Distribuciones Matriciales Unitariamente Invariantes y Residualmente Independientes

Por:

Astrid Marissa Vélez Carvajal

Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Maestría en Matemática Aplicada

Director : Dr. Daya K. Nagar

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

2007

A mis hijos Johnatan y Elizabeth

Agradecimientos

Un sincero agradecimiento al Doctor Daya Krishna Nagar, por su desinterezada colaboración, paciencia, dedicación y entrega para guiar el buen desarrollo de la investigación. Así como también por sus sugerencias y consejos durante todo este tiempo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las distribuciones multivariadas complejas juegan un papel importante en varios campos de la investigación. La distribucion Gausiana multivariada compleja fué introducida por Wooding [70], Turin [65], y Goodman [18]. La distribución Wishart compleja fué introducida por Goodman [18] para aproximar la distribución de una matriz de densidad espectral para un proceso Gausiano estacionario de valor vectorial. En análisis de series de tiempo múltiples, las distribuciones multivariadas complejas se usan para describir estimadores de frecuencia de parámetros del dominio. Para aplicaciones de estas distribuciones en análisis de series de tiempo podemos remitirnos a Wahba [66, 67], Goodman y Dubman [20], Hannan [35], Priestly, Subba Rao y Tong [59], Brillinger [3, 4], y Shaman [60]. Estas distribuciones han sido de gran utilidad en física nuclear, en el estudio de la distribución de los espacios entre niveles de energía de un núcleo de alta excitación. Para más detalles podemos remitirnos a Dyson [12, 13, 14], Dyson y Mehta [15, 16], Bronk [5], Porter [58], y Carmeli [6, 7].

La distribución multivariada compleja elípticamente simétrica ha sido estudiada por Krishnaiah y Lin [49], y Khatri y Bhavsar [46]. Esta familia incluye las distribuciones Gausiana multivariada compleja y t-multivariada compleja.

La distribución conjunta de las raíces de algunas matrices aleatorias complejas han sido derivadas por James [39], Wigner [68], y Khatri [41]. Paralelo a el caso real, se ha trabajado sustancialmente en el caso complejo . Las distribuciones de varios estadísticos de prueba en el caso complejo han sido estudiados por varios autores *e.g.* ver Goodman [19], Khatri [41, 43, 44], Pillai y Jouris [57], Nagarsenker y Das [56], Chikuse [8], Krishnaiah [48], Gupta [21, 22, 23], Fang, Krishnaiah y Nagarsenker [17], Conradie y Gupta [9], Gupta y Nagar [26, 27, 28, 29, 30], Nagar, Jain y Gupta [54], y Nagar y Gupta [52]. Un número de resultados de las distribuciones de matrices aleatorias complejas también han sido derivados. Srivastava [61] derivó la distribución Wishart compleja. Una caracterización de la distribución Wishart compleja ha sido dada por Gupta y Kabe [25]. James [39] y Khatri [41] obtuvieron las distribuciones beta de variable matricial compleja central como también la no central. Los tratamientos sistemáticos de las distribuciones de matrices aleatorias complejas fueron dadas por Tan [64] los cuales incluyen las distribuciones Gausiana, Wishart, beta y Dirichlet. Kabe [40] definió la distribución Gausiana matriz variada hiper-compleja, la cual incluye los cuaterniones de Hamilton, bicuaterniones, octoniones, y bioctoniones. Él también estudió la teoría de la distribución muestral correspondiente.

Las matrices aleatorias complejas tienen aplicaciones en muchos campos. Wigner [69] aplicó la teoría de matrices aleatorias a la física nuclear. Un tratamiento de esta aplicación y su desarrollo son reportados por Mehta [51]. Carmeli [6, 7], quien relacionó con la teoría estadística de niveles de energía a las matrices aleatorias, estudiando la matriz aleatoria Gausiana compleja introdujo la matriz aleatoria cuaternion.

Si X es una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva de orden $m \times m$ la cual tiene una distribución Wishart compleja/ Wishart invertida compleja/ beta tipo I matriz variada compleja ó beta tipo II matriz variada compleja, entonces es bien conocido que: (i) la distribución de X es unitariamente invariante, es decir, la distribución de X es la misma que la de UXU^H, $U \in U(m)$, (ii) los elementos de la diagonal de X tienen distribuciones idénticas y (iii) para $X = TT^H$, donde

T es una matriz triangular inferior compleja, los elementos de la diagonal de T son independientes. Motivados por estas propiedades comunes, Khatri, Khattree y R. D. Gupta [47] definieron la clase de distribuciones unitariamente invariantes y residualmente independientes, abreviada UNIARIM, $\tilde{\mathcal{C}}_m$.

A partir de las distribuciones mencionadas anteriormente generaremos matrices aleatorias con distribuciones que pertenezcan a esta clase (UNIARIM), derivaremos algunos resultados distribucionales, propiedades y valores esperados de funciones de valor escalar y matricial compleja de dichas matrices aleatorias.

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y TEORÍA RELACIONADA

2.1. INTRODUCCIÓN

El entendimiento y las técnicas de ciertas funciones son esenciales para comprender los siguientes capítulos. En este capítulo, los resultados que involucran estas funciones y técnicas se describirán brevemente.

2.2. INTEGRACIÓN

En esta sección se dan resultados sobre integración de funciones escalares de argumento matricial complejo. Las siguientes notaciones y resultados (Khatri [41], Srivastava [61], Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1]) se usarán en este y en los capítulos siguientes.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times m$ de números complejos. Entonces, A' denota la transpuesta de A; $\bar{A}$ conjugada de A; A^H conjugada transpuesta de A; $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{mm}$; $\mathrm{etr}(A) = \exp(\mathrm{tr}(A))$; $\det(A) =$ determinante de A; $\det(A)_+ =$ valor absoluto de $\det(A)$; $A = A^H > 0$ significa que A es Hermitiana definida positiva y $A^{\frac{1}{2}}$ la única raíz cuadrada Hermitiana definida positiva de $A = A^H > 0$. Además, para la partición $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $\det(A_{11}) \neq 0$, $\det(A_{22}) \neq 0$ los complementos de Schur de A_{11} y A_{22} son definidos como $A_{22\cdot 1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ y $A_{11\cdot 2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, respectivamente. Si todas las inversas existen, tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11\cdot 2}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot 1}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1} & A_{22\cdot 1}^{-1} \end{pmatrix}$$

o

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11\cdot 2}^{-1} & -A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Además, si A_{11} es no singular, entonces $\det(A) = \det(A_{22\cdot 1})\det(A_{11})$ y si A_{22} es no singular, entonces $\det(A) = \det(A_{11\cdot 2})\det(A_{22})$.

Lema 2.2.1 *Sean Z $(m \times n)$ y W $(m \times n)$ matrices complejas de variables funcionalmente independientes y sean G $(m \times m)$ y K $(n \times n)$ matrices no singulares. El Jacobiano de la transformación $Z = GWK$ es $J(Z \to W) = \det(GG^H)^n \times \det(KK^H)^m$.*

Lema 2.2.2 (Khatri [41]) *Sean Z y W matrices hemitianas definidas positivas. Si $Z = GWG^H$, donde G $(m \times m)$ es una matriz compleja no singular, entonces $J(Z \to W) = \det(GG^H)^m$.*

Lema 2.2.3 (Goodman [18]) *Sea W una matriz Hermitiana definida positiva y $W = TT^H$ donde T es una matriz triangular compleja de orden $m \times m$ con elementos positivos en la diagonal. Si T es triangular inferior, entonces*

$$J(X \to T) = 2^m \prod_{j=1}^{m} t_{jj}^{2(m-j)+1}, \tag{2.2.1}$$

y si T es triangular superior, entonces

$$J(X \to T) = 2^m \prod_{j=1}^{m} t_{jj}^{2(j-1)+1}. \tag{2.2.2}$$

Ahora se dan algunas integrales útiles para la teoría de distribución matricial.

Definición 2.2.1 *La función gamma multivariada compleja, denotada por* $\tilde{\Gamma}_m(a)$*, se define por*

$$\tilde{\Gamma}_m(a) = \int_{X=X^H>0} \operatorname{etr}(-X) \det(X)^{a-m} \, dX, \tag{2.2.3}$$

donde $\operatorname{Re}(a) > m - 1$*, y la integral es sobre el espacio de matrices de orden* $m \times m$ *Hermitianas definidas positivas.*

La función gamma multivariada compleja $\tilde{\Gamma}_m(a)$ puede expresarse como el producto de funciones gamma ordinarias

$$\tilde{\Gamma}_m(a) = \pi^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m} \Gamma(a - i + 1), \operatorname{Re}(a) > m - 1. \tag{2.2.4}$$

Definición 2.2.2 *La función beta multivariada compleja, denotada por* $\tilde{B}_m(a, b)$*, es definida por*

$$\tilde{B}_m(a, b) = \int_{0<X=X^H<I_m} \det(X)^{a-m} \det(I_m - X)^{b-m} \, dX, \tag{2.2.5}$$

donde $\operatorname{Re}(a) > m - 1$ *y* $\operatorname{Re}(b) > m - 1$.

Dicha función beta puede expresarse en términos de funciones gamma como

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m(a, b) &= \frac{\tilde{\Gamma}_m(a)\tilde{\Gamma}_m(b)}{\tilde{\Gamma}_m(a + b)} \\ &= \tilde{B}_m(b, a). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Sustituyendo $X = (I_m + Y)^{-1}Y$ en (2.2.5) con Jacobiano

$$J(X \to Y) = \det(I_m + Y)^{-2m},$$

Se obtiene una representación integral equivalente para la función beta compleja como

$$\tilde{B}_m(a, b) = \int_{Y=Y^H>0} \det(Y)^{a-m} \det(I_m + Y)^{-(a+b)} \, dY. \tag{2.2.7}$$

2.3. POLINOMIOS ZONALES

En esta sección se da una breve descripción de polinomios zonales y la función hipergeométrica de argumento matriz Hermitiana desarrollada por James [39].

Sea $X\,(m \times m)$ una matriz Hermitiana y V_k el espacio lineal de polinomios homogéneos $\phi(X)$ de grado k en los elementos de X. El espacio V_k puede descomponerse en suma directa de subespacios invariantes irreducibles V_κ donde $\kappa = (k_1, \ldots, k_m)$, $k_1 + \cdots + k_m = k$, $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$. Entonces, el polinomio $(\operatorname{tr} X)^k \in V_k$ tiene descomposición única en polinomios $\tilde{C}_\kappa(X) \in V_\kappa$ como

$$(\operatorname{tr} X)^k = \sum_\kappa \tilde{C}_\kappa(X). \tag{2.3.8}$$

Definición 2.3.1 *El polinomio zonal $\tilde{C}_\kappa(X)$ de una matriz Hermitiana X es la componente de $(\operatorname{tr} X)^k$ en el subespacio V_κ.*

El polinomio zonal $\tilde{C}_\kappa(X)$ se define para todo k y m, pero para una partición κ de k en más de m partes, es idénticamente cero. Son invariantes bajo transformación unitaria, es decir

$$\tilde{C}_\kappa(X) = \tilde{C}_\kappa(UXU^H),\ U \in U(m). \tag{2.3.9}$$

Luego $\tilde{C}_\kappa(X)$ es un polinomio homogéneo simétrico en las raíces características de X. También, si R es Hermitiana definida positiva, entonces

$$\tilde{C}_\kappa(RX) = \tilde{C}_\kappa(R^{\frac{1}{2}} X R^{\frac{1}{2}}) \tag{2.3.10}$$

donde $R^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de R. Siguiendo a Khatri [45], es fácil ver que

$$|\tilde{C}_\kappa(X)| \leq \tilde{C}_\kappa(X_0) \tag{2.3.11}$$

donde $X_0 = \operatorname{diag}(|x_1|, \ldots, |x_m|)$, y x_i, $i = 1, \ldots, m$, son las raíces características de X. para valores pequeños de k, las fórmulas explícitas para $\tilde{C}_\kappa(X)$ son:

$$\tilde{C}_{(1)}(X) = \operatorname{tr}(X), \tag{2.3.12}$$

$$\tilde{C}_{(2)}(X) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} X)^2 + \operatorname{tr}(X^2)\right], \tag{2.3.13}$$

$$\tilde{C}_{(1^2)}(X) = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} X)^2 - \operatorname{tr}(X^2)], \tag{2.3.14}$$

$$\tilde{C}_{(3)}(X) = \frac{1}{6}[(\operatorname{tr} X)^3 + 3(\operatorname{tr} X)(\operatorname{tr} X^2) + 2\operatorname{tr}(X^3)], \tag{2.3.15}$$

$$\tilde{C}_{(2,1)}(X) = \frac{2}{3}[(\operatorname{tr} X)^3 - \operatorname{tr}(X^3)], \tag{2.3.16}$$

$$\tilde{C}_{(1^3)}(X) = \frac{1}{6}[(\operatorname{tr} X)^3 - 3(\operatorname{tr} X)(\operatorname{tr} X^2) + 2\operatorname{tr}(X^3)]. \tag{2.3.17}$$

Entonces es fácil ver que:

$$\operatorname{tr}(X^2) = \tilde{C}_{(2)}(X) - \tilde{C}_{(1^2)}(X), \tag{2.3.18}$$

y

$$\operatorname{tr}(X^3) = \tilde{C}_{(3)}(X) - \frac{1}{2}\tilde{C}_{(2,1)}(X) + \tilde{C}_{(1^3)}(X). \tag{2.3.19}$$

Además, sustituyendo $X = I_m$ en (2.3.12)–(2.3.17), se obtiene $\tilde{C}_{(1)}(I_m) = m$, $\tilde{C}_{(2)}(I_m) = m(m+1)/2$, $\tilde{C}_{(1^2)}(I_m) = m(m-1)/2$, $\tilde{C}_{(3)}(I_m) = m(m+1)(m+2)/6$,$\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) = 2m(m^2-1)/3$, $\tilde{C}_{(1^3)}(I_m) = m(m-1)(m-2)/6$. Si la partición κ de k tiene r partes no cero, entonces James [39] y Khatri [44],

$$\tilde{C}_\kappa(I_m) = \left[\frac{k!\,\prod_{i<j}^r (k_i - k_j - i + j)}{\prod_{i=1}^r (k_i + r - i)!}\right]^2 \frac{[m]_\kappa}{k!}, \tag{2.3.20}$$

donde se define el *coeficiente complejo hipergeométrico generalizado*

$$[m]_\kappa = \prod_{i=1}^r (m - i + 1)_{k_i} \tag{2.3.21}$$

con $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$, $(a)_0 = 1$, $\kappa = (k_1, \ldots, k_m)$, $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$, $k_1 + \cdots + k_m = k$.

Usando la notación

$$\tilde{\Gamma}_m(a,\kappa) = \pi^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^m \Gamma(a + k_j - j + 1),\ \operatorname{Re}(a) \geq m - k_m, \tag{2.3.22}$$

note que $\tilde{\Gamma}_m(a,0) = \tilde{\Gamma}_m(a)$, se puede escribir (2.3.21) como

$$[a]_\kappa = \frac{\tilde{\Gamma}_m(a,\kappa)}{\tilde{\Gamma}_m(a)}. \tag{2.3.23}$$

Khatri [42] introdujo la notación

$$\tilde{\Gamma}_m(a,-\kappa) = \pi^{m(m-1)/2}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a-k_j-m+j),\ \mathrm{Re}(a) \geq m+k_1.$$

Alternativamente se puede escribir

$$\tilde{\Gamma}_m(a,-\kappa) = \frac{(-1)^k\tilde{\Gamma}_m(a)}{[-a+m]_\kappa}. \tag{2.3.24}$$

2.4. Funciones Hipergeométricas Generalizadas

Resultados distribucionales de matrices aleatorias son con frecuencia derivados en términos de funciones hipergeométricas de argumento matricial. Herz [38] introdujó la función hipergeométrica de argumento matricial usando Laplace y la transformada inversa de Laplace. Constantine [10] dió una representación de series de potencias de la función hipergeométrica de argumento matriz simétrica en series que involucran polinomios zonales. James [39] dió la expansión de la serie de la funcion hipergeométrica de argumento matriz Hermitiana en series que involucran polinomios zonales de matriz Hermitiana.

Definición 2.4.1 *La función hipergeométrica generalizada de argumento matriz Hermitiana es definida por*

$${}_r\tilde{F}_s(a_1,\ldots,a_r;b_1,\ldots,b_s;X) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{[a_1]_\kappa\cdots[a_r]_\kappa}{[b_1]_\kappa\cdots[b_s]_\kappa}\frac{\tilde{C}_\kappa(X)}{k!} \tag{2.4.25}$$

donde a_i son números complejos arbitrarios, $i = 1,\ldots,r$; b_j, $j = 1,\ldots,s$, $X\,(m\times m)$ es una matriz Hermitiana y $\sum_\kappa$ denota la sumatoria sobre todas las particiones κ.

Condiciones para la convergencia de la serie (2.4.25) son:

(i) ninguno de los b_j es cero ó un entero menor ó igual que $m-1$,

(ii) si a_i es un entero negativo, es decir $-d$, entonces la serie se reduce a un polinomio finito de grado dm,

(iii) la serie converge para todo X $(m \times m)$ si $r < s+1$,

(iv) si $r = s+1$, la serie converge para toda X $(m \times m)$ tal que $\|X\| < 1$ donde la norma $\|X\|$ denota el máximo valor absoluto de las raíces características X,

(v) a menos que la serie converja, esta diverge para todo $X \neq 0$ si $r > s+1$.

De la Definición 2.4.1 se sigue que

$$\begin{aligned} {}_0\tilde{F}_0(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{\tilde{C}_\kappa(X)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{tr} X)^k}{k!} \\ &= \operatorname{etr}(X), \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

$${}_1\tilde{F}_1(a;c;X) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{[a]_\kappa}{[c]_\kappa}\frac{\tilde{C}_\kappa(X)}{k!} \tag{2.4.27}$$

y

$${}_2\tilde{F}_1(a,b;c;X) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{[a]_\kappa[b]_\kappa}{[c]_\kappa}\frac{\tilde{C}_\kappa(X)}{k!}. \tag{2.4.28}$$

Teorema 2.4.1 *Sea Z $(m \times m)$ una matriz Hermitiana definida positiva y sea Y $(m \times m)$ una matriz Hermitiana. Entonces, para $\operatorname{Re}(a) > m-1$,*

$$\begin{aligned} &\int_{X=X^H>0} \operatorname{etr}(-ZX)\det(X)^{a-m}\,{}_r\tilde{F}_s^{(m)}(a_1,\ldots,a_r;b_1,\ldots,b_s;XY)\,dX \\ &= \tilde{\Gamma}_m(a)\det(Z)^{-a}\,{}_{r+1}\tilde{F}_s^{(m)}(a_1,\ldots,a_r,a;b_1,\ldots,b_s;Z^{-1}Y). \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Prueba: Ver James [39] y Khatri [42]. ■

De lo anterior es fácil ver que para $\|Z\| < 1$,

$${}_1\tilde{F}_0(a;Z) = \det(I_m - Z)^{-a}.$$

Teorema 2.4.2 *Sea $Y(m \times m)$ una matriz Hermitiana, entonces*

$$\begin{aligned}\int_{0<X=X^H<I_m} &\det(X)^{a-m}\det(I_m - X)^{b-m} \\ &{}_r\tilde{F}_s(a_1,\ldots,a_r;b_1,\ldots,b_s;YX)\,dX \\ = \frac{\tilde{\Gamma}_m(a)\tilde{\Gamma}_m(b)}{\tilde{\Gamma}_m(a+b)}&{}_{r+1}\tilde{F}_{s+1}(a_1,\ldots,a_r,a;b_1,\ldots,b_s,a+b;Y).\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Prueba: Ver James [39] y Khatri [42]. ■

Para casos especiales de $r, s,\ a, b$ en (2.4.30) es fácil ver que,

$$\begin{aligned}{}_1\tilde{F}_1(\alpha;\gamma;R) = \frac{\tilde{\Gamma}_m(\gamma)}{\tilde{\Gamma}_m(\alpha)\tilde{\Gamma}_m(\gamma-\alpha)}&\int_{0<X=X^H<I_m}\det(X)^{\alpha-m} \\ &\det(I_m - X)^{\gamma-\alpha-m}\,\mathrm{etr}(RX)\,dX,\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

y

$$\begin{aligned}{}_2\tilde{F}_1(\alpha,\beta;\gamma;R) = \frac{\tilde{\Gamma}_m(\gamma)}{\tilde{\Gamma}_m(\alpha)\tilde{\Gamma}_m(\gamma-\alpha)}&\int_{0<X=X^H<I_m}\det(X)^{\alpha-m} \\ &\det(I_m - X)^{\gamma-\alpha-m}\det(I_m - RX)^{-\beta}\,dX,\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

donde $\mathrm{Re}(\alpha) > m-1$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha) > m-1$.

Sustituyendo $R = I_m$ en (2.4.32) y simplificando la expresión resultante, se obtiene

$${}_2\tilde{F}_1(\alpha,\beta;\gamma;I_m) = \frac{\tilde{\Gamma}_m(\gamma)\tilde{\Gamma}_m(\gamma-\alpha-\beta)}{\tilde{\Gamma}_m(\gamma-\alpha)\tilde{\Gamma}_m(\gamma-\beta)},\ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > m-1. \tag{2.4.33}$$

Para representaciones de serie e integral de la función ${}_1\tilde{F}_1$ referirse a James [39], Hayakawa [36, 37] y Chikuse [8].

Las representaciones integrales (2.4.31) y (2.4.32) son generalizaciones de la funciones hipergeométrica confluente clásica ${}_1F_1$ y la función hipergeométrica Gausiana ${}_2F_1$ respectivamente. Las relaciones de Kummer y de Euler para ${}_1F_1$ y ${}_2F_1$ pueden ser generalizadas en el caso de funciones de argumento matriz Hermitiana.

Las funciones hipergeométricas ${}_1\tilde{F}_1$ y ${}_2\tilde{F}_1$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$ {}_1\tilde{F}_1(\alpha;\gamma;X) = \operatorname{etr}(X)\,{}_1\tilde{F}_1(\gamma-\alpha;\gamma;-X) \tag{2.4.34}$$

$$\begin{aligned} {}_2\tilde{F}_1(\alpha,\beta;\gamma;X) &= \det(I_m - X)^{-\beta}\,{}_2\tilde{F}_1(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;-X(I_m-X)^{-1}) \\ &= \det(I_m - X)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2\tilde{F}_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;X). \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

Ahora, se definirá la función hipergeométrica confluente $\tilde{\Psi}$ de argumento matricial complejo.

Definición 2.4.2 *La función hipergeométrica confluente $\tilde{\Psi}$ de matriz Hermitiana R $(m \times m)$ es definida por*

$$\tilde{\Psi}(\alpha,\gamma;R) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}_m(\alpha)} \int_{X=X^H>0} \operatorname{etr}(-RX)\det(X)^{\alpha-m}\det(I_m+X)^{\gamma-\alpha-m}\,dX, \tag{2.4.36}$$

donde $\operatorname{Re}(R) > 0$, *y* $\operatorname{Re}(\alpha) > m-1$.

2.5. Nociones de Matriz Aleatoria Compleja

En esta sección se definen las variables aleatorias complejas, los vectores aleatorios complejos, las matrices aleatorias complejas y los operadores asociados con estos. Algunas de sus propiedades pueden ser encontradas en Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1].

Definición 2.5.1 *Sean x_1 y x_2 variables aleatorias reales. La variable aleatoria dada por $x = x_1 + \imath x_2$ es una variable aleatoria compleja.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de variables aleatorias complejas son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2(\mathbb{C}) = \{x : x \text{ es una variable aleatoria compleja y } E(x\bar{x}) < \infty\}.$$

Definición 2.5.2 *Sea $x = x_1 + \imath x_2$ una variable aleatoria compleja. El operador esperanza de x, $E : L_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, se define como*

$$E(x) = E(x_1) + \imath E(x_2).$$

El valor de $E(x)$ es la media de x.

Definición 2.5.3 *Sean x e y variables aleatorias complejas. El operador covarianza, $C : L_2(\mathbb{C}) \times L_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, está definido como*

$$C(x, y) = E\left[\{x - E(x)\} \overline{\{y - E(y)\}}\right].$$

Definición 2.5.4 *Sea x una variable aleatoria compleja. El operador varianza de x, $V : L_2(\mathbb{C}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ está definido como*

$$V(x) = C(x, x) = E\left[\{x - E(x)\} \overline{\{x - E(x)\}}\right].$$

El valor de $V(x)$ es llamado la varianza de x.

Definición 2.5.5 *Sea $\mathbf{x} = (x_k)$ un vector p-dimensional, donde x_k para $k = 1, \ldots, p$ son variables aleatorias complejas; entonces $\boldsymbol{x}$ es llamado un vector aleatorio complejo p-dimensional.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de vectores aleatorios complejos son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2(\mathbb{C}^p) = \left\{\mathbf{x} = (x_k) : \boldsymbol{x} \text{ es un vector aleatorio complejo } p\text{-dimensional y } E\left(\mathbf{x}^H \mathbf{x}\right) < \infty\right\}.$$

Definición 2.5.6 *Sea $\mathbf{x} = (x_k)$ un vector aleatorio complejo p-dimensional. El operador esperanza de $\boldsymbol{x}$, $E : L_2(\mathbb{C}^p) \to \mathbb{C}^p$, se define como*

$$E(\mathbf{x}) = (E(x_k)).$$

Nos referimos a $E(\boldsymbol{x})$ como el vector de medias del vector $\boldsymbol{x}$.

Definición 2.5.7 *Sean* $\mathbf{x} = (x_k)$ *y* $\mathbf{y} = (y_s)$ *vectores aletorios complejos de dimensiones* p *y* q *respectivamente. El operador covarianza de* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{y}$*,* $C : L_2(\mathbb{C}^p) \times L_2(\mathbb{C}^q) \to \mathbb{C}^{p\times q}$*, está definido como*

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (C(x_k, y_s)).$$

La matriz de covarianza compleja de los vectores aleatorios complejos $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *puede ser interpretada como un vector complejo de dimensión* $pq \times 1$*, dado por*

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (C(x_k, y_s)) \\ &= (E[(x_k - E(x_k))\overline{(y_s - E(y_s))}]) \\ &= E[(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^H]. \end{aligned}$$

Definición 2.5.8 *Sea* $\mathbf{x} = (x_k)$ *un vector aletorio complejo* p*-dimensional. El operador varianza de* $\mathbf{x}$*,* $V : L_2(\mathbb{C}^p) \to \mathbb{C}^{p\times p}$*, está definido como*

$$V(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Nos referimos al valor de $V(\mathbf{x})$ *como la matriz de covarianzas del vector* $\mathbf{x}$*.*

Definición 2.5.9 *Sea* $X = \left(x_{jk}\right)$ *una matriz de orden* $p \times q$*, donde* x_{jk} *para* $j = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, q$ *es una variable aleatoria compleja; entonces* X *es llamada una matriz aleatoria compleja de orden* $p \times q$*.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de matrices aleatorias complejas son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2\left(\mathbb{C}^{p\times q}\right) = \Big\{X = \left(x_{jk}\right) : X \text{ es una matriz aleatoria compleja de orden} p \times q \text{ y } E\left(\mathrm{tr}(XX^H)\right) < \infty\Big\}.$$

Definición 2.5.10 *Sea* $X = \left(x_{jk}\right)$ *una matriz aletoria compleja de orden* $p \times q$*. El operador esperanza de* X*,* $E : L_2(\mathbb{C}^{p\times q}) \to \mathbb{C}^{p\times q}$*, está definido como*

$$E(X) = \left(E\left(x_{jk}\right)\right).$$

El operador esperanza evaluado en la matriz aleatoria compleja X *de orden* $p \times q$*, se llama la media de* X*.*

2.6. ALGUNAS DISTRIBUCIONES COMPLEJAS

A continuación se dan algunas definiciones y resultados sobre distribuciones matriciales complejas. Para mayores detalles y pruebas se puede consultar a Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1], Tan [64], Khatri [41], James [39] y Goodman [18].

Ahora se defíniran las distribuciones Wishart compleja, Wishart invertida compleja, beta tipo I matriz variada compleja, beta tipo II matriz variada compleja y se darán algunas de sus propiedades.

Definición 2.6.1 *Una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva A de orden $m \times m$ se dice que tiene una distribución Wishart compleja con parámetros m, ν, y $\Sigma = \Sigma^H > 0$, denotada $A \sim \mathbb{C}W_m(\nu, \Sigma)$, si su p.d.f. está dada por*

$$\{\tilde{\Gamma}_m(\nu) \det(\Sigma)^{\nu}\}^{-1} \det(A)^{\nu-m} \operatorname{etr}(-\Sigma^{-1}A),\ A = A^H > 0,\ \nu \geq m. \tag{2.6.1}$$

La distribución Wishart compleja es la distribución conjunta de varianzas y covarianzas muestrales de una población normal multivariada compleja y juega un papel importante en el análisis estadístico multivariado. Esta distribución, para $\Sigma = I_m$, está en la clase de distribuciones unitariamente invariantes y residualmente independientes discutidas en el capítulo 3. Las propiedades de la invarianza unitaria e independencia residual en este caso son dadas en los teoremas 2.6.1 y 2.6.3, respectivamente.

Si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son independientemente distribuidas como $\mathbb{C}N_m(\mathbf{0}, \Sigma)$, entonces $X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ tiene una distribución normal matriz variada compleja. Así, si $n \geq m$, entonces $XX^H > 0$ con probabilidad uno y $XX^H \sim \mathbb{C}W_m(n, \Sigma)$.

Teorema 2.6.1 *Sean $A \sim \mathbb{C}W_m(\nu, I_m)$ y U $(m \times m)$ una matriz unitaria cuyos elementos son constantes ó variables aleatorias independientemente distribuidas de A. Entonces, la distribución de A es invariante sobre la transformación $A \to UAU^H$ y es independiente de U en el último caso.*

Teorema 2.6.2 *Sea $A \sim \mathbb{C}W_m(\nu, \Sigma)$. A y Σ particionadas como*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A_{11}\ (q \times q),\ \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},\ \Sigma_{11}\ (q \times q).$$

Entonces, (i) la matriz A_{22} y su complemento de Schur $A_{11\cdot 2}$ son independientes, $A_{22} \sim \mathbb{C}W_{m-q}(\nu, \Sigma_{22})$ y $A_{11\cdot 2} \sim \mathbb{C}W_q(\nu - m + q, \Sigma_{11\cdot 2})$, (ii) A_{11} y su complemento de Schur $A_{22\cdot 1}$ son independientes, $A_{11} \sim \mathbb{C}W_q(\nu, \Sigma_{22})$ y $A_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}W_{m-q}(\nu - q, \Sigma_{22\cdot 1})$.

Prueba: Ver Tan [64]. ■

El siguiente resultado es importante en el análisis multivariado y es conocido como descomposición de Bartlett.

Teorema 2.6.3 *Sea $A \sim \mathbb{C}W_m(\nu, I_m)$ y $A = TT^H$, donde $T = (t_{ij})$ es una matriz triangular inferior con $t_{ii} > 0$ y $t_{ij} = t_{1ij} + \sqrt{-1}\, t_{2ij}, j < i$. Entonces, t_{ij}, $1 \leq j \leq i \leq m$ son independientemente distribuidas, $t_{ii}^2 \sim G(\nu - i + 1)$, $1 \leq i \leq m$ y $t_{ij} \sim \mathbb{C}N(0, 1)$, $1 \leq j < i \leq m$.*

Prueba: Ver Goodman [18] ■

Definición 2.6.2 *Una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva Y de orden $m \times m$ se dice que tiene una distribución Wishart invertida compleja, con parámetros m, μ y Ψ $(m \times m)$, denotada por $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, \Psi)$, si su función de densidad está dada por*

$$\{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\}^{-1} \det(\Psi)^{\mu} \det(Y)^{-(\mu+m)} \operatorname{etr}(-Y^{-1}\Psi),\ Y = Y^H > 0, \tag{2.6.2}$$

donde $\Psi = \Psi^H > 0$ y $\mu > m - 1$.

La distribución Wishart invertida compleja, para $\Psi = I_m$, está en la clase de distribuciones matriciales unitariamente invariantes y residualmente independientes. La distribución Wishart invertida compleja fué primero derivada por Tan [63] como distribución posterior de Σ en un modelo de regresión multivarado complejo.

Depués Shaman [60] estudió algunas de sus propiedades y aplicaciones en estimación espectral. Para $m = 1$, la densidad Wishart invertida compleja es una densidad gamma invertida la cual esta dada por

$$\{\Gamma(\mu)\}^{-1}\psi^{\mu}y^{-(\mu+1)}\exp\left(-\frac{\psi}{y}\right),\ y > 0,\ \mu > 0,\ \psi > 0.$$

Esta distribución se denota por $y \sim IG(\mu, \psi)$.

La relación entre las distribuciones Wishart compleja y Wishart invertida compleja está dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.6.4 *Sea $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, \Psi)$, entonces $Y^{-1} \sim \mathbb{C}W_m(\mu, \Psi^{-1})$.*

Prueba: Haciendo la transformación $X = Y^{-1}$ con el Jacobiano $J(Y \to X) = \det(X)^{-2m}$ en (2.6.2), obtenemos el resultado deseado. ∎

Teorema 2.6.5 *Sea $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, \Psi)$ y particionando Y y Ψ como*

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},\ \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

donde Y_{11} y Ψ_{11} son matrices de orden $q \times q$. Entonces, Y_{11} y su complemento de Schur $Y_{22\cdot 1}$ son independientes, $Y_{11} \sim I\mathbb{C}W_q(\mu - m + q, \Psi_{11})$ y $Y_{22\cdot 1} \sim I\mathbb{C}W_{m-q}(\mu, \Psi_{22\cdot 1})$. Además, Y_{22} y su complemento de Schur $Y_{11\cdot 2}$ son independientes, $Y_{22} \sim I\mathbb{C}W_{m-q}(\mu - q, \Psi_{22})$ y $Y_{11\cdot 2} \sim I\mathbb{C}W_q(\mu, \Psi_{11\cdot 2})$.

Prueba: Del teorema 2.6.4, $Y^{-1} \sim \mathbb{C}W_m(\mu, \Psi^{-1})$. Sea

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} Y^{11} & Y^{12} \\ Y^{21} & Y^{22} \end{pmatrix},\ \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{11} & \Psi^{12} \\ \Psi^{21} & \Psi^{22} \end{pmatrix}$$

donde Y^{11} y Ψ^{11} son matrices cuadradas de orden q, definimos $Y^{11\cdot 2} = Y^{11} - Y^{12}(Y^{22})^{-1}Y^{21}$, y $\Psi^{11\cdot 2} = \Psi^{11} - \Psi^{12}(\Psi^{22})^{-1}\Psi^{21}$. Entonces, del teorema 2.6.2, $Y^{11\cdot 2}$ y Y^{22} son independientes, $Y^{11\cdot 2} \sim \mathbb{C}W_q(\mu - m + q, \Psi^{11\cdot 2})$ y $Y^{22} \sim \mathbb{C}W_{m-q}(\mu, \Psi^{22})$. Ahora, ya que $Y^{11\cdot 2} = Y_{11}^{-1}$, $Y^{22} = Y_{22\cdot 1}^{-1}$, $\Psi^{11\cdot 2} = \Psi_{11}^{-1}$ y $\Psi^{22} = \Psi_{22\cdot 1}^{-1}$, tenemos $Y_{11}^{-1} \sim \mathbb{C}W_q(\mu - m + q, \Psi_{11}^{-1})$, $Y_{22\cdot 1}^{-1} \sim \mathbb{C}W_{m-q}(\mu, \Psi_{22\cdot 1}^{-1})$ por lo tanto, $Y_{11} \sim I\mathbb{C}W_q(\mu - m +$

$q, \Psi_{11})$ y $Y_{22\cdot 1} \sim I\mathbb{C}W_{m-q}(\mu, \Psi_{22\cdot 1})$. La segunda parte se prueba en forma similar. ■

Es bien conocido que si $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, \Psi)$, entonces (Shaman [60], Nagar y Gupta [53]),

$$E(Y^{-1}) = \mu \Psi^{-1}, \tag{2.6.3}$$

$$E(Y) = (\mu - m)^{-1} \Psi, \mu > m, \tag{2.6.4}$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Y^{-1}R)] = [\mu]_\kappa \tilde{C}_\kappa(\Psi^{-1}R) \tag{2.6.5}$$

y

$$E[\tilde{C}_\kappa(YR)] = \frac{(-1)^k}{[-\mu + m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(\Psi R), \mu > m - 1 + k_1, \tag{2.6.6}$$

donde R es una matriz Hermitiana de orden $m \times m$.

Definición 2.6.3 *Una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva X de orden $m \times m$ se dice que tiene una distribución Beta tipo I matriz variada compleja con parámetros (a, b), denotada como $X \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$, si su p.d.f. está dada por*

$$\{\tilde{B}_m(a, b)\}^{-1} \det(X)^{a-m} \det(I_m - X)^{b-m}, \ 0 < X = X^H < I_m, \tag{2.6.7}$$

donde $a > m - 1$, $b > m - 1$ y $\tilde{B}_m(a, b)$ es la función beta multivariada compleja.

Definición 2.6.4 *Una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva Y de orden $m \times m$ se dice que tiene una distribución Beta tipo II matriz variada compleja con parámetros(a, b), denotada como $Y \sim \mathbb{C}B_m^{II}(a, b)$, si su p.d.f. está dada por*

$$\{\tilde{B}_m(a, b)\}^{-1} \det(Y)^{a-m} \det(I_m + Y)^{-(a+b)}, \ Y = Y^H > 0, \tag{2.6.8}$$

donde $a > m - 1$, y $b > m - 1$.

La densidad (2.6.8) puede ser obtenida de (2.6.7) haciendo la transformación $X = (I_m + Y)^{-1}Y$, con el Jacobiano $J(X \to Y) = \det(I_m + Y)^{-2m}$. La distribución Beta tipo II matriz variada compleja también es conocida como F-distribución matriz variada compleja. Estas distribuciones están en la clase de distribuciones unitariamente invariantes y residualmente independientes discutidas en el capítulo 3.

Aquí se puede notar que las distribuciones beta tipo I y II de variable matricial compleja pueden ser derivadas usando densidades Wishart complejas(Tan [64]). Si $A_1 \sim \mathbb{C}W_m(n_1, \Sigma)$ y $A_2 \sim \mathbb{C}W_m(n_2, \Sigma)$ son independientes, Entonces $(A_1 + A_2)^{-1/2}A_1(A_1 + A_2)^{-1/2} \sim \mathbb{C}B_m^I(n_1, n_2)$ y $(A_2^{-1/2})^H A_1 A_2^{-1/2} \sim \mathbb{C}B_m^{II}(n_1, n_2)$.

En los próximos dos teoremas, se muestra que las distribuciones beta matriz variada complejas son unitariamente invariantes.

Teorema 2.6.6 *Sean $X \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$ y U $(m \times m)$ una matriz unitaria cuyos elementos son constantes ó variables aleatorias distribuidas independientemente de X. Entonces, la distribución de X es invariante sobre la transformación $X \to UXU^H$, y es independiente de U en el último caso.*

Prueba: Ver Bedoya, Nagar y Gupta [2]. ■

Teorema 2.6.7 *Sean $Y \sim \mathbb{C}B_m^{II}(a, b)$ y U $(m \times m)$ una matriz unitaria cuyos elementos son constantes ó variables aleatorias distribuidas independientemente de Y. Entonces, la distribución de Y es invariante sobre la transformación $Y \to UYU^H$, y es independiente de U en el último caso.*

Prueba: Ver Bedoya, Nagar y Gupta [2]. ■

La relación entre las matrices aleatorias complejas con distribuciones beta tipo I y tipo II se puede expresar como se sigue. Sea $X \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$, entonces $Y = (I_m - X)^{-1}X \sim \mathbb{C}B_m^{II}(a, b)$. Así, si $Y \sim \mathbb{C}B_m^{II}(a, b)$ entonces $Y^{-1} \sim \mathbb{C}B_m^{II}(b, a)$ y $(I_m + Y)^{-1}Y \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$.

Teorema 2.6.8 *Sea $A \sim \mathbb{C}B_m^I(a,b)$ y A particionada como*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A_{11}\ (q \times q).$$

Entonces, (i) A_{11} y su complemento de Schur $A_{22\cdot 1}$ son independientes, $A_{11} \sim \mathbb{C}B_q^I(a,b)$ y $A_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m-q}^I\,(a-q,b)$ y (ii) A_{22} y su complemento de Schur $A_{11\cdot 2}$ son independientes, $A_{22} \sim \mathbb{C}B_{m-q}^I(a,b)$ y $A_{11\cdot 2} \sim \mathbb{C}B_q^I\,(a-m+q,b)$.

Prueba: Ver Tan [64]. ■

Teorema 2.6.9 *Sea $B \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c,d)$ y B particionada como*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\ B_{11}\ (q \times q).$$

Entonces, (i) B_{11} y su complemento de Schur $B_{22\cdot 1}$ son independientes, $B_{11} \sim \mathbb{C}B_q^{II}(c,d-m+q)$ y $B_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m-q}^{II}(c-q,d)$ y (ii) B_{22} y su complemento de Schur $B_{11\cdot 2}$ son independientes, $B_{22} \sim \mathbb{C}B_{m-q}^{II}(c,d-q)$ y $B_{11\cdot 2} \sim \mathbb{C}B_q^{II}(c-m+q,d)$.

Prueba: Ver Tan [64]. ■

Teorema 2.6.10 *Sea $X \sim \mathbb{C}B_m^I(a,b)$ y $X = TT^H$, donde $T = (t_{ij})$ es una matriz triangular inferior compleja con elementos positivos en la diagonal. Entonces, $t_{11}^2, \ldots, t_{mm}^2$ son independientemente distribuidas, $t_{ii}^2 \sim B^I(a-i+1,b)$, $i = 1, \ldots, m$.*

La distribución beta tipo I univariada denotada por $B^I(a_1,a_2)$ es definida por la p.d.f.

$$\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1-1}(1-x)^{a_2-1}, 0 < x < 1.$$

Teorema 2.6.11 *Sea $X \sim \mathbb{C}B_m^{II}(a,b)$ y $X = TT^H$, donde $T = (t_{ij})$ es una matriz triangular inferior compleja con elementos positivos en la diagonal. Entonces, $t_{11}^2, \ldots, t_{mm}^2$ son independientemente distribuidas, $t_{ii}^2 \sim B^{II}(a-i+1,b-m+i)$, $i = 1, \ldots, m$.*

La distribución beta tipo II univariada denotada por $B^{II}(a_1, a_2)$ es definida por la p.d.f.

$$\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1-1}(1+x)^{-(a_1+a_2)}, \quad x>0.$$

Es bien conocido que si $A \sim \mathbb{C}B_m^I(a,b)$ y $B \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c,d)$, entonces (James [39], Khatri [42], Bedoya, Nagar y Gupta [2]),

$$E(A) = \frac{a}{a+b} I_m, \tag{2.6.9}$$

$$E(A^{-1}) = \frac{a+b-m}{a-m} I_m,\ a>m, \tag{2.6.10}$$

$$E(B) = \frac{c}{d-m} I_m, d>m, \tag{2.6.11}$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(RA)] = \frac{[a]_\kappa}{[a+b]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(R), \tag{2.6.12}$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(RA^{-1})] = \frac{[-a-b+m]_\kappa}{[-a+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(R),\ \mathrm{Re}(a)>m-1+k_1, \tag{2.6.13}$$

y

$$E[\tilde{C}_\kappa(RB)] = \frac{(-1)^k[c]_\kappa}{[-d+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(R),\ \mathrm{Re}(d)>m-1+k_1, \tag{2.6.14}$$

donde R es una matriz Hermitiana de orden $m \times m$.

Las distribuciones Dirichlet matriz variada compleja han sido definidas y estudiadas por varios autores (ver, por ejemplo, Troskie [62], Tan [64], Gupta y Nagar [24], y Cui, Gupta y Nagar [11]). Un amplio repaso sobre las distribuciones Dirichlet matriz variada se pueden encontrar en Gupta y Nagar [31].

Capítulo 3

Distribuciones Matriciales Unitariamente Invariantes y Residualmente Independientes

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se afirmó que si X es una matriz aleatoria Hermitiana definida positiva de orden $m \times m$ la cual tiene una distribución Wishart compleja/ Wishart invertida compleja/ beta tipo I matriz variada compleja ó beta tipo II matriz variada compleja, entonces es bien conocido que (i) la distribución de X es unitariamente invariante, es decir, la distribución de X es la misma que la de UXU^H, $U \in U(m)$, (ii) los elementos de la diagonal de X tienen distribuciones idénticas y (iii) para $X = TT^H$, donde T es una matriz triangular inferior compleja, los elementos de la diagonal de T son independientes. Motivados por estas propiedades comunes, Khatri, Khattree y R. D. Gupta [47] definieron la clase de distribuciones unitariamente invariantes y residualmente independientes, abreviada UNIARIM.

Definición 3.1.1 *La matriz aleatoria Hermitiana definida positiva X $(m \times m)$ se dice que tiene una distribución UNIARIM si*

(i) para cualquier matriz unitaria U de orden $m \times m$, la distribución de X y UXU^H son idénticas, y

(ii) para cualquier factorización triangular inferior $X = TT^H$, $T = (T_{ij})$, $T_{ii}\,(m_i \times m_i)$, $i = 1, \ldots, k$ son independientes, para cualquier partición $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ de m.

Cuando la matriz aleatoria X tiene una distribución UNIARIM se puede escribir $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$. Las distribuciones beta tipo I y tipo II de variable matricial compleja, Wishart compleja $(\Sigma = I_m)$, y Wishart invertida compleja $(\Psi = I_m)$ están en esta clase. (Khatri [41], Tan [64], Nagar, Bedoya y Arias [55], y Bedoya, Nagar y Gupta [2], Goodman [18], Shaman [60]).

Ahora se darán algunas propiedades de la clase de distribuciones UNIARIM definidas en Khatri, Khattree y R. D. Gupta [47].

Teorema 3.1.1 *Sea $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$. Particionada X como $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, $X_{11}\,(q \times q)$. Entonces X_{11} y $X_{22 \cdot 1} = X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12}$ son independientes, $X_{11} \in \tilde{\mathcal{C}}_q$, y $X_{22 \cdot 1} \in \tilde{\mathcal{C}}_{m-q}$.*

Teorema 3.1.2 *Sean $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ y $Y \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ independientes. Además sean T_1 y T_2 dos raíces cuadradas diferentes de Y. Entonces $T_1XT_1^H$ y $T_2XT_2^H$ tienen distribuciones idénticas.*

Teorema 3.1.3 *Sean $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ y $Y \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ independientes. Entonces, para cualquier raíz cuadrada T de Y, la distribución de $Z = TXT^H$ está en $\tilde{\mathcal{C}}_m$.*

Del resultado anterior se sigue que si $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix}$, $U_i\,(m \times m_i)$, $i = 1, 2$, $m_1 + m_2 = m$ es una matriz unitaria aleatoria independiente de $Z \in \tilde{\mathcal{C}}_m$, entonces $U_1^H Z U_1 \in \tilde{\mathcal{C}}_{m_1}$ y $(U_1^H Z^{-1} U_1)^{-1} \in \tilde{\mathcal{C}}_{m_2}$ son independientes. Además para $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, (i) $\frac{\mathbf{c}^H Z \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}$ tiene la misma distribución de z_{11} donde $Z = (z_{ij})$, y (ii) $\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H Z^{-1} \mathbf{c}}$ tiene la misma distribución de $1/z^{11}$ donde $Z^{-1} = (z^{ij})$. Además, si $E(Z)$, $E(Z^{-1})$, y $E(Z^{\alpha})$, α un entero, entonces $E(Z) = aI_m$, $E(Z^{-1}) = bI_m$, y $E(Z^{\alpha}) = \tilde{c}_{\alpha} I_m$, donde $a = E(x_{11}y_{11})$, $b = E(x^{11})E(y^{11})$, y la constante $\tilde{c}_{\alpha}$ depende de los momentos de orden menor ó igual que α de X y Y.

Sea $Z^{[i]}$ cualquier menor principal de Z de orden i y $Y = TT^H$, $X = RR^H$ factorizaciones triangular inferior. Entonces

$$v_{ii} = \frac{\det(Z^{[i]})}{\det(Z^{[i-1]})} = t_{ii}^2 r_{ii}^2,\ i = 1, \ldots, m,$$

donde $\det(Z^{[0]}) = 1$, son independientes y $E(\det(Z)^\alpha) = \prod_{i=1}^m E(v_{ii}^\alpha)$ siempre que las esperanzas implicadas existan.

En este capítulo se derivan varias distribuciones UNIARIM usando el Teorema 3.1.3. En la Sección 3.2 se definen algunas matrices aleatorias complejas y en la Seción 3.3 se dan sus funciones de densidad.

3.2. Generando Distribuciones UNIARIM

En la sección anterior se discutieron un número de propiedades de las distribuciones UNIARIM. Teniendo en cuenta que si $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ y $Y \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ son independientes, entonces para cualquier raíz T de Y, la distribución de $Z = TXT^H$ está en $\tilde{\mathcal{C}}_m$. En esta sección se explotaran estas propiedades para generar un número de distribuciones UNIARIM.

Sea $A_i \sim \mathbb{C}B_m^I(a_i, b_i)$, $B_i \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, $A \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$, y $B \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c, d)$ donde A_1 y A_2 son independientes, B_1 y B_2 son independientes, y A y B son independientes. Se define

$$Z_1 = A_1^{1/2} A_2 (A_1^{1/2})^H \tag{3.2.1}$$

$$Z_2 = B_1^{1/2} B_2 (B_1^{1/2})^H \tag{3.2.2}$$

$$Z_3 = A^{1/2} B (A^{1/2})^H \tag{3.2.3}$$

y

$$Z_4 = B^{1/2} A (B^{1/2})^H. \tag{3.2.4}$$

Entonces la p.d.f. de Z_1 está dada por (Cui, Gupta y Nagar [11]),

$$\frac{\tilde{\Gamma}_m(a_1 + b_1)\tilde{\Gamma}_m(a_2 + b_2)}{\tilde{\Gamma}_m(a_1)\tilde{\Gamma}_m(a_2)\tilde{\Gamma}_m(b_1 + b_2)} \det(Z_1)^{a_1 - m} \det(I_m - Z_1)^{b_1 + b_2 - m}$$
$$\times {}_2\tilde{F}_1(b_2, a_1 + b_1 - a_2; b_1 + b_2; I_m - Z_1), 0 < Z_1 = Z_1^H < I_m, \tag{3.2.5}$$

donde ${}_2\tilde{F}_1$ es la función hipergeométrica de Gauss de argumento matriz Hermitiana. La distribución de Z_1 es designada por $\tilde{H}_m^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$. Claramente, para

$a_2 = a_1 + b_1$, se obtiene $A_1^{1/2} A_2 (A_1^{1/2})^H \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1, b_1 + b_2)$. La densidad de Z_2, derivada en el Teorema 3.3.2, está dada por

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{B}_m(c_1 + d_2, c_2 + d_1)}{\tilde{B}_m(c_1, d_1)\tilde{B}_m(c_2, d_2)} \det(Z_2)^{c_2 - m} \\
&\quad \times {}_2\tilde{F}_1(c_2 + d_1, c_2 + d_2; c_1 + c_2 + d_1 + d_2; I_m - Z_2),\ Z_2 = Z_2^H > 0. \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Se denotará la distribución de Z_2 por $\tilde{H}_m^{(2)}(c_1, d_1, c_2, d_2)$. En el Teorema 3.3.3 se da la densidad de Z_3 como

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{B}_m(a + d, b)}{\tilde{B}_m(a, b)\tilde{B}_m(c, d)} \frac{\det(Z_3)^{c-m}}{\det(I_m + Z_3)^{c+d}} \\
&\quad \times {}_2\tilde{F}_1(b, c + d; a + b + d; (I_m + Z_3)^{-1}),\ Z_3 = Z_3^H > 0. \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

La distribución anterior se denotara por $\tilde{H}_m^{(3)}(a, b, c, d)$. Note que la distribución de Z_4 es la misma que la de Z_3.

Sea $X_i \sim \mathbb{C}W_m(\nu_i, I_m)$, $i = 1, 2$, $Y_i \sim I\mathbb{C}W_m(\mu_i, I_m)$, $i = 1, 2$, $X \sim \mathbb{C}W_m(\nu, I_m)$, y $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, I_m)$, donde X_1 y X_2 son independientes, Y_1 y Y_2 son independendientes, y X y Y son independientes. Sea

$$Z_5 = X_1^{1/2} X_2 (X_1^{1/2})^H \qquad (3.2.8)$$

$$Z_6 = Y_1^{1/2} Y_2 (Y_1^{1/2})^H \qquad (3.2.9)$$

$$Z_7 = X^{1/2} Y (X^{1/2})^H \qquad (3.2.10)$$

y

$$Z_8 = Y^{1/2} X (Y^{1/2})^H. \qquad (3.2.11)$$

Entonces, la p.d.f. de Z_5 es (Gupta y Nagar [32]),

$$\{\tilde{\Gamma}_m(\nu_1)\tilde{\Gamma}_m(\nu_2)\}^{-1} \det(Z_5)^{\nu_1 - m} B_{\nu_1 - \nu_2}(Z_5),\ Z_5 = Z_5^H > 0.$$

Ya que

$$Z_6^{-1} = (Y_1^{1/2} Y_2 (Y_1^{1/2})^H)^{-1} = (Y_1^{-1/2})^H Y_2^{-1} Y_1^{-1/2},$$

donde $Y_1^{-1} = (Y_1^{-1/2})^H Y_1^{-1/2} \sim \mathbb{C}W_m(\mu_1, I_m)$, $Y_2^{-1} \sim \mathbb{C}W_m(\mu_2, I_m)$, la p.d.f. de Z_6 se obtiene de la p.d.f. de Z_5 y está dada por

$$\{\tilde{\Gamma}_m(\mu_1)\tilde{\Gamma}_m(\mu_2)\}^{-1} \det(Z_6)^{-\mu_1-m} \tilde{B}_{\mu_1-\mu_2}(Z_6^{-1}), \quad Z_6 = Z_6^H > 0,$$

donde $\tilde{B}_\delta(\cdot)$ es la función Bessel de Herz de tipo II. Note que $Z_7 \sim \mathbb{C}B_m^{II}(\mu, \nu)$ y $Z_8 \sim \mathbb{C}B_m^{II}(\mu, \nu)$.

Además, se definen las siguientes matrices aleatorias las cuales están en la clase $\tilde{\mathcal{C}}_m$:

$$Z_9 = A^{1/2} X (A^{1/2})^H \tag{3.2.12}$$
$$Z_{10} = X^{1/2} A (X^{1/2})^H \tag{3.2.13}$$
$$Z_{11} = B^{1/2} X (B^{1/2})^H \tag{3.2.14}$$
$$Z_{12} = X^{1/2} B (X^{1/2})^H \tag{3.2.15}$$
$$Z_{13} = A^{1/2} Y (A^{1/2})^H \tag{3.2.16}$$
$$Z_{14} = Y^{1/2} A (Y^{1/2})^H \tag{3.2.17}$$
$$Z_{15} = B^{1/2} Y (B^{1/2})^H \tag{3.2.18}$$

y

$$Z_{16} = Y^{1/2} B (Y^{1/2})^H, \tag{3.2.19}$$

donde X es independiente de A y B, Y es independiente de A y B.

Las matrices aleatorias Z_9 y Z_{10} tienen la misma distribución dada por

$$\frac{\operatorname{etr}(-Z_9)\det(Z_9)^{\nu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\nu)\tilde{B}_m(a,b)} \tilde{\Gamma}_m(b) \tilde{\Psi}(b, -a+\nu+m; Z_9), \quad Z_9 = Z_9^H > 0,$$

donde $\tilde{\Psi}(\cdot)$ es la función hipergeométrica confluente de matriz Hermitiana. Las matrices aleatorias Z_{11} y Z_{12} tienen la misma densidad derivada como

$$\frac{\tilde{\Gamma}_m(\nu+d)\det(Z_{11})^{\nu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\nu)\tilde{B}_m(c,d)} \tilde{\Psi}(\nu+d, -c+\nu+m; Z_{11}), \quad Z_{11} = Z_{11}^H > 0.$$

Similarmente, las matrices aleatorias Z_{13} y Z_{14} tienen la misma densidad derivada en el Teorema 3.3.4 como

$$\frac{\tilde{\Gamma}_m(a+b)\det(Z_{13})^{-\mu-m}}{\tilde{B}_m(\mu,a)\tilde{\Gamma}_m(a+b+\mu)}\,{}_1\tilde{F}_1(a+\mu;a+b+\mu;-Z_{13}^{-1}),\ Z_{13}=Z_{13}^H>0, \quad (3.2.20)$$

donde ${}_1\tilde{F}_1(\cdot)$ es la función hipergeométrica confluente de argumento matriz Hermitiana. La distribución de Z_{13} es designada por $\tilde{H}_m^{(13)}(\mu,a,b)$. Finalmente, las matrices aleatorias Z_{15} y Z_{16} tienen la misma densidad que se obtiene en el Teorema 3.3.5 y está dada por

$$\frac{\tilde{\Gamma}_m(c+\mu)\det(Z_{15})^{-\mu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(c,d)}\tilde{\Psi}(c+\mu;\mu-d+m;-Z_{15}^{-1}),\ Z_{15}=Z_{15}^H>0. \quad (3.2.21)$$

La distribución anterior se denotara por $\tilde{H}_m^{(15)}(\mu,c,d)$.

3.3. Funciones de densidad

Teorema 3.3.1 *Sean A_1 y A_2 independientes, $A_1 \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1,b_1)$ y $A_2 \sim \mathbb{C}B_m^I(a_2,b_2)$. Entonces, $A_1^{1/2}A_2(A_1^{1/2})^H \sim \tilde{H}_m^{(1)}(a_1,b_1,a_2,b_2)$ y su función de densidad está dada por (3.2.5).*

Prueba: Ver Cui, Gupta y Nagar [11]. ∎

Corolario 3.3.1.1 *Si x_1 y x_2 son independientes, $x_1 \sim B^I(a_1,b_1)$ y $x_2 \sim B^I(a_2,b_2)$, entonces $x_1x_2 \sim H_1^{(1)}(a_1,b_1,a_2,b_2)$. Además, la p.d.f. de $z_1 = x_1x_2$ está dada por*

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(a_1+b_1)\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2)}z_1^{a_1-1}(1-z_1)^{b_1+b_2-1}\\ &\times{}_2F_1(b_2,a_1+b_1-a_2;b_1+b_2;1-z_1), 0<z_1<1, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss de argumento escalar .

Teorema 3.3.2 *Sean B_1 y B_2 independientes, $B_1 \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c_1,d_1)$ y $B_2 \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c_2,d_2)$. Entonces, $B_1^{1/2}B_2(B_1^{1/2})^H \sim \tilde{H}_m^{(2)}(c_1,d_1,c_2,d_2)$ y su densidad está dada por (3.2.6).*

Prueba: La densidad conjunta de B_1 y B_2 está dada por

$$\frac{\det(B_1)^{c_1-m}\det(B_2)^{c_2-m}\det(I_m+B_1)^{-(c_1+d_1)}\det(I_m+B_2)^{-(c_2+d_2)}}{\tilde{B}_m(c_1,c_1)\tilde{B}_m(c_2,d_2)},$$
$$B_1=B_1^H>0,\quad B_2=B_2^H>0.$$

Haciendo la transformación $Z_2 = B_1^{1/2}B_2(B_1^{1/2})^H$ con el Jacobiano $J(B_1,B_2 \to B_1,Z_2)=\det(B_1)^{-m}$ en la p.d.f. conjunta de B_1 y B_2 e integrando sobre B_1, la densidad marginal de Z_2 se obtiene como

$$\frac{\det(Z_2)^{c_2-m}}{\tilde{B}_m(c_1,d_1)\tilde{B}_m(c_2,d_2)}\int_{B_1=B_1^H>0}\frac{\det(B_1)^{c_1+d_2-m}}{\det(I_m+B_1)^{c_1+d_1}\det(B_1+Z_2)^{c_2+d_2}}\,dB_1,$$

donde $Z_2=Z_2^H>0$. Sustituyendo $V=(I_m+B_1)^{-1}$ con el Jacobiano $J(B_1\to V)=\det(V)^{-2m}$ en la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\det(Z_2)^{c_2-m}}{\tilde{B}_m(c_1,d_1)\tilde{B}_m(c_2,d_2)}\int_{0<V=V^H<I_m}\frac{\det(V)^{c_2+d_1-m}\det(I_m-V)^{c_1+d_2-m}}{\det(I_m-(I_m-Z_2)V)^{c_2+d_2}}\,dV$$
$$=\frac{\tilde{B}_m(c_1+d_2,c_2+d_1)}{\tilde{B}_m(c_1,d_1)\tilde{B}_m(c_2,d_2)}\det(Z_2)^{c_2-m}{}_2\tilde{F}_1(c_2+d_1,c_2+d_2;c_1+c_2+d_1+d_2;I_m-Z_2),$$

donde la última línea se obtiene usando la representacion integral de la función hipergeométrica de Gauss de argumento matriz Hermitiana. ∎

Corolario 3.3.2.1 *Si y_1 y y_2 son independientes, $y_1\sim B^{II}(c_1,d_1)$ y $y_2\sim B^{II}(c_2,d_2)$, entonces $y_1y_2\sim H_1^{(2)}(a_1,b_1,a_2,b_2)$. Además, la densidad de $z_2=y_1y_2$ está dada por*

$$\frac{B(d_1+c_2,c_1+d_2)}{B(c_1,d_1)B(c_2,d_2)}z_2^{c_2-1}$$
$$\times\,{}_2F_1(c_2+d_1,c_2+d_2;c_1+c_2+d_1+d_2;1-z_2),\ z_2>0. \qquad (3.3.2)$$

Teorema 3.3.3 *Sean A y B independientes, $A\sim\mathbb{C}B_m^I(a,b)$ y $B\sim\mathbb{C}B_m^{II}(c,d)$. Entonces, $A^{1/2}B(A^{1/2})^H\sim\tilde{H}_m^{(3)}(a,b,c,d)$ y su densidad está dada por (3.2.7).*

Prueba: La densidad conjunta de A y B está dada por

$$\frac{\det(A)^{a-m}\det(B)^{c-m}\det(I_m-A)^{b-m}\det(I_m+B)^{-(c+d)}}{\tilde{B}_m(a,b)\tilde{B}_m(c,d)}$$

donde $0 < A = A^H < I_m$ y $B = B^H > 0$. Haciendo la transformación $Z_3 = A^{1/2}B(A^{1/2})^H$ y $V = I_m - A$ con el Jacobiano $J(A, B \to V, Z_3) = \det(A)^{-m}$ en la p.d.f. conjunta de A y B e integrando sobre V, obtenemos la densidad de Z_3 como

$$\frac{\det(Z_3)^{c-m}\det(I_m+Z_3)^{-(c+d)}}{\tilde{B}_m(a,b)\tilde{B}_m(c,d)}\int_{0<V=V^H<I_m}\frac{\det(V)^{b-m}\det(I_m-V)^{a+d-m}}{\det(I_m-(I_m+Z_3)^{-1}V)^{c+d}}\,dV$$
$$= \frac{\tilde{B}_m(a+d,b)}{\tilde{B}_m(a,b)\tilde{B}_m(c,d)}\frac{\det(Z_3)^{c-m}}{\det(I_m+Z_3)^{c+d}}$$
$$\times {}_2\tilde{F}_1(b, c+d; a+b+d; (I_m+Z_3)^{-1}),\ Z_3 = Z_3^H > 0,$$

donde la última línea se obtiene usando la representación integral de la función hipergeométrica de Gauss de argumento de matriz Hermitiana (James [39], Chikuse [8]). ■

Corolario 3.3.3.1 *Si x e y son independientes, $x \sim B^I(c_1, d_1)$ e $y \sim B^{II}(c_2, d_2)$, entonces $xy \sim H_1^{(3)}(a, b, c, d)$. Además, la densidad de $z_3 = xy$ está dada por*

$$\frac{B(b,a+d)}{B(a,b)B(c,d)}\frac{z_3^{c-1}}{(1+z_3)^{c+d}}{}_2F_1(b, c+d; a+b+d; (1+z_3)^{-1}),\ z_3 > 0. \qquad (3.3.3)$$

Teorema 3.3.4 *Sean A y Y independientes, $A \sim \mathbb{C}B_m^I(a, b)$ y $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, I_m)$. Se define*

$$Z_{13} = A^{1/2}Y(A^{1/2})^H.$$

Entonces, $Z_{13} \sim \tilde{H}_m^{(13)}(\mu, a, b)$ y su densidad está dada por (3.2.20).

Prueba: La densidad conjunta de A y Y está dada por

$$\frac{\operatorname{etr}(-Y^{-1})\det(Y)^{-\mu-m}\det(A)^{a-m}\det(I_m-A)^{b-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(a,b)},$$
$$0 < A = A^H < I_m, \quad Y = Y^H > 0.$$

Haciendo la transformación $Z_{13} = A^{1/2}Y(A^{1/2})^H$ con $J(A, Y \to A, Z_{13}) = \det(A)^{-m}$ e integrando sobre A obtenemos

$$\frac{\det(Z_{13})^{-\mu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(a,b)} \int_{0<A=A^H<I_m} \operatorname{etr}(-Z_{13}^{-1}A) \det(A)^{a+\mu-m} \det(I_m - A)^{b-m}\, dA$$
$$= \frac{\det(Z_{13})^{-\mu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(a,b)} \frac{\tilde{\Gamma}_m(a+\mu)\tilde{\Gamma}_m(b)}{\tilde{\Gamma}_m(a+b+\mu)} {}_1\tilde{F}_1(a+\mu; a+b+\mu; -Z_{13}^{-1}),\ Z_{13} = Z_{13}^H > 0,$$

donde la última línea se obtiene usando (2.4.31). ■

Corolario 3.3.4.1 *Si x e y son mutuamente independientes, $x \sim B^I(a,b)$ e $y \sim IG(\mu, 1)$, entonces $xy \sim H_1^{(13)}(\mu, a, b)$. Además, la p.d.f. de $z_{13} = xy$ está dada por*

$$\frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+b)}{\Gamma(\mu)\Gamma(a)\Gamma(a+b+\mu)} z_{13}^{-\mu-m} {}_1F_1(a+\mu; a+b+\mu; -z_{13}^{-1}), \quad z_{13} > 0 \tag{3.3.4}$$

donde ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluente de argumento escalar (Luke [50]).

Teorema 3.3.5 *Sean B y Y independientes, $B \sim \mathbb{C}B_m^{II}(c,d)$ y $Y \sim I\mathbb{C}W_m(\mu, I_m)$. Se define*

$$Z_{15} = B^{1/2}Y(B^{1/2})^H.$$

Entonces, $Z_{15} \sim \tilde{H}_m^{(15)}(\mu, c, d)$ y su densidad está dada por (3.2.21).

Prueba: La densidad conjunta de B y Y es

$$\frac{\operatorname{etr}(-Y^{-1}) \det(Y)^{-\mu-m} \det(B)^{c-m} \det(I_m + B)^{-(c+d)}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(c,d)},$$
$$B = B^H > 0, \quad Y = Y^H > 0.$$

Transformando $Z_{15} = B^{1/2}Y(B^{1/2})^H$ con $J(B, Y \to B, Z_{13}) = \det(B)^{-m}$ e integrando sobre B se obtiene

$$\frac{\det(Z_{15})^{-\mu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(c,d)} \int_{B=B^H>0} \operatorname{etr}(-Z_{15}^{-1}B) \det(B)^{c+\mu-m} \det(I_m + B)^{-(c+d)} dB$$
$$= \frac{\det(Z_{15})^{-\mu-m}}{\tilde{\Gamma}_m(\mu)\tilde{B}_m(c,d)} \tilde{\Gamma}_m(c+\mu)\tilde{\Psi}(c+\mu; \mu-d+m; -Z_{15}^{-1}), \quad Z_{15} = Z_{15}^H > 0,$$

donde la última línea se obtiene usando (2.4.36). ■

Corolario 3.3.5.1 *Si y e x son independientes, $y \sim IG(\mu, 1)$ y $x \sim B^{II}(c, d)$, entonces $xy \sim H_1^{(15)}(\mu, c, d)$. Además, la p.d.f. de $z_{13} = xy$ está dada por*

$$\frac{\Gamma(c+\mu)}{\Gamma(\mu)B(c,d)} z_{15}^{-\mu-m} \psi(c+\mu; \mu-d+m; -z_{15}^{-1}), \quad z_{15} > 0, \tag{3.3.5}$$

donde ψ es la función hipergeométrica confluente de argumento escalar (Luke [50]).

Varias propiedades, resultados de distribuciones, valores esperados, etc. de ciertas matrices aleatorias definidas en la Sección 3.2 se encuentran en la literatura. Resultados relacionados con Z_5 y Z_6 fueron derivados por Gupta y Nagar [32] y propiedades de Z_9, Z_{10}, Z_{11} y Z_{12} fueron obtenidos por Khatri, Khattree, R. D. Gupta [47].

Los resultados de distribuciones, propiedades y valores esperados de funciones de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_{13} y Z_{15} son derivados en el próximo capítulo. Estos resultados son reportados en Gupta, Nagar y Vélez-Carvajal [33, 34].

CAPÍTULO 4

PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES UNIARIM

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se discutieron algunas distribuciones UNIARIM y estas se generaron sabiendo que si $X \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ y $Y \in \tilde{\mathcal{C}}_m$ son independientes, entonces para cualquier raíz cuadrada T de Y, la distribución de $Z = TXT^H$ está en $\tilde{\mathcal{C}}_m$.

En este capítulo se dan un número de resultados sobre estas distribuciones explotando el hecho de que ellas también pertenecen a la clase de distribuciones UNIARIM y utilizando propiedades que son comunes para estas distribuciones UNIARIM.

Varias propiedades, resultados de distribuciones, valores esperados, etc. de matrices aleatorias definidas en la Sección 3.2 se encuentran en la literatura. Resultados relacionados con Z_5 y Z_6 fueron derivados por Gupta y Nagar [32] y propiedades de Z_9, Z_{10}, Z_{11} y Z_{12} fueron obtenidos por Khatri, Khattree, R. D. Gupta [47].

Los resultados de distribuciones, propiedades y valores esperados de funciones de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_{13} y Z_{15} son derivados en este capítulo. Estos resultados son reportados en Gupta, Nagar y Vélez-Carvajal [33, 34].

4.2. ALGUNOS RESULTADOS DISTRIBUCIONALES

En esta sección se dan varios resultados que se utilizaran en las subsiguientes secciones.

Teorema 4.2.1 *Si $A_1 \sim \mathbb{C}B^I_{m_1+m_2}(a_1, b_1)$ y $A_2 \sim \mathbb{C}B^I_{m_1+m_2}(a_2, b_2)$ son independientes, entonces (i) $A^{1/2}_{111}A_{211}(A^{1/2}_{111})^H \sim \tilde{H}^{(1)}_{m_1}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ y $A^{1/2}_{122\cdot1}A_{222\cdot1}(A^{1/2}_{122\cdot1})^H \sim \tilde{H}^{(1)}_{m_2}(a_1-m_1, b_1, a_2-m_1, b_2)$ son independientes y (ii) $A^{1/2}_{122}A_{222}(A^{1/2}_{122})^H \sim \tilde{H}^{(1)}_{m_2}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ y $A^{1/2}_{111\cdot2}A_{211\cdot2}(A^{1/2}_{111\cdot2})^H \sim \tilde{H}^{(1)}_{m_1}(a_1 - m_2, b_1, a_2 - m_2, b_2)$ son independientes donde $A_{111\cdot2}, A_{211\cdot2}$, $A_{122\cdot1}$ y $A_{222\cdot1}$ son los complementos de Schur de A_{122}, A_{222}, A_{111} y A_{211}, respectivamente.*

Prueba: Del Teorema 2.6.8, A_{111}, A_{211}, $A_{122\cdot1}$ y $A_{222\cdot1}$ son independientes, $A_{111} \sim \mathbb{C}B^I_{m_1}(a_1, b_1)$, $A_{211} \sim \mathbb{C}B^I_{m_1}(a_2, b_2)$, $A_{122\cdot1} \sim \mathbb{C}B^I_{m_2}(a_1-m_1, b_1)$ y $A_{222\cdot1} \sim \mathbb{C}B^I_{m_2}(a_2 - m_1, b_2)$. Ahora, aplicando el Teorema 3.3.1 se llega al resultado deseado. La prueba de la segunda parte es similar. ■

Teorema 4.2.2 *Si $B_1 \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_1+m_2}(c_1, d_1)$ y $B_2 \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_1+m_2}(c_2, d_2)$ son independientes, entonces (i) $B^{1/2}_{111}B_{211}(B^{1/2}_{111})^H \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_1}(c_1, d_1-m_2, c_2, d_2-m_2)$ y $B^{1/2}_{122\cdot1}B_{222\cdot1}(B^{1/2}_{122\cdot1})^H \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_2}(c_1-m_1, d_1, c_2-m_1, d_2)$ son independientes y (ii) $B^{1/2}_{122}B_{222}(B^{1/2}_{122})^H \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_2}(c_1, d_1 - m_1, c_2, d_2 - m_1)$ y $B^{1/2}_{111\cdot2}A_{211\cdot2}(B^{1/2}_{111\cdot2})^H \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_1}(c_1 - m_2, d_1, c_2 - m_2, d_2)$ son independientes donde $B_{111\cdot2}, B_{211\cdot2}$, $B_{122\cdot1}$ y $B_{222\cdot1}$ son los complementos de Schur de B_{122}, B_{222}, B_{111} y B_{211}, respectivamente.*

Prueba: Del Teorema 2.6.9, B_{111}, B_{211}, $B_{122\cdot1}$ y $B_{222\cdot1}$ son independientes, $B_{111} \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_1}(c_1, d_1 - m_2)$, $B_{211} \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_1}(c_2, d_2 - m_2)$, $B_{122\cdot1} \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_2}(c_1 - m_1, d_1)$ y $B_{222\cdot1} \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_2}(c_2 - m_1, d_2)$. Luego, por aplicación del Teorema 3.3.2 se llega al resultado deseado. La prueba de la segunda parte es similar. ■

Teorema 4.2.3 *Si A y B son independientes, $A \sim \mathbb{C}B^I_{m_1+m_2}(a, b)$ y $B \sim \mathbb{C}B^{II}_{m_1+m_2}(c, d)$, entonces (i) $A^{1/2}_{11}B_{11}(A^{1/2}_{11})^H \sim \tilde{H}^{(3)}_{m_1}(a, b, c, d - m_2)$ y $A^{1/2}_{22\cdot1}B_{22\cdot1}(A^{1/2}_{22\cdot1})^H \sim \tilde{H}^{(3)}_{m_2}(a -$*

$m_1, b, c - m_1, d)$ *son independientes y (ii)* $A_{22}^{1/2} B_{22} (A_{22}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_2}^{(3)}(a, b, c, d - m_1)$ *y* $A_{11\cdot 2}^{1/2} B_{11\cdot 2} (A_{11\cdot 2}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_1}^{(3)}(a - m_2, b, c - m_2, d)$ *son independientes donde* $A_{11\cdot 2}, B_{11\cdot 2}$*,* $A_{22\cdot 1}$ *y* $B_{22\cdot 1}$ *son los complementos de Schur de* A_{22}*,* B_{22}*,* A_{11} *y* B_{11}*, respectivamente.*

Prueba: Del Teorema 2.6.8 y Teorema 2.6.9, A_{11}, B_{11}, $A_{22\cdot 1}$ y $B_{22\cdot 1}$ son independientes, $A_{11} \sim \mathbb{C}B_{m_1}^{I}(a, b)$, $B_{11} \sim \mathbb{C}B_{m_1}^{II}(c, d - m_2)$, $A_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m_2}^{I}(a - m_1, b)$ y $B_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m_2}^{II}(c - m_1, d)$. Luego, aplicando el Teorema 3.3.3 se llega al resultado deseado. La prueba de la segunda parte es similar. ■

Teorema 4.2.4 *Si* $A \sim \mathbb{C}B_{m_1+m_2}^{I}(a, b)$ *y* $Y \sim I\mathbb{C}W_{m_1+m_2}(\mu, I_m)$ *son independientes, entonces (i)* $A_{11}^{1/2} Y_{11} (A_{11}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_1}^{(13)}(\mu - m_2, a, b)$ *y* $A_{22\cdot 1}^{1/2} Y_{22\cdot 1} (A_{22\cdot 1}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_2}^{(13)}(\mu, a - m_1, b)$ *son independientes y (ii)* $A_{22}^{1/2} Y_{22} (A_{22}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_2}^{(13)}(\mu - m_1, a, b)$ *y* $A_{11\cdot 2}^{1/2} Y_{11\cdot 2} (A_{11\cdot 2}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_1}^{(13)}(\mu, a - m_2, b)$ *son independientes donde* $A_{11\cdot 2}, Y_{11\cdot 2}$*,* $A_{22\cdot 1}$ *y* $Y_{22\cdot 1}$ *son los complementos de Schur de* A_{22}*,* Y_{22}*,* A_{11} *y* Y_{11}*, respectivamente.*

Prueba: Del Teorema 2.6.5 y Teorema 2.6.8, A_{11}, Y_{11}, $A_{22\cdot 1}$ y $Y_{22\cdot 1}$ son independientes, $A_{11} \sim \mathbb{C}B_{m_1}^{I}(a, b)$, $Y_{11} \sim I\mathbb{C}W_{m_1}(\mu - m_2, I_{m_1})$, $A_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m_2}^{I}(a - m_1, b)$ y $Y_{22\cdot 1} \sim I\mathbb{C}W_{m_2}(\mu, I_{m_2})$. Luego, por aplicación del Teorema 3.3.4 se llega al resultado deseado. La prueba de la segunda parte es similar. ■

Teorema 4.2.5 *Si* $Y \sim I\mathbb{C}W_{m_1+m_2}(\mu, I_m)$ *y* $B \sim \mathbb{C}B_{m_1+m_2}^{II}(c, d)$ *son independientes, entonces (i)* $Y_{11}^{1/2} B_{11} (Y_{11}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_1}^{(15)}(\mu - m_2, c, d - m_2)$ *y* $Y_{22\cdot 1}^{1/2} B_{22\cdot 1} (Y_{22\cdot 1}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_2}^{(15)}(\mu, c - m_1, d)$ *son independientes y (ii)* $Y_{22}^{1/2} B_{22} (Y_{22}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_2}^{(15)}(\mu - m_1, c, d - m_1)$ *y* $Y_{11\cdot 2}^{1/2} B_{11\cdot 2} (Y_{11\cdot 2}^{1/2})^H \sim \tilde{H}_{m_1}^{(15)}(\mu, c - m_2, d)$ *son independientes donde* $Y_{11\cdot 2}, B_{11\cdot 2}$*,* $Y_{22\cdot 1}$ *y* $B_{22\cdot 1}$ *son los complementos de Schur de* Y_{22}*,* B_{22}*,* Y_{11} *y* B_{11}*, respectivamente.*

Prueba: Del Teorema 2.6.5 y Teorema 2.6.9, Y_{11}, B_{11}, $Y_{22\cdot 1}$ y $B_{22\cdot 1}$ son independientes, $Y_{11} \sim I\mathbb{C}W_{m_1}(\mu - m_2, I_{m_1})$, $B_{11} \sim \mathbb{C}B_{m_1}^{II}(c, d - m_2)$, $Y_{22\cdot 1} \sim I\mathbb{C}W_{m_2}(\mu, I_{m_2})$ y $B_{22\cdot 1} \sim \mathbb{C}B_{m_2}^{II}(c - m_1, d)$. Luego, aplicando el Teorema 3.3.5 se llega al resultado deseado. La prueba de la segunda parte es similar. ■

4.3. Propiedades de Z_1

En esta sección se obtendran algunas propiededes y se calcularan valores esperados de funciones de valor escalar y matricial de Z_1. Resultados similares para Z_2, Z_3, Z_{13} y Z_{15} son derivados en la Sección 4.4, Sección 4.5, Sección 4.6 y Sección 4.7, respectivamente.

(i) Particionando Z_1 como $Z_1 = \begin{pmatrix} Z_{111} & Z_{112} \\ Z_{121} & Z_{122} \end{pmatrix}$, Z_{111} $(m_1 \times m_1)$, $m_1 + m_2 = m$. Entonces, usando el Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.2 y Teorema 4.2.1, Z_{111} y su complemento de Schur $Z_{122 \cdot 1}$ son independientes, $Z_{111} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ y $Z_{122 \cdot 1} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(1)}(a_1 - m_1, b_1, a_2 - m_1, b_2)$. Además, Z_{122} y $Z_{111 \cdot 2}$ son independientes, $Z_{122} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ y $Z_{111 \cdot 2} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(1)}(a_1 - m_2, b_1, a_2 - m_2, b_2)$.

(ii) Para una matriz compleja no aleatoria C de orden $q \times m$ y rango $q (\leq m)$,

$$(CC^H)^{-1/2} C Z_1 C^H (CC^H)^{-1/2} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$$

y

$$(CC^H)^{1/2} (C Z_1^{-1} C^H)^{-1} (CC^H)^{1/2} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(1)}(a_1 - m_1, b_1, a_2 - m_1, b_2).$$

(iii) Para $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\mathbf{c}^H Z_1 \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}} \sim H_1^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$$

y

$$\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H Z_1^{-1} \mathbf{c}} \sim H_1^{(1)}(a_1 - m + 1, b_1, a_2 - m + 1, b_2).$$

Note que las distribuciones de $\frac{\mathbf{c}^H Z_1 \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}$ y $\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H Z_1^{-1} \mathbf{c}}$ no dependen de $\mathbf{c}$. Así, si $\mathbf{y}$ $(m \times 1)$ es un vector aleatorio complejo, independiente de Z_1, y $P(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\frac{\mathbf{y}^H Z_1 \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \sim H_1^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$$

y

$$\frac{\mathbf{y}^H\mathbf{y}}{\mathbf{y}^H Z_1^{-1}\mathbf{y}} \sim H_1^{(1)}(a_1-m+1, b_1, a_2-m+1, b_2).$$

(iv) Sea $Z_1 = (z_{1ij})$ y $Z_1^{-1} = (z_1^{ij})$. Entonces $z_{1ii} \sim H_1^{(1)}(a_1, b_1, a_2, b_2)$, $i = 1, \dots, m$ y $1/z_1^{ii} \sim H_1^{(1)}(a_1-m+1, b_1, a_2-m+1, b_2)$, $i = 1, \dots, m$.

(v) Sea $Z_1^{[i]} = (z_{1jk})$, $1 \leq j, k \leq i$. Definimos

$$v_i = \frac{\det(Z_1^{[i]})}{\det(Z_1^{[i-1]})}, i = 1, \dots, m \text{ y } \det(Z_1^{[0]}) = 1.$$

Entonces, las variables aleatorias $v_1, \dots, v_m$ son mutuamente independientes y usando el Teorema 2.6.10 Corolario 3.3.1.1, $v_i \sim H_1^{(1)}(a_1-i+1, b_1, a_2-i+1, b_2)$, $i = 1, \dots, m$. Además la p.d.f. de $\det(Z_1)$ es la misma de $\prod_{i=1}^m v_i$.

Ahora, se derivaran algunos valores esperados de funciones de valor escalar y matricial compleja de la matriz aleatoria compleja Z_1.

Usando la representación $Z_1 = A_1^{1/2} A_2 (A_1^{1/2})^H$, (2.6.9), (2.6.10), (2.6.12) y (2.6.13), los siguientes valores esperados se pueden obtener fácilmente:

$$E(Z_1) = \frac{a_1 a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} I_m,$$

$$E(Z_1^{-1}) = \frac{(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{(a_1-m)(a_2-m)} I_m, a_1 > m, a_2 > m,$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Z_1)] = \frac{[a_1]_\kappa [a_2]_\kappa}{[a_1+b_1]_\kappa [a_2+b_2]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Z_1^{-1})] = \frac{[-a_1-b_1+m]_\kappa\, [-a_2-b_2+m]_\kappa}{[-a_1+m]_\kappa\, [-a_2+m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),\ a_i > k_1+m-1,\ i = 1, 2,$$

Además, usando (2.3.13) y (2.3.14), los valores esperados de $(\operatorname{tr} Z_1)^2$ y $(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^2$ son evaluados como

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1)^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(Z_1)] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(Z_1)] \\
&= \frac{[a_1]_{(2)}[a_2]_{(2)}}{[a_1+b_1]_{(2)}[a_2+b_2]_{(2)}}\tilde{C}_{(2)}(I_m) + \frac{[a_1]_{(1^2)}[a_2]_{(1^2)}}{[a_1+b_1]_{(1^2)}[a_2+b_2]_{(1^2)}}\tilde{C}_{(1^2)}(I_m),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(Z_1^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(Z_1^{-1})] \\
&= \frac{[-a_1-b_1+m]_{(2)}[-a_2-b_2+m]_{(2)}}{[-a_1+m]_{(2)}[-a_2+m]_{(2)}}\tilde{C}_{(2)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[-a_1-b_1+m]_{(1^2)}[-a_2-b_2+m]_{(1^2)}}{[-a_1+m]_{(1^2)}[-a_2+m]_{(1^2)}}\tilde{C}_{(1^2)}(I_m).
\end{aligned}
$$

Luego, aplicando los resultados $[n]_{(2)} = n(n+1)$, $[n]_{(1^2)} = n(n-1)$, $[-n+m]_{(2)} = (n-m)(n-m-1)$, $[-n+m]_{(1^2)} = (n-m)(n-m+1)$, $\tilde{C}_{(2)}(I_m) = m(m+1)/2$ y $\tilde{C}_{(1^2)}(I_m) = m(m-1)/2$ en la expresión anterior y simplificando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1)^2] &= \frac{m a_1 a_2}{2(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \\
&\quad \times \left[\frac{(m+1)(a_1+1)(a_2+1)}{(a_1+b_1+1)(a_2+b_2+1)} + \frac{(m-1)(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+b_1-1)(a_2+b_2-1)}\right]
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^2] &= \frac{m(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{2(a_1-m)(a_2-m)} \\
&\quad \times \left[\frac{(a_1+b_1-m-1)(a_2+b_2-m-1)(m+1)}{(a_1-m-1)(a_2-m-1)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(a_1+b_1-m+1)(a_2+b_2-m+1)(m-1)}{(a_1-m+1)(a_2-m+1)}\right], \\
&\qquad a_1 > m+1, a_2 > m+1.
\end{aligned}
$$

Similarmente, usando (2.3.15)–(2.3.17), los valores esperados de $(\operatorname{tr} Z_1)^3$ y $(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^3$

se obtienen como

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1)^3] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_1)] + E[\tilde{C}_{(2,1)}(Z_1)] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_1)] \\
&= \frac{[a_1]_{(3)}[a_2]_{(3)}}{[a_1+b_1]_{(3)}[a_2+b_2]_{(3)}}\tilde{C}_{(3)}(I_m) + \frac{[a_1]_{(2,1)}[a_2]_{(2,1)}}{[a_1+b_1]_{(2,1)}[a_2+b_2]_{(2,1)}}\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[a_1]_{(1^3)}[a_2]_{(1^3)}}{[a_1+b_1]_{(1^3)}[a_2+b_2]_{(1^3)}}\tilde{C}_{(1^3)}(I_m),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^3] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_1^{-1})] + E[\tilde{C}_{(2,1)}(Z_1^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_1^{-1})] \\
&= \frac{[-a_1-b_1+m]_{(3)}[-a_2-b_2+m]_{(3)}}{[-a_1+m]_{(3)}[-a_2+m]_{(3)}}\tilde{C}_{(3)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[-a_1-b_1+m]_{(2,1)}[-a_2-b_2+m]_{(2,1)}}{[-a_1+m]_{(2,1)}[-a_2+m]_{(2,1)}}\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[-a_1-b_1+m]_{(1^3)}[-a_2-b_2+m]_{(1^3)}}{[-a_1+m]_{(1^3)}[-a_2+m]_{(1^3)}}\tilde{C}_{(1^3)}(I_m),
\end{aligned}
$$

respectivamente. Ahora, usando los resultados $[n]_{(3)} = n(n+1)(n+2)$, $[n]_{(2,1)} = n(n+1)(n-1)$, $[n]_{(1^3)} = n(n-1)(n-2)$, $[-n+m]_{(3)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m-2)$, $[-n+m]_{(2,1)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m+1)$, $[-n+m]_{(1^3)} = -(n-m)(n-m+1)(n-m+2)$, $\tilde{C}_{(3)}(I_m) = m(m+1)(m+2)/6$, $\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) = 2m(m^2-1)/3$ y $\tilde{C}_{(1^3)}(I_m) = m(m-1)(m-2)/6$ en las expresiones anteriores y simplificando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_1)^3] &= \frac{m a_1 a_2}{6(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \\
&\quad \times \left[\frac{(a_1+1)(a_1+2)(a_2+1)(a_2+2)(m+1)(m+2)}{(a_1+b_1+1)(a_1+b_1+2)(a_2+b_2+1)(a_2+b_2+2)}\right. \\
&\quad + \frac{4(a_1^2-1)(a_2^2-1)(m^2-1)}{[(a_1+b_1)^2-1][(a_2+b_2)^2-1]} \\
&\quad \left. + \frac{(a_1-1)(a_1-2)(a_2-1)(a_2-2)(m-1)(m-2)}{(a_1+b_1-1)(a_1+b_1-2)(a_2+b_2-1)(a_2+b_2-2)}\right],
\end{aligned}
$$

y

$$
E[(\operatorname{tr} Z_1^{-1})^3] = \frac{m(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{6(a_1-m)(a_2-m)}\left[\frac{(a_1+b_1-m-1)(a_1+b_1-m-2)}{(a_1-m-1)(a_1-m-2)}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(a_2+b_2-m-1)(a_2+b_2-m-2)(m+1)(m+2)}{(a_2-m-1)(a_2-m-2)}\\
&+\frac{4(m^2-1)[(a_1+b_1-m)^2-1][(a_2+b_2-m)^2-1]}{[(a_1-m)^2-1][(a_2-m)^2-1]}\\
&+\frac{(a_1+b_1-m+1)(a_1+b_1-m+2)}{(a_1-m+1)(a_1-m+2)}\\
&\left.\frac{(a_2+b_2-m+1)(a_2+b_2-m+2)(m-1)(m-2)}{(a_2-m+1)(a_2-m+2)}\right],\\
&a_i > m+2,\ i=1,2.
\end{aligned}
$$

Similarmente, valores esperados de $\operatorname{tr}(Z_1)\operatorname{tr}(Z_1^2)$ y $\operatorname{tr}(Z_1^{-1})\operatorname{tr}(Z_1^{-2})$ se obtienen como

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(Z_1)\operatorname{tr}(Z_1^2)] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_1)] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_1)]\\
&= \frac{a_1 a_2 m}{6(a_1+b_1)(a_2+b_2)}\\
&\quad\times\left[\frac{(a_1+1)(a_1+2)(a_2+1)(a_2+2)(m+1)(m+2)}{(a_1+b_1+1)(a_1+b_1+2)(a_2+b_2+1)(a_2+b_2+2)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{(a_1-1)(a_1-2)(a_2-1)(a_2-2)(m-1)(m-2)}{(a_1+b_1-1)(a_1+b_1-2)(a_2+b_2-1)(a_2+b_2-2)}\right],
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(Z_1^{-1})\operatorname{tr}(Z_1^{-2})] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_1^{-1})] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_1^{-1})]\\
&= \frac{m(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{6(a_1-m)(a_2-m)}\\
&\quad\times\left[\frac{(a_1+b_1-m-1)(a_1+b_1-m-2)}{(a_1-m-1)(a_1-m-2)}\right.\\
&\quad\frac{(a_2+b_2-m-1)(a_2+b_2-m-2)(m+1)(m+2)}{(a_2-m-1)(a_2-m-2)}\\
&\quad-\frac{(m-1)(m-2)(a_1+b_1-m+1)(a_1+b_1-m+2)}{(a_1-m+1)(a_1-m+2)}\\
&\quad\left.\frac{(a_2+b_2-m+1)(a_2+b_2-m+2)}{(a_2-m+1)(a_2-m+2)}\right],\ a_i > m+2,\ i=1,2,
\end{aligned}
$$

respectivamente. Como, $E(Z_1^\alpha) = \tilde{c}_\alpha I_m$, tenemos $E[\operatorname{tr}(Z_1^\alpha)] = \tilde{c}_\alpha m$. Así, el coeficiente de m en $E[\operatorname{tr}(Z_1^\alpha)]$ es $\tilde{c}_\alpha$. Por consiguiente, evaluando $E[\operatorname{tr}(Z_1^2)]$, $E[\operatorname{tr}(Z_1^{-2})]$,

$E[\text{tr}(Z_1^3)]$ y $E[\text{tr}(Z_1^{-3}]$ usando la técnica descrita anteriormente, y calculando los coeficientes de m en las expresiones resultantes se llega a

$$\begin{aligned}
E(Z_1^2) = {} & \frac{a_1 a_2}{2(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \left[\frac{(a_1+1)(a_2+1)(m+1)}{(a_1+b_1+1)(a_2+b_2+1)} \right. \\
& \left. - \frac{(a_1-1)(a_2-1)(m-1)}{(a_1+b_1-1)(a_2+b_2-2)} \right] I_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z_1^{-2}) = {} & \frac{(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{2(a_1-m)(a_2-m)} \\
& \times \left[\frac{(a_1+b_1-m-1)(a_2+b_2-m-1)(m+1)}{(a_1-m-1)(a_2-m-1)} \right. \\
& \left. - \frac{(a_1+b_1-m+1)(a_2+b_2-m+1)(m-1)}{(a_1-m+1)(a_2-m+1)} \right] I_m, \\
& a_1 > m+1, a_2 > m+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z_1^3) = {} & \frac{a_1 a_2}{6(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \\
& \times \left[\frac{(a_1+1)(a_1+2)(a_2+1)(a_2+2)(m+1)(m+2)}{(a_1+b_1+1)(a_1+b_1+2)(a_1+b_1+1)(a_2+b_2+2)} \right. \\
& - \frac{2(a_1^2-1)(a_2^2-1)(m^2-1)}{[(a_1+b_1)^2-1][(a_2+b_2)^2-1]} \\
& \left. + \frac{(a_1-1)(a_1-2)(a_2-1)(a_2-2)(m-1)(m-2)}{(a_1+b_1-1)(a_1+b_1-2)(a_2+b_2-1)(a_2+b_2-2)} \right] I_m,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E(Z_1^{-3}) = {} & \frac{(a_1+b_1-m)(a_2+b_2-m)}{6(a_1-m)(a_2-m)} \\
& \times \left[\frac{(a_1+b_1-m-1)(a_1+b_1-m-2)(m+1)(m+2)}{(a_1-m-1)(a_1-m-2)} \right. \\
& \frac{(a_2+b_2-m-1)(a_2+b_2-m-2)}{(a_2-m-1)(a_2-m-2)} \\
& + \frac{(a_1+b_1-m+1)(a_1+b_1-m+2)}{(a_1-m+1)(a_1-m+2)} \\
& \frac{(a_2+b_2-m+1)(a_2+b_2-m+2)(m-1)(m-2)}{(a_2-m+1)(a_2-m+2)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{2[(a_1+b_1-m)^2-1][(a_2+b_2-m)^2-1](m^2-1)}{[(a_1-m)^2-1][(a_2-m)^2-1]}\Bigg] I_m,$$
$$a_i > m+2,\ i=1,2.$$

4.4. Propiedades de Z_2

(i) Particionando Z_2 como $Z_2 = \begin{pmatrix} Z_{211} & Z_{212} \\ Z_{221} & Z_{222} \end{pmatrix}$, Z_{211} $(m_1 \times m_1)$, $m_1 + m_2 = m$. Entonces, usando el Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.2 y Teorema 4.2.2, Z_{211} y $Z_{222\cdot 1}$ son independientes, $Z_{211} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_1}(c_1, d_1 - m_2, c_2, d_2 - m_2)$ y $Z_{222\cdot 1} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_2}(c_1 - m_1, d_1, c_2 - m_1, d_2)$. Además, Z_{222} y $Z_{211\cdot 2}$ son independientes, $Z_{222} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_2}(c_1, d_1 - m_1, c_2, d_2 - m_1)$ y $Z_{211\cdot 2} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_1}(c_1 - m_2, d_1, c_2 - m_2, d_2)$.

(ii) Para una matriz no aleatoria compleja C de orden $q \times m$ rango $q(\leq m)$,

$$(CC^H)^{-1/2} C Z_1 C^H (CC^H)^{-1/2} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_1}(c_1, d_1 - m_2, c_2, d_2 - m_2)$$

y

$$(CC^H)^{1/2} (C Z_2^{-1} C^H)^{-1} (CC^H)^{1/2} \sim \tilde{H}^{(2)}_{m_2}(c_1 - m_1, d_1, c_2 - m_1, d_2).$$

(iii) Si $\mathbf{y}$ $(m \times 1)$ es un vector aleatorio no complejo con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ó un vector aleatorio complejo independiente de Z_2 con $P(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\frac{\mathbf{y}^H Z_2 \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \sim H^{(2)}_1(c_1, d_1 - m + 1, c_2, d_2 - m + 1)$$

y

$$\frac{\mathbf{y}^H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H Z_2^{-1} \mathbf{y}} \sim H^{(2)}_1(c_1 - m + 1, d_1, c_2 - m + 1, d_2).$$

(iv) Sea $Z_2 = (z_{2ij})$ y $Z_2^{-1} = (z_2^{ij})$. Entonces $z_{2ii} \sim H^{(2)}_1(c_1, d_1 - m + 1, c_2, d_2 - m + 1)$, $i = 1, \ldots, m$ y $1/z_2^{ii} \sim H^{(2)}_1(c_1 - m + 1, d_1, c_2 - m + 1, d_2)$, $i = 1, \ldots, m$.

(v) Sea $Z_2^{[i]} = (z_{2jk}), 1 \leq j, k \leq i$. Definimos

$$v_i = \frac{\det(Z_2^{[i]})}{\det(Z_2^{[i-1]})}, i = 1, \ldots, m \text{ y } \det(Z_2^{[0]}) = 1.$$

Entonces, las variables aleatorias $v_1, \ldots, v_m$ son mutuamente independientes y usando el Teorema 2.6.11 y el Corolario 3.3.2.1, $v_i \sim H_1^{(1)}(c_1 - i + 1, d_1 - m + i, c_2 - i + 1, d_2 - m + i)$, $i = 1, \ldots, m$. Además la p.d.f. de $\det(Z_2)$ es la misma que la de $\prod_{i=1}^m v_i$.

Ahora, se derivaran algunos valores esperados de funciones de valor escalar y matricial compleja de la matriz aleatoria compleja Z_2.

Usando la representación $Z_2 = B_1^{1/2} B_2 (B_1^{1/2})^H \sim \tilde{H}_m^{(2)}(c_1, d_1, c_2, d_2)$, (2.6.11) y (2.6.14), obtenemos

$$E(Z_2) = \frac{c_1 c_2}{(d_1 - m)(d_2 - m)} I_m, \; d_1 > m, \; d_2 > m,$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Z_2)] = \frac{[c_1]_\kappa [c_2]_\kappa}{[-d_1 + m]_\kappa [-d_2 + m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m), \; d_i > k_1 + m - 1, \; i = 1, 2,$$

Además, usando la técnica para hallar los valores esperados explicada en la Sección 4.3, se obtiene

$$\begin{aligned} E[(\operatorname{tr} Z_2)^2] = {} & \frac{m c_1 c_2}{2(d_1 - m)(d_2 - m)} \\ & \times \left[\frac{(m+1)(c_1+1)(c_2+1)}{(d_1 - m - 1)(d_2 - m - 1)} + \frac{(m-1)(c_1-1)(c_2-1)}{(d_1 - m + 1)(d_2 - m + 1)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(\operatorname{tr} Z_2)^3] = {} & \frac{m c_1 c_2}{6(d_1 - m)(d_2 - m)} \\ & \times \left[\frac{(c_1+1)(c_1+2)(c_2+1)(c_2+2)(m+1)(m+2)}{(d_1 - m - 1)(d_1 - m - 2)(d_2 - m - 1)(d_2 - m - 2)} \right. \\ & \quad + \frac{4(c_1^2 - 1)(c_2^2 - 1)(m^2 - 1)}{[(d_1 - m)^2 - 1][(d_2 - m)^2 - 1]} \\ & \quad \left. + \frac{(c_1 - 1)(c_1 - 2)(c_2 - 1)(c_2 - 2)(m-1)(m-2)}{(d_1 - m + 1)(d_1 - m + 2)(d_2 - m + 1)(d_2 - m + 2)} \right], \end{aligned}$$

$$E[\mathrm{tr}(Z_2)\,\mathrm{tr}(Z_2^2)] = \frac{mc_1c_2}{6(d_1-m)(d_2-m)} \times \Bigg[\frac{(c_1+1)(c_1+2)(c_2+1)(c_2+2)(m+1)(m+2)}{(d_1-m-1)(d_1-m-2)(d_2-m-1)(d_2-m-2)} - \frac{(c_1-1)(c_1-2)(c_2-1)(c_2-2)(m-1)(m-2)}{(d_1-m+1)(d_1-m+2)(d_2-m+1)(d_2-m+2)}\Bigg],$$

$$E(Z_2^2) = \frac{c_1c_2}{2(d_1-m)(d_2-m)}\Bigg[\frac{(c_1+1)(c_2+1)(m+1)}{(d_1-m-1)(d_2-m-1)} - \frac{(c_1-1)(c_2-1)(m-1)}{(d_1-m+1)(d_2-m+1)}\Bigg] I_m,\ d_1 > m+1,\ d_2 > m+1,$$

y

$$E(Z_2^3) = \frac{c_1c_2}{6(d_1-m)(d_2-m)}\Bigg[\frac{(c_1+1)(c_1+2)(c_2+1)(c_2+2)(m+1)(m+2)}{(d_1-m-1)(d_1-m-2)(d_2-m-1)(d_2-m-2)} - \frac{2(c_1^2-1)(c_2^2-1)(m^2-1)}{[(d_1-m)^2-1][(d_2-m)^2-1]} + \frac{(c_1-1)(c_1-2)(c_2-1)(c_2-2)(m-1)(m-2)}{(d_1-m+1)(d_1-m+2)(d_2-m+1)(d_2-m+2)}\Bigg] I_m,$$
$$d_i > m+2, i = 1, 2.$$

Además, notando que $Z_2^{-1} \sim \tilde{H}_m^{(2)}(d_1, c_1, d_2, c_2)$, $E(Z_2^{-1})$, $E[\tilde{C}_\kappa(Z_2^{-1})]$, $E(Z_2^{-2})$, $E(Z_2^{-3})$, $E[(\mathrm{tr}\, Z_2^{-1})^2], E[(\mathrm{tr}\, Z_2^{-1})^3]$ y $E[\mathrm{tr}(Z_2^{-1})\,\mathrm{tr}(Z_2^{-2})]$ pueden ser obtenidas desde $E(Z_2), E[\tilde{C}_\kappa(Z_2)]$, $E(Z_2^2)$, $E(Z_2^3)$, $E[(\mathrm{tr}\, Z_2)^2]$, $E[(\mathrm{tr}\, Z_2)^3]$ y $E[\mathrm{tr}(Z_2)\,\mathrm{tr}(Z_2^2)]$, respectivamente.

4.5. PROPIEDADESDE Z_3

(i) Sea $Z_3 = \begin{pmatrix} Z_{311} & Z_{312} \\ Z_{321} & Z_{322} \end{pmatrix}$, Z_{311} $(m_1 \times m_1)$, $m_1 + m_2 = m$. Entonces, usando el Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.2 y Teorema 4.2.3, Z_{311} y $Z_{322\cdot 1}$ son independientes, $Z_{311} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(3)}(a, b, c, d - m_2)$ y $Z_{322\cdot 1} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(1)}(a - m_1, b, c - m_1, d)$. Además, Z_{322} y $Z_{311\cdot 2}$ son independientes, $Z_{322} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(1)}(a, b, c, d - m_1)$ y $Z_{311\cdot 2} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(3)}(a - m_2, b, c - m_2, d)$.

(ii) Para una matriz aleatoria C de orden $q \times m$ de rango $q(\leq m)$,

$$(CC^H)^{-1/2} C Z_3 C^H (CC^H)^{-1/2} \sim \tilde{H}^{(3)}_{m_1}(a, b, c, d - m_2)$$

y

$$(CC^H)^{1/2} (C Z_3^{-1} C^H)^{-1} (CC^H)^{1/2} \sim \tilde{H}^{(3)}_{m_2}(a - m_1, b, c - m_1, d).$$

(iii) Si $\mathbf{y}$ $(m \times 1)$ es un vector complejo no aleatorio con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ó un vector aleatorio complejo independiente de Z_3 con $P(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\frac{\mathbf{y}^H Z_3 \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \sim H^{(3)}_1(a, b, c, d - m + 1)$$

y

$$\frac{\mathbf{y}^H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H Z_3^{-1} \mathbf{y}} \sim H^{(3)}_1(a - m + 1, b, c - m + 1, d).$$

(iv) Sea $Z_3 = (z_{3ij})$ y $Z_3^{-1} = (z_3^{ij})$. Entonces $z_{3ii} \sim H^{(3)}_1(a, b, c, d - m + 1)$, $i = 1, \ldots, m$ y $1/z_3^{ii} \sim H^{(3)}_1(a - m + 1, b, c - m + 1, d)$, $i = 1, \ldots, m$.

(v) Sea $Z_3^{[i]} = (z_{3jk})$, $1 \leq j, k \leq i$. Definimos

$$v_i = \frac{\det(Z_3^{[i]})}{\det(Z_3^{[i-1]})}, i = 1, \ldots, m \text{ y } \det(Z_3^{[0]}) = 1.$$

Entonces, las variables aleatorias $v_1, \ldots, v_m$ son mutuamente independientes y usando el Teorema 2.6.10, Teorema 2.6.11 y Corolario 3.3.3.1, $v_i \sim H^{(3)}_1(a - i + 1, b, c - i + 1, d - m + i)$, $i = 1, \ldots, m$. Además la p.d.f. de $\det(Z_3)$ es la misma que la de $\prod_{i=1}^m v_i$.

Usando la representación $Z_3 = A^{1/2} B (A^{1/2})^H \sim \tilde{H}^{(3)}_m(a, b, c, d)$, (2.6.9), (2.6.10), (2.6.11), (2.6.12)–(2.6.14), y la misma técnica para hallar los valores esperados dada en la Sección 4.3, obtenemos

$$E(Z_3) = \frac{ac}{(a+b)(d-m)} I_m, \; d > m,$$

$$E(Z_3^{-1}) = \frac{(a+b-m)d}{(a-m)(c-m)} I_m, a > m, c > m,$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Z_3)] = \frac{(-1)^k [a]_\kappa [c]_\kappa}{[a+b]_\kappa [-d+m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),\ d > m - 1 + k_1,$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(Z_3^{-1})] = \frac{(-1)^k [-a-b+m]_\kappa\, [d]_\kappa}{[-a+m]_\kappa\, [-c+m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),$$
$$a > k_1 + m - 1,\ c > k_1 + m - 1,$$

$$E(Z_3^2) = \frac{ac}{2(a+b)(d-m)} \left[\frac{(a+1)(c+1)(m+1)}{(a+b+1)(d-m-1)} - \frac{(a-1)(c-1)(m-1)}{(a+b-1)(d-m+1)} \right] I_m,\ d > m+1,$$

$$E(Z_3^{-2}) = \frac{(a+b-m)d}{6(a-m)(c-m)} \left[\frac{(a+b-m-1)(d+1)(m+1)}{(a-m-1)(c-m-1)} - \frac{(a+b-m+1)(d-1)(m-1)}{(a-m+1)(c-m+1)} \right] I_m,\ a > m+1, c > m+1,$$

$$E(Z_3^3) = \frac{ac}{6(a+b)(d-m)} \left[\frac{(a+1)(a+2)(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(d-m-1)(d-m-2)} + \frac{(a-1)(a-2)(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(d-m+1)(d-m+2)} - \frac{2(a^2-1)(c^2-1)(m^2-1)}{[(a+b)^2-1][(d-m)^2-1]} \right] I_m,\ d > m+2,$$

$$E(Z_3^{-3}) = \frac{(a+b-m)d}{6(a-m)(c-m)} \times \left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)(c-m-1)(c-m-2)} + \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)(c-m+1)(c-m+2)} - \frac{2[(a+b-m)^2-1](d^2-1)(m^2-1)}{[(a-m)^2-1][(c-m)^2-1]} \right] I_m,\ c > m+2,$$

$$E[(\operatorname{tr} Z_3)^2] = \frac{mac}{2(a+b)(d-m)} \times \left[\frac{(m+1)(a+1)(c+1)}{(a+b+1)(d-m-1)} + \frac{(m-1)(a-1)(c-1)}{(a+b-1)(d-m+1)} \right],$$

$$E[(\operatorname{tr} Z_3^{-1})^2] = \frac{m(a+b-m)d}{2(a-m)(c-m)} \left[\frac{(a+b-m-1)(d+1)(m+1)}{(a-m-1)(c-m-1)} + \frac{(a+b-m+1)(d-c)(m-1)}{(a-m+1)(c-m+1)} \right], a > m+1, c > m+1,$$

$$E[(\operatorname{tr} Z_3)^3] = \frac{mac}{6(a+b)(d-m)} \left[\frac{(a+1)(a+2)(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(d-m-1)(d-m-2)} + \frac{4(a^2-1)(c^2-1)(m^2-1)}{[(a+b)^2-1][(d-m)^2-1]} + \frac{(a-1)(a-2)(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(d-m+1)(d-m+2)} \right], d > m+2,$$

$$E[(\operatorname{tr} Z_3^{-1})^3] = \frac{m(a+b-m)d}{6(a-m)(c-m)} \left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)}{(a-m-1)(a-m-2)} \frac{(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(c-m-1)(c-m-2)} + \frac{4(m^2-1)[(a+b-m)^2-1](d^2-1)}{[(a-m)^2-1][(c-m)^2-1]} + \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \frac{(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(c-m+1)(c-m+2)} \right], a > m+2, c > m+2,$$

$$E[\operatorname{tr}(Z_3)\operatorname{tr}(Z_3^2)] = \frac{mac}{6(a+b)(d-m)} \left[\frac{(a+1)(a+2)(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(d-m-1)(d-m-2)} - \frac{(a-1)(a-2)(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(d-m+1)(d-m+2)} \right], d > m+2,$$

y

$$E[\operatorname{tr}(Z_3^{-1})\operatorname{tr}(Z_3^{-2})] = \frac{m(a+b-m)d}{6(a-m)(c-m)} \left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)}{(a-m-1)(a-m-2)} \frac{(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(c-m-1)(c-m-2)} - \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \frac{(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(c-m+1)(c-m+2)} \right],$$

donde $a > m+2$ y $c > m+2$.

Note que los valores esperados dados en la Sección 4.3, Sección 4.4 y Sección 4.5 fueron derivados usando invarianza y resultados de polinomios zonales de matrices Hermitianas para $k = 2, 3$. Resultados sobre polinomios zonales para $k = 4, 5$ se pueden obtener y por consiguiente también valores esperados tales como $E[(\operatorname{tr} Z_i^{\pm j_1})^{r_1} (\operatorname{tr} Z_i^{\pm j_2})^{r_2}]$, $j_1 r_1 + j_2 r_2 = 4, 5$, $i = 1, 2, 3$

4.6. PROPIEDADES DE Z_{13}

(i) Sea $Z_{13} = \begin{pmatrix} Z_{1311} & Z_{1312} \\ Z_{1321} & Z_{1322} \end{pmatrix}$, Z_{1311} $(m_1 \times m_1)$, $m_1 + m_2 = m$. Entonces, usando el Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.2 y Teorema 4.2.4, Z_{1311} y su complemento Schur $Z_{1322\cdot 1}$ son independientes, $Z_{1311} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(13)}(\mu - m_2, a, b)$ y $Z_{1322\cdot 1} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(13)}(\mu, a - m_1, b)$. Además, Z_{1322} y su complemento de Schur $Z_{1311\cdot 2}$ son independientes, $Z_{1322} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(13)}(\mu - m_1, a, b)$ y $Z_{1311\cdot 2} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(13)}(\mu, a - m_2, b)$.

(ii) Para una matriz compleja no aleatoria C de orden $q \times m$ y rango $q (\leq m)$,

$$(CC^H)^{-1/2} C Z_{13} C^H (CC^H)^{-1/2} \sim \tilde{H}_{m_1}^{(13)}(\mu - m_2, a, b)$$

y

$$(CC^H)^{1/2} (C Z_{13}^{-1} C^H)^{-1} (CC^H)^{1/2} \sim \tilde{H}_{m_2}^{(13)}(\mu, a - m_1, b).$$

(iii) Para $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\mathbf{c}^H Z_{13} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}} \sim H_1^{(13)}(\mu - m + 1, a, b) \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H Z_{13}^{-1} \mathbf{c}} \sim H_1^{(13)}(\mu, a - m + 1, b).$$

Note que las distribuciones de $\frac{\mathbf{c}^H Z_{13} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}$ y $\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H Z_{13}^{-1} \mathbf{c}}$ no dependenden de $\mathbf{c}$. Así, si $\mathbf{y}$ $(m \times 1)$ es un vector aleatorio complejo independiente de Z_{13}, y $P(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\frac{\mathbf{y}^H Z_{13} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \sim H_1^{(13)}(\mu - m + 1, a, b) \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H Z_{13}^{-1} \mathbf{y}} \sim H_1^{(13)}(\mu, a - m + 1, b).$$

(iv) Sea $Z_{13} = (z_{13ij})$ y $Z_{13}^{-1} = (z_{13}^{ij})$. Entonces $z_{13ii} \sim H_1^{(13)}(\mu - m + 1, a, b)$, $i = 1, \ldots, m$ y $1/z_{13}^{ii} \sim H_1^{(13)}(\mu, a - m + 1, b)$, $i = 1, \ldots, m$.

(v) Sea $Z_{13}^{[i]} = (z_{13jk})$, $1 \leq j, k \leq i$. Definimos

$$v_i = \frac{\det(Z_{13}^{[i]})}{\det(Z_{13}^{[i-1]})}, i = 1, \ldots, m \text{ y } \det(Z_{13}^{[0]}) = 1.$$

Entonces, las variables aleatorias $v_1, \ldots, v_m$ son mutuamente independientes y usando el Teorema 2.6.3, Teorema 2.6.10 y el Corolario 3.3.4.1, $v_i \sim H_1^{(13)}(\mu - i + 1, a, b)$, $i = 1, \ldots, m$. Además la p.d.f. de $\det(Z_{13})$ es la misma que la de $\prod_{i=1}^m v_i$.

Usando la representación $Z_{13} = A^{1/2} Y (A^{1/2})^H$ y (2.6.9)–(2.6.13), se obtiene

$$\begin{aligned}
E(Z_{13}) &= \frac{a}{(a+b)(\mu - m)} I_m,\ \mu > m,\\
E(Z_{13}^{-1}) &= \frac{\mu(a+b-m)}{a-m} I_m, a > m,\\
E[\tilde{C}_\kappa(Z_{13})] &= \frac{(-1)^k [a]_\kappa}{[-\mu + m]_\kappa [a+b]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),\ \mu > k_1 + m - 1\\
E[\tilde{C}_\kappa(Z_{13}^{-1})] &= \frac{[\mu]_\kappa\, [-a-b+m]_\kappa}{[-a+m]_\kappa} \tilde{C}_\kappa(I_m),\ a > k_1 + m - 1,\ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Además, usando (2.3.13) y (2.3.14), los valores esperados de $(\operatorname{tr} Z_{13})^2$ y $(\operatorname{tr} Z_{13}^{-1})^2$ son evaluados como

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13})^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(Z_{13})] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(Z_{13})]\\
&= \frac{(-1)^2 [a]_{(2)}}{[-\mu + m]_{(2)} [a+b]_{(2)}} \tilde{C}_{(2)}(I_m) + \frac{(-1)^2 [a]_{(1^2)}}{[-\mu + m]_{(1^2)} [a+b]_{(1^2)}} \tilde{C}_{(1^2)}(I_m),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13}^{-1})^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(Z_{13}^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(Z_{13}^{-1})]\\
&= \frac{[\mu]_{(2)} [-a-b+m]_{(2)}}{[-a+m]_{(2)}} \tilde{C}_{(2)}(I_m) + \frac{[\mu]_{(1^2)} [-a-b+m]_{(1^2)}}{[-a+m]_{(1^2)}} \tilde{C}_{(1^2)}(I_m).
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando los resultados $[n]_{(2)} = n(n+1)$, $[n]_{(1^2)} = n(n-1)$, $[-n+m]_{(2)} = (n-m)(n-m-1)$, $[-n+m]_{(1^2)} = (n-m)(n-m+1)$, $\tilde{C}_{(2)}(I_m) = m(m+1)/2$ y

$\tilde{C}_{(1^2)}(I_m) = m(m-1)/2$ en la expresión anterior y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13})^2] = {} & \frac{ma}{2(\mu - m)(a+b)} \\
& \times \left[\frac{(m+1)(a+1)}{(\mu - m - 1)(a+b+1)} + \frac{(m-1)(a-1)}{(\mu - m + 1)(a+b-1)} \right], \mu > m,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13}^{-1})^2] = {} & \frac{m\mu(a+b-m)}{2(a-m)} \left[\frac{(\mu+1)(a+b-m-1)(m+1)}{(a-m-1)} \right. \\
& \left. + \frac{(\mu-1)(a+b-m+1)(m-1)}{(a-m+1)} \right], a > m+1.
\end{aligned}$$

Similarmente, usando (2.3.15)–(2.3.17), los valores esperados de $(\mathrm{tr} Z_{13})^3$ y $(\mathrm{tr} Z_{13}^{-1})^3$ se obtienen como

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13})^3] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_{13})] + E[\tilde{C}_{(2,1)}(Z_{13})] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_{13})] \\
&= -\frac{[a]_{(3)}}{[-\mu+m]_{(3)}[a+b]_{(3)}} \tilde{C}_{(3)}(I_m) - \frac{[a]_{(2,1)}}{[-\mu+m]_{(2,1)}[a+b]_{(2,1)}} \tilde{C}_{(2,1)}(I_m) \\
&\quad - \frac{[a]_{(1^3)}}{[-\mu+m]_{(1^3)}[a+b]_{(1^3)}} \tilde{C}_{(1^3)}(I_m),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{13}^{-1})^3] &= E[\tilde{C}_{(3)}(Z_{13}^{-1})] + E[\tilde{C}_{(2,1)}(Z_{13}^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_{13}^{-1})] \\
&= \frac{[\mu]_{(3)}[-a-b+m]_{(3)}}{[-a+m]_{(3)}} \tilde{C}_{(3)}(I_m) + \frac{[\mu]_{(2,1)}[-a-b+m]_{(2,1)}}{[-a+m]_{(2,1)}} \tilde{C}_{(2,1)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[\mu]_{(1^3)}[-a-b+m]_{(1^3)}}{[-a+m]_{(1^3)}} \tilde{C}_{(1^3)}(I_m),
\end{aligned}$$

respectivamente. Ahora, usando los resultados $[n]_{(3)} = n(n+1)(n+2)$, $[n]_{(2,1)} = n(n+1)(n-1)$, $[n]_{(1^3)} = n(n-1)(n-2)$, $[-n+m]_{(3)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m-2)$, $[-n+m]_{(2,1)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m+1)$, $[-n+m]_{(1^3)} = -(n-m)(n-m+1)(n-m+2)$, $\tilde{C}_{(3)}(I_m) = m(m+1)(m+2)/6$, $\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) = 2m(m^2 -$

$1)/3$ y $\tilde{C}_{(1^3)}(I_m) = m(m-1)(m-2)/6$ en la expresión anterior y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} E[(\operatorname{tr} Z_{13})^3] = & \frac{ma}{6(\mu-m)(a+b)} \left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(a+b+1)(a+b+2)} \right. \\ & + \frac{4(a^2-1)(m^2-1)}{[(\mu-m)^2-1][(a+b)^2-1]} \\ & \left. + \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(a+b-1)(a+b-2)} \right], \ \mu > m+1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E[(\operatorname{tr} Z_{13}^{-1})^3] = & \frac{m\mu(a+b-m)}{6(a-m)} \\ & \times \left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)} \right. \\ & + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \\ & \left. + \frac{4(\mu^2-1)[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{[(a-m)^2-1]} \right], \ a > m+2. \end{aligned}$$

Similarmente, valores esperados de $\operatorname{tr}(Z_{13}) \operatorname{tr}(Z_{13}^2)$ y $\operatorname{tr}(Z_{13}^{-1}) \operatorname{tr}(Z_{13}^{-2})$ se obtienen como

$$\begin{aligned} E[\operatorname{tr}(Z_{13}) \operatorname{tr}(Z_{13}^2)] = & E[\tilde{C}_{(3)}(Z_{13})] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_{13})] \\ = & \frac{ma}{6(\mu-m)(a+b)} \\ & \times \left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(a+b+1)(a+b+2)} \right. \\ & \left. - \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(a+b-1)(a+b-2)} \right], \ \mu > m+1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E[\operatorname{tr}(Z_{13}^{-1}) \operatorname{tr}(Z_{13}^{-2})] = & E[\tilde{C}_{(3)}(Z_{13}^{-1})] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(Z_{13}^{-1})] \\ = & \frac{m\mu(a+b-m)}{6(a-m)} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\mu-1)(\mu-2)(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)}\right],$$
$$a > m+2,$$

respectivamente. Ya que, $E(Z_{13}^{\alpha}) = \tilde{c}_{\alpha} I_m$, tenemos $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{\alpha})] = \tilde{c}_{\alpha} m$. Así, el coeficiente de m en $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{\alpha})]$ es $\tilde{c}_{\alpha}$. Por lo tanto, evaluando $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{2})]$, $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{-2})]$, $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{3})]$ y $E[\mathrm{tr}(Z_{13}^{-3}]$ usando la técnica descrita anteriormente, y hallando los coeficientes de m en la expresión resultante se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(Z_{13}^{2}) = {} & \frac{a}{2(\mu-m)(a+b)} \\ & \times \left[\frac{(m+1)(a+1)}{(\mu-m-1)(a+b+1)} - \frac{(m-1)(a-1)}{(\mu-m+1)(a+b-1)}\right] I_m, \mu > m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z_{13}^{-2}) = {} & \frac{\mu(a+b-m)}{2(a-m)} \left[\frac{(\mu+1)(a+b-m-1)(m+1)}{(a-m-1)}\right. \\ & \left. -\frac{(\mu-1)(a+b-m+1)(m-1)}{(a-m+1)}\right] I_m,\ a > m+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z_{13}^{3}) = {} & \frac{a}{6(\mu-m)(a+b)} \left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(a+b+1)(a+b+2)}\right. \\ & -\frac{2(a^2-1)(m^2-1)}{[(\mu-m)^2-1][(a+b)^2-1]} \\ & \left. +\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(a+b-1)(a+b-2)}\right] I_m,\ \mu > m+1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E(Z_{13}^{-3}) = {} & \frac{\mu(a+b-m)}{6(a-m)} \left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right. \\ & +\frac{(\mu-1)(\mu-2)(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \\ & \left. -\frac{2(\mu^2-1)[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{[(a-m)^2-1]}\right] I_m,\ a > m+2. \end{aligned}$$

4.7. Propiedades de Z_{15}

(i) Sea $Z_{15} = \begin{pmatrix} Z_{1511} & Z_{1512} \\ Z_{1521} & Z_{1522} \end{pmatrix}$, Z_{1511} $(m_1 \times m_1)$, $m_1 + m_2 = m$. Entonces, usando el Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.2 y Teorema 4.2.3, Z_{1511} y $Z_{1522\cdot 1}$ son independientes, $Z_{1511} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_1}(\mu - m_2, c, d - m_2)$ y $Z_{1522\cdot 1} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_2}(\mu, c - m_1, d)$. Además, Z_{1522} y $Z_{1511\cdot 2}$ son independientes, $Z_{1522} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_2}(\mu - m_1, c, d - m_1)$ y $Z_{1511\cdot 2} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_1}(\mu, c - m_2, d)$.

(ii) Para una matriz no aleatoria compleja C de orden $q \times m$ y rango $q(\leq m)$,

$$(CC^H)^{-1/2} C Z_{15} C^H (CC^H)^{-1/2} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_1}(\mu - m_2, c, d - m_2)$$

y

$$(CC^H)^{1/2} (C Z_{15}^{-1} C^H)^{-1} (CC^H)^{1/2} \sim \tilde{H}^{(15)}_{m_2}(\mu, c - m_1, d).$$

(iii) Si $\mathbf{y}$ $(m \times 1)$ es un vector complejo no-aleatorio con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ó un vector aleatorio complejo independiente de Z_3 con $P(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\frac{\mathbf{y}^H Z_{15} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \sim H^{(15)}_1(\mu - m + 1, c, d - m + 1) \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H Z_{15}^{-1} \mathbf{y}} \sim H^{(15)}_1(\mu, c - m + 1, d).$$

(iv) Sea $Z_{15} = (z_{15ij})$ y $Z_{15}^{-1} = (z_{15}^{ij})$. Entonces, $z_{15ii} \sim H^{(15)}_1(\mu - i + 1, c, d - i + 1)$, $i = 1, \ldots, m$ y $1/z_{15}^{ii} \sim H^{(15)}_1(\mu, c - i + 1, d)$, $i = 1, \ldots, m$.

(v) Sea $Z_{15}^{[i]} = (z_{15jk})$, $1 \leq j, k \leq i$. Se define

$$v_i = \frac{\det(Z_{15}^{[i]})}{\det(Z_{15}^{[i-1]})}, i = 1, \ldots, m \text{ y } \det(Z_{15}^{[0]}) = 1.$$

Entonces, las variables aleatorias $v_1, \ldots, v_m$ son mutuamente independientes y usando el Teorema 2.6.10, Teorema 2.6.11 y el Corolario 3.3.5.1, $v_i \sim H^{(15)}_1(\mu - i + 1, c, d - i + 1)$, $i = 1, \ldots, m$. Además, la p.d.f. de $\det(Z_{15})$ es la misma que la de $\prod_{i=1}^m v_i$.

Usando la representación $Z_{15} = Y^{1/2}B(Y^{1/2})^H \sim \tilde{H}_m^{(15)}(\mu, c, d)$, (2.6.9), (2.6.10), (2.6.11), (2.6.12)–(2.6.14), y la técnica empleada para hallar los valores esperados dada en la Sección 4.6, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E(Z_{15}) &= \frac{c}{(\mu-m)(d-m)} I_m,\ \mu > m, d > m,\\
E(Z_{15}^{-1}) &= \frac{\mu d}{c-m} I_m, c > m,\\
E[\tilde{C}_\kappa(Z_{15})] &= \frac{[c]_\kappa}{[-\mu+m]_\kappa[-d+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(I_m),\ \mu > m-1+k_1, d > m-1+k_1,\\
E[\tilde{C}_\kappa(Z_{15}^{-1})] &= \frac{(-1)^k[\mu]_\kappa\,[d]_\kappa}{[-c+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(I_m),\ c > k_1+m-1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Z_{15}^2) = \frac{c}{2(\mu-m)(d-m)}&\left[\frac{(c+1)(m+1)}{(\mu-m-1)(d-m-1)}\right.\\
&\left.-\frac{(c-1)(m-1)}{(\mu-m+1)(d-m+1)}\right] I_m,\ \mu > m, d > m+1,
\end{aligned}
$$

$$
E(Z_{15}^{-2}) = \frac{\mu d}{2(c-m)}\left[\frac{(\mu+1)(d+1)(m+1)}{(c-m-1)} - \frac{(\mu-1)(d-1)(m-1)}{(c-m+1)}\right] I_m,\ c > m+1,
$$

$$
\begin{aligned}
E(Z_{15}^3) = \frac{c}{6(\mu-m)(d-m)}&\left[\frac{(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(d-m-1)(d-m-2)}\right.\\
&+\frac{(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(d-m+1)(d-m+2)}\\
&\left.-\frac{2(c^2-1)(m^2-1)}{[(\mu-m)^2-1][(d-m)^2-1]}\right] I_m,\ \mu > m+2, d > m+2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Z_{15}^{-3}) = \frac{\mu d}{6(c-m)}&\left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(c-m-1)(c-m-2)}\right.\\
&+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(c-m+1)(c-m+2)}\\
&\left.-\frac{2(\mu^2-1)(d^2-1)(m^2-1)}{[(c-m)^2-1]}\right] I_m,\ c > m+2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{15})^2] = \frac{mc}{2(\mu-m)(d-m)} & \left[\frac{(c+1)(m+1)}{(\mu-m-1)(d-m-1)}\right. \\
& \left. + \frac{(c-1)(m-1)}{(\mu-m+1)(d-m+1)}\right], \ \mu > m, d > m+1,
\end{aligned}
$$

$$
E[(\operatorname{tr} Z_{15}^{-1})^2] = \frac{m\mu d}{2(c-m)}\left[\frac{(\mu+1)(d+1)(m+1)}{(c-m-1)} + \frac{(\mu-1)(d-1)(m-1)}{(c-m+1)}\right], \ c > m+1,
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{15})^3] = \frac{mc}{6(\mu-m)(d-m)} & \left[\frac{(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(d-m-1)(d-m-2)}\right. \\
& + \frac{(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(d-m+1)(d-m+2)} \\
& \left. + \frac{4(c^2-1)(m^2-1)}{[(\mu-m)^2-1][(d-m)^2-1]}\right], \ \mu > m+2, d > m+2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr} Z_{15}^{-1})^3] = \frac{m\mu d}{6(c-m)} & \left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(c-m-1)(c-m-2)}\right. \\
& + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(c-m+1)(c-m+2)} \\
& \left. + \frac{4(\mu^2-1)(d^2-1)(m^2-1)}{[(c-m)^2-1]}\right], \ c > m+2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(Z_{15}) \operatorname{tr}(Z_{15}^2)] = & \frac{mc}{6(\mu-m)(d-m)} \\
& \times \left[\frac{(c+1)(c+2)(m+1)(m+2)}{(\mu-m-1)(\mu-m-2)(d-m-1)(d-m-2)}\right. \\
& \left. - \frac{(c-1)(c-2)(m-1)(m-2)}{(\mu-m+1)(\mu-m+2)(d-m+1)(d-m+2)}\right], \\
& \mu > m+2, d > m+2,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(Z_{15}^{-1}) \operatorname{tr}(Z_{15}^{-2})] = \frac{m\mu d}{6(c-m)} & \left[\frac{(\mu+1)(\mu+2)(d+1)(d+2)(m+1)(m+2)}{(c-m-1)(c-m-2)}\right. \\
& \left. - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(d-1)(d-2)(m-1)(m-2)}{(c-m+1)(c-m+2)}\right], \ c > m+2.
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

Conclusiones y sugerencias

- En el capítulo 3, se discutieron ciertas propiedades de las distribuciones UNIARIM y a partir de este hecho se generaron algunas de estas distribuciones.

- En el capítulo 4 se obtuvieron varios resultados distribucionales, propiedades y valores esperados de funciones de valor escalar y matricial compleja de las matrices aleatorias Z_1, Z_2, Z_3, Z_4,Z_{13} y Z_{15} que pertenecen a la clase de distribuciones UNIARIM. Los resultados de valores esperados fueron derivados usando invarianza y resultados de polinomios zonales de matrices Hermitianas para $k = 2, 3$. Resultados sobre polinomios zonales para $k = 4, 5$ se pueden obtener y por consiguiente también valores esperados tales como $E[(\operatorname{tr} Z_i^{\pm j_1})^{r_1}(\operatorname{tr} Z_i^{\pm j_2})^{r_2}]$, $j_1 r_1 + j_2 r_2 = 4, 5$, $i = 1, 2, 3, 4, 13, 15$, lo cual podrá ser objeto de investigación en el futuro .

Bibliografía

[1] H. H. Andersen, M. Højbjerre, D. Sørensen and P. S. Eriksen, *Linear and Graphical Models for the Multivariate Complex Normal Distribution*, Lecture Notes in Statistics, 101, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Elizabeth Bedoya, Daya K. Nagar and Arjun K. Gupta, Moments of the complex matrix variate beta distribution, *PanAmerican Mathematical Journal*, **17** (2007), no. 2, 21–32.

[3] D. R. Brillinger, Asymptotic properties of spectral estimates of second order. *Biometrika*, **56** (1969), 375–390.

[4] D. R. Brillinger, *Time Series: Data Analysis and Theory*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

[5] R. V. Bronk, Exponential ensembles for random matrix, *Journal of Mathematical Physics*, **6** (1965), 228–237.

[6] M. Carmeli, Statistical theory of energy levels and random matrices in physics, *Journal of Statistical Physics*, **10** (1974), 259–297.

[7] M. Carmeli, *Statistical Theory and Random Matrices*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1983.

[8] Y. Chikuse, Partial differential equations for hypergeometric functions of complex argument matrices and their applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **28** (1976), 187–199.

[9] W. J. Conradie, and A. K. Gupta, Quadratic forms in complex normal variates: basic results. *Statistica*, **47** (1987), 73–84.

[10] A. G. Constantine, Some noncentral distribution problems in multivariate analysis, *Annals of Mathematical Statistics*, **34** (1963), 1270–1285.

[11] Xinping Cui, Arjun K. Gupta and Daya K. Nagar, Wilks' factorization of the complex matrix variate Dirichlet distributions, *Revista Matemática Complutense*, **18** (2005), no. 2, 315–328.

[12] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems I, *Journal of Mathematical Physics*, **3** (1962), 140–156.

[13] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems II, *Journal of Mathematical Physics*, **3** (1962), 157–165.

[14] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems III, *Journal of Mathematical Physics*, **3** (1962), 166–175.

[15] F. J. Dyson, and M. L. Mehta, Statistical theory of the energy levels of complex systems IV, *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963), 701–712.

[16] F. J. Dyson and M. L. Mehta, Statistical theory of the energy levels of complex systems V, *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963), 713–719.

[17] C. Fang, P. R. Krishnaiah and B. N. Nagarsenker, Asymptotic distributions of the likelihood ratio test statistics for covariance structures of the complex multivariate normal distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **12** (1982), no. 4, 597–611.

[18] N. R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction), *Annals of Mathematical Statistics*, **34** (1963), 152–177.

[19] N. R. Goodman, The distribution of the determinant of complex Wishart distributed matrix, *Annals of Mathematical Statistics*, **34** (1963), 178–180.

[20] N. R. Goodman, and M. R. Dubman, Theory of time-varying spectral analysis and complex Wishart matrix processes. In *Multivariate Analysis-II* (M. R. Krishnaiah, ed.), Academic Press, New York, 351–365 (1969).

[21] A. K. Gupta, Distribution of Wilks' likelihood-ratio criterion in the complex case, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **23** (1971), 77–87.

[22] A. K. Gupta, On a test for reality of the covariance matrix in a complex Gaussian distribution, *Journal of Statististical Computation and Simulation*, **2** (1973), 333–342.

[23] A. K. Gupta, Nonnull distribution of Wilks' statistic for MANOVA in the complex case, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **B5** (1976), no. 4, 177–188.

[24] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Distribution of the product of determinants of random matrices connected with the noncentral matrix variate Dirichlet distribution, *South African Statistical Journal*, **21** (1987), no. 2, 141–153.

[25] A. K. Gupta and D. G. Kabe, Characterization of gamma and the complex case Wishart densities. In *Applied Statistical Science III* (E. Ahmed, M. Ahsanullah and B.K. Sinha, eds.), Nova Science Pub., 393–400 (1998).

[26] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Nonnull distribution of LR-statistic for testing $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0; \Sigma = \sigma^2 I$ in complex multivariate normal model, *Statistica*, **45** (1985), no. 4, 457–464.

[27] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Distribution of the product of determinants of random matrices connected with the non-central matrix variate Dirichlet distribution, *South African Statistical Journal*, **21** (1987), no. 2, 141–153.

[28] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Nonnull distribution of likelihood ratio criterion for testing multisample sphericity in the complex case, *Australian Journal of Statistics*, **30** (1988), no. 3, 307–318.

[29] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Asymptotic nonnull distribution of likelihood ratio statistic for testing homogeneity of complex multivariate Gaussian populations, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **31** (1989), no.2, 83–91.

[30] A. K. Gupta D. K. Nagar, Distribution of LR-statistic for testing $H : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$; $\Sigma = \sigma^2 I$ in multivariate complex Gaussian distribution, *Statistica*, **52** (1992), no. 2, 255–262.

[31] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distributions*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[32] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Product of independent complex Wishart matrices, International Journal of Statistics and Systems, 2(1)

[33] A. K. Gupta, D. K. Nagar and Astrid Marissa Vélez-Carvajal, Products of independent complex beta matrices, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, T. R. No..

[34] A. K. Gupta, D. K. Nagar and Astrid Marissa Vélez-Carvajal, Unitary invariant and residual independent matrix distributions, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, T. R. No..

[35] E. J. Hannan, *Multiple Time Series*, John Wiley & Sons, New York, 1970.

[36] T. Hayakawa, On the distribution of the latent roots of a complex Wishart matrix (non- central case), *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **24** (1972), 1–17.

[37] T. Hayakawa, On the distribution of the multivariate quadratic form in multivariate normal samples, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **24** (1972), 205–230.

[38] C. S. Herz, Bessel functions of matrix argument, *Annals of Mathematics*, **61** (1955), 474–523.

[39] A. T. James, Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples, *Annals of Mathematical Statistics*, **35** (1964), 475–501.

[40] D. G. Kabe, Classical statistical analysis based on a certain hypercomplex multivariate normal distribution, *Metrika*, **31** (1984), no. 2, 63–76.

[41] C. G. Khatri, Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, **36** (1965), 98–114.

[42] C. G. Khatri, On certain distribution problems based on positive definite quadratic functions in normal vectors, *Annals of Mathematical Statistics*, **37** (1966), no. 2, 468–479.

[43] C. G. Khatri, Non-central distributions of i-th largest characteristic roots of three matrices concerning complex multivariate normal populations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **21** (1969), 23–32.

[44] C. G. Khatri, On the moments of traces of two matrices in three situations for complex multivariate normal populations, *Sankhyā*, **A32** (1970), 65–80.

[45] C. G. Khatri, Series representations of distributions of quadratic form in the normal vectors and generalised variance. *Journal of Multivariate Analysis*, **1** (1971), no. 2, 199–214.

[46] C. G. Khatri, and C. D. Bhavsar, Some asymptotic inferential problems connected with complex elliptical distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, no. 1, **35** (1990), 66–85.

[47] C. G. Khatri, R. Khattree and R. D. Gupta, On a class of orthogonal invariant and residual independent matrix distributions, *Sankhyā*, **B53** (1991), no. 1, 1–10.

[48] P. R. Krishnaiah, Some recent developments on complex multivariate distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **6** (1976), no. 1, 1–30.

[49] P. R. Krishnaiah and J. Lin, Complex elliptically symmetric distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **15** (1986), no. 12, 3693–3718.

[50] Y. L. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*. Volume II, Mathematics in Sciece and Engineering, VOl. 53, Academic Press, New York, 1969.

[51] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Second Edition, Academic Press, New York, 1991.

[52] D. K. Nagar, and A. K. Gupta, Asymptotic non-null distribution of likelihood ratio statistic for testing $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0; \Sigma = \sigma^2 I_m$ in complex multivariate Gaussian model, *Statistica*, **53** (1993), no. 4, 603–617.

[53] Daya K. Nagar and Arjun K. Gupta, Expectations of functions of complex Wishart matrix, *Linear Algebra and Its Applications* (submitted for publication).

[54] D. K. Nagar, S. K. Jain and A. K. Gupta, Distribution of LRC for testing sphericity of a complex multivariate Gaussian model, *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, **8** (1985), no. 3, 555–562.

[55] Daya K. Nagar, Elizabeth Bedoya and Elkin Lubin Arias, Non-central complex matrix-variate beta distribution, *Advances and Applications in Statistics*, **4** (2004), no. 3, 287–302.

[56] B. N. Nagarsenker and M. M. Das, Exact distribution of sphericity criterion in the complex case and its percentage points, *Communications in Statistics*, **4** (1975), no. 4, 362–374.

[57] K. C. S. Pillai and G. M. Jouris, Some distribution problems in the multivariate complex Gaussian case, *Annals of Mathematical Statistics*, **42** (1971), 517–525.

[58] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, Academic Press, New York, 1965.

[59] M. B. Priestly, T. Subba Rao, H. Tong, Identification of the structure of multivariable stochastic systems. In *Multivariate Analysis-III* (M. R. Krishnaiah, ed.), Academic Press, New York, 351–368 (1973).

[60] P. Shaman, The inverted complex Wishart distribution and its application to spectral estimation, *Journal of Multivariate Analysis*, **10** (1980), no. 1, 51–59.

[61] M. S. Srivastava, On the complex Wishart Distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, **36** (1965), 313–315.

[62] C. G. Troskie, Noncentral multivariate Dirichlet distributions, *South African Statistical Journal*, **1** (1967), 21–32.

[63] W. Y. Tan, On the complex analogue of Bayesian estimation of a multivariate regression model, *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **25** (1973), 135–152.

[64] W. Y. Tan, Some distribution theory associated with complex Gaussian distribution, *Tamkang Journal*, **7** (1968), No. 7, 263–302.

[65] G. L. Turin, The characteristic function of Hermitian quadratic forms in complex normal variables, *Biometrika*, **47** (1960), 199–201.

[66] G. Wahba, On the distribution of some statistics useful in the analysis of jointly stationary time series, *Annals of Mathematical Statistics*, **39** (1968), 1849–1862.

[67] G. Wahba, Some tests of independence for stationary multivariate time series, *Journal of Royal Statistical Society*, **B33** (1971), 153–166.

[68] E. P. Wigner, Distribution laws for the roots of a random Hermitian matrix. In *Statistical Theory of Spectra: Flactuations* (C. E. Porter, ed.), Academic Press, New York, 446–461 (1965).

[69] E. P. Wigner, Random matrices in physics, *SIAM Review*, **9** (1967), 1–23.

[70] R. A. Wooding, The multivariate distribution of complex normal variables, *Biometrika*, **43** (1956), 212–215.