_q\{e_q(at)\}$  que aparecen en la tabla de transformadas, hacen del cálculo de ellas una tarea bastante dispendiosa. Basta intentar resolver el sencillo problema con valores iniciales:

$$y''(t) + y(t) = exp_{1.5}(-2t), \quad \text{sujeito a } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Al aplicar transformada de Laplace, con  $q = 1.5$  se tiene:

$$s(s + 0.5)Y_{1.5}(s - 2) + Y_{1.5}(s) = \frac{1}{s + 0.5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n(1)_n}{n!(2(s + 1))_n} (-1)^n \quad (5.46)$$

Simplificando el lado derecho, la expresión se reduce a:

$$s(s + 0.5)Y_{1.5}(s - 2) + Y_{1.5}(s) = \frac{1}{s + 0.5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n}{(2(s + 1))_n} (-1)^n \quad (5.47)$$

Expresión que ofrece serias dificultades para el despeje de  $y(t)$ , dado el desfase en el argumento de  $Y(\cdot)$ .

# Conclusiones

El presente trabajo ha mostrado la importancia de los formalismos de Naudts y de Tsallis en el desarrollo actual de la termoestadística generalizada, para lo cual se mostraron tres aplicaciones, en campos diferentes, de tal formalismo, y las cuales son de gran relevancia: la obtención del índice entrópico  $q$ , la obtención de cotas para las entropías de Tsallis y Shannon, y la solución de dos tipos de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes.

En primer lugar, a partir de la definición de las funciones  $\phi$ -deformadas  $exp_\phi$ ,  $ln_\phi$ , se ha establecido la particularización a las  $q$ -deformadas  $exp_q$  y  $ln_q$ , definiendo un álgebra para tales funciones y estableciendo algunas de las propiedades analíticas de las mismas, que junto con la  $q$ -álgebra proporcionan elementos suficientes para posteriores desarrollos propios de la mecánica estadística.

De acuerdo con el artículo [20], del mismo autor, la primera de las aplicaciones que se presentó, está relacionada con la obtención del índice entrópico  $q$ . Para ello, se construyó inicialmente una biyección, con la cual se identificó la densidad de probabilidad de la energía asociada a un observable  $u$ , obtenida a partir de evidencia experimental que permite conjeturar que la termoestadística no extensiva de Tsallis puede ser aplicada para analizar el comportamiento de  $u$ , y la densidad de probabilidad teórica que se debe obtener para un sistema en el ensamble canónico, que en este caso será el medio con turbulencia en el que se estudia el comportamiento de  $u$ . Aprovechando la propiedad de pérdida de memoria caracterizada por Ghitany en [1], haciendo uso de la biyección mencionada, y teniendo en cuenta que la densidad de probabilidad para el sistema en equilibrio se da en términos del índice  $q$ , se encuentra el criterio para la obtención de tal índice.

Por otro lado, como parte del trabajo [23] del mismo autor, se logró establecer algunas cotas para la entropía de Tsallis a partir de las normas mencionadas, para lo cual se aprovecharon propiedades de los pares normalizados de funciones de Young. Así mismo, se planteó la posibilidad de definir el funcional de entropía, haciendo uso del formalismo de Naudts, en términos de una función de Young  $\Phi(u)$ , la cual se obtiene a partir de una variable aleatoria asociada a un observable  $u$  propio del sistema termodinámico que se analiza, variable aleatoria positiva y con esperanza finita.

Finalmente, se caracterizaron dos tipos de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes, cuya no linealidad obedece a la aparición de potencias en la variable dependiente, o en dicha variable y sus derivadas. Se encontraron las restricciones sobre los exponentes que generan la no linealidad y la relación de dichos exponentes con el índice entrópico  $q$ , para que cada ecuación tuviera como solución la función  $y = exp_q(kt)$ ; siguiendo el esquema que se presenta usualmente en la literatura, se resolvió cada ecuación diferencial, inicialmente para la el caso de orden 2 y posteriormente, se amplió el proceso para la ecuación diferencial de orden  $n > 2$ . En

ambos casos, se establecieron las ecuaciones algebraicas en la variable  $k$  asociadas a cada ecuación diferencial, y cuyas soluciones complejas diferentes proporcionan los valores de  $k$  para los cuales  $y = \exp(kt)$  es solución de la ecuación diferencial. En el primero de los casos la ecuación que se obtiene es polinómica y de grado  $n$ , mientras que en el segundo caso, si bien la ecuación es en general una ecuación algebraica no polinómica, se muestra que mediante cambio de variable, dicha ecuación es reducible a una ecuación polinómica. Así mismo, se plantea en que intervalos tiene sentido la solución, dado que se hace necesario considerar el comportamiento asintótico de  $\exp_q(x)$ , para  $x = \frac{1}{1-q}$ .

# Problemas abiertos

1. Definir una  $\phi$ -álgebra y un  $\phi$ -cálculo para las funciones  $exp_\phi(x)$  y  $ln_\phi(x)$ , donde  $\phi(u)$ , está dada por la función de Young

$$\phi(u) = \cosh(u) - 1,$$

y  $ln_\phi(x)$  y  $exp_\phi(x)$  se obtienen siguiendo el formalismo de Naudts.

2. Estudiar las posibilidades de acotamiento sobre el dominio de  $ln_\phi(x)$ , con  $\phi(u) = \cosh(u) - 1$ , que permitan definir una entropía  $S_\phi$  sobre un sistema no extensivo, para el cual, la densidad de probabilidades  $p(x)$  que optimiza la entropía del sistema en el ensamble canónico pueda escribirse en términos de  $exp_\phi(x)$ . Dicho proceso se hace necesario, dado que:

$$\int_1^0 \frac{du}{\phi(u)} = \infty$$

razón por la cual, según el formalismo de Naudts, la función  $ln_\phi(x)$  no permite definir una entropía, o en forma equivalente, no es posible escribir la densidad de probabilidad que optimiza la entropía de un sistema no extensivo en términos de  $exp_\phi(x)$ . Problemas similares pueden plantearse para otros casos particulares de funciones de Young, y en general, para funciones de Young que cumplan propiedades tales como la propiedad  $\Delta_2$

3. De ser posible la obtención de la  $\phi$ -álgebra y el  $\phi$ -cálculo, para  $\phi(u)$  función de Young, caracterizar propiedades, tales como la de pérdida de memoria propuesta por Ghitani, en términos de las operaciones  $\oplus_\phi$  y  $\otimes_\phi$ .
4. En esta misma línea de espacios de Orlicz, otra posible motivación es la de analizar las características de la entropía definida en términos de una función de Young, obtenida a partir de una variable aleatoria asociada a un observable  $u$ , que caracteriza una propiedad de un sistema no extensivo, tal como la velocidad o energía efectiva.
5. Generalizar la caracterización de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes no lineales, cuya solución pueda escribirse en términos de  $exp_q(kt)$ , se deja como motivación la ecuación diferencial que combina las no linealidades ya mencionadas, dejando así abierto el método y restricciones para encontrar la solución; así mismo, se deja abierta la caracterización de ecuaciones diferenciales para las cuales, la solución pueda escribirse en la forma  $exp_\phi(kt)$ , donde  $\phi(u)$  cumple las propiedades para que puedan definirse  $ln_\phi(x)$  y  $exp_\phi(x)$ , siguiendo el formalismo de Naudts.



# Bibliografía

- [1] Ghitany, M. *Some remarks on a characterization of the generalized loglogistic distribution.* Environmetrics. Vol. 7., No. 3., (2002). pp. 277-281.
- [2] Shannon, C.E. *A Mathematical Theory of Communication.* The Bell System Technical Journal, Vol. 27, (1948) pp. 379–423, 623–656
- [3] A. N. Kolmogorov, A. M. Yaglom, and I. M. Gelfand. *Quantity of information and entropy for continuous distributions.* In Proceedings 3rd All-Union Mat. Conf., volume 3, pages 300320. Izd. Akad. Nauk. SSSR, 1956.
- [4] Rényi, A. *On measures of entropy and information.* Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1960, Vol. I, University of California Press, Berkeley, (1961) pp. 547.
- [5] Kaniadakis, G.: *Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics* Physical Review. E, Statistical, non-linear, and soft matter physics, Vol 71, (2005), pp. 046128.1-046128.12.
- [6] Tsallis, C.: *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics.* Journal of Statistics Physics, Vol 52, Nos 1 y 2. (1988). pp 478-487
- [7] Masi M.: *A step beyond Tsallis and Rényi entropies* Physics Letters A 338, (2005), pp217–224.
- [8] Naudts, J.: *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatics.* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Volume 316, Issues 1-4, (2002) pp 323-334.
- [9] Naudts, J.: *Generalized thermostatics based on deformed exponential and logarithmic functions.* Physica A 316 (2002). pp. 323-334.
- [10] Borges, E.P.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos.* Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004).
- [11] Ernst, T: *The History of  $q$ -Calculus and a New Method.* U. U. D. M. Report 2000:16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2000.
- [12] Castellanos, G. *Termodinámica y mecánica estadística.* Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba. (2005).
- [13] Naudts, J.: *Estimators, escort probabilities, and  $\phi$ -exponential families in statical physics.* Journal of inequalities in pure and applied Mathematics., Vol. 5., Article 102, (2004). pp., 1-15.

- [14] Naudts, J.: *The  $q$ -exponential family in statistical physics*. Central European Journal of Physics., Vol. 7.,Number3., (2009). pp. 405-413.
- [15] Tsallis, C.: *Nonadditive entropy: The concept and its use*. The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei, Vol 40, No 3. (2009). pp. 257-266
- [16] Tsallis, C., Mendes R.S. and Plastino A.R.: *The role of constraints within generalized nonextensive statistics*. Physica A 261 (1998). pp. 534-554.
- [17] Tsallis, C., Baldovin, F. Cerbino, R. and Pierobon Paolo.: *Entropic nonextensivity: A possible measure of complexity*. Chaos, Solitons and Fractals, Volume 13, Number 3, (March 2002). pp. 371-391
- [18] Gell-Mann M., Tsallis, C.: *Nonextensive entropy - Interdisciplinary Applications*. Studies in the Sciences of Complexity, Santa Fe Institute. Oxford University Press. (2004).
- [19] Ferri G. L., Martínez S. y Plastino A. : *Sobre el procedimiento de normalización en la termoestadística de Tsallis*. Anales AFA. Vol 16. Bahia Blanca, (2004). pp 24-29.
- [20] Borja R., Cartagena C., Loaiza G., Molina G., Puerta M.E.: *Sobre el parámetro de no extensividad para algunos sistemas superaditivos*. Aprobado para publicación en Revista Ingeniería y Ciencia, Universidad Eafit.
- [21] Beck, C.: *Application of generalized thernostatistics to fully developed turbulence*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Volume 277, Issues 1-1, (March 2000). pp 115-123.
- [22] Daniels K. E., Beck, C. and Bodenschatz E.: *Defect turbulence and generalized statistical mechanics*. Physica D: Nonlinear Phenomena. Volume 193, Issues 1-4, (2004). pp 208-217
- [23] Borja R., Cartagena C., Loaiza G., Molina G., Puerta M.E.: *Non-extensive entropy and Orlicz sequence spaces*. Sometido a evaluación en la revista Brazilian Journal of Physics.
- [24] Borges, E.P. *On a  $q$ -generalization of circular and hyperbolic functions*A. J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998). pp. 5281-5288
- [25] Mendes R. S., Pedron, I. T. : *Nonlinear differential equations based on nonextensive Tsallis entropy and physical applications*. Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringga, Maringga-PR, Brazil. (1999) arXiv:cond-mat/9904023v1 [cond-mat.stat-mech]
- [26] Moyano, L.: *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. Tese de Dutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2006)
- [27] Bobkov, S.G. y Zegarliniski, B. *Entropy bounds and isoperimetry* Memoirs of the AMS. Vol 176, No 829, (2005)
- [28] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg.1977
- [29] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg.1979.
- [30] Rao, M. M. y Ren, Z.D.:*Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker Inc. 1991.

- [31] Young. W.H. *On classes of summable functions and their Fourier series*. Proc. Roy. Soc. 87 (1912), 225-229.
- [32] Zygmund. A. *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, London 1959 (segunda edición).