

**MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LA TASA DE CAMBIO
PESO COLOMBIANO / U.S. DÓLAR**

CARLOS ALEXANDER GRAJALES CORREA

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Diciembre 2006

MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LA TASA DE CAMBIO PESO COLOMBIANO / U.S. DÓLAR

**Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Matemáticas Aplicadas**

CARLOS ALEXANDER GRAJALES CORREA

Directora

CECILIA MAYA OCHOA

Ph.D. in International Economics and Finance Brandeis University, USA.

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Diciembre 2006

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

A mis Padres

Agradecimientos

Agradezco mucho la valiosa colaboración de la Universidad EAFIT por los recursos facilitados y el buen ambiente de trabajo. Un especial agradecimiento a la Fundación Empresas Públicas de Medellín por darme la oportunidad de integrarme a su cálido grupo de trabajo en calidad de becario. Quiero manifestar mi gratitud a la directora de este trabajo Cecilia Maya Ochoa, al director de la maestría Jairo Villegas y al grupo evaluador.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Espacio de probabilidad	5
2.2. Procesos Estocásticos	7
2.3. Esperanza Condicional	8
2.4. Martingalas	9
2.5. Proceso Gaussiano	10
2.6. Proceso de Difusión	12
2.7. Proceso de Wiener	13
2.8. Integral de Itô	22
2.9. Lema de Itô	25
2.9.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas	26
2.9.2. El lema de Itô	27
3. Modelos de Volatilidad Constante	31
3.1. Modelo de Black & Scholes	31
3.1.1. Descripción del modelo	31
3.1.2. Opciones financieras en el modelo de Black & Scholes	34
3.1.3. Medida equivalente de Martingala	38
3.1.4. Deducción de la fórmula de Black & Scholes	39

3.2. Modelo Binomial	43
3.3. Proceso de Reversión a la media	45
3.3.1. Proceso de Ornstein - Uhlenbeck con reversión a la media	46
4. Modelos de Volatilidad Estocástica	49
4.1. Volatilidad Implícita	49
4.2. Volatilidad Estocástica	50
4.3. Modelo de Hull & White	53
4.4. Modelo de Scott	55
4.5. Modelo de Stein & Stein	56
4.6. Modelo de Heston	57
4.7. Modelo Empírico de Volatilidad Estocástica	61
5. Una aproximación al comportamiento de la tasa de Cambio	65
5.1. Descripción de los datos	65
5.2. Sobre la estimación de parámetros	67
5.2.1. Antecedentes	67
5.2.2. Simulación	68
5.3. Metodología de aproximación al modelo de Heston	69
5.3.1. Función objetivo	69
5.3.2. Calibración de parámetros	73
5.3.3. Resultados	77
6. Conclusiones	83
7. Problemas Abiertos	85
A. Códigos en MatLab	87
A.1. Movimiento Browniano	87
A.1.1. Función <i>BrownPath</i>	87
A.1.2. Función <i>BrownCorr</i>	88
A.1.3. Función <i>BrownPathGeom</i>	88
A.2. Modelo de Black & Scholes	89
A.2.1. Función <i>pdflogPrice</i>	89
A.2.2. Función <i>bscall</i>	90

A.3. Estimación del Modelo de Heston	93
A.3.1. Función <i>buscar</i>	93
A.3.2. Función <i>Heston_fnc</i>	94
A.3.3. Función <i>outfun</i>	97
A.3.4. Función <i>graphcomparedens</i>	97

Índice de figuras

2.1. Vector y Proceso Gaussiano	11
2.2. Movimiento Browniano estándar	14
2.3. Funciones del Movimiento Browniano	23
3.1. Modelo Black & Scholes	37
3.2. Modelo CRR	44
3.3. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck	47
4.1. Distribución de precios, de retornos y volatilidad implícita.	50
4.2. Trayectorias de Wiener bidimensionales	52
4.3. Simulación Monte Carlo del Modelo de Heston, parte I.	59
4.4. Simulación Monte Carlo del Modelo de Heston, parte II.	60
5.1. Descripción de la serie de precios de cierre de la TRM	66
5.2. Estudio esquemático de una simulación	68
5.3. Densidades de probabilidad obtenidas con la función objetivo $\Psi(x)$	72
5.4. Simplex - Movimiento de reflexión	75
5.5. Simplex - Movimiento de expansión y contracción	75
5.6. Simplex - Movimiento de encogimiento	76
5.7. Ajuste a la serie de retornos, I	81
5.8. Ajuste a la serie de retornos, II	82

CAPÍTULO 1

Introducción

La investigación que se presenta hace parte del proyecto “Modelación Estocástica de la Tasa de Cambio Peso Colombiano / U.S. Dólar (COP/USD)” a cargo de la Ph.D. Cecilia Maya Ochoa. El proyecto se inscribe dentro de las actividades del grupo de investigación *Finanzas y Banca* en la línea de *Ingeniería Financiera*, de la Universidad EAFIT, el cual fue propuesto y aprobado en el año 2004.

Hacia finales de la década del 90, en el proceso de globalización y apertura de Colombia a los mercados internacionales, se decidió acabar con el antiguo esquema de banda cambiaria y reemplazarlo por el de tasa de cambio flotante. En el primer modelo, el Banco de la República establecía un máximo y un mínimo en la tasa de cambio peso/dólar, dentro de los cuales dicha tasa fluctuaba; en cambio, en el segundo modelo, son las fluctuaciones del mercado cambiario de divisas, provocadas por la oferta y la demanda de dólares y por otros factores internos y externos del país (como la deuda externa, el flujo de importaciones y exportaciones, el lavado de dólares, narcotráfico, etc.), las que establecen su precio.

La tasa representativa del mercado (TRM) es el valor de referencia del mercado que certifica la Superintendencia Financiera de Colombia para la tasa de cambio. Su valor depende principalmente de la información de las operaciones de compra y venta de divisas realizadas en las principales entidades financieras del país. Según el artículo 80 de la Resolución Externa No. 8 de 2000, expedida por la Junta Directiva del Banco de la República, la TRM es el promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y de venta de divisas efectuadas por bancos comerciales, corporaciones financieras, sociedades comisionistas de bolsa, compañías de financiamiento comercial, la Financiera Energética Nacional (FEN) y el Banco de Comercio Exterior de Colombia (BANCOLDEX).

La tasa de cambio es un factor que incide en aspectos como el comercio exterior, el consumo y la producción de un país. El alza o la baja de la cifra COP/USD afecta por ejemplo el mercado internacional, las exportaciones, las importaciones, la deuda externa y el mismo mercado

cambiario.

Los valores que se registran en Colombia para el monto transado en millones de dólares, así como los valores de la Tasa Representativa del Mercado (TRM), para cada día, exhiben una alta volatilidad y reflejan que el mercado cambiario se constituye, junto con el de títulos del tesoro, en uno de los mercados financieros más importantes del país. En particular, la gran volatilidad en el precio del dólar en los últimos años ha demandado la creación y aumento de productos o instrumentos financieros, conocidos como derivados, que brinden una protección contra el riesgo en instituciones financieras así como métodos potentes para asignar precios y declarar tipos de cobertura a tales instrumentos. Para responder a esta demanda es indispensable un mayor conocimiento del comportamiento del activo subyacente, es decir, la tasa de cambio.

El estudio de la variable COP/USD resulta entonces de gran importancia para la economía colombiana puesto que conociendo su comportamiento puede ejercerse un mejor control en el riesgo financiero. Como valor agregado esto posibilita una apertura al desarrollo de los mercados de divisas y derivados en el país. De otro lado, la propuesta satisface una demanda de tipo social, en tanto que se contribuye a la generación de conocimiento y de nuevas propuestas en cátedras de pregrado y posgrado de la universidad, que estén relacionadas con tópicos de mercados financieros, instrumentos financieros derivados, valoración de derivados y matemáticas, y más importante aún este estudio es un primer paso en la investigación de la modelación estocástica de series financieras que son de importancia para el país.

Algunos modelos estocásticos clásicos que pueden emplearse para describir el comportamiento reflejado por la tasa de cambio al momento de cierre son, el modelo de Black & Scholes (1973), en el cual se concibe la serie de precios en el tiempo ajustada a un proceso estocástico lognormal; el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media, desde el que se afirma que a largo plazo la serie de precios en el tiempo retorna de manera sucesiva a cierto valor medio y el modelo de Cox-Ross-Rubinstein (1979), el cual supone que el precio del activo sube o baja en una proporción específica con cierta probabilidad asociada en unidades discretas de tiempo. Estos modelos clásicos asumen que la volatilidad en el precio del activo subyacente permanece constante entre el momento de emisión del derivado y el de su expiración.

Este supuesto de volatilidad constante en el precio del subyacente, resulta ser inadecuado puesto que los datos, no sólo colombianos, sino internacionales, reflejan presencia de heterocedasticidad y curtosis produciendo curvas de distribución leptocúrticas y de colas anchas. Algunos modelos alternativos que superan esta dificultad han sido propuestos en el campo de las matemáticas financieras y la estocástica, incluyendo los modelos de volatilidad estocástica. En este escenario se considera que tanto el precio como la volatilidad del activo subyacente siguen un proceso estocástico, cada uno de los cuales viene representado por una ecuación diferencial estocástica que admiten en conjunto dos ruidos brownianos posiblemente correlacionados. En esta dirección se orientan los modelos seminales de Hull & White (1987), de Scott (1987), de Stein & Stein (1991) y de Heston (1993).

En esta nueva perspectiva, se busca analizar uno de los modelos de volatilidad estocástica propuestos en la literatura actual, que resulte adecuado para describir la serie de precios de cierre de la tasa de cambio Peso Colombiano / Dólar Estadounidense (COP/USD). Para ello se presentarán unos preliminares matemáticos relacionados con procesos y cálculo estocástico, modelos clásicos de volatilidad constante, modelos recientes de volatilidad estocástica, una breve refe-

rencia a diversos modelos de estimación de parámetros para modelos bivariados de volatilidad estocástica, un método empírico de ajuste de parámetros que usa el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, dado su gran uso y difusión en la literatura actual y el hecho de que está implementado en los distintos paquetes de software disponibles. Finalmente, se presenta un conjunto de simulaciones computacionales que guiarán algunos conceptos teóricos importantes desarrollados a lo largo de la investigación, principalmente las que permitirán aproximar los valores de los parámetros del modelo seleccionado.

Este trabajo marca un primer paso hacia la investigación y aplicación de métodos de estimación robustos para modelos bivariados, como los que se presentan, los cuales posibilitan el análisis del comportamiento de la tasa de cambio del país, que a su vez impulsa un desarrollo de un mercado más sólido de divisas y derivados financieros. Debe anotarse que no se encuentran disponibles en la literatura actual suficientes modelos de estimación para procesos estocásticos en tiempo continuo y que aún no gozan de una implementación en los paquetes comerciales de software. Además, la mayor parte de los métodos existentes al respecto tienen un corte econométrico y determinístico que los tornan poco útiles en la tarea de determinar el comportamiento de la tasa de cambio cuando se acepta una fuerte componente estocástica para tiempo continuo.

2.1. Espacio de probabilidad

A partir de la teoría de la medida, la teoría de probabilidades ha alcanzado un alto grado de formalización, cuyos principales elementos se muestran a continuación [54].

Definición 2.1.1. Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{A} una colección de subconjuntos de Ω . Se dice que \mathcal{A} es una σ -álgebra sobre Ω si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a. $\Omega \in \mathcal{A}$
- b. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- c. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$

Además, a la pareja (Ω, \mathcal{A}) se le llama espacio medible y a los elementos de \mathcal{A} se les llama conjuntos medibles.

Proposición 2.1.1. Si \mathcal{C} es una colección de subconjuntos de Ω , existe una σ -álgebra minimal que contiene a \mathcal{C} denotada por $\sigma(\mathcal{C})$ tal que si \mathcal{B} es otra σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$. A $\sigma(\mathcal{C})$ se le llama σ -álgebra generada por \mathcal{C} y a \mathcal{C} un generador de $\sigma(\mathcal{C})$.

Una σ -álgebra de gran interés en diversos campos de la matemática y en particular en las matemáticas financieras es llamada σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n y denotada por \mathcal{B}^n . Suponga que Υ es la colección de todos los conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , entonces la σ -álgebra de Borel es la σ -álgebra generada por Υ , esto es, $\mathcal{B}^n = \sigma(\Upsilon)$.

Definición 2.1.2. Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible. Una función μ con dominio \mathcal{A} y con valores en los reales extendidos $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se le llama medida sobre (Ω, \mathcal{A}) si se verifica que

- a. $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$
- b. $\mu(\emptyset) = 0$
- c. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para toda sucesión A_1, A_2, \dots de conjuntos de \mathcal{A} disjuntos dos a dos (σ -aditividad).

Además, el número $\mu(A)$ se le llama medida de A , a la tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama espacio de medida y si se verifica la condición adicional

- d. $\mu(\Omega) = 1$, entonces a la función $\mu = P$ se le llama medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{A}) y a la tripla (Ω, \mathcal{A}, P) se le llama espacio de probabilidad.

Se dice además que la medida μ sobre \mathcal{A} es σ -finita si se verifica que $\mu(\Omega) < \infty$.

Definición 2.1.3. Sean (Ω, \mathcal{A}) y (Ω', \mathcal{A}') dos espacios medibles. A la aplicación $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ se le denomina medible si para cada $A \in \mathcal{A}'$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Se escribe que X es $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -medible para designar la aplicación X , y si $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, entonces se dice que X es \mathcal{A} -medible.

De esta manera la teoría de probabilidades queda sumergida dentro de la teoría de la medida, definiendo cualquier experimento probabilístico un espacio de probabilidad donde se describen de manera precisa los eventos posibles como elementos de una σ -álgebra y la probabilidad de ocurrencia de cada evento como una medida. Para lograr ésto se describirán a continuación las nociones de variable aleatoria y de distribución de probabilidad [66].

Definición 2.1.4. Si $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una función $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -medible, donde $\Omega' = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$ (σ -álgebra de Borel), se dice que X es una variable aleatoria real (v.a.). X es una v.a. discreta si puede adoptar sólo una cantidad finita o infinita contable de valores reales distintos, en cuyo caso se pone $\Omega = S$ y se le denomina espacio muestral. Ahora, X es continua si sus valores recorren un intervalo o unión de intervalos de la recta real.

Definición 2.1.5. Si X es una variable aleatoria discreta, se define la distribución de probabilidad para X mediante una fórmula, tabla o gráfica que proporcione a $p(x) = P(X = x)$, donde $p(x)$ representa la probabilidad de que la v.a. X adopte el valor x y se calcula como la suma de las probabilidades de los puntos muestrales de S que tienen valor x .

Definición 2.1.6. Si X es una variable aleatoria continua, se define la función de distribución de X , y se denota por $F(x)$, mediante $F(x) = P(X \leq x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

El teorema siguiente de Radon-Nikodym permitirá relacionar dos medidas sobre un mismo espacio de medida lo cual permitirá hablar de una derivada de Radon-Nikodym y más adelante garantizar la existencia y unicidad de la esperanza condicional.

Suponga que se tienen (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible, y dos medidas μ, ν sobre \mathcal{A} . Se dice que ν es absolutamente continua respecto a μ , y se escribe, $\nu \ll \mu$, si y sólo si para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ implica que $\nu(A) = 0$.

Teorema 2.1.1. (Radon-Nikodym)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ν , μ medidas sobre \mathcal{A} . Si μ es σ -finita, entonces, siendo \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Existe una función $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ - medible no negativa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \quad (2.1.1)$$

2. $\nu \ll \mu$,

Además, si g es otra función que satisface la relación (2.1.1), entonces $f = g$ c.t.p. (casi en todas partes). A la función f se le llama densidad de ν , o si se denota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, se le llama derivada de Radon-Nikodym.

2.2. Procesos Estocásticos

Una variable aleatoria siempre tiene asociada una distribución de probabilidad que mide la probabilidad de ocurrencia de sus distintos resultados. Cuando la variable aleatoria cambia con el tiempo, se le puede asociar una distribución de probabilidad que también varía en el tiempo. En tales ambientes resulta útil definir un proceso estocástico [44].

Definición 2.2.1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de índices y (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad. Una función $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un proceso estocástico (discreto o continuo) si para todo $t \in I$ fijo, la función $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria, que representa el valor del proceso $X(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \Omega$ es fijo, la aplicación o mapeo $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $t \mapsto X_t(\omega)$ se llama trayectoria, camino o realización del proceso X .

Los valores que toma el proceso en \mathbb{R}^n se llaman estados del proceso. Si el conjunto I es contable, se dice que X es un proceso estocástico en tiempo discreto, y si I consiste en un intervalo de los reales no negativos, se dice que se trata de un proceso de tiempo continuo. Si X es un proceso estocástico continuo, entonces

- a. X es independiente (i) si para todo $t, s \in I$ con $s \neq t$, las variables aleatorias X_t, X_s asociadas son independientes.
- b. X es idénticamente distribuido (id) si la distribución de probabilidad F_{X_t} es la misma para todo $t \in I$.
- c. X tiene incrementos independientes si $\forall n \geq 1$ y para cualquier partición del intervalo I , dada como

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n \in I,$$

las diferencias $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes.

- d. X tiene incrementos estacionarios si $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$ para todo $t, s, t+h, s+h \in I, s < t$ y $h > 0$. El simbolismo $\stackrel{d}{=}$ significa que los términos en comparación tienen la misma distribución de probabilidad. La estacionariedad de un proceso estocástico alude a que la distribución de probabilidad de la diferencia entre dos variables aleatorias permanece invariante bajo cualquier traslación temporal.
- e. X es *Markoviano* si el estado futuro del proceso X_{t+h} , con $h > 0$, depende sólo del estado presente X_t ; esto es, $E(X_{t+h} | \{X_s\}_{0 \leq s \leq t}) = E(X_{t+h} | X_t)$.

2.3. Esperanza Condicional

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria tal que $E(X) < \infty$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.

Definición 2.3.1. Una variable aleatoria $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada *esperanza condicional de X dado \mathcal{F}* , y escribimos, $Z = E(X | \mathcal{F})$ si:

- (a) $Z = E(X | \mathcal{F})$ es \mathcal{F} -medible.
- (b) $\int_A E(X | \mathcal{F}) dP = \int_A X dP$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

La segunda condición equivale a decir que $E(X I_A) = E(Z I_A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$, donde I_A es la función indicadora para el evento A , la cual es uno si $A \in \mathcal{A}$ y cero, en caso contrario. La existencia y unicidad de $Z = E(X | \mathcal{F})$ es consecuencia del teorema de Radon-Nikodym, y puede verse en [53], [54]. Ésta función esperanza, representa la mejor predicción de X dada la información en \mathcal{F} siempre que los valores adoptados por la v.a. tengan una medida de probabilidad significativa, es decir, que no ocurran valores espurios con alto valor de probabilidad. Algunas de las propiedades básicas de la esperanza condicional, se mencionan más adelante en el teorema (2.3.1) [46, pp. 71-77] después de introducir la noción de función convexa y la de independencia entre una v.a. y un subconjunto de la σ -álgebra asociada a su espacio Ω .

Definición 2.3.2. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *convexa* si se satisface la desigualdad

$$f(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau f(x) + (1 - \tau)f(y) \quad (2.3.1)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y cada $0 \leq \tau \leq 1$.

Para funciones f de clase C^2 en \mathbb{R}^n puede establecerse un criterio de decisión sobre convexidad de la siguiente manera.

Proposición 2.3.1. Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ y H es la matriz Hessiana de f , entonces f es convexa en \mathbb{R}^n si $Hf(x)$ es semidefinida positiva en \mathbb{R}^n .

Como un caso simple, una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es convexa en el intervalo $[a, b]$ si

$$f(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau f(x) + (1 - \tau)f(y)$$

para todo $x, y \in [a, b]$ y cada $0 \leq \tau \leq 1$.

Para este caso, si $y = f(x)$ tiene segunda derivada en $[a, b]$ entonces f es convexa sii $\frac{d^2 f}{dx^2} > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Así, la función $y = f(x)$ es convexa cuando su gráfica es cóncava hacia arriba.

Definición 2.3.3. Se dice que la v.a. X y un subconjunto \mathcal{F} de la σ -álgebra \mathcal{A} asociada a Ω son independientes, si $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.

Teorema 2.3.1. Para variables aleatorias $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $E(X) < \infty$, $E|Y| < \infty$, y para constantes $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

- a. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$
- b. $E(X) = E(E(X|\mathcal{F}))$
- c. Si X es \mathcal{F} -medible; o sea, $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, entonces $E(X|\mathcal{F}) = X$
- d. Si X es \mathcal{F} -medible, o sea, $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, entonces $E(XY|\mathcal{F}) = X \cdot E(Y|\mathcal{F})$
- e. Si X, \mathcal{F} son independientes y $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$, entonces para cualquier función $h(x, y)$, $E(h(X, Y)|\mathcal{F}) = E(E_X(h(X, Y)|\mathcal{F}))$
- f. Si $h(x)$ es una función convexa y $E(|h(X)|) < \infty$, entonces $h(E(X|\mathcal{F})) \leq E(h(X)|\mathcal{F})$

2.4. Martingalas

Ciertos procesos estocásticos, como las martingalas que se describirán seguidamente, proporcionan simplificaciones en algunos desarrollos del cálculo estocástico, especialmente en los procesos de difusión, las integrales de Itô y las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas que describen la fluctuación de un precio S para un activo. Veamos las siguientes definiciones básicas para los temas que siguen.

Definición 2.4.1. Una colección de σ -álgebras $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ es una filtración sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $0 \leq s \leq t$. Se dice además que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ es un espacio filtrado. Cuando para cada t , $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ se dice que \mathcal{F} es una filtración natural generada por X .

Definición 2.4.2. Un proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ se dice que está adaptado a la filtración $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ si para todo $t \geq 0$, X_t es \mathcal{F}_t -medible.

En particular, el proceso estocástico X está adaptado a la filtración natural generada por X , esto es, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Definición 2.4.3. Sea $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre un espacio (Ω, \mathcal{A}, P) tal que X_t es \mathcal{F}_t -medible y $E(X) < \infty$. Se dice que el proceso $\{X_t; t \geq 0\}$ es:

- a. una martingala si $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, para $0 \leq s < t$
- b. una submartingala si $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$, para $0 \leq s < t$
- c. una supermartingala si $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$, para $0 \leq s < t$

adaptado a la filtración \mathcal{F} y respecto a la medida P .

Proposición 2.4.1. Si $\{X_t; t \geq 0\}$ es una martingala y $0 \leq s < t$, entonces

$$E(X_s) = E(X_t), \quad (2.4.1)$$

es decir, la función esperanza se mantiene constante.

En efecto, dada la definición (2.4.3) y a la luz del teorema (2.3.1), puede verse que

$$\begin{aligned} E(X_s) &= E(E(X_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= E(X_t) \end{aligned}$$

La relación (2.4.1) es una condición necesaria pero no suficiente para que $\{X_t; t \geq 0\}$ sea martingala. Esto proporciona un criterio para determinar si un proceso estocástico específico no es martingala; basta con tomar el contrareciproco de la proposición (2.4.1). Así, si la función esperanza de un proceso estocástico X no permanece constante, entonces X no es martingala.

2.5. Proceso Gaussiano

Muchos fenómenos de la naturaleza se caracterizan de tal manera que, a medida que pasa el tiempo, algunas de las variables asociadas a dichos fenómenos siguen un comportamiento normal o Gaussiano, por lo cual se dirá que se trata de un proceso Gaussiano. Antes de proceder a su definición, se introduce la noción de vector Gaussiano.

Definición 2.5.1. Un vector n -dimensional de variables aleatorias $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ es Gaussiano o normal con parámetros μ y Σ si su densidad multivariada está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)'\right) \quad (2.5.1)$$

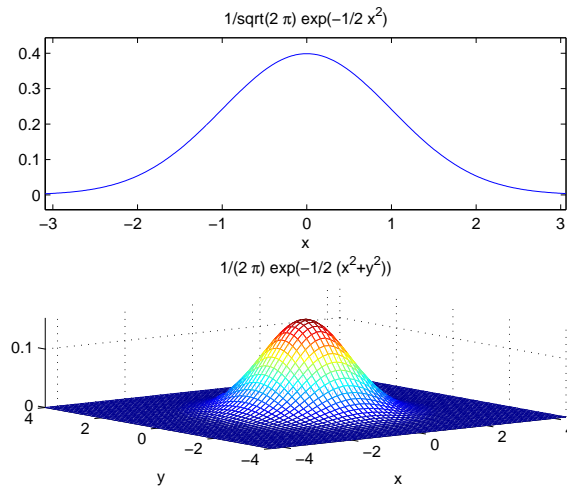
El parámetro $\mu \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de valores esperados para las variables X_i , $i = 1, \dots, n$ y Σ es una matriz de dimensión $n \times n$ simétrica y definida positiva que representa la matriz de varianzas y covarianzas de X_i , $i = 1, \dots, n$.

Definición 2.5.2. Un proceso estocástico $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado proceso Gaussiano o normal si la distribución de los vectores finito-dimensionales con componentes en el proceso X

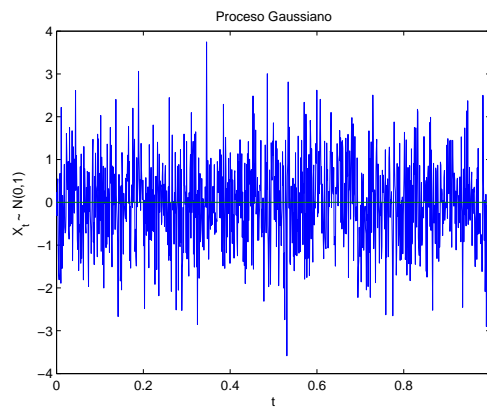
$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),$$

para todas las posibles secuencias de tiempo $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ y para cada $n \geq 1$, son Gaussianas multivariadas.

La figura(2.1(a)) ilustra la densidad univariada y bivariada para un vector Gaussiano, de acuerdo con la definición (2.5.1) y en la figura (2.1(b)) se puede apreciar una realización de un proceso Gaussiano para $t \in [0, 1]$, a la luz de la definición (2.5.2).



(a) Arriba: Densidad univariada para una variable aleatoria $X \sim N(0, 1)$. Abajo: Densidad bivariada para una variable aleatoria normal $X \sim N(0, I_2)$.



(b) Proceso Gaussiano $\{X_t, t \in [0, 1]\}$, donde $X_t \sim N(0, 1)$ iid para todo t .

Figura 2.1: Vector y Proceso Gaussiano

2.6. Proceso de Difusión

Si $s, t \in I$ con $s \leq t$ y B es un conjunto boreliano sobre \mathbb{R} , entonces la probabilidad de que el proceso estocástico X cambie del estado x a un estado $y \in B$ en el intervalo $[s, t]$, se conoce como probabilidad de transición. Ésta probabilidad es denotada $P(s, x; t, y)$ y se determina por [44, pp. 34-40]

$$\begin{aligned} P(s, x; t, B) &= P(X_t \in B | X_s = x) \\ &= P(\{w \in \Omega : X_t(w) \in B\} | X_s = x) \\ &= \int_B p(s, x; t, y) dy \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

donde $p(s, x; t, y)$ se denomina densidad de transición y corresponde a la probabilidad de que la variable x se mueva del estado (s, x) en el tiempo s al estado (t, y) en el tiempo t . Así, en la medida de probabilidad $P(s, x; t, B)$ se consideran todas las formas posibles como un fenómeno o sistema puede evolucionar hacia un estado $y \in B$ a partir de un estado anterior x a lo largo de un tiempo finito $t - s$.

La densidad estacionaria o incondicional $\phi(r)$, en caso de que exista, es una densidad a largo plazo cuando $t \rightarrow \infty$, y se calcula como

$$\phi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p(s, x; t, r) dx \quad (2.6.2)$$

resultando independiente del estado inicial.

Definición 2.6.1. *Un proceso estocástico $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso de difusión con tendencia ('drift') $a(s, x)$ y coeficiente de difusión $b(s, x)$, con $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| > \varepsilon} p(s, x; t, y) dy = 0 \quad (2.6.3)$$

$$\begin{aligned} a(s, x) &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y - x) p(s, x; t, y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} E(X_t - X_s | X_s = x) \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} b^2(s, x) &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y - x)^2 p(s, x; t, y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} E((X_t - X_s)^2 | X_s = x) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

La expresión (2.6.3) garantiza que no se produzcan saltos significativos, esto es, que para tiempos t y s , se anula la suma de las probabilidades de transición $p(s, x; t, y)$ para estados x y y alejados. De otro lado, la relación (2.6.4) proporciona la tendencia del proceso en largos períodos de tiempo y (2.6.5) representa su volatilidad en cortos períodos de tiempo.

2.7. Proceso de Wiener

Considere la función $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.7.1)$$

La función $u(x, t)$ representa la probabilidad de que una partícula se encuentre en la posición x en el tiempo t y se dice que tal movimiento describe un movimiento Browniano en una dimensión [46, p. 27]. La ecuación (2.7.1) está asociada originalmente con el fenómeno de difusión calórica y fue propuesta inicialmente por Albert Einstein en 1905 para formular matemáticamente el movimiento Browniano [25]. Este tipo de movimiento fue estudiado por el biólogo Robert Brown en 1827 cuando observó el movimiento errático adquirido por pequeños granos de polen suspendidos en el agua [11].

La solución de la ecuación ((2.7.1)) es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp(-x^2/2\sigma^2 t), \quad (2.7.2)$$

la cual puede identificarse como la densidad de una variable aleatoria x que distribuye $N(0, \sigma^2 t)$. El coeficiente σ se denomina coeficiente de difusión. Haciendo el coeficiente $\sigma = 1$, resulta natural hacer la siguiente definición.

Definición 2.7.1. *Un proceso estocástico $W : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que también denotaremos por $W = (W_t, t \in T = [0, \infty))$, es llamado proceso de Wiener estándar o Movimiento Browniano estándar 1-dimensional si:*

1. $W_0 = 0$,
2. W tiene incrementos estacionarios e independientes; esto es,

$$W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t+h} - W_{s+h} \text{ para } t, s, t+h, s+h \in T, \text{ y}$$

$\forall n \geq 1$ y $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$, $W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, son variables aleatorias independientes. El simbolismo $\stackrel{d}{=}$ significa que los términos en comparación tienen la misma distribución de probabilidad.

3. Si $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, y
4. Las realizaciones de W son continuas; esto es, $t \mapsto W_t$ es una función continua de $t \in T$.

A partir de la definición, se deduce que para los tiempos s, t con $0 \leq s < t$, las variables aleatorias $W_t - W_s$ y W_{t-s} tienen la misma distribución $N(0, t-s)$. Para ver esto, note que $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ y $W_{t-s} - W_0 = W_{t-s} \sim N(0, t-s)$ por las condiciones (1) y (3) de la definición (2.7.1).

Algunos valores esperados importantes relacionados con el proceso W_t se escriben a continuación:

$$\begin{aligned} E(W_t - W_s) &= E(W_{t-s}) = 0 \\ E(W_t) &= 0 \\ E((W_t - W_s)^2) &= E((W_{t-s})^2) = t - s \\ E(W_t^2) &= t \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Por otra parte, en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , el movimiento Browniano resulta estar adaptado a su propia filtración natural $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. Si otro proceso estocástico $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ está adaptado a la filtración natural del movimiento Browniano, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, se dirá simplemente que el proceso X está adaptado al movimiento Browniano. En este caso, la v.a. X_t es una función de W_s , para $s \leq t$. Algunas realizaciones del movimiento Browniano se ilustran en el lado izquierdo de la figura (2.2).

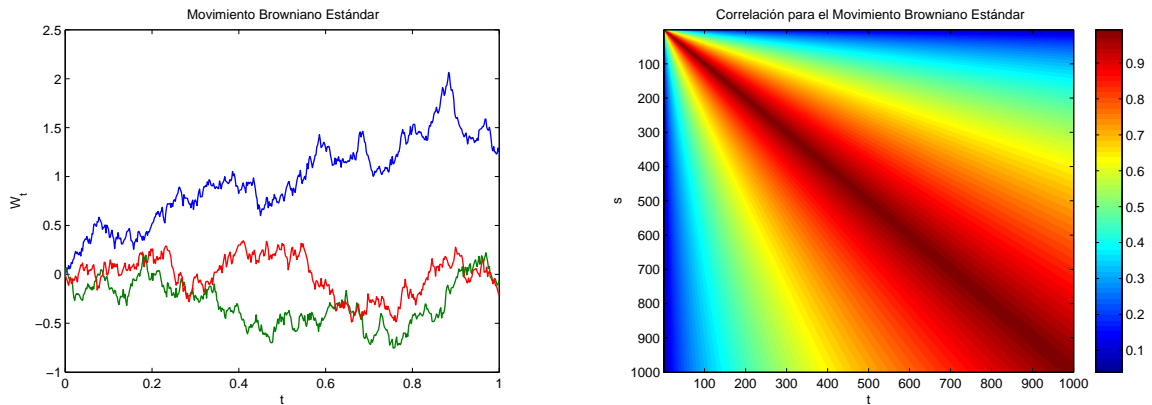


Figura 2.2: Izquierda: Tres realizaciones del movimiento Browniano Estándar sobre $[0, 1]$. Derecha: Visualización de la matriz de correlación $\rho_W(t, s)$ del movimiento Browniano estándar. $(t, s) \in (0, 1] \times (0, 1]$, el factor de escala es 10^{-3} . Observe que $0 < \rho_W(t, s) \leq 1$. (Ver el apéndice (A) para el código de la figura en MatLab)

En relación al apartado (2.6), el movimiento Browniano estándar es un proceso de difusión, con tendencia $a(s, x) = 0$ y coeficiente de difusión $b(s, x) = 1$, en efecto,

$$\begin{aligned}
p(s, x; t, y) &= E(W_t = y | W_s = x) \\
&= E(W_t - W_s | W_s = x) \\
&= E(W_t - W_s) \\
&= E(W_{t-s}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y en consecuencia, los límites dados por (2.6.3) y (2.6.4) toman el valor de cero, así $a(s, x) = 0$. Además,

$$\begin{aligned}
b^2(s, x) &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E((W_t - W_s)^2 | W_s = x) \\
&= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E((W_t - W_s)^2) \\
&= \lim_{t \rightarrow s} \frac{t-s}{t-s} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Otras propiedades importantes del movimiento Browniano vienen dadas por los siguientes lemas.

Lema 2.7.1. *El Movimiento Browniano es un proceso Gaussiano.*

Demostración. Debe probarse que las distribuciones de los vectores finito-dimensionales con componentes en el proceso W

$$(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}),$$

para todas las posibles secuencias de tiempo $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ y para cada $n \geq 1$ son *Gaussianas multivariadas*.

Para hallar la función de densidad asociada al movimiento Browniano, cabe anotar que las igualdades

$$W_{t_1} = w_1, \quad W_{t_2} = w_2, \quad \dots \quad W_{t_n} = w_n \tag{2.7.4}$$

son equivalentes a

$$W_{t_1} = w_1, \quad W_{t_2} - W_{t_1} = w_2 - w_1, \quad \dots \quad W_{t_n} - W_{t_{n-1}} = w_n - w_{n-1} \tag{2.7.5}$$

y haciendo uso de que los incrementos son independientes y estacionarios en el movimiento Browniano, se obtiene la función de densidad conjunta como:

$$\begin{aligned}
 f(w_1, w_2, \dots, w_n) &= f_{t_1}(w_1) f_{t_2-t_1}(w_2 - w_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(w_n - w_{n-1}) \\
 &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{w_1^2}{t_1} + \frac{(w_2-w_1)^2}{t_2-t_1} + \dots + \frac{(w_n-w_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}} \right]\right\}}{(2\pi)^{n/2} [t_1(t_2-t_1) \dots (t_n-t_{n-1})]^{1/2}}, \tag{2.7.6}
 \end{aligned}$$

de manera que el movimiento Browniano resulta ser un proceso Gaussiano. □

Con el lema (2.7.1) y en virtud nuevamente de que los incrementos son independientes y estacionarios, se obtiene la distribución acumulada para el movimiento Browniano como

$$\begin{aligned}
 P[W_{t_n} \leq w_n \mid W_{t_i} \leq w_i, i = 0, \dots, n-1] &= P[W_{t_n} \leq w_n] \\
 &= P[W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \leq w_n - w_{n-1}] \\
 &= \int_{-\infty}^{w_n - w_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(\frac{-v^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right) dv. \tag{2.7.7}
 \end{aligned}$$

De manera que si $0 \leq s < t$ podemos escribir la función densidad de transición asociada como:

$$\begin{aligned}
 p[y - dy < W_t < y \mid x - dx < W_s < x] &= p(s, x; t, y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \tag{2.7.8}
 \end{aligned}$$

De otro lado, la distribución de los vectores $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ puede ser caracterizada por sus funciones esperanza (E) y covarianza (C_W), que están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
 \mu_W(t) &= E(W_t - W_0) \\
 &= 0 \tag{2.7.9}
 \end{aligned}$$

y suponiendo que $t > s$,

$$\begin{aligned}
C_W(t,s) &= E(W_t, W_s) \\
&= E[(W_t - W_s + W_s) W_s] \\
&= E[(W_t - W_s)W_s] + E(W_s^2) \\
&= E(W_t - W_s) E(W_s) + s \\
&= s \\
&= \min(t,s)
\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

Así, para una sucesión creciente de tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$, la matriz de covarianza del vector gaussiano multivariado $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ se representa como

$$\begin{pmatrix} \min(t_1, t_1) & \min(t_1, t_2) & \cdots & \min(t_1, t_n) \\ \min(t_2, t_1) & \min(t_2, t_2) & \cdots & \min(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(t_n, t_1) & \min(t_n, t_2) & \cdots & \min(t_n, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

A partir de (2.7.10), si $\sigma_W(t)$ es la desviación estándar de W_t entonces el coeficiente de correlación entre W_t y W_s es

$$\begin{aligned}
\rho_W(t,s) &= \frac{C_W(t,s)}{\sigma_W(t)\sigma_W(s)} \\
&= \frac{\min(t,s)}{\sqrt{ts}}
\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

Véase, en el lado derecho de la figura (2.2), una representación a color de la matriz de correlación para el movimiento Browniano estándar discretizado en un intervalo de tiempo, la cual se logró considerando que $\rho_W(t,s)$ es una función en las dos variables t y s que no depende de los estados W_t ni de W_s .

Para el siguiente lema, se establece la definición de un proceso estocástico auto-similar de orden $H > 0$ [53, pp. 36-39], [65, pp. 1-4].

Definición 2.7.2. Un proceso estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ es autosimilar de orden $H > 0$ si $(T^H X_{t_1}, \dots, T^H X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, \dots, X_{Tt_n})$ para todo $T > 0$, $t_i \geq 0$ con $i = 1, \dots, n$ y $n \geq 1$.

Lema 2.7.2. El movimiento Browniano es un proceso de auto-similaridad de orden $H = 0.5$.

es decir,

$$\left(T^{1/2}W_{t_1}, \dots, T^{1/2}W_{t_n} \right) \stackrel{d}{=} (W_{Tt_1}, \dots, W_{Tt_n}) \tag{2.7.12}$$

donde $T > 0$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$.

La anterior es una propiedad de escalamiento, que permite simular una trayectoria del movimiento Browniano en un intervalo $[0, T]$, $T > 0$ a partir de una simulación lograda en el intervalo $[0, 1]$, re-escalando el intervalo de tiempo $[0, 1]$ por el factor T y los respectivos valores del proceso W por $T^{1/2}$.

Puede probarse que las realizaciones de cualquier proceso autosimilar de orden H con incrementos estacionarios para algún $H \in (0, 1)$ son no diferenciables en ninguna parte ([53], [65]). Ahora bien, el movimiento Browniano es un proceso autosimilar de orden $H = 0.5$, por lo cual sus trayectorias, aunque continuas, son no diferenciables en ningún punto.

Además, las trayectorias del movimiento Browniano son de variación no acotada sobre $[0, T]$ [53], [65]; lo cual significa que, para cualquier partición $\tau: 0 = t_0 < \dots < t_n = T$,

$$\sup_{\tau} \sum |W_{t_i}(w) - W_{t_{i-1}}(w)| = +\infty \quad (2.7.13)$$

O sea que para las diversas particiones del intervalo $[0, T]$, la suma de diferencias entre imágenes consecutivas de una realización del movimiento Browniano, es no acotada y por consiguiente tampoco es convergente.

Lema 2.7.3. *Propiedad de inversión en el tiempo: Si se define el proceso estocástico Z por $Z_t = tW_{1/t}$ para $t > 0$, y $Z_0 = 0$, donde W es un movimiento Browniano estándar, entonces el proceso Z también es un movimiento Browniano estándar.*

Para una prueba de esto, consulte [46, pp. 50-51]. Un aspecto importante del proceso Z_t definido en el lema (2.7.3) consiste en la posibilidad de generar un movimiento Browniano estándar para $1/t \in [1, \infty)$ a partir del conocimiento de los valores que toma el proceso de Wiener W_t para $t \in (0, 1]$, puesto que si $t \in (0, 1]$ entonces $1/t \in [1, \infty)$.

Para el proceso Z así definido, sus funciones esperanza y covarianza están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mu_Z(t) &= 0, \\ C_Z(t, s) &= ts C_W(t, s) \\ &= ts \min(t, s) \\ &= \min(t, s) \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

Lema 2.7.4. *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

Demostración. Representando por \mathcal{F}_t la filtración natural generada por el movimiento Browniano, esto es, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t)$, se trata de hallar, para $s < t$, $E(W_t | \mathcal{F}_s)$:

$$\begin{aligned} E(W_t | \mathcal{F}_s) &= E(W_s | \mathcal{F}_s) + E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) \\ &= W_s + E(W_t - W_s) \\ &= W_s \\ &= E(W_t | W_s), \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

donde la segunda igualdad se sigue del hecho de que W_s es \mathcal{F}_s -medible y de que el movimiento Browniano tiene incrementos independientes y estacionarios. Así, la ecuación (2.7.16) muestra que el movimiento Browniano es Markoviano. □

Lema 2.7.5. Si W_t es un movimiento Browniano, entonces los procesos $\{W_t : t \geq 0\}$ y $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ son martingalas.

Demostración. Sea $0 \leq s < t$. Para el proceso W_t , puede escribirse que

$$\begin{aligned} E(W_t | \mathcal{F}_s) &= E((W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s) \\ &= E((W_t - W_s) | \mathcal{F}_s) + E(W_s | \mathcal{F}_s) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= E(W_{t-s}) + W_s \\ &= W_s \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Análogamente, para el proceso $X_t = W_t^2 - t$, se tiene

$$\begin{aligned} E(X_t | \mathcal{F}_s) &= E(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) \\ &= E[((W_t - W_s) + W_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] \\ &= E((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2E(W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s) + E(W_s^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= t - s + W_s^2 - t \\ &= W_s^2 - s \\ &= X_s, \end{aligned} \tag{2.7.17}$$

y así, de las ecuaciones (2.7.16) y (2.7.17), queda comprobado que tales procesos son martingalas. □

Si el proceso X_t representa a (W_t) o a $(W_t^2 - t)$ y considerando que para $s \geq t$, se tendrá $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_t$ y por tanto

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_t \tag{2.7.18}$$

entonces podrá concluirse que, en general:

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_{\min(s, t)} \tag{2.7.19}$$

Ahora se extiende la definición de movimiento Browniano unidimensional de tal manera que asuma valores en el espacio \mathbb{R}^n .

Definición 2.7.3. Un proceso estocástico, con valores en \mathbb{R}^n $\mathbf{W} = (W_t^1, \dots, W_t^n)$ es llamado movimiento Browniano n -dimensional si para cada $i = 1, \dots, n$, $\{W_t^i\}$ es un movimiento Browniano unidimensional, y $\{W_t^1\}, \dots, \{W_t^n\}$ son independientes.

Si los procesos $\{W_t^1\}, \dots, \{W_t^n\}$ son movimientos Brownianos estándar independientes, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\|\mathbf{x}\|$ es la norma euclídea del vector \mathbf{x} , entonces la función de densidad conjunta del proceso \mathbf{W} es

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) &= f_{W_t^1}(x_1) \cdots f_{W_t^n}(x_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t}\right) \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2t}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}\right) \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

y la respectiva distribución de probabilidad es

$$P(\mathbf{W} \in B) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_B \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}\right) d\mathbf{x}, \quad B \text{ es un Boreliano en } \mathbb{R}^n. \quad (2.7.21)$$

Ahora, se describen algunos de los procesos derivados del movimiento Browniano resumidos en las siguientes definiciones.

Definición 2.7.4. El proceso $X_t = W_t - tW_1$, $0 \leq t \leq 1$ es llamado movimiento Browniano con puente o puente Browniano.

A partir de la definición, note que $X_0 = W_0 - 0 = 0$ y también $X_1 = W_1 - W_1 = 0$. Además, el movimiento Browniano con puente $\{X_t\}_{t \in T}$ resulta ser Gaussiano como combinación lineal de variables Gaussianas, siendo sus funciones esperanza y covarianza,

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E(W_t - tW_1) \\ &= E(W_t) - tE(W_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

$$\begin{aligned} C_X(t, s) &= C(X_t, X_s) \\ &= C(W_t - tW_1, W_s - sW_1) \\ &= C(W_t, W_s) - sC(W_t, W_1) - tC(W_1, W_s) + tsC(W_1, W_1) \\ &= \min(t, s) - ts - ts + ts \\ &= \min(t, s) - ts \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

respectivamente. A partir de la ecuación (2.7.23), la varianza del proceso X_t es $\sigma_X^2(t) = t(1-t)$. Así, el valor esperado del proceso X_t es el mismo valor que X_0 y que X_1 , el cual es cero, y su

máxima variabilidad ocurre en el punto medio del puente, esto es, en $x = \frac{1}{2}$, donde la parábola $t(1-t)$ alcanza su punto máximo. El movimiento Browniano con puente resulta útil, por ejemplo, para interpolar valores tomados por el movimiento Browniano estándar W_t , $t \in [0, 1]$, cuando éste ha sido generado por simulación en valores discretos de t , permitiendo obtener a partir de realizaciones discretas del movimiento Browniano, muestras más densas, prácticamente continuas de tales realizaciones.

Definición 2.7.5. *El proceso $X_t = \mu t + \sigma W_t$, con $t \geq 0$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ es llamado movimiento Browniano con tendencia ('drift').*

Al igual que en la definición anterior, el movimiento Browniano con tendencia resulta ser un proceso Gaussiano [53]. Una característica importante del proceso X_t , aparece con detalle en el capítulo (3), en el cual se muestra que el proceso seguido por el cambio relativo en el precio de un activo financiero, según el modelo de Black & Scholes, es un movimiento Browniano con tendencia.

Una realización de este proceso se muestra en la figura (2.3) y sus funciones esperanza y covarianza son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E(\mu t + \sigma W_t) \\ &= \mu t + \sigma E(W_t) \\ &= \mu t\end{aligned}\tag{2.7.24}$$

$$\begin{aligned}C_X(t, s) &= C(X_t, X_s) \\ &= C(\mu t + \sigma W_t, \mu s + \sigma W_s) \\ &= C(\sigma W_t, \sigma W_s) \\ &= \sigma^2 \min(t, s)\end{aligned}\tag{2.7.25}$$

Definición 2.7.6. *El proceso dado por $X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$, $t \geq 0$ es llamado movimiento Browniano geométrico.*

El anterior proceso fue sugerido por Black, Scholes y Merton (1973) como un modelo que estima el precio S_t de un activo financiero. El proceso X_t resulta ser no Gaussiano a diferencia del movimiento Browniano, del movimiento Browniano con puente y del movimiento Browniano con tendencia. Algunas realizaciones de este proceso se muestran en la figura (2.3). Sus funciones esperanza y covarianza pueden ser calculadas fácilmente. Previo a esto, si se parte de que una variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}E(\exp(\lambda Z)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda z) \exp(-z^2/2) dz \\ &= \exp(\lambda^2/2) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(z-\lambda)^2/2) dz}_{=1} \\ &= \exp(\lambda^2/2)\end{aligned}\tag{2.7.26}$$

donde en la segunda igualdad se usa el hecho que $1/\sqrt{2\pi}\exp(-(z-\lambda)^2/2)$ es la densidad de una variable aleatoria que distribuye $N(\lambda, 1)$. Así, utilizando la ecuación (2.7.26), la función esperanza es

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E(\exp(\mu t + \sigma W_t)) \\ &= \exp(\mu t)E(\exp(\sigma\sqrt{t}W_1)) \\ &= \exp((\mu + 0.5\sigma^2)t),\end{aligned}\tag{2.7.27}$$

la función covarianza, suponiendo que $s \leq t$, es

$$\begin{aligned}C_X(t, s) &= E(X_t X_s) - E(X_t) E(X_s) \\ &= \exp(\mu(t+s))E\left[\exp(\sigma(W_t - W_s + 2W_s))\right] - \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)) \\ &= \exp(\mu(t+s))E\left[\exp(\sigma(W_t - W_s))\right]E(\exp(2\sigma W_s)) - \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)) \\ &= \exp(\mu(t+s))E(\exp(\sigma\sqrt{t-s}W_1))E(\exp(2\sigma\sqrt{s}W_1)) - \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)) \\ &= \exp(\mu(t+s))\exp(\sigma^2(t-s)/2)\exp(2\sigma^2s) - \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)) \\ &= \exp(\mu(t+s))\exp(\sigma^2(t+s)/2)\exp(\sigma^2s) - \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)) \\ &= \exp((\mu + 0.5\sigma^2)(t+s))\left(\exp(\sigma^2s) - 1\right)\end{aligned}\tag{2.7.28}$$

y la función varianza es

$$\sigma_X^2(t) = e^{(2\mu + \sigma^2)t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right)\tag{2.7.29}$$

2.8. Integral de Itô

La integral de Itô fue definida por el japonés K. Itô para resolver integrales del tipo

$$\int_0^t f(s, w) dW_s(w) = \int_0^t f_s dW_s\tag{2.8.1}$$

donde $t \in [0, T]$, $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso estocástico y W_t es un proceso de Wiener. Esta integral no puede ser obtenida por integración de Riemann-Stieltjes, pues el proceso W_t es no acotado en cualquier intervalo cerrado y acotado $[0, t]$, véase (2.7.13). Para definir la integral de Itô, conviene entonces establecer las condiciones básicas que debe tener f y definir qué clase de límite estará asociado con (2.8.1).

Considere que $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ es un espacio de probabilidad filtrado y $\{W_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; esto es, W_t es \mathcal{F}_t -medible.

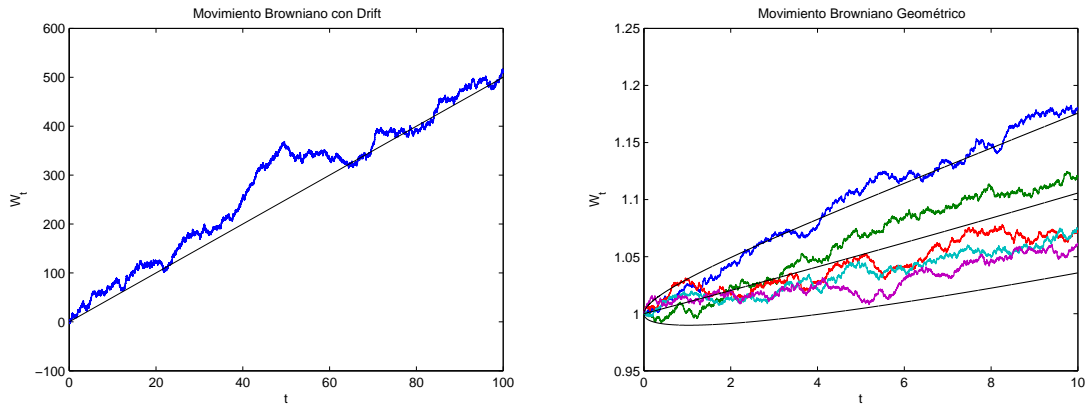


Figura 2.3: Izquierda: Una realización del movimiento Browniano con tendencia $X_t = 5t + 10W_t$ sobre $[0, 100]$. La línea a puntos representa su función esperanza $\mu_X(t) = 5t$. Derecha: Cinco trayectorias del movimiento Browniano geométrico $X_t = e^{.01t + .01W_t}$. Las líneas a puntos, de arriba hacia abajo, representan $\mu_X(t) + 2\sigma_X(t)$, $\mu_X(t)$ y $\mu_X(t) - 2\sigma_X(t)$ (Ver en el apéndice (A) el código en MatLab para esta gráfica)

Definición 2.8.1. Sea $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico medible y $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado. Si

$$E \left[\int_0^T f_t^2 dt \right] = \int_{\Omega} \int_0^T f_t^2 dt dP(w) < \infty \quad (2.8.2)$$

entonces se dice que f es un proceso en el espacio $\mathbb{L}^2[0, T]$.

Definición 2.8.2. Un proceso estocástico $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ en $\mathbb{L}^2[0, T]$, se dice que es simple, si existe una partición $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ y una sucesión de variables aleatorias $\{Z_i, i = 1, \dots, n\}$ tal que Z_i es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y

$$f_t = \sum_{i=1}^{n-1} Z_i I_{[t_{i-1}, t_i)}(t) + Z_n I_{[t_{n-1}, t_n]}(t) \quad (2.8.3)$$

Puede notarse que f_t es una v.a. no anticipativa, en el sentido de que su valor en el proceso estocástico f es independiente del valor que tome el proceso en otro tiempo mayor que t . Esto es consecuencia de que la v.a. Z_i es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible.

Definición 2.8.3. Sea $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico simple en $\mathbb{L}^2[0, T]$. La integral de Itô de f sobre $[0, t]$, denotada por $I_t(f)$, es

$$I_t(f) = \int_0^t f_s dW_s := \sum_{i=1}^n f_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n Z_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (2.8.4)$$

El siguiente lema será útil para extender la integral de Itô a procesos arbitrarios en $\mathbb{L}^2[0, T]$ no necesariamente simples.

Lema 2.8.1. Si $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ es un proceso en $\mathbb{L}^2[0, T]$, entonces existe una sucesión de procesos simples $\{g^{(n)}\}$ en \mathbb{L}^2 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^t |f_s - g_s^{(n)}|^2 ds \right] = 0 \quad (2.8.5)$$

Para una prueba de este lema, véase [50, p. 20]. La integral general de Itô se establece en la siguiente definición.

Definición 2.8.4. Sea $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ un proceso en $\mathbb{L}^2[0, T]$ adaptado al movimiento Browniano en $[0, T]$. La integral de Itô de f en $[0, t]$ se define por ,

$$I_t(f) = \int_0^t f_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g_s^{(n)} dW_s \quad \text{en } \mathbb{L}^2[0, T] \quad (2.8.6)$$

donde $\{g^{(n)}\}$ es una sucesión de procesos simples que converge a f según (2.8.5).

A partir de la ecuación (2.8.6),

- el proceso f debe ser *no anticipativo*, en tanto que puede aproximarse por una sucesión $\{g^{(n)}\}$ de procesos simples que son no anticipativos según la relación (2.8.3),
- el proceso f debe ser *no explosivo*, en el sentido de que el proceso f está en el espacio $\mathbb{L}^2[0, T]$ y por tanto satisface la ecuación (2.8.2), y
- el límite asociado tiene el sentido de convergencia en media cuadrática, en el sentido de la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left| I_t(f) - I_t(g^{(n)}) \right|^2 \right] = 0$$

A continuación se enuncian algunas de las propiedades fundamentales de la integral de Itô.

Teorema 2.8.1. (*Propiedades de la integral de Itô*). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{L}^2[0, T]$ y $t \in [0, T]$.

- La integral de Itô de f , $I_t(f)$, es una *Martingala* respecto a la filtración natural $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ del movimiento Browniano; esto es, para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E(I_t(f) - I_s(f) | \mathcal{F}_s) = 0 \quad (2.8.7)$$

Como consecuencia, su esperanza es constante (véase (2.4.1)) y está dada por

$$E \left[\int_0^t f(w, s) dW_s \right] = 0 \quad (2.8.8)$$

b. La covarianza y varianza para la integral de Itô, están dadas por

$$E \left[\int_0^t f(w,s) dW_s \int_0^t g(w,s) dW_s \right] = E \left[\int_0^t f(w,s) g(w,s) ds \right] \quad (2.8.9)$$

$$E \left[\int_0^t f(w,s) dW_s \right]^2 = E \left[\int_0^t f^2(w,s) ds \right] \quad (2.8.10)$$

La propiedad establecida por (2.8.10) se conoce como propiedad isométrica.

c. La integral de Itô satisface las relaciones básicas de Linealidad,

$$\int_0^t [\alpha f(w,s) + \beta g(w,s)] dW_s = \alpha \int_0^t f(w,s) dW_s + \beta \int_0^t g(w,s) dW_s \quad (2.8.11)$$

$$\int_0^T f(w,s) dW_s = \int_0^t f(w,s) dW_s + \int_t^T f(w,s) dW_s; \quad t \in [0, T]. \quad (2.8.12)$$

d. La integral de Itô, $I_t(f)$, es un proceso estocástico \mathcal{F}_t -medible y con trayectorias continuas; esto es, $t \mapsto I_t(f)$ es una función continua de t .

Para una prueba del Teorema (2.8.1), véase [44, pp. 84-87]. Finalmente, se define la integral de Itô n -dimensional.

Definición 2.8.5. Si f es un arreglo matricial $n \times m$ de procesos $\{f_t^{i,j}, t \in [0, T], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ en $\mathbb{L}^2[0, T]$ y $W = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T$ es un movimiento Browniano n -dimensional, entonces la integral de Itô $n \times m$ -dimensional es

$$\int_0^t f_s dW_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_s^{1,1} & \cdots & f_s^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_s^{n,1} & \cdots & f_s^{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_s^1 \\ \vdots \\ dW_s^m \end{pmatrix} \quad (2.8.13)$$

la cual representa un vector de n componentes que son integrales de Itô de la forma

$$\sum_{j=1}^m \int_0^t f_s^{i,j} dW_s^j; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8.14)$$

2.9. Lema de Itô

Uno de los resultados más fundamentales del cálculo estocástico es el *lema de Itô*, el cual permite evaluar una integral de Itô sin retornar a su compleja definición (véase la igualdad (2.8.6)). Este lema puede entenderse como la versión estocástica de la regla de la cadena para integrales de Riemann-Stieltjes o de Lebesgue. En las finanzas, el Lema de Itô se utiliza, por ejemplo, para describir el proceso estocástico asociado a una función del precio S_t , de un activo

financiero, y del tiempo t , o asociado a una función de la tasa de interés r_t , en un mercado, y del tiempo t . Una función de este tipo podría estar relacionada al valor de una opción europea sobre una divisa, tal como se verá en el capítulo (3). Previo al Lema de Itô, es necesario desarrollar algunos conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.9.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Dado un proceso estocástico $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$, continuo y adaptado a su filtración natural, se define una *ecuación diferencial estocástica unidimensional de Itô* para el proceso X mediante

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t, \quad (2.9.1)$$

la cual puede ser escrita en forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s, \quad (2.9.2)$$

donde $0 \leq t \leq T$, $a_t = a(t, X_t)$ y $b_t = b(t, X_t)$ dependen de t y X_t , $\int_0^t a_s ds$ es una integral de Riemann-Stieltjes y $\int_0^t b_s dW_s$ es una integral de Itô.

Así mismo, si $0 \leq t \leq T$, $W = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T$ es un movimiento Browniano n -dimensional y $X = \{X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)^T\}$ es un proceso estocástico continuo y adaptado a su filtración natural, se define una *ecuación diferencial estocástica n -dimensional de Itô* (SDE) para el proceso X por

$$dX_t^i = a_t^i dt + \sum_{j=1}^m b_t^{i,j} dW_t^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.9.3)$$

o escrita en forma integral,

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_s^{i,j} dW_s^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.9.4)$$

donde $a_t^i = a^i(t, X_t)$ y $b_t^{i,j} = b^{i,j}(t, X_t)$ dependen de t y de X_t , $\int_0^t a_s^i ds$ es una integral de Riemann-Stieltjes y $\int_0^t b_s^{i,j} dW_s^j$ es una integral de Itô. Un proceso X descrito por (2.9.1) o (2.9.3), con $X(0) = X_0$, es llamado un *proceso de Itô* o proceso de difusión.

Es posible encontrar dos tipos de solución para una ecuación diferencial estocástica de Itô. Tales soluciones pueden ser, o bien *soluciones fuertes* o bien *soluciones débiles*. De manera específica, una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica dada en igualdad (2.9.2), es un proceso estocástico $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ que satisface las siguientes condiciones:

- X está adaptado al movimiento Browniano, esto es, para cada instante de tiempo t , la v.a. X_t es una función de W_s , con $s \leq t$.

- X es una función de la realización del movimiento Browniano W_t en el intervalo $[0, T]$ y de los coeficientes funcionales $a_t = a(t, X_t)$ y $b_t = b(t, X_t)$.

Así, una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (2.9.2) depende de la realización del movimiento Browniano W_t en el intervalo de tiempo $[0, T]$. De otro lado, una solución débil de la ecuación (2.9.2) depende sólo de la distribución de probabilidad del proceso X y no de la realización de W_t en $[0, T]$. Este tipo de solución depende del valor inicial X_0 del proceso X en el tiempo $t = 0$ y de los coeficientes funcionales $a_t = a(t, X_t)$ y $b_t = b(t, X_t)$. En las soluciones débiles, el principal objetivo es determinar las características distribucionales del proceso X sin conocer la trayectoria seguida por el mismo.

En el siguiente teorema se establecen condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución a la ecuación diferencial estocástica (2.9.2).

Teorema 2.9.1. *Dada la ecuación diferencial estocástica descrita por (2.9.2), si la condición inicial X_0 es tal que $E(X_0^2) < \infty$ y X_0 es independiente del proceso $\{W_t, t \geq 0\}$; y si para todo $t \in [0, T]$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene,*

(a) $a(t, x)$ y $b(t, x)$ son continuas, y

(b) $a(t, x)$ y $b(t, x)$ satisfacen la condición de Lipschitz respecto a la segunda variable:

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|, \quad (2.9.5)$$

entonces la ecuación (2.9.2) tiene una única solución fuerte en el intervalo $[0, T]$.

Finalmente, una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$X_t = X_0 + \int_0^t (c_1 X_s + c_2) ds + \int_0^t (\sigma_1 X_s + \sigma_2) dW_s, \quad (2.9.6)$$

para $t \in [0, T]$ y donde c_i y σ_i , $i = 1, 2$, son constantes, es llamada una ecuación diferencial lineal estocástica de Itô, la cual en virtud del teorema (2.9.1) tiene una única solución fuerte en el intervalo $[0, T]$. En el capítulo (3), se verá que una ecuación del tipo (2.9.6) se emplea para describir el precio S_t de un activo en el tiempo t en el modelo de Black & Scholes [28].

2.9.2. El lema de Itô

Se establece ahora el Lema de Itô en el siguiente teorema.

Teorema 2.9.2. *(Lema de Itô) Si $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en C^2 y se define el proceso estocástico $Y = \{Y_t, t \in [0, T]\}$ por $Y_t = f(t, X_t)$, donde X_t es un proceso estocástico descrito por la ecuación (2.9.3), entonces la diferencial estocástica de Y_t es*

$$dY_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_t^i \frac{\partial f}{\partial x_t^i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n b_t^{i,j} b_t^{k,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^i \partial x_t^k} \right] dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_t^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_t^i} dW_t^j, \quad (2.9.7)$$

donde las derivadas parciales de f se evalúan en (t, X_t) .

Para una prueba rigurosa del Lema de Itô dado por la ecuación (2.9.7) véase [44, pp.96-97]. Una notación compacta de (2.9.7) puede hacerse si se definen los operadores L^0 y L^j por

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_t^i \frac{\partial}{\partial x_t^i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n b_t^{i,j} b_t^{k,j} \frac{\partial^2}{\partial x_t^i \partial x_t^k} \quad (2.9.8)$$

$$L^j = \sum_{i=1}^n b_t^{i,j} \frac{\partial}{\partial x_t^i} \quad (2.9.9)$$

y así el lema de Itô descrito por (2.9.7) se escribe como

$$dY_t = L_0 f(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^m L^j f(t, x_t) dW_t^j \quad (2.9.10)$$

Una prueba elemental del teorema (2.9.2) se hace a continuación.

Demostración. Un acercamiento al lema de Itô dado por la ecuación (2.9.7) o equivalentemente por la ecuación (2.9.10), puede hacerse expandiendo f como una serie de Taylor con derivadas hasta de orden dos,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_t^i} \Delta x_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^i \partial t} \Delta x_t^i \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^i \partial x_t^k} \Delta x_t^i \Delta x_t^k + \dots \quad (2.9.11)$$

Ahora, la representación discreta de (2.9.3) puede escribirse como

$$\Delta X_t^i = a_t^i \Delta t + \sum_{j=1}^m b_t^{i,j} \varepsilon_t^j \sqrt{\Delta t} \quad (2.9.12)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y $\varepsilon_t^i \sim N(0, 1)$.

De otro lado, si $\rho_{\varepsilon_t^j, \varepsilon_t^l}$, $j, l = 1, \dots, m$ representa la correlación entre ε_t^j y ε_t^l ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta X_t^i \Delta t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_t^i (\Delta t)^2 + \sum_{j=1}^m b_t^{i,j} \varepsilon_t^j (\Delta t)^{3/2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta X_t^i \Delta X_t^k &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{j=1}^m b_t^{i,j} \varepsilon_t^j \sqrt{\Delta t} \right) \left(\sum_{j=1}^m b_t^{k,j} \varepsilon_t^j \sqrt{\Delta t} \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \left(\sum_{j=1}^m b_t^{i,j} b_t^{k,j} \rho_{\varepsilon_t^j, \varepsilon_t^j} \Delta t \right) + \left(\sum_{j=1}^m \sum_{l=1, l \neq j}^m b_t^{i,j} b_t^{k,l} \underbrace{\rho_{\varepsilon_t^j, \varepsilon_t^l}}_{=0} \Delta t \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^m b_t^{i,j} b_t^{k,j} dt \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

Si hacemos que $\Delta t \rightarrow 0$ y usamos las relaciones (2.9.12), (2.9.13) y (2.9.14) en la ecuación (2.9.11) evaluada en $f(t, X_t)$, ésta última se reduce a la ecuación (2.9.7). \square

Como casos específicos de la aplicación del Lema de Itô dado por la relación (2.9.7), se considera lo siguiente:

Si $dX_t = dW_t$ y $f(t, x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2)$, entonces,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

donde las derivadas parciales de f se evalúan en (t, W_t) .

Y si $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ como en la ecuación (2.9.1) y $f(t, x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2)$, entonces,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

donde las derivadas parciales de f se evalúan en (t, X_t) .

Finalmente, un tratamiento detallado sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, del tipo dado en (2.9.1) o (2.9.3), y técnica numéricas de solución pueden encontrarse en [44], [58], [63].

Modelos de Volatilidad Constante

3.1. Modelo de Black & Scholes

3.1.1. Descripción del modelo

El modelo de Black & Scholes (1973) [28] [52] motivó un cambio estructural en la modelación del comportamiento de los precios de un activo, de acuerdo con lo que había sido sugerido inicialmente por Bachelier (1900) [5], y que se mantuvo ignorado durante la primera mitad del siglo XX. Uno de los supuestos básicos del modelo es el de considerar un mundo donde los precios de un activo financiero siguen un proceso estocástico según un *movimiento browniano geométrico* con volatilidad constante.

Bajo esta perspectiva, el modelo de Black & Scholes parte del supuesto de que el precio S_t de un activo en el tiempo t , con $t \in [0, T]$, satisface la SDE

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.1.1)$$

donde μ , σ son constantes, $\mu > 0$ es el valor esperado del retorno dS_t/S_t en la unidad de tiempo, $\sigma > 0$ es la volatilidad del retorno en el precio S_t del activo y W_t es un proceso de Wiener.

Proposición 3.1.1. *La solución analítica de la ecuación (3.1.1) es el Movimiento Browniano Geométrico:*

$$S_t = S_0 \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t). \quad (3.1.2)$$

Demostración. Una manera directa de hacer la prueba, es comprobar, mediante el Lema de Itô, que la ecuación (3.1.2) satisface la ecuación diferencial estocástica dada en igualdad (3.1.1). De

esta manera, si $f(t, x) = S_0 \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma x)$, entonces

$$\begin{aligned} dS_t &= df(t, W_t) \\ &= S_0 \left(\frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial x^2} dt + \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial x} dW_t \right) \\ &= (\mu - 0.5\sigma^2) S_t dt + \sigma^2 S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

con lo cual queda probada la proposición, puesto que la aplicación del lema de Itô a la ecuación (3.1.2) produce la ecuación (3.1.1).

Otro modo de hacer la prueba, es encontrar la solución a la ecuación (3.1.1) de manera analítica [53]. En este caso, considere que $f(t, x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2)$, y que $S_t = f(t, W_t)$. Aplicando el Lema de Itô al proceso S_t se obtiene

$$dS_t = [f_1(t, W_t) + 0.5f_{22}(t, W_t)] dt + f_2(t, W_t) dW_t$$

y comparando esta última expresión con la ecuación (3.1.1), deben satisfacerse las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu f(t, x) &= f_1(t, x) + 0.5f_{22}(t, x), \quad y \\ \sigma f(t, x) &= f_2(t, x). \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Derivando respecto a la segunda variable la segunda ecuación en (3.1.3), se tiene que $f_{22}(t, x) = \sigma f_2(t, x) = \sigma^2 f(t, x)$. Así, f_{22} puede eliminarse en la primera ecuación de (3.1.3) y obtener:

$$\begin{aligned} (\mu - 0.5\sigma^2) f(t, x) &= f_1(t, x), \quad y \\ \sigma f(t, x) &= f_2(t, x). \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Ahora, si $f(t, x)$ se lleva a la forma $f(t, x) = g(t)h(x)$, entonces $f_1(t, x) = g'(t)h(x)$ y $f_2(t, x) = g(t)h'(x)$. De esta forma, la expresión (3.1.4) se escribe como un sistema de ecuaciones ordinarias muy simples

$$\begin{aligned} (\mu - 0.5\sigma^2) g(t) &= g'(t), \quad y \\ \sigma h(x) &= h'(x) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) \exp[(\mu - 0.5\sigma^2)t], \quad y \\ h(x) &= h(0) \exp(\sigma x) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

finalmente, se obtiene que para $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} S_t &= g(0)h(0) \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t) \\ &= f(0, W_0) \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t) \\ &= S_0 \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

que nuevamente es la solución indicada en la igualdad (3.1.2). □

La unicidad de la solución dada a la ecuación diferencial estocástica (3.1.1), está garantizada debido a que esta última relación es una ecuación diferencial lineal estocástica de Itô y por tanto admite una única solución fuerte en el intervalo $[0, T]$.

Por otra parte, el precio S_t de un activo, descrito por el movimiento browniano geométrico en la ecuación (3.1.2) (o la ecuación (3.1.7)), con $S_0 = 1$, tiene una distribución lognormal¹ con media $(\mu - 0.5\sigma^2)t$ y varianza $\sigma^2 t$, esto es,

$$S_t \sim \text{LogN}[(\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma^2 t], \quad (3.1.8)$$

donde $\text{LogN}(\cdot, \cdot)$ indica la distribución lognormal.

La función densidad de probabilidad para S_t , con t fijo, puede ser obtenida calculando la probabilidad $P(S_t < k)$. De esta manera, si $S_t = e^Y$, donde $Y \sim N[(\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma^2 t]$, entonces

$$\begin{aligned} P(S_t < k) &= P(e^Y < k) \\ &= P(Y < \ln k) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln k} \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 t} (y - (\mu - 0.5\sigma^2)t)^2\right] dy, \\ &\quad \text{haciendo } s_t = e^y, y = \ln s_t \text{ y } dy = \frac{1}{s_t} ds_t, \\ P(S_t < k) &= \int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma s_t} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 t} (\ln s_t - (\mu - 0.5\sigma^2)t)^2\right] ds, \end{aligned}$$

y del teorema fundamental del cálculo, se tiene que la densidad de S_t es

$$f(s_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma s_t} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 t} (\ln s_t - (\mu - 0.5\sigma^2)t)^2\right]. \quad (3.1.9)$$

¹La distribución lognormal $\text{LogN}(\mu, \sigma^2)$ es la distribución de $\exp(X)$, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A partir de la ecuación (3.1.9), la función densidad de transición para el precio S_t es

$$p(u, s_u; t, s_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}\sigma s_t} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2(t-u)} (\ln(s_u/s_t) + (\mu - 0.5\sigma^2)(t-u))^2 \right], \quad (3.1.10)$$

lo cual proporciona la probabilidad de que el precio S_t del activo, cambie del valor s_u en el tiempo u , al valor s_t en el tiempo t , $u < t$.

3.1.2. Opciones financieras en el modelo de Black & Scholes

El modelo de Black & Scholes asume que el precio S_t de un activo sigue un movimiento browniano geométrico para proponer una solución analítica al valor de una *opción financiera*. Este instrumento derivado financiero proporciona el derecho a comprar o a vender un activo financiero a un precio fijado K , conocido como *precio de ejercicio* y dentro de un período determinado de tiempo hasta la fecha T , conocido como *fecha de vencimiento*. Si la opción puede ser ejercida en cualquier tiempo $t \in [0, T]$, se dice que la opción es *americana* y si puede ser ejercida sólo en la fecha T , se dice que es *europea*. Una opción de compra se llama *call*, una opción de venta se llama *put* y el valor que se paga por los derechos que confiere una opción se conoce como *prima*.

Una opción call se ejerce cuando el precio del activo subyacente es superior al precio de ejercicio K y lo contrario ocurre para una opción put. El *valor intrínseco* de una opción es el valor neto positivo que resulta cuando ésta se ejerce y en caso de no ejercerse se dice que su valor intrínseco es cero. El interés ahora es calcular un precio justo (prima) que debe pagarse por una opción call o put europea.

El valor de una opción europea sobre activos que no generen pagos en tiempos anteriores a la fecha T , v. gr. una acción que no pague dividendos para $t \in [0, T)$, será $V(t, S_t, K, r, T, \sigma)$ que denotaremos de manera más simple por $V(t, S_t)$; donde S_t y σ están descritos de acuerdo a la relación (3.1.1); K es el precio de ejercicio convenido y T es la fecha de expiración de la opción; la constante r es la tasa de interés libre de riesgo y $t \in [0, T]$. Para valorar la opción, se construirá un portafolio formado por una posición larga en una opción negociable en el mercado y una posición corta en δ unidades del activo subyacente con precio S_t . Suponga además que el activo subyacente no paga dividendos. El valor del portafolio en el tiempo t , denotado por Π_t , será

$$\Pi_t = V(t, S_t) - \delta S_t \quad (3.1.11)$$

El cambio en el valor del portafolio en un período $[t, t + dt]$ es

$$d\Pi_t = dV - \delta dS_t \quad (3.1.12)$$

donde se han omitido los argumentos para el valor $V(t, S_t)$ de la opción. Ahora, aplicando el

lema de Itô sobre dV obtenemos,

$$\begin{aligned}
 d\Pi_t &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 - \delta dS_t \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt - \delta dS_t \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} - \delta \right) dS_t
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Las derivadas parciales respecto a S_t deben entenderse como derivadas parciales usuales de una función $V(t, s)$ respecto a s evaluadas posteriormente en los argumentos t, S_t .

El portafolio constituido estará *libre de riesgo* respecto a las variaciones del precio del activo subyacente en el mercado si se elimina el término aleatorio $(\partial V / \partial S_t - \delta) dS_t$ en la relación (3.1.13). Así, para un portafolio libre de riesgo el número de unidades δ del activo subyacente debe ser

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S_t} \tag{3.1.14}$$

El portafolio ahora se dice que tiene *cobertura delta* y las ecuaciones (3.1.11) y (3.1.13) pueden escribirse respectivamente como

$$\Pi_t = V(t, S_t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \tag{3.1.15}$$

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt \tag{3.1.16}$$

Si el portafolio evaluado según (3.1.16) está libre de riesgo, entonces puede aplicarse el *principio de no arbitraje* [56, cap. 2,17], [55], lo cual manifiesta que la tasa de crecimiento del valor del portafolio dado por (3.1.11) a una tasa constante de interés libre de riesgo r y en el período de tiempo de tiempo $[t, t + dt]$ es

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt \tag{3.1.17}$$

Sustituyendo (3.1.15) y (3.1.16) en la ecuación (3.1.17) y considerando como condición de frontera el valor de la opción en la fecha de expiración T , se obtiene que $V(t, S_t)$ satisface la ecuación diferencial parcial (PDE)

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0 \\
 &V(T, S_T) = \max(S_T - K, 0) \quad \text{call europea} \\
 &V(T, S_T) = \max(K - S_T, 0) \quad \text{put europea}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.1.18}$$

El éxito del modelo Black & Scholes y Merton consistió básicamente en resolver analíticamente la ecuación (3.1.18), la cual es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica². Esta ecuación puede reducirse a la forma de una ecuación de transferencia de calor [28, pp. 640-645] y resolverla para obtener

$$\left. \begin{aligned} C_t &= V_{call}(t, S_t) = S_t N(d_1) - K \exp(-r(T-t)) N(d_2), \\ P_t &= V_{put}(t, S_t) = K \exp(-rt) N(-d_2) - S_t N(-d_1), \\ &\text{donde} \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T-t}, \\ N(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-y^2/2) dy, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.19)$$

Ejemplo 3.1.1. *Suponga que se adquiere una opción europea sobre una acción que no paga dividendos a un precio de ejercicio de \$90 y con fecha de expiración en 6 meses. Si el precio actual del subyacente es \$100, su volatilidad es del 30% anual y la tasa libre de riesgo es del 9% anual, entonces las relaciones dadas por (3.1.19) permiten calcular el valor de la opción en el instante $t = 0$, para el caso de una opción call o put.*

Aquí, $V(t, S_t, K, r, T, \sigma) = V(0, 100, 90, 0.09, 0.5, 0.3)$ lo cual puede calcularse con facilidad. En Matlab 7.0, puede emplearse la rutina $[call, put] = blsprice(S, K, r, T, sigma)$, la cual está implementada en el Toolbox de Finanzas.

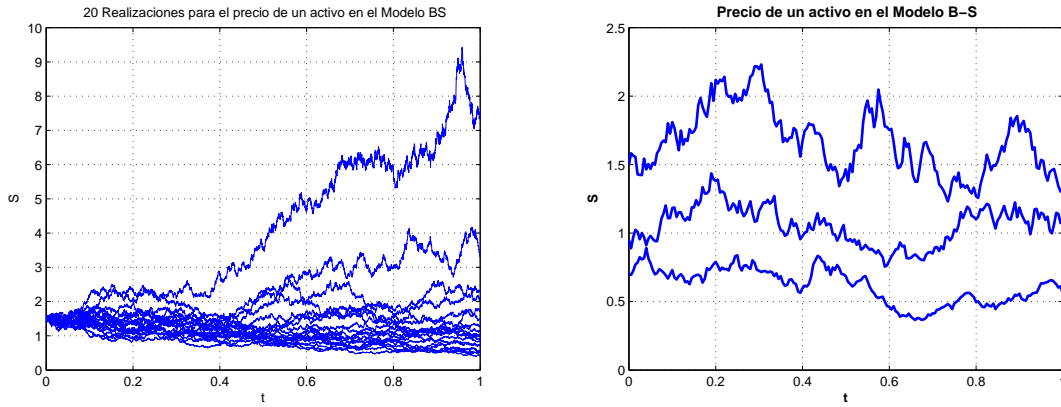
En este caso, ejecutando $[call, put] = blsprice(100, 90, 0.09, 0.5, 0.3)$ se produce

$$[call, put] = [\$16.7211, \$2.7609].$$

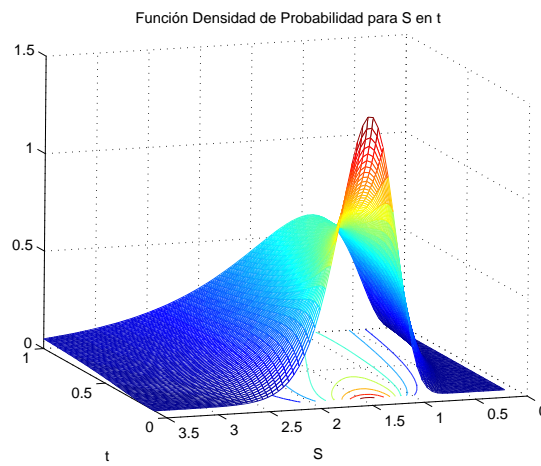
Algunos elementos importantes del modelo BS se ilustran en la figura (3.1). Las figuras (3.1(a)) y (3.1(b)) representan un conjunto de simulaciones para el precio de un activo financiero de acuerdo a la relación (3.1.1); la figura (3.1(c)) es la función densidad de probabilidad asociada a la figura (3.1(a)) y esta construida a partir de la relación (3.1.10); y la figura (3.1(d)) muestra una superficie a color para el valor de una call como función del tiempo y del precio, y sobre la superficie que resulta, tres posibles trayectorias que muestran la evolución del precio de la call de acuerdo a la relación (3.1.19).

Arriba se mencionó que la ecuación (3.1.18), asociada a la valoración de una opción europea en el modelo B-S, podía resolverse llevándose a la forma de una ecuación de difusión de calor. Una técnica alternativa y poderosa en las finanzas para la determinación del valor justo de una opción de este tipo, tanto en el modelo B-S como en otros modelos de valoración de opciones, consiste en hacer un cambio en la medida de probabilidad P sobre el espacio (Ω, \mathcal{A}, P) , a una nueva medida Q , llamada medida equivalente de martingala. Más concretamente, el cambio de medida viene dado por el celebrado teorema de Girsanov, según el cual, *el movimiento browniano es invariante bajo un efecto combinado de una traslación particular y de un cambio en la medida*

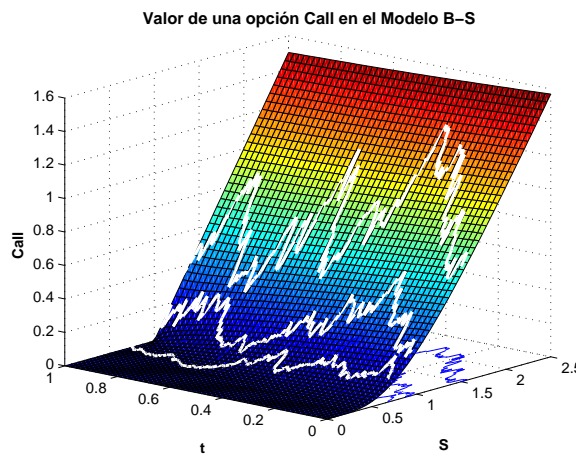
²Una PDE asociada a una función V se dice que es una PDE lineal si es una combinación lineal de V y de sus derivadas parciales. Una PDE lineal de la forma $a_0 + a_1 V_t + a_2 V_s + a_3 V_{ss} + a_4 V_{tt} + a_5 V_{st} = 0$ se llama parabólica si $a_5^2 - 4a_3 a_4 = 0$.



(a) 20 trayectorias para el valor de un activo en el Modelo BS, $t \in [0, 1]$, $S_t \in [0, 10]$. El precio inicial para cada trayectoria es 1.5. (b) 3 trayectorias para el valor de un activo en el Modelo BS, $t \in [0, 1]$, $S_t \in [0, 2.5]$. Los precios iniciales para las trayectorias son 0.7, 0.95 y 1.5.



(c) Densidad de Probabilidad del precio de un activo en el tiempo en el Modelo BS, $t \in [0, 1]$, $S_t \in [0, 3.5]$.



(d) Valor de una call como función del precio S y del tiempo t en el Modelo BS. $t \in [0, 1]$, $S_t \in [0, 2.5]$, $K = 1$, $T = 1$. Se ilustran tres trayectorias sobre el plano $S - t$, para el precio de un activo financiero, y tres trayectorias asociadas a estas sobre la superficie, para el valor de la call. Los precios iniciales para las trayectorias son 0.7, 0.95 y 1.5.

Figura 3.1: Comportamiento del precio y valoración de opciones call en el Modelo Black & Scholes. $\sigma = 0.6$, $\mu = 0.05$, $r = 0.05$. Vea el apéndice (A) para ver código de la simulación en Matlab.

de probabilidad [40], [41], [58] [56]. La sección que sigue realiza una prueba del resultado dado en la ecuación (3.1.19), para el valor C_0 de una opción call en el tiempo $t = 0$ bajo el principio de no arbitraje, por medio de un cambio de medida de probabilidad equivalente de martingala [56].

3.1.3. Medida equivalente de Martingala

Considere la filtración natural $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ generada por el movimiento Browniano W_t sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , esto es, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ para cada t ; y un proceso estocástico X_t \mathcal{F}_t - medible, que satisfaga la condición de Novikov, a saber,

$$E \left[\exp \left(\int_0^t X_u^2 du \right) \right] < \infty, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.20)$$

lo cual manifiesta que las variaciones del proceso estocástico X_t en el intervalo de tiempo $[0, T]$ son acotadas. Puede probarse en consecuencia que el siguiente proceso estocástico, ξ_t , es una martingala respecto a la filtración \mathcal{F} y a la medida de probabilidad P :

$$\xi_t = \exp \left(\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t X_u^2 du \right), \quad t \in [0, T]. \quad (3.1.21)$$

Con estos elementos, el teorema de Girsanov puede enunciarse como sigue [56].

Teorema 3.1.1. (Teorema de Girsanov). Si el proceso ξ_t dado en la ecuación (3.1.21) es una martingala respecto a la filtración \mathcal{F} y a la medida de probabilidad P , entonces el proceso \tilde{W}_t , definido por

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_u du, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.22)$$

es un proceso de Wiener estándar adaptado a la filtración natural browniana \mathcal{F} y respecto a la medida de probabilidad Q , definida por

$$Q(A) = E^P [1_A \xi_T] = \int_A \xi_T(w) dP(w), \quad (3.1.23)$$

donde $A \in \mathcal{F}$ y 1_A es la función indicadora del evento A ³.

En el teorema de Girsanov pueden hacerse las siguientes anotaciones: El proceso X_t mide que tan grande es el efecto de traslación efectuado sobre el proceso W_t para obtener el nuevo proceso \tilde{W}_t . Además, ξ_t es una martingala con $E[\xi_t] = 1$; en efecto, el diferencial $d\xi_t$ puede obtenerse a partir de la ecuación (3.1.21) y del lema de Itô como

$$d\xi_t = \xi_t X_t dW_t, \quad (3.1.24)$$

³ $1_A = \begin{cases} 1, & \text{si el evento } A \text{ ocurre;} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

esto a su vez permite escribir a ξ_t mediante

$$\begin{aligned}\xi_t &= \xi_0 + \int_0^t \xi_s X_s dW_s \\ &= 1 + \int_0^t \xi_s X_s dW_s.\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

donde la última igualdad resulta de hacer $t = 0$ en la ecuación (3.1.21) para obtener $\xi_0 = 1$. Finalmente, por las propiedades del lema de Itô dadas en el teorema (2.8.1), se deduce que

$$E[\xi_t] = 1.\tag{3.1.26}$$

De otro lado, debe ser claro que el proceso W_t es un movimiento browniano, con media cero, bajo la medida de probabilidad P , mientras que \tilde{W}_t es un movimiento browniano, con media cero, bajo la medida de probabilidad Q (llamada con frecuencia una nueva medida de probabilidad sintética). Finalmente, en caso de que el evento A sea un intervalo infinitesimal real, a partir de la igualdad (3.1.23), puede escribirse el cambio de medida Q respecto a P como

$$dQ = \xi_T dP.\tag{3.1.27}$$

De esta manera, ξ_T puede interpretarse como el factor funcional que permite obtener una nueva medida de probabilidad Q a partir de la medida P por medio de la relación (3.1.23) o (3.1.27) y se dice que ξ_T es la densidad de Q respecto a P . De otro modo, la igualdad (3.1.27) puede escribirse de manera equivalente como $dQ/dP = \xi_T$, lo cual recuerda la derivada de Radon-Nikodym definida en el teorema (2.1.1). Por otra parte, si la derivada ξ_T existe, puede recuperarse la medida P a partir de la medida Q mediante la relación $dP = \xi_T^{-1} dQ$. Se dirá entonces, que las medidas de probabilidad P y Q son equivalentes y que la medida Q es la medida equivalente de martingala respecto a P .

3.1.4. Deducción de la fórmula de Black & Scholes

El uso del cambio de medida equivalente de martingala descrito se reflejará en la deducción del precio C_t de una opción call europea, bajo el principio de no arbitraje, sobre un activo subyacente de precio S_t que no pague dividendos. La fórmula de Black & Scholes que calcula el precio C_t fue dada en la ecuación (3.1.19). A priori, se darán los siguientes dos resultados:

1. Considere el proceso Gaussiano $Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ donde Y_0 es conocido (Y_t sigue la distribución de un movimiento Browniano con tendencia). La *función generadora de momentos* asociada a Y_t se define por $M(\lambda) = E[\exp(\lambda Y_t)]$ y elementalmente puede ser calculada

como

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\lambda Y_t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t}\right) dY_t \\ &= \exp\left(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 t\right). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Un aspecto importante de la función $M(\lambda)$ en el campo de la estadística, se trata del hecho que su n -ésima derivada respecto a λ , evaluada en $\lambda = 0$, proporciona el n -ésimo momento de la variable aleatoria Y_t , esto es,

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} M(\lambda) \right|_{\lambda=0} = E[Y_t]^n. \quad (3.1.29)$$

2. Ahora se considera el proceso de precios de un activo, S_t , dado por $S_t = S_0 e^{Y_t}$, donde $Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ con Y_0 y S_0 conocidos (S_t sigue la distribución de un movimiento Browniano geométrico). Para $u < t$, la esperanza condicional $E(S_t | \mathcal{F}_u)$, puede ser calculada de la siguiente manera: la variable aleatoria $\Delta Y_t = Y_t - Y_u \sim N(\mu(t-u), \sigma^2(t-u))$ y a partir de su función generadora de momentos correspondiente, $M(\lambda)$, dada en (3.1.28), con $\lambda = 1$, se tiene,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_t}{S_u} \middle| \mathcal{F}_u\right) &= E\left(e^{\Delta Y_t} \middle| \mathcal{F}_u\right) \\ &= E(e^{\Delta Y_t}) \\ &= \exp\left(\mu(t-u) + \frac{1}{2} \sigma^2(t-u)\right), \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

donde la segunda igualdad se justifica del hecho que $\Delta Y_t = Y_t - Y_u$ es independiente de \mathcal{F}_u . A partir de (3.1.30), se logra obtener finalmente, que para $u < t$,

$$E(S_t | \mathcal{F}_u) = S_u \exp\left(\mu(t-u) + \frac{1}{2} \sigma^2(t-u)\right), \quad (3.1.31)$$

lo cual indica que el proceso de precios S_t no es una martingala respecto a la filtración \mathcal{F} y a la medida de probabilidad P , puesto que para $u < t$, $E(S_t | \mathcal{F}_u) \neq S_u$.

Después de los dos elementos descritos anteriormente, el propósito ahora es conseguir que el proceso $Z_t = e^{-rt} S_t$, correspondiente al proceso de precios S_t descontado a la tasa de interés libre de riesgo r , sea una martingala adaptado a la filtración \mathcal{F} y bajo una nueva medida de probabilidad Q , de modo que para $u < t$,

$$E^Q(e^{-rt} S_t | \mathcal{F}_u) = e^{-ru} S_u, \quad (3.1.32)$$

donde el simbolismo $E^Q(\cdot)$ indica que el valor esperado del argumento se debe tomar respecto a la nueva medida de probabilidad Q . Para encontrar la nueva medida Q se hace el siguiente análisis: como antes, se considera que el precio S_t de un activo esta dado por

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \quad (3.1.33)$$

donde la medida de probabilidad P de Y_t es tal que $Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Ahora, para $\rho \in \mathbb{R}$, se define la nueva medida Q de Y_t de modo que

$$Y_t \sim N(\rho t, \sigma^2 t). \quad (3.1.34)$$

Bajo la medida Q así definida y de la ecuación (3.1.31), se obtiene que, para $u < t$,

$$E^Q [\exp(-r(t-u)) S_t | \mathcal{F}_u] = \exp(-r(t-u)) S_u \exp\left(\rho(t-u) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-u)\right). \quad (3.1.35)$$

Si se toma el parámetro ρ de modo que

$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (3.1.36)$$

entonces la igualdad (3.1.35) se simplifica a

$$E^Q [\exp(-r(t-u)) S_t | S_u] = S_u, \quad (3.1.37)$$

que a su vez es equivalente a la ecuación

$$E^Q [e^{-rt} S_t | S_u] = e^{-ru} S_u, \quad (3.1.38)$$

la cual está de acuerdo al propósito manifestado en la ecuación (3.1.32). Así, el proceso $e^{-rt} S_t$ es una martingala adaptado a la filtración \mathcal{F} y bajo la nueva medida de probabilidad Q , para la cual se tiene que

$$Y_t \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right). \quad (3.1.39)$$

Con esto termina la búsqueda de la nueva medida de probabilidad Q . La medida Q es la medida equivalente de Martingala respecto a la medida P . Ahora, si C_t es el valor de una opción call en el modelo de Black & Scholes, entonces el proceso $e^{-rt} C_t$ debe ser una martingala adaptado a la filtración \mathcal{F} y respecto a la medida encontrada Q definida por la relación (3.1.39), y de este modo se tiene que

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q [e^{-r(T-t)} C_T | \mathcal{F}_t] \\ &= E^Q [e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Para simplificar los cálculos, se encontrará el valor de la opción call, en la ecuación (3.1.40), para $t = 0$. Además, a partir de la igualdad (3.1.39), la medida equivalente de martingala asociada a la variable aleatoria Y_T , en el momento de expiración T de la opción, viene dada por

$$dQ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right] dY_T. \quad (3.1.41)$$

Finalmente, tomando $t = 0$ y a partir de las ecuaciones (3.1.33) y (3.1.41), la esperanza condicional dada en la ecuación (3.1.40) se simplifica de manera simple a la siguiente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned} C_0 &= E^Q [e^{-rT} \max(S_T - K, 0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max(S_T - K, 0) dQ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max(S_0 e^{Y_T} - K, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right] dY_T \\ &= \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-rT} (S_0 e^{Y_T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right] dY_T \\ &= S_0 \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-rT} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right] dY_T \\ &\quad - K e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right] dY_T \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo } Z = \frac{Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{y} \quad -d_2 = -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT} e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T} S_0 \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma Z \sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - K e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \\ &= e^{-rT} e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T} e^{\left(\frac{\sigma^2 T}{2} \right)} S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z + \sigma\sqrt{T})^2} dZ - K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo } H = Z + \sigma\sqrt{T} \quad \text{y} \quad d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T},$$

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}H^2} dH - K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \\ &= S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

donde

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \\
 d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T - t}, \quad y \\
 N(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.43}$$

Las igualdades en (3.1.42) y (3.1.43) están de acuerdo con la fórmula de Black & Scholes dada antes en la ecuación (3.1.19).

3.2. Modelo Binomial

El modelo Binomial, o también llamado modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR - 1979) [17], desarrolla una estructura, en tiempo discreto, de árbol binomial de n pasos para estudiar la evolución en el precio S_t , de un activo financiero, y del valor V_t , de una opción sobre el activo subyacente, en un período de tiempo $[0, T]$. La construcción del modelo puede conducir rápidamente a un conjunto amplio de generalizaciones.

El modelo supone que el precio del activo mantiene una volatilidad constante σ y cambia en cada período de tiempo $\Delta t (= T/n)$, de modo que el precio sube o baja en una proporción específica a uS_t ($u > 1$) con probabilidad p , o a dS_t ($d < 1$) con probabilidad $(1 - p)$ respectivamente, siendo p y $(1 - p)$ probabilidades sintéticas de riesgo neutral. El árbol se construye formando una cobertura exenta de riesgo entre una posición larga en una opción, con valor V_t , y una posición corta en δ unidades del activo subyacente, con valor S_t por unidad. En el caso límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, el precio para la opción converge al valor sugerido en el modelo de Black & Scholes.

La figura (3.2) ilustra el modelo binomial mostrando las variaciones en el precio S_t de un activo y en el precio $V_t = C_t$ de una opción call, con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T , para dos períodos de tiempo ($n = 2$). Puede apreciarse, en ésta figura, que para $t = 0$, el precio inicial del activo es S y el precio inicial de la opción call es C . Un período después, cuando $t = T/2$, el precio del activo puede ser, uS con probabilidad p , en cuyo caso, el valor de la opción call es $C_u = \max(0, uS - K)$, o puede ser, dS con probabilidad $1 - p$, en cuyo caso, el valor de la opción call es $C_d = \max(0, dS - K)$. De manera análoga, se establece la dinámica de precios del activo y de la opción call para el segundo período de tiempo, esto es, cuando $t = T$.

Considerando el período inicial en el árbol binomial de la figura (3.2), puede calcularse el valor de δ que hace el portafolio exento de riesgo. De este modo, si el movimiento del precio del activo es hacia arriba, entonces el valor del portafolio es $C_u - \delta uS$, y si el movimiento es hacia abajo, el valor del portafolio es $C_d - \delta dS$. Igualando el valor resultante del portafolio en ambos escenarios, resulta

$$C_u - \delta uS = C_d - \delta dS, \tag{3.2.1}$$

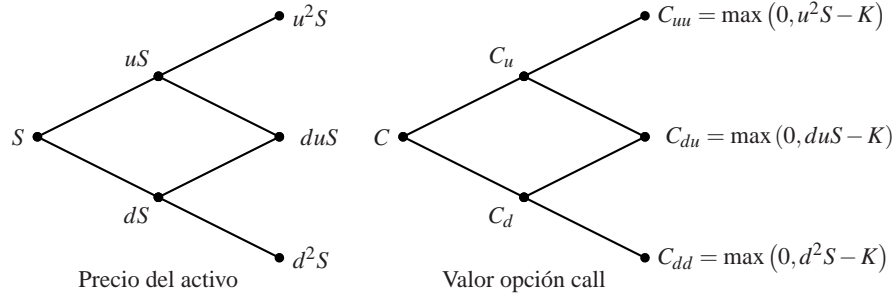


Figura 3.2: Modelo CRR para dos períodos.

y por tanto el valor δ buscado, para garantizar que el portafolio esté libre de riesgo, es

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}. \quad (3.2.2)$$

El valor δ encontrado en la ecuación (3.2.2), permite igualar el valor actual del portafolio en el tiempo $t = 0$, con su valor presente al final de un período de tiempo Δt , dado el caso que el precio de una unidad del activo sea uS , para obtener

$$C - \delta S = e^{-r\Delta t} (C_u - \delta uS). \quad (3.2.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.2) en la ecuación (3.2.3), se obtiene

$$C = e^{-r\Delta t} (pC_u + (1-p)C_d), \quad (3.2.4)$$

donde

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (3.2.5)$$

y r es la tasa de interés libre de riesgo. La razón de que el valor p en la ecuación (3.2.5) sea la misma probabilidad p considerada antes, para el crecimiento del precio del activo en un factor u , es la siguiente: El valor esperado del precio del activo al final del primer período de tiempo Δt es

$$E(S_{\Delta t}) = puS + (1-p)dS, \quad (3.2.6)$$

y reemplazando la ecuación (3.2.5) en la ecuación (3.2.6) se obtiene

$$E(S_{\Delta t}) = e^{r\Delta t} S, \quad (3.2.7)$$

lo cual muestra que con el valor p ajustado de acuerdo a la ecuación (3.2.5), el precio del

activo crece a la tasa libre de riesgo. Así, en un mundo de riesgo neutral⁴, en el cual todos los individuos son indiferentes al riesgo, debe tomarse como probabilidad p de que el precio del activo crezca en un factor u , el valor indicado en la ecuación (3.2.5). El valor C calculado para la opción call en la ecuación (3.2.4), se dice que está valorado bajo riesgo neutral, pues resulta de la aplicación del teorema de Girsanov, donde las probabilidades son calculadas de forma tal que el activo crezca a la tasa libre de riesgo, por lo cual no es necesario determinar la aversión al riesgo del inversionista para fijar una prima de riesgo. La valoración en riesgo neutral, constituye pues un principio financiero que establece el valor correcto de un derivado en todos los posibles mundos, no sólo en un mundo de riesgo neutral [36].

Por otra parte, los parámetros u y d , que indican los factores por los que el precio del activo sube o baja en un período de tiempo, respectivamente, pueden ser calculados de modo que la distribución de precios, a lo largo de muchos períodos de tiempo, sea logarítmica. Dichos valores son elegidos como

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En el caso general de tener un árbol binomial de n períodos temporales entre $t = 0$ y $t = T$, en la fecha de madurez T el precio del activo será $u^k d^{n-k} S$, donde k es el número de veces en que el precio del activo crece en un factor u y $n - k$ el número en el que decrece en un factor d . De esta manera, si p es la probabilidad de que el precio S_t suba en un factor u en un periodo de tiempo Δt , entonces la probabilidad de que el precio S suba k veces en el periodo de tiempo $[0, T]$ es $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, y así el valor C de la opción en el tiempo $t = 0$ se calcula como

$$C = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \max \left(u^k d^{n-k} S - K, 0 \right) \right]. \quad (3.2.9)$$

Una manera recursiva de obtener el valor C de la ecuación (3.2.9), es calcular los valores de la opción call en los nodos intermedios del árbol empleando la relación (3.2.4) desde los nodos finales hacia atrás, método conocido como inducción hacia atrás.

3.3. Proceso de Reversión a la media

En un proceso de reversión a la media se considera que la volatilidad σ , para el precio S_t de un activo es constante. El modelo de reversión a la media para S_t viene dado por la SDE lineal de Itô

$$dS_t = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.3.1)$$

⁴Un mundo es de riesgo neutral cuando el retorno esperado de un activo cualquiera es la tasa de interés libre de riesgo.

con λ y μ constantes. Puede verse que este modelo tiene como solución única y fuerte [50, pp. 300-301],

$$S_t = S_0 \exp[-(\lambda + \sigma^2/2)t + \sigma W_t] + \lambda \mu \int_0^t \exp[-(\lambda + \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)] ds, \quad (3.3.2)$$

y que a largo plazo, el valor S_t se mueva hacia μ con un factor de rapidez de λ (de ahí el nombre del proceso); así cuando $t \rightarrow \infty$, $E(S_t) \rightarrow \mu$.

3.3.1. Proceso de Ornstein - Uhlenbeck con reversión a la media

El proceso de Ornstein - Uhlenbeck (O-U) es un proceso gaussiano y Markoviano [39] y es un caso especial de un proceso de reversión a la media. Este proceso está descrito por la SDE lineal de Itô

$$dS_t = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.3.3)$$

en donde el término de difusión σdW_t no depende de S_t . Su solución única fuerte viene dada por [50, pp. 101-103, 302]

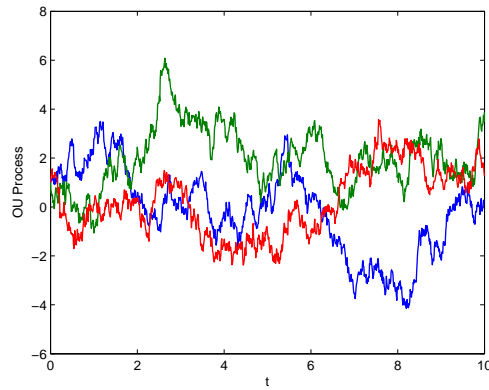
$$S_t = \mu + e^{-\lambda t}(S_0 - \mu) + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dW_s \quad (3.3.4)$$

El proceso dado por (3.3.4) tiene funciones esperanza, varianza y covarianza dadas por

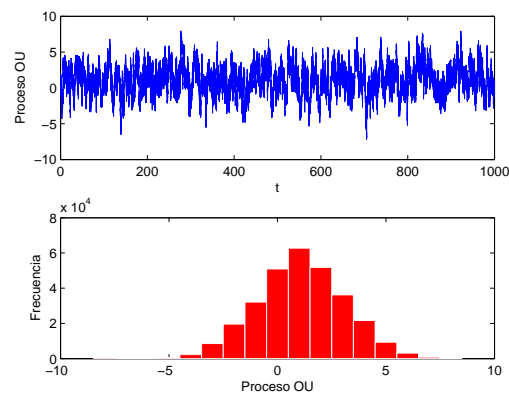
$$\begin{aligned} E(S_t) &= \mu + e^{-\lambda t}(S_0 - \mu) \\ \sigma_S^2(t) &= \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t}) \\ C_S(s, t) &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left(e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t+s)} \right), \quad s < t. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Para una deducción de las funciones dadas en (3.3.5) puede verse [53, pp. 141-144].

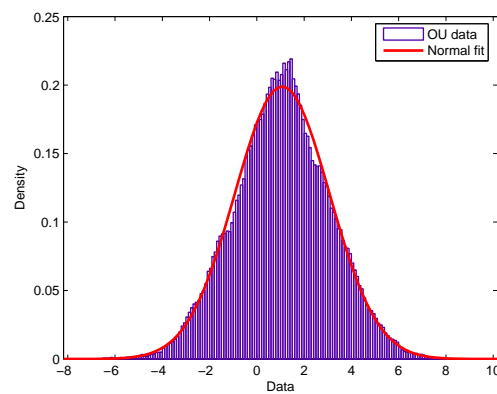
De otro lado, si $t \rightarrow \infty$, la media y la varianza del proceso convergen a μ y $\sigma^2/(2\lambda)$ respectivamente, de manera que el proceso converge en distribución a $N(\mu, \sigma^2/(2\lambda))$. Además en este proceso, S_t podría tomar valores negativos. La figura (3.3) simula el proceso O-U.



(a) Tres trayectorias para el proceso O-U con reversión a la media en el intervalo $[0, 1]$



(b) Una trayectoria del proceso O-U con reversión a la media en el intervalo $[0, 10^3]$ y su respectivo histograma de los valores asumidos en dicha realización.



(c) Ajuste Normal para el histograma mostrado en (b).

Figura 3.3: Los parámetros en la simulación son $\lambda = 0.5, \mu = 1, \sigma = 2, S_0 = 1$. En el ajuste normal mostrado en (c), los parámetros $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ y sus respectivos errores estándar son: 1.07331, 2.00583, 0.00366 y 0.00259.

Modelos de Volatilidad Estocástica

4.1. Volatilidad Implícita

La volatilidad implícita es denotada por σ_I y puede definirse como el valor de la volatilidad para el cual el precio de la opción generado por la fórmula (3.1.19) en el modelo de Black & Scholes, se hace igual al precio de mercado, esto es, $V(t, S_t, K, r, T, \sigma_I) = V_{\text{mercado}}$.

Conociendo en el mercado un conjunto de precios \mathbf{V} de una opción europea sobre un activo fijo, correspondientes a diferentes precios de ejercicio \mathbf{K} , puede hallarse a partir del modelo Black & Scholes los respectivos valores de σ_I manteniendo los demás parámetros fijos. Este proceso lleva asociado el uso de un algoritmo numérico tal como el de Newton-Raphson¹. En desacuerdo con el modelo de Black & Scholes para la valoración de una opción europea sobre un subyacente fijo, el valor de σ_I varía con el precio de ejercicio K , de tal manera que, puede darse el caso de que por ejemplo para una opción de divisas, la volatilidad sea menor para opciones en el dinero y se haga progresivamente mayor para aquellas dentro o fuera del dinero, formando lo que se conoce como sonrisa de la volatilidad [59] [24] [20] [70] [36, cap. 17].

La variación de σ_I asociada a los cambios en la variable \mathbf{K} , forma curvas conocidas como efecto sonrisa (*smile*) o muecas (*skew*). La presencia de una volatilidad implícita no constante sugiere una distribución asociada a los precios del activo subyacente, diferente a la distribución lognormal considerada en el conjunto de supuestos del modelo Black & Shcoles. La curva de la distribución de retornos reales es con frecuencia leptocúrtica y de colas más anchas que la distribución normal.

De otro lado, la variación de la volatilidad implícita σ_I , también se manifiesta con la variación de

¹El método de Newton-Raphson establece que a partir de una aproximación r_n a una raíz de $f(x) = 0$, se obtiene una nueva aproximación r_{n+1} mediante $r_{n+1} = r_n - f(r_n)/f'(r_n)$, supuesto que $f'(r_n) \neq 0 \quad \forall r_n$. Éste método numérico converge cuadráticamente a una raíz r de $f(x)$ siempre que $|f'(r_n)|$ no sea muy pequeña.

la fecha de expiración T . Así, puede contemplarse una superficie de volatilidad que se obtiene cuando ambos, precio de ejercicio K y fecha de expiración T , varían.

Véase en la figura (4.1(a)) la representación de una distribución lognormal y una posible distribución empírica seguida por los precios para un activo financiero. También se muestra el efecto sonrisa asociado a esta última distribución en la figura (4.1(b)). Esto indica que la distribución de los retornos para un activo en el mercado, tiene picos más altos y colas más anchas relativo a la distribución normal de retornos asociada a la distribución lognormal de precios (4.1(c)).

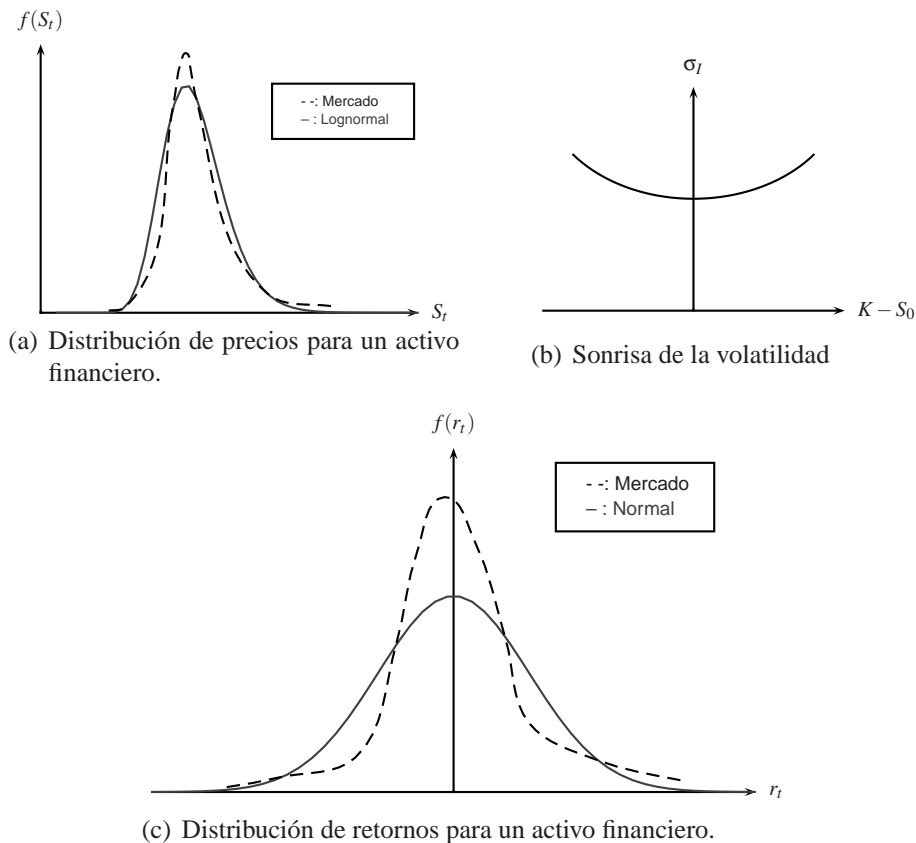


Figura 4.1: Distribución de precios, de retornos y volatilidad implícita.

4.2. Volatilidad Estocástica

Uno de los supuestos fuertes en el modelo de Black & Scholes es considerar la volatilidad σ como un parámetro constante o determinístico, en tanto puede conocerse como función del tiempo y del precio del activo subyacente. Los retornos de los precios de un activo en la realidad exhiben curvas leptocúrticas (*high peaks*) o con una gran desviación estándar (*fat tails*) y por tanto, estos no siguen una distribución normal como lo sugiere la relación (3.1.1).

Un proceso estocástico con volatilidad estocástica modela el cambio de la volatilidad implícita

en el modelo Black-Sholes cuando cambia la fecha de expiración T o el precio de ejercicio K . Un proceso de este tipo supone que el precio S_t de un activo financiero satisface el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_t(S_t, \sigma_t, t) = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (4.2.1)$$

$$d\sigma_t(S_t, \sigma_t, t) = p(S_t, \sigma_t, t) dt + q(S_t, \sigma_t, t) dW_t^{(2)} \quad (4.2.2)$$

en donde la volatilidad σ_t del precio S_t en (4.2.1) es un proceso estocástico descrito por (4.2.2) que en general representa un proceso de reversión a la media, y el coeficiente μ constante es la tendencia en la tasa de crecimiento del activo. La notación σ_t se hace para enfatizar que la volatilidad es no constante. Las funciones p y q son la tendencia de la volatilidad y la volatilidad de la volatilidad del precio S_t respectivamente y están por determinarse. Por el momento puede considerarse que ambas funciones, p y q , representan procesos de reversión a la media [69] [70]. El modelo incorpora dos fuentes de aleatoriedad, $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$ que son procesos de Wiener con correlación ρ . Véase la figura (4.2) para una ilustración de trayectorias de Wiener bidimensionales. De este modo, el proceso de precios $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ no está completamente descrito por la relación (4.2.1), y el valor S_t esta condicionado a la información S_0, σ_0 y a la trayectoria seguida por la volatilidad $\{\sigma_s, 0 \leq s \leq t\}$.

Las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) pueden conducir a la implementación de un algoritmo que simule, o bien la solución exacta, o bien una solución numérica, para el proceso de precios $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ [44]. De otro lado, si se desea valorar una opción europea bajo el modelo descrito (4.2.1)-(4.2.2), su precio será $V(t, S_t, \sigma_t; K, T; r)$ que denotamos de manera simplificada por $V(t, S_t, \sigma_t)$. Construyendo un portafolio libre de riesgo y bajo condiciones de no arbitraje, puede verse que V satisface la SDE [70, pp. 374-378]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho \sigma q S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial \sigma} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0 \quad (4.2.3)$$

para una función $\lambda = \lambda(t, S_t, \sigma_t)$, llamada precio en el mercado del riesgo de la volatilidad, que debe ser determinada. La afinación de λ depende de argumentos económicos y por ejemplo en Wiggins [68] se considera que λ debería ser proporcional a la varianza $v_t = \sigma_t^2$. Otros avances más recientes en la determinación del precio en el mercado del riesgo de la volatilidad λ se han hecho en [21].

Algunos modelos específicos importantes con volatilidad estocástica se describen en los próximos cinco apartados, donde se presentan algunos adelantos de tipo teórico y empírico propuestos en la literatura para el estudio de series de tiempo financieras. Los siguientes cuatro apartados, dados por los Modelos de Hull & White, Scott, Stein & Stein y Heston, parten de las relaciones dadas por (4.2.1) y (4.2.2). Algo interesante de ellos es que modelan la ecuación (4.2.2) según un proceso de Orstein-Uhlenbeck con reversión a la media o como un proceso de raíz cuadrada con reversión a la media, y donde se establece un valor para correlación ρ entre los dos procesos de Wiener subyacentes al proceso de precios S_t y al proceso asociado a su varianza σ_t^2 , el cual en algunos casos es cero y en otros es diferente de cero. El último de ellos descrito, es un Modelo Empírico de Volatilidad Estocástica, el cual enfatiza su estudio en la

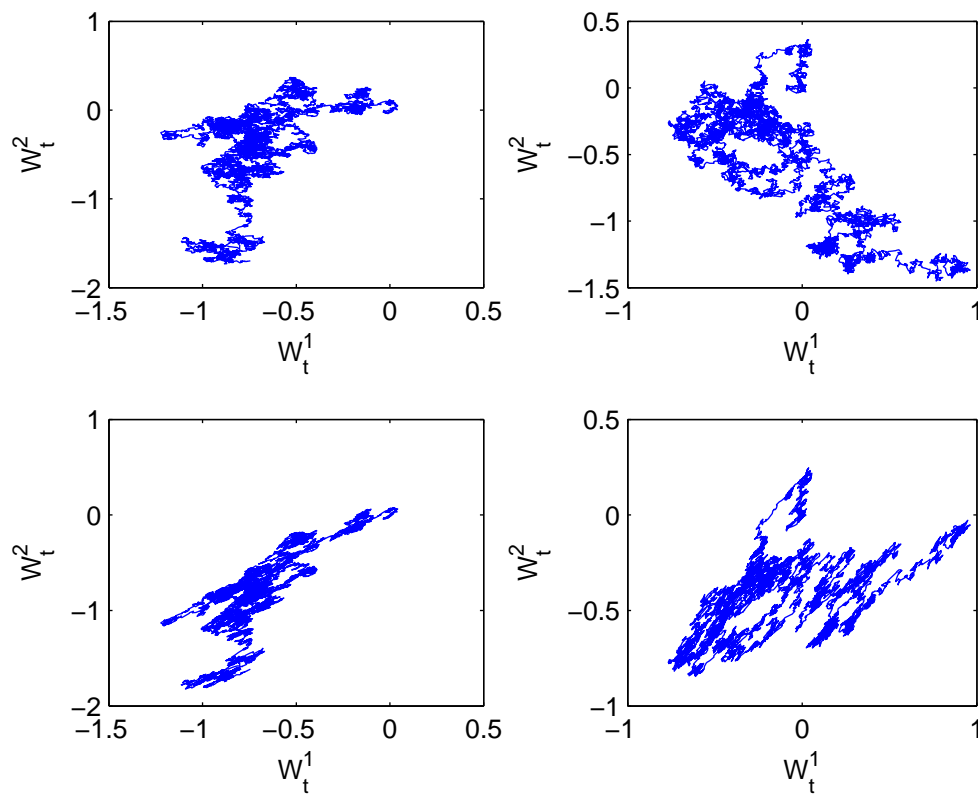


Figura 4.2: Dos trayectorias del proceso de Wiener bidimensional $(dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)})$. Arriba: $\rho = 0$; Abajo: $\rho = 0.8$.

ecuación (4.2.2), supone independencia entre las fuentes de aleatoriedad $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$ y presenta características compatibles con los datos históricos de la volatilidad del activo subyacente. Este método empírico ha mostrado ser adecuado en el estudio del comportamiento de la volatilidad en el precio de un activo y sólo requiere la existencia de datos que registren el valor que toma el activo en el tiempo. El modelo empírico también resulta aplicable en otra variedad de series de tiempo financieras como se indicará en su momento.

4.3. Modelo de Hull & White

En el modelo de Hull & White (1987) [35] el precio S_t de un activo financiero con varianza $V_t = \sigma_t^2$, se describe mediante las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dS_t = \phi S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (4.3.1)$$

$$dV_t = \mu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)} \quad (4.3.2)$$

donde ϕ es la tendencia constante en el precio y σ_t su volatilidad; μ y ξ son la tendencia y la volatilidad para V_t y en una primera aproximación se consideran constantes; y $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ son procesos de Wiener con correlación ρ . El parámetro ϕ puede depender de S_t , σ_t y t . Los parámetros μ y ξ pueden depender de σ_t y t pero se asume que no dependen de S_t .

Con relación al modelo de Black & Scholes, si $\rho = 0$, el modelo Black & Scholes sobrevalora las opciones en el dinero y subvalora aquellas muy dentro o muy fuera del dinero. De otro lado, si $\rho > 0$, el modelo Black & Scholes sub-valora las opciones fuera del dinero y sobre-valora aquellas dentro del dinero; y lo recíproco sucede si $\rho < 0$. La manera en que el modelo de Hull & White supera este problema parte de un conjunto de supuestos, con ellos se obtiene una solución analítica para valorar una opción europea call o put. En primer lugar, se supone que los derivados se valoran en un mundo de riesgo neutral, donde el retorno esperado del activo financiero es igual a la tasa libre de riesgo. Y en segundo lugar, se asume que no hay correlación entre la volatilidad y el precio del activo y en consecuencia $\rho = 0$.

Bajo estos supuestos, si se define la varianza media \bar{V} por

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt \quad (4.3.3)$$

entonces, a partir de la relación (4.3.1) con ϕ igual a la tasa libre de riesgo r , y las relaciones (4.3.2) y (4.3.3), la distribución de $\ln(S_T/S_0)$ condicionada a \bar{V} es

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0} \middle| \bar{V}\right) \sim N(rT - 0.5\bar{V}T, \bar{V}T) \quad (4.3.4)$$

En esta perspectiva el valor de una opción call europea será $\mathbf{E}[C(\bar{V})]$, en donde la esperanza está condicionada a \bar{V} . De este modo, el valor obtenido para la opción coincide con el valor

producido por el modelo Black & Scholes integrando sobre la distribución h de \bar{V} durante la vida de la opción, así

$$\mathbf{E} [C(\bar{V})] = \int_0^{\infty} C(\bar{V}) h(\bar{V}) d\bar{V} \quad (4.3.5)$$

Ahora, si se considera que $\rho \neq 0$, al hacer una partición del intervalo $[0, T]$ en n subintervalos de igual longitud y manteniendo la varianza constante en cada uno de ellos, la distribución de $\ln(S_T/S_0)$ condicionada a la trayectoria seguida por V es

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0} \mid \bar{V}\right) \sim N\left(rT - 0.5\bar{V}T + \sum_i \frac{\rho\sqrt{V_{i-1}}}{\xi} \left[\ln\left(\frac{V_i}{V_{i-1}}\right) - \frac{\mu T}{n} + \frac{\xi^2 T}{2n}\right], \bar{V}T(1 - \rho^2)\right) \quad (4.3.6)$$

para $1 \leq i \leq n$.

De otro lado, el modelo puede extenderse al caso en que V_t siga un proceso de reversión a la media, para el cual

$$\mu = a(\sigma^* - \sigma_t) \quad (4.3.7)$$

y de esta manera el proceso seguido por V_t sea

$$dV_t = a(\sigma^* - \sigma_t)V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)} \quad (4.3.8)$$

con a , σ^* y ξ siendo constantes; σ^* se identifica como la volatilidad de largo plazo para el activo subyacente, σ_t es la volatilidad a corto plazo y a es un factor que indica la velocidad de convergencia de σ_t hacia σ^* .

Trayectorias para los procesos S y V identificados por las relaciones (4.3.1) y (4.3.8), pueden lograrse mediante simulación para un período de tiempo $[t, T]$, con $t < T$. Haciendo una partición $[t = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T]$ del intervalo $[t, T]$, en n subintervalos de igual longitud $\Delta t = (T - t)/n$, en el caso de $\rho = 0$ puede simularse la varianza V_{t_i} en el instante $t + i\Delta t$ por un muestreo MonteCarlo, implementando el algoritmo

$$V_{t_i} = V_{t_{i-1}} \exp\left[(\mu - 0.5\xi^2)\Delta t + v_i\xi\sqrt{\Delta t}\right] \quad (4.3.9)$$

y si $\rho \neq 0$, deben simularse conjuntamente por un muestreo MonteCarlo el precio S_{t_i} y la varianza V_{t_i} en el instante $t + i\Delta t$ mediante el algoritmo

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= S_{t_{i-1}} \exp\left[(r - 0.5V_{t_{i-1}})\Delta t + u_i\sqrt{V_{t_{i-1}}\Delta t}\right] \\ V_{t_i} &= V_{t_{i-1}} \exp\left[(\mu - 0.5\xi^2)\Delta t + \rho u_i\xi\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2}v_i\xi\sqrt{\Delta t}\right] \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

con $0 \leq i \leq n$, donde u_i, v_i son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar y r es la tasa libre de riesgo, supuesto que se esta inmerso en un hipotético mundo de riesgo neutral.

Para la valoración de una opción europea sobre un subyacente dado, Hull & White proponen una solución cerrada en una expansión de serie de Taylor centrada en $\xi = 0$, esto es, donde la volatilidad para el activo subyacente no es estocástica, y además bajo la condición de que $a = 0$. De otro modo, se emplean técnicas numéricas con procesos de reducción de varianza, como variables antitéticas y variables de control [35, pp. 289-292].

4.4. Modelo de Scott

En el modelo de Scott (1987) [60], el precio S_t de un activo financiero con varianza $v_t = \sigma_t^2$ está descrito por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (4.4.1)$$

$$d\sigma_t = \beta (\sigma^* - \sigma_t) dt + \gamma dW_t^{(2)} \quad (4.4.2)$$

en la cual se asume que la volatilidad instantánea σ_t para el precio del activo, sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media. Los parámetros α, β, σ^* y γ son constantes. σ^* es la media de la volatilidad σ_t , β es la velocidad de reversión de σ_t a su media σ^* , y γ es la volatilidad de σ_t ; $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$ son procesos de Wiener con correlación ρ .

En el caso simple de que $\rho = 0$, haciendo $S_{t_0} = 1$ y asumiendo que el precio $S_t > 0$ en todo tiempo t , es de esperarse que la solución a la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea (4.4.1) sea de tipo exponencial; así, definiendo el proceso $Y_t = \ln X_t$ y considerando la función $y = f(t, x) = \ln x$, se tiene que

$$f_1(t, x) = 0, \quad f_2(t, x) = x^{-1}, \quad f_{22}(t, x) = -x^{-2}$$

y al aplicar el lema de Itô, se obtiene

$$\begin{aligned} dY_t &= (\alpha S_t S_t^{-1} - 0.5 \sigma_t^2 S_t^2 S_t^{-2}) dt + \sigma_t S_t S_t^{-1} dW_t^{(1)} \\ &= (\alpha - 0.5 \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t^{(1)}, \end{aligned}$$

así, el precio S_t es

$$S_t = S_{t_0} \exp \left[\int_0^t (\alpha - 0.5 \sigma_s^2) ds + \int_0^t \sigma_s dW_t^{(1)}(s) \right] \quad (4.4.3)$$

y la distribución de retornos del subyacente $\ln(S_t/S_{t_0})$, condicionada al valor del precio inicial S_{t_0} y a la trayectoria seguida por σ_t , $\{\sigma_s, 0 \leq s \leq t\}$ es

$$\ln(S_t/S_{t_0}) \sim \mathcal{N}\left(\alpha t - \frac{1}{2}V, V\right) \quad (4.4.4)$$

donde la variable aleatoria $V = \int_0^t \sigma_s^2 ds$.

4.5. Modelo de Stein & Stein

En el modelo de Stein & Stein (1991) [64], el precio S_t de un activo financiero con varianza $v_t = \sigma_t^2$ está descrito por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (4.5.1)$$

$$d\sigma_t = -\delta(\sigma_t - \theta) dt + \kappa dW_t^{(2)} \quad (4.5.2)$$

en donde δ , θ y κ son constantes; θ es la media de la volatilidad σ_t , δ es la velocidad de reversión de σ_t a su media θ , y κ es la volatilidad de σ_t ; $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$ son procesos de Wiener independientes. El proceso dado por (4.5.2) es conocido como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck aritmético con reversión a la media.

En su trabajo original, Stein & Stein obtienen de manera cerrada la distribución exacta $f(S_t, t)$ de los precios del subyacente recurriendo sólo a composiciones entre funciones elementales. De manera alternativa, ellos muestran que $f(S_t, t)$ puede expresarse como un promedio de distribuciones lognormales $L(\sigma)$, cada una de ellas teniendo como peso otra distribución mixta $m_t(\sigma)$, que depende sólo de la variable temporal t , así

$$f(S_t, t) = \int L(\sigma_t) m_t(\sigma_t) d\sigma, \quad (4.5.3)$$

donde la distribución lognormal es

$$L(\sigma_t) = (2\pi t \sigma^2 S^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(\ln S + t\sigma^2/2)^2}{2t\sigma^2}\right] \quad (4.5.4)$$

la cual tiene la misma media que $f(S_t, t)$ y varianza σ_t . De otro lado, un estimador construido minuciosamente para $m_t(\sigma)$ es

$$\hat{m}_t(\sigma) = \rho e^{-\alpha\sigma^2} e^{-\beta/\sigma^2} \quad (4.5.5)$$

en el cual los parámetros del estimador son

$$\alpha = 0.5 \bar{t}, \quad \beta = \frac{9}{4} \alpha \quad \rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{2\alpha^{0.5} \beta^{0.5}} \alpha^{0.5}$$

siendo $\bar{t} = \kappa^2 t / (v^2 + t^2 \delta^2)$ y donde v es la raíz positiva menor de la ecuación $\cos v + (t\delta/v) \sin v = 0$, $\pi/2 \leq v < \pi$.

4.6. Modelo de Heston

En el modelo de Heston (1993) [33], el precio S_t de un activo financiero con varianza $v_t = \sigma_t^2$, se describe mediante las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \quad (4.6.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \quad (4.6.2)$$

donde μ , θ , κ y σ son constantes. μ es la media de S_t , θ es la media de la varianza a largo plazo, κ es la velocidad de reversión de v_t a su media θ , y σ es la volatilidad asociada a v_t , también conocido como v-vol. $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ son procesos de Wiener con correlación ρ , así $\langle dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)} \rangle = \rho dt$, o equivalentemente, $dW_t^{(2)} = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t$, donde el simbolismo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la correlación entre las variables en cuestión y Z_t es un proceso de Wiener independiente de $W_t^{(1)}$. El proceso seguido por la varianza v_t en la ecuación (4.6.2) fue originalmente usado por Cox, Ingersol y Ross en 1985 para modelar el comportamiento de las tasas de interés a corto plazo [16].

Algunas trayectorias para los procesos del precio S y la varianza v , identificados por las relaciones (4.6.1) y (4.6.2), pueden lograrse en un intervalo de tiempo $[t, T]$, $t < T$, utilizando una discretización de Euler. Si hacemos la partición

$$[t = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T],$$

del intervalo de tiempo $[t, T]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta t = (T - t)/n$, de tal modo que $t_i = t + i\Delta t$, entonces, el precio S_{t_i} y la varianza v_{t_i} en el instante t_i pueden aproximarse mediante el algoritmo

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= S_{t_{i-1}} + \mu S_{t_{i-1}} \Delta t + \sqrt{v_{t_{i-1}}} S_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i}^{(1)} \\ v_{t_i} &= v_{t_{i-1}} + \kappa(\theta - v_{t_{i-1}}) \Delta t + \sqrt{v_{t_{i-1}}} \sigma \left[\rho \Delta W_{t_i}^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta Z_{t_i} \right] \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

con $1 \leq i \leq n$, $\Delta W_{t_i}^{(1)} = (W_{t_i}^{(1)} - W_{t_{i-1}}^{(1)}) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ iid y $\Delta Z_{t_i} = (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ iid. El proceso $\{v_t\}$ es estrictamente positivo si $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ y es no negativo si $0 \leq 2\kappa\theta < \sigma^2$.

Bajo la hipótesis de riesgo neutral, haciendo $X_t = \ln(S_t)$, con S_t siendo el precio del subyacente, y siendo r la tasa libre de riesgo, la dinámica de X_t y de v_t en el modelo de Heston sigue el proceso de difusión:

$$dX_t = \left[r - \frac{1}{2}v_t \right] dt + \sqrt{v_t}dW_t^{(1)} \quad (4.6.4)$$

$$dv_t = \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \quad (4.6.5)$$

donde el significado de cada uno de los parámetros y procesos que aparecen son análogos a los mencionados arriba con la diferencia de que están condicionados a la hipótesis de riesgo neutral.

La sensibilidad en la distribución de retornos para un subyacente con respecto a los cambios de ρ y σ , se refleja en efectos de *asimetría* y *kurtosis* respectivamente [33], siguiendo un comportamiento como el indicado en la figura (4.1(c)).

En las figuras (4.3) y (4.4) se hacen simulaciones Monte Carlo para procesos que involucran el comportamiento del precio, de la volatilidad y del retorno para un activo financiero, según el Modelo de Heston, mientras evoluciona el tiempo y en un instante fijo de tiempo.

Concretamente, la figura (4.3(a)) simula 3 trayectorias, en el intervalo de tiempo $[0, 1]$, para la volatilidad $\sqrt{v_t}$, y el precio S_t , de un activo financiero.

Las figuras (4.4(a)) y (4.4(b)) muestran que el precio del activo $\{S_T\}$ en el tiempo $T = 1$, no distribuye según una distribución Lognormal. En consecuencia, las figuras (4.4(c)) y (4.4(d)) indican también que los retornos Ret_T , en el tiempo $T = 1$, no se ajustan a una distribución Normal.

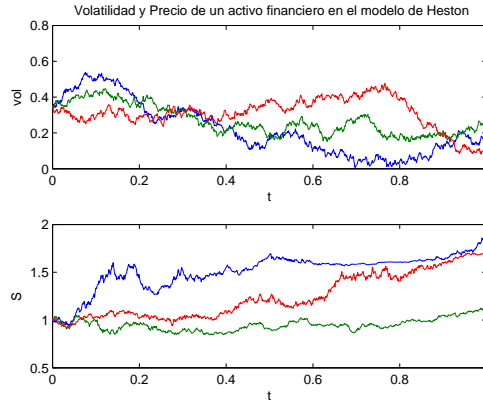
Los resultados arrojados en la simulaciones están de acuerdo con las características seguidas por el precio y retorno de un activo financiero, algunas de las cuales fueron ilustradas en la figura (4.1).

De otro lado, la valoración de una opción call europea puede realizarse por dos métodos, bien el indicado por Heston en [33] o bien haciendo uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) [12]. El trabajo original de Heston indica la ecuación diferencial parcial (PDE) que satisface el valor de cualquier activo $U(S_t, v_t, t)$, bajo la hipótesis de riesgo neutral, la cual equivale a la ecuación general dada en (4.2.3),

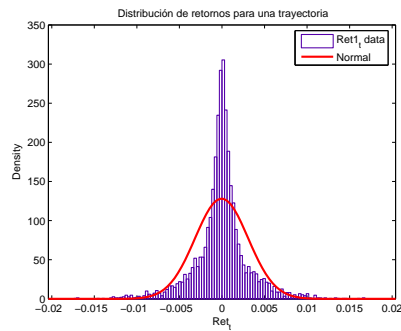
$$\frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} + \rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 U}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 v_t \frac{\partial^2 U}{\partial v_t^2} + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t} + (\kappa[\theta - v_t] - \lambda(S_t, v_t, t)) \frac{\partial U}{\partial v_t} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.6.6)$$

donde r es la tasa libre de riesgo, $\lambda(S_t, v_t, t)$ representa el precio de riesgo de la volatilidad discutido antes, el cual en el modelo de Heston es proporcional a la volatilidad $\sqrt{v_t}$, y en donde las condiciones de frontera se determinan según el activo con precio $U(S_t, v_t, t)$ negociado.

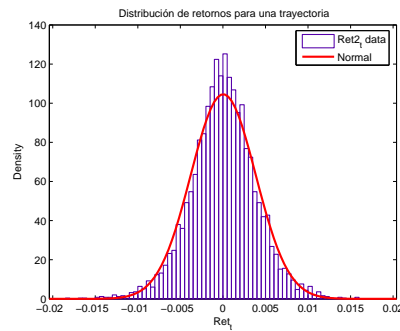
En el caso de que $U(S_t, v_t, t)$ corresponda al valor de una opción call europea $C(S_t, v_t, t)$, con fecha de madurez T y precio de ejercicio K , la forma cerrada de la solución de la ecuación



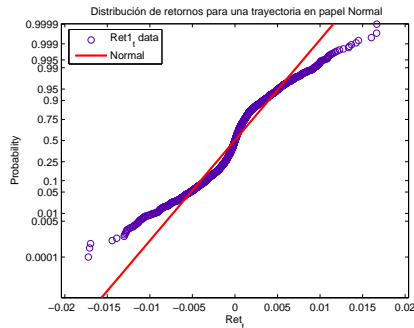
(a) Tres trayectorias para los procesos de volatilidad $\{\sqrt{V}_t\}$ y de precios $\{S_t\}$, $t \in [0, 1]$



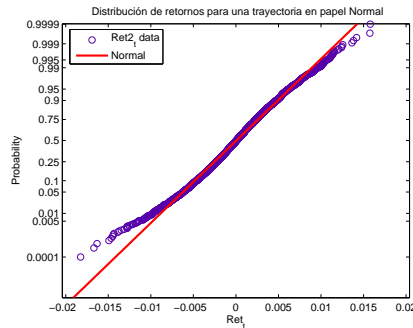
(b) Ajuste Normal para un proceso de re-
tornos $Ret1_t$, $t \in [0, 1]$.



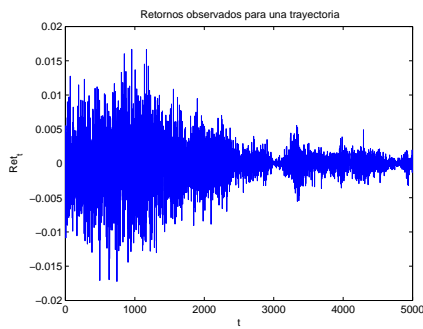
(c) Ajuste Normal para un proceso de re-
tornos $Ret2_t$, $t \in [0, 1]$.



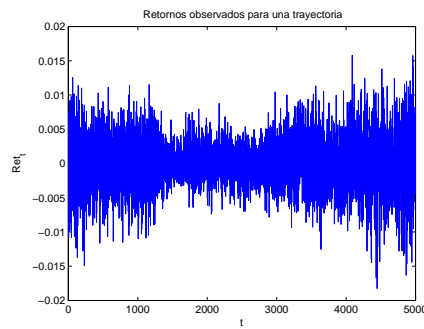
(d) Ajuste Normal para un proceso de
retornos $Ret1_t$ en escala Normal,
 $t \in [0, 1]$.



(e) Ajuste Normal para un proceso de
retornos $Ret2_t$ en escala Normal,
 $t \in [0, 1]$.

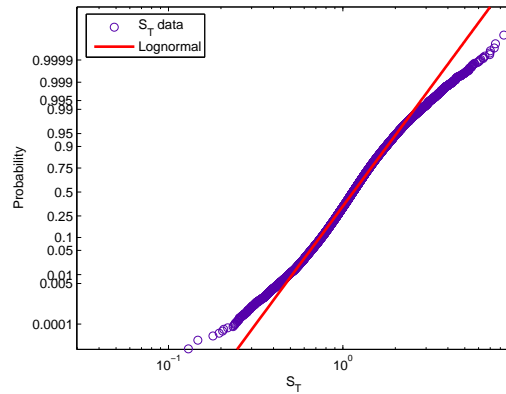
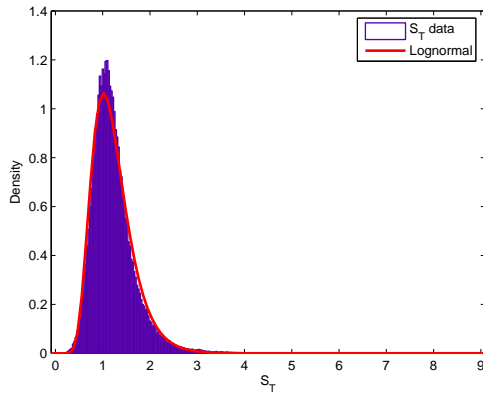


(f) Proceso de retornos $Ret1_t$, $t \in [0, 1]$.

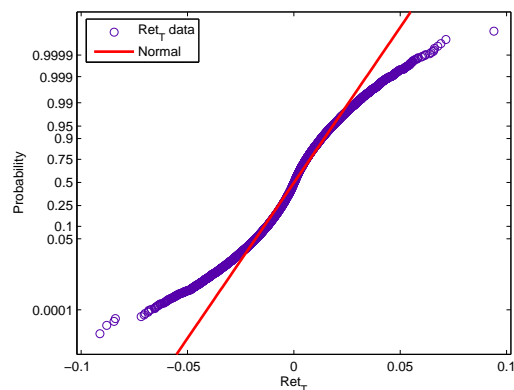
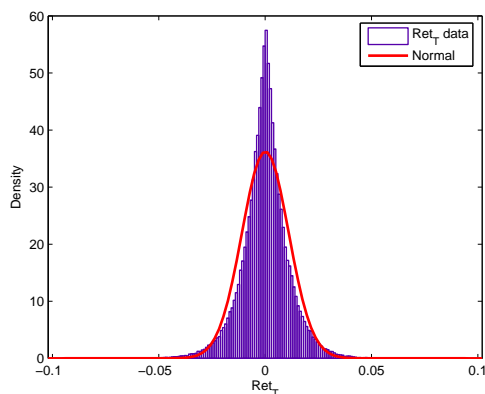


(g) Proceso de retornos $Ret2_t$, $t \in [0, 1]$.

Figura 4.3: Simulación Monte Carlo del Modelo de Heston en el intervalo de tiempo $[0, 1]$. Los valores de los parámetros son $\mu = 0.2$, $\theta = 0.1225$, $\kappa = 1.1$, $\sigma = 0.5$, $\rho = 0.18$, $S_{t_0} = 1$, $v_{t_0} = 0.1225$ y $T = 1$. Las simulaciones de (4.3(b)) a (4.3(g)) se lograron tomando pasos de tiempo iguales a $dt = \frac{1}{5 \cdot 10^3}$.



(a) Ajuste Lognormal para el proceso de precios S_T en el tiempo $T = 1$. (b) Ajuste Lognormal para el proceso de precios S_T en escala Lognormal, en el tiempo $T = 1$.



(c) Ajuste Normal para el proceso de retornos Ret_T , en el tiempo $T = 1$. (d) Ajuste Normal para el proceso de retornos Ret_T en escala Normal, en el tiempo $T = 1$.

Figura 4.4: Simulación Monte Carlo del Modelo de Heston en el tiempo $T = 1$. Los valores de los parámetros son $\mu = 0.2$, $\theta = 0.1225$, $\kappa = 1.1$, $\sigma = 0.5$, $\rho = 0.18$, $S_{t_0} = 1$, $v_{t_0} = 0.1225$ y $T = 1$. Las simulaciones (4.3(a)) - (4.4(d)) se lograron tomando pasos de tiempo iguales a $dt = 10^{-3}$ y corriendo 10^5 trayectorias.

(4.6.6) es, de acuerdo con [33]

$$C(S_t, v_t, t) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \quad (4.6.7)$$

donde el primer término es el valor presente del activo y el segundo término es el valor presente del precio de ejercicio, $\tau = T - t$, P_1 esta relacionado con una cantidad conocida como delta (Δ) de la opción, la cual es la variación instantánea del precio de la opción respecto al precio del activo, esto es, $\partial C(\cdot)/\partial S_t$; y P_2 es la probabilidad de que la opción termine dentro del dinero. Las expresiones para P_j , $j = 1, 2$ son

$$P_j(x, v, T; \ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, v, t; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (4.6.8)$$

donde

$$f_j(x, v, T : \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v + i\phi x}, \quad (4.6.9)$$

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\}, \quad (4.6.10)$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g e^{d\tau}} \right], \quad (4.6.11)$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}, \quad (4.6.12)$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j\phi i - \phi^2)}, \quad (4.6.13)$$

$$u_1 = 1/2, u_2 = -1/2, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda \quad (4.6.14)$$

y $\lambda = \lambda(S_t, v_t, t) = k\sqrt{v}$, con k siendo constante, representa el precio del riesgo de la volatilidad, que fue indicado en la ecuación (4.2.3).

4.7. Modelo Empírico de Volatilidad Estocástica

Esta alternativa de trabajo para el estudio de la evolución de la volatilidad en el precio de un activo financiero fue propuesta por Paul Wilmott y Asli Oztukel (1998) [4] en un estudio que ajusta datos empíricos del índice Dow Jones a lo largo de 20 años. Este modelo asume que la ecuación (4.2.2), de la volatilidad σ_t , toma la forma

$$d\sigma_t(\sigma_t, t) = \alpha(\sigma_t) dt + \beta(\sigma_t) dW_t \quad (4.7.1)$$

donde la tendencia $\alpha(\sigma_t)$ y la volatilidad de la volatilidad $\beta(\sigma_t)$ son funciones sólo de σ_t y no del precio S_t del activo y del tiempo t ; y donde además los procesos brownianos asociados con los proceso de volatilidad σ_t y de precios S_t no tienen correlación.

Conociendo las formas funcionales $\alpha(\sigma_t)$ y $\beta(\sigma_t)$, la ecuación (4.7.1) queda completamente determinada, y con este objetivo, el modelo se desarrolla de la siguiente manera:

1. La forma funcional de $\beta(\sigma_t)$ se asume que es

$$\beta(\sigma_t) = \phi \sigma_t^\gamma \quad (4.7.2)$$

con ϕ y γ siendo constantes que se deben hallar a partir de la serie de tiempo de precios S_t del activo subyacente. La forma funcional para $\beta(\sigma_t)$ debe ajustarse de la manera más precisa a los cambios reflejados a corto plazo por la volatilidad σ_t .

A partir de (4.7.1), considerando que $dW_t = \sqrt{dt}\zeta$ con $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y que si $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ entonces $\zeta^2 \sim \chi_1^2$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 &= \beta(\sigma_t)^2 \zeta^2 dt \\ \mathbf{E}(d\sigma)^2 &= \beta(\sigma_t)^2 dt \underbrace{\mathbf{E}[\zeta^2]}_{=1} \\ &= \beta(\sigma_t)^2 dt \end{aligned}$$

donde se aplicó que $dt^2 = dt dW_t = 0$ por tratarse de diferenciales de orden mayor que 1. Ahora, tomando logaritmo natural en ambos lados de la última igualdad, se verifica que

$$\ln \mathbf{E}(d\sigma)^2 = 2 \ln \beta(\sigma_t) + \ln dt$$

Por otro lado, si a partir de la serie de tiempo de precios del activo subyacente, se hace una regresión lineal entre las variables $\ln \mathbf{E}(d\sigma)^2$ y $\ln(\sigma_t)$, entonces la recta de regresión puede escribirse para a y b constantes del siguiente modo

$$\ln \mathbf{E}(d\sigma)^2 = a + b \ln(\sigma_t)$$

o de manera equivalente como

$$2 \ln \beta(\sigma_t) + \ln dt = a + b \ln(\sigma_t)$$

En diversas series de tiempo financieras, es frecuente hacer la regresión lineal que se ha indicado [4], [70] y en ellas se confirma empíricamente un ajuste lineal.

Si de la última ecuación despejamos $\beta(\sigma_t)$ se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\ln \beta(\sigma_t) &= \frac{1}{2}(a - \ln dt) + \frac{b}{2} \ln \sigma_t \\ \beta(\sigma_t) &= \exp \left[\frac{1}{2}(a - \ln dt) \right] \sigma_t^{b/2}\end{aligned}$$

Finalmente, comparando la última igualdad con la ecuación (4.7.2) resulta que

$$\phi = \exp \left[\frac{1}{2}(a - \ln dt) \right] \quad (4.7.3)$$

y

$$\gamma = \frac{b}{2} \quad (4.7.4)$$

lo cual justifica el supuesto inicial de que $\beta(\sigma_t) = \phi \sigma_t^\gamma$.

2. Considere la función densidad de probabilidad para σ_t , $p(\sigma_t, t)$. Si la anterior densidad existe en estado estable y la denotamos por $p_\infty(\sigma_t)$, y si además se asume que $p_\infty(\sigma_t)$ es una densidad lognormal, entonces a partir del conocimiento de $p_\infty(\sigma_t)$ y de $\beta(\sigma_t)$ puede calcularse la forma funcional de $\alpha(\sigma_t)$ a través de la denominada ecuación de Fokker Planck.

La ecuación de Fokker Planck, satisfecha por la densidad de probabilidad $p(\sigma_t, t)$ asociada a la volatilidad σ_t y que a veces se denomina como ecuación de Kolmogorov hacia adelante, se presenta como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\beta^2 p) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha p)$$

donde haciendo que $t \rightarrow \infty$, con lo cual $p = p_\infty(\sigma_t)$ y así $\partial p / \partial t = 0$ se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha(\sigma_t)p_\infty)}{d\sigma_t} &= \frac{1}{2} \frac{d^2(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t^2} \\ \alpha(\sigma_t) &= \frac{1}{2p_\infty} \int \frac{d^2(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t^2} d\sigma_t \\ \alpha(\sigma_t) &= \frac{1}{2p_\infty} \frac{d(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t} + \frac{c}{p_\infty}\end{aligned}$$

La constante de integración c resulta ser cero de acuerdo a las condiciones de la distribución $p(\sigma_t)$ en estado estable [4], [70]. De esta manera se obtiene

$$\alpha(\sigma_t) = \frac{1}{2p_\infty} \frac{d(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t} \quad (4.7.5)$$

Ahora, partiendo de que la distribución de p_∞ es lognormal, su forma es

$$p_\infty(\sigma_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho\sigma_t}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\rho^2} \left(\ln \frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right\} \quad (4.7.6)$$

donde los coeficientes ρ y $\bar{\sigma}$ se hallan con ayuda de la serie de tiempo de precios S_t del activo subyacente. Cuando se introduce (4.7.6) en (4.7.5), se obtiene que

$$\alpha(\sigma_t) = \phi^2 \sigma_t^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \ln \left(\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}} \right) \right) \quad (4.7.7)$$

En resumen, el modelo empírico de volatilidad estocástica establece que el comportamiento en la volatilidad σ_t de un activo financiero con precio S_t se describe por

$$\begin{aligned} d\sigma_t(\sigma_t, t) &= \alpha(\sigma_t) dt + \beta(\sigma_t) dW_t \\ \beta(\sigma_t) &= \phi \sigma_t^\gamma \\ \phi &= \exp \left[\frac{1}{2}(a - \ln dt) \right] \\ \gamma &= \frac{b}{2} \\ \alpha(\sigma_t) &= \phi^2 \sigma_t^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \ln \left(\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}} \right) \right) \end{aligned}$$

donde las constantes a y b se calculan por una regresión lineal entre las variables $\ln \mathbf{E}(d\sigma)^2$ y $\ln(\sigma_t)$; y las constantes ρ y $\bar{\sigma}$ resultan de un ajuste lognormal para la función densidad de probabilidad en estado estable p_∞ de σ_t .

Una aproximación al comportamiento de la tasa de Cambio

En este capítulo, se pretende hacer una aproximación al comportamiento del precio de cierre de la tasa de cambio, Peso Colombiano / Dólar Estadounidense (COP/USD), a través de un modelo de volatilidad estocástica. El modelo de Heston [33] ha presentado una buena acogida por parte de expertos en estocástica y finanzas [1], [22], [27], [19], principalmente porque el proceso de volatilidad asociado al proceso de precios de un subyacente (ecuación (4.6.2)) es no negativo y sigue un proceso con reversión a la media. Además refleja una distribución de precios leptocúrtica y de colas anchas; explica el efecto sonrisa (*smile*) o mueca (*skew*) de la volatilidad implícita (sección (4.1)) y presenta una auténtica forma cerrada para calcular el precio de una opción *call* europea (ecuación (4.6.7)). El alcance de este capítulo es aproximarse al proceso de precios diarios de cierre del activo convenido siguiendo el modelo de Heston.

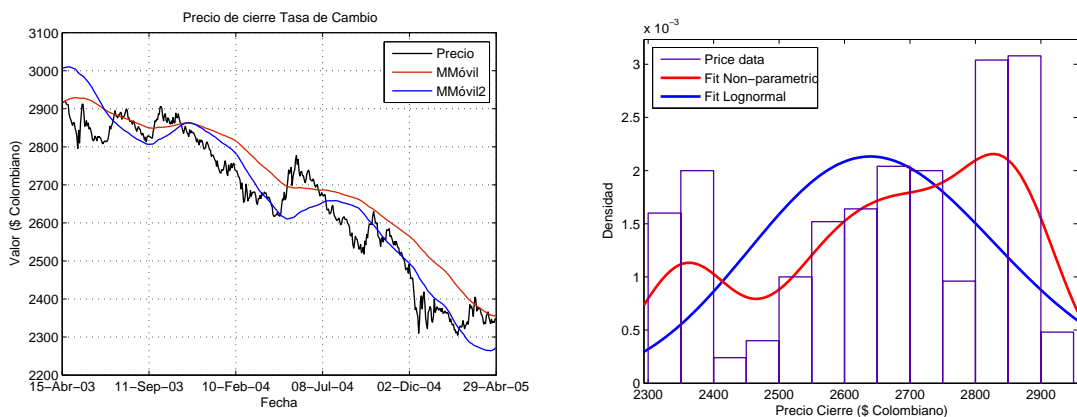
5.1. Descripción de los datos

En Colombia, durante el intervalo de tiempo desde el 15-Abril-03 hasta 29-Abril-05, la serie de precios de cierre de la tasa de cambio presenta cambios abruptos en el tiempo y una de sus características principales es la presencia de un largo período de revaluación del peso. Los cambios de la cifra COP/USD se reflejan en la figura (5.1); de particular interés es la figura (5.1(a)) que muestra una suavización de la serie de precios mediante la media móvil simple y la media móvil doble¹ para un período de 90 días; esta última suavización presenta un mejor ajuste a los datos. A su vez, la figura (5.1(b)) representa el histograma de frecuencias relativas para la serie de tiempo con un ajuste lognormal y uno no paramétrico obtenido mediante el *toolbox Statistics* de MatLab®. Por otra parte, la figura (5.1(c)) grafica los retornos de la serie

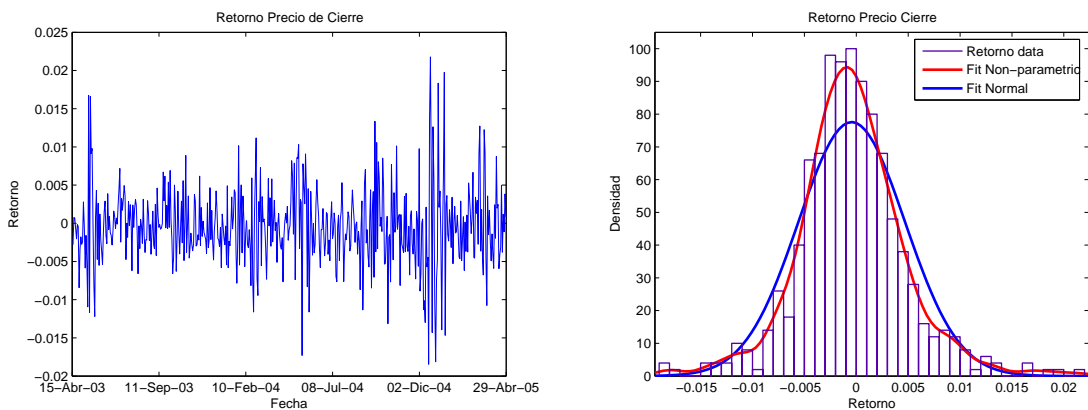
¹La media móvil doble se calcula a partir de la serie de media móvil simple $S_1(t)$ de la serie de tiempo y de la serie de media móvil simple $S_2(t)$ de la serie $S_1(t)$, mediante la fórmula $2S_1(t) - S_2(t) + \frac{2}{p-1}(S_1(t) - S_2(t))$, donde p es el período común de las medias móviles simples.

de tiempo, mientras que en la figura (5.1(d)), se muestra la densidad de tales retornos con los ajustes normal y no paramétrico. En términos económicos, puede verse en la figura (5.1(a)), que en el intervalo de tiempo establecido, la media móvil simple y la media móvil doble asociadas a la serie de precios, se ubican por encima, indicando una tendencia descendente del dólar y así una revaluación del peso. Por otra parte, la figura (5.1(b)), muestra que un ajuste lognormal para los precios de cierre se aleja bastante del histograma de frecuencias relativas, lo cual es un indicador gráfico de que los precios no distribuyen lognormal. De la misma manera, la figura (5.1(d)) sugiere que los retornos de los precios de cierre no siguen una distribución normal.

Algunas estadísticas importantes para las variables *Precio de cierre*, y *Retorno precios de cierre* aparecen en el cuadro (5.1), destacándose un alto valor para la curtosis y la asimetría en la serie de retornos.



(a) Precio de cierre de la tasa de cambio. Suavización por media móvil simple y media móvil doble para un período de 90 días. (b) Histograma de frecuencias relativas para el precio de cierre de la tasa de cambio, ajuste lognormal y ajuste no paramétrico de la densidad.



(c) Retorno del precio de cierre de la tasa de cambio. (d) Ajuste normal y ajuste no paramétrico para la densidad de los retornos del precio de cierre de la tasa de cambio.

Figura 5.1: Descripción de la serie de precios de cierre de la TRM para el período 15-Abr-03 hasta 29-Abr-05.

Cuadro 5.1: Estadísticas de los precios de cierre de la tasa de cambio y de sus respectivos retornos

Estadísticas serie de precios 15-Abril-03 hasta 29-Abril-05		Estadísticas serie de retornos 15-Abril-03 hasta 29-Abril-05	
Media	2659.24	Media	-0.0004379
Mediana	2681.25	Mediana	-0.0006063
Des-Std	184.15	Des-Std	0.0051427
Varianza	33912.72	Varianza	2.64478E-05
Curtosis	1.981732	Curtosis	5.1904219
Asimetría	-0.483664	Asimetría	0.3015852
Rango	615.19	Rango	0.0402164
Mínimo	2304.81	Mínimo	-0.0184436
Máximo	2920	Máximo	0.0217728
Cuenta	500	Cuenta	500

5.2. Sobre la estimación de parámetros

5.2.1. Antecedentes

Se encuentra en la literatura una variedad de modelos de estimación de parámetros de volatilidad estocástica. Entre los trabajos pioneros, están incluidos por ejemplo, métodos de momentos como SMM (*Simulated Method of Moments*), GMM (*Generalized Method of Moments*) y EMM (*Efficient Method of Moments*) en [23], [2] y [30]; métodos que usan filtros de Kalman en [31], [32] y [42]; un modelo de momentos condicionados a una ecuación de difusión de volatilidad estocástica en [10]; métodos bayesianos como el MCMC en [38], [26] y [43]; métodos de aproximación de máxima verosimilitud MLE en [1] y métodos que usan funciones características empíricas en [61]. Otra variedad de métodos empíricos calibran un modelo de volatilidad estocástica de manera indirecta a través de la volatilidad implícita o del valor de opciones del subyacente; para una revisión y aplicación de este tipo de métodos véase [14], [19].

Sin embargo, algunos de estos modelos se conciben dentro del campo de la econometría, en tiempo discreto, sin hacer uso explícito de ecuaciones de difusión en tiempo continuo; y otros parten de una base de datos de opciones, que en el caso colombiano, no está disponible. Como se dijo antes, la intención de este trabajo es dar un primer paso en el estudio de modelos de volatilidad estocástica y aplicar uno de ellos, que resulte ser adecuado, a la descripción del proceso de precios de cierre. Para tal efecto, se elige el modelo de Heston [33], y la estimación de sus parámetros se realiza empíricamente a través de *simulación* de trayectorias de retornos, buscando que su distribución de probabilidad se ajuste a la distribución de probabilidad de la trayectoria real de retornos de los precios de cierre. Este ajuste se evaluará basándose en el test

de bondad de ajuste para dos muestras de Kolmogorov-Smirnov (KS). Detalles para el test KS pueden verse en [45], [62], [9] y [29].

5.2.2. Simulación

El vehículo principal para lograr la calibración de parámetros propuesta es la *simulación*. La simulación constituye un poderoso instrumento para la modelación, el análisis, la toma de decisiones, y la solución aproximada de una gran variedad de problemas del mundo real [3], [13], entre ellos, los que se inscriben en los procesos estocásticos [6]. Por medio de una simulación podría representarse un número considerable de realizaciones para un proceso estocástico determinado o bien, ajustar uno de ellos a un fenómeno o sistema complejo de interés, del cual se tiene una base de datos donde se registran los valores tomados por el sistema en un período de tiempo dado. Un aspecto que suma interés y motiva el uso de la simulación es que es una metodología que permite a un analista de un sistema capturar la aleatoriedad y las principales causas de interdependencia en dicho sistema y así lograr una imagen aproximada de la realidad. De este modo es posible saber qué pasaría si el sistema se ve alterado en alguno de sus componentes simplemente experimentando bajo las nuevas condiciones con el modelo de simulación. De esta manera, puede probarse el modelo en distintos escenarios. Un estudio esquemático de una simulación aparece en la figura (5.2), cuyas etapas se pondrán en práctica a continuación.

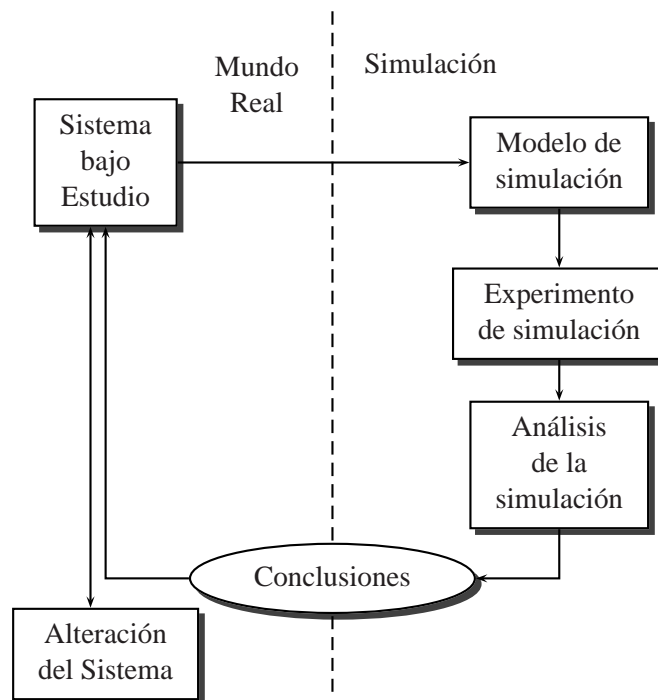


Figura 5.2: Estudio esquemático de una simulación

5.3. Metodología de aproximación al modelo de Heston

5.3.1. Función objetivo

En la sección (4.6) se desarrollaron algunos aspectos básicos del modelo de Heston, el cual parte describiendo el precio S_t de un activo financiero con varianza $v_t = \sigma_t^2$ por medio de dos ecuaciones diferenciales estocásticas, dadas por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \quad (5.3.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \quad (5.3.2)$$

donde μ , θ , κ y σ son constantes. μ es la media de S_t , θ es la media de la varianza a largo plazo, κ es la velocidad de reversión de v_t a su media θ , y σ es la volatilidad asociada a v_t . Además, $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ son procesos de Wiener con correlación ρ .

Ahora, si $x = (\mu, \theta, \sigma, \kappa, \rho) \in \mathbb{R}^5$ es el vector paramétrico del modelo de Heston, la función objetivo $\Psi(x)$ que se empleará para estimar sus parámetros incorpora la *serie de retornos (logarítmicos) de precios de cierre* de la tasa de cambio, la cual se encuentra mejor condicionada que la serie de precios, en vista de su estacionariedad comprobada mediante el test KPSS a la serie de retornos [51]. Dicha función objetivo se construye de la siguiente manera.

1. Primero se construye una función

$$\Gamma : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}_{m \times n},$$

donde $\mathbb{R}_{m \times n}$ denota el espacio vectorial de las matrices reales de orden $m \times n$, y tal que $\Gamma(x)$ calcule y almacene en una matriz, m trayectorias de retornos r_{t_j} , $1 \leq j \leq n$, para n días sucesivos. Esta matriz se construye valiéndose, para cada una de las m trayectorias, de la ecuación (4.6.3), con el objeto de generar sus n entradas. El algoritmo empleado es entonces:

$$\begin{aligned} S_{t_j} &= S_{t_{j-1}} + \mu S_{t_{j-1}} \Delta t + \sqrt{v_{t_{j-1}}} S_{t_{j-1}} \Delta W_{t_j}^{(1)} \\ v_{t_j} &= v_{t_{j-1}} + \kappa(\theta - v_{t_{j-1}}) \Delta t + \sqrt{v_{t_{j-1}}} \sigma \left[\rho \Delta W_{t_j}^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta Z_{t_j} \right] \\ r_{t_j} &= \ln \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \right) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

con $1 \leq j \leq n$, $\Delta W_{t_j}^{(1)} = (W_{t_j}^{(1)} - W_{t_{j-1}}^{(1)}) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ iid y $\Delta Z_{t_j} = (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ iid; donde S_{t_0} y v_{t_0} son valores iniciales conocidos.

2. Se construye seguidamente una función

$$\Lambda : \mathbb{R}_{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}_m ,$$

tal que cada entrada h_i del vector $h = \Lambda(Y)$ se logra realizando una prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para dos muestras, en donde la primera muestra permanece fija y es justamente la serie real de retornos, y la segunda, es cada una de las m trayectorias de retornos obtenidas por la función $\Gamma(x)$ y que concretamente viene siendo cada una de las m filas de la matriz Y .

El test KS para dos muestras es un test no paramétrico, el cual realiza una prueba de hipótesis a un nivel de significancia de 0.05, donde la hipótesis nula H_0 es que ambas muestras provienen de una misma distribución continua y la hipótesis alternativa H_1 es que las muestras provienen de diferente distribución continua; además el test utiliza como estadístico la máxima diferencia entre las funciones de distribución de probabilidad para las dos muestras. Así, si $F_1(\phi)$ es la distribución de probabilidad de la serie de retornos reales $\phi(t)$, que permanece invariante ante las variaciones del vector de parámetros x , y $F_{2,i}(Y|x)$ es la distribución de la i -ésima serie de retornos simulada almacenada en la i -ésima fila de la matriz Y , $1 \leq i \leq m$, entonces el estadístico usado por el test KS es

$$s_i = \max \{ |F_1(\phi(t_j)) - F_{2,i}(Y_{ij}|x)| \mid j = 1, \dots, n \}. \quad (5.3.4)$$

La implementación de la función $\Lambda(Y)$ se hace de modo que, con el estadístico dado en la ecuación (5.3.4), el test KS genera el p -valor p_i de la prueba, de acuerdo con el cual si $p_i \geq 0.05$, se acepta H_0 y $h_i = 0$, y si $p_i < 0.05$, se rechaza H_0 , a un nivel de significancia de 0.05 y $h_i = 1$.

3. Finalmente, se construye una función

$$\Xi : \mathbb{R}_m \longrightarrow [0, 1] ,$$

de manera que $\Xi(h)$ retorne la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula H_0 , obtenida de acuerdo a la definición clásica de probabilidad como

$$\Xi(h) = \frac{\sum_{i=1}^m h_i}{m} .$$

Es claro que $\Xi(h)$ es a lo más 1, según que el número de rechazos de H_0 sea m , y a lo menos 0, según que el número de rechazos de H_0 sea 0.

De esta manera se logra construir la función objetivo $\Psi(x)$ por medio de un programa computacional en donde se componen las funciones Γ , Λ y Ξ , para obtener la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula H_0 de que las dos series financieras, retornos reales y retornos simulados para los precios de cierre de la tasa de cambio, provengan de una misma distribución continua. De

este modo, si $x = (\mu, \theta, \sigma, \kappa, \rho) \in \mathbb{R}^5$ es un vector paramétrico del modelo de Heston, la función objetivo se escribe como:

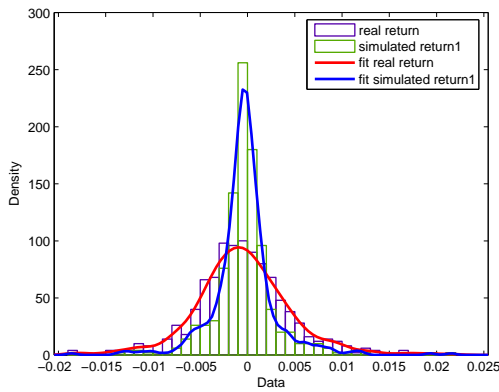
$$\Psi(x) = (\Xi \circ \Lambda \circ \Gamma)(x) = \frac{\sum_{i=1}^m h_i}{m}. \tag{5.3.5}$$

En la tabla (5.2) se evalúa la función Ψ para algunos valores dados al vector paramétrico x y para los valores $m = 1000$ y $n = 500$ los cuales corresponden al número de trayectorias de retornos y al número de días considerados en la función $\Gamma(x)$, respectivamente. En la tabla puede notarse cómo varía el valor de la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula H_0 , esto es, el valor de $\Psi(x)$, respecto a las variaciones de x . En la tercera fila de la misma tabla, se puede ver que en todos los tres casos, para el primer renglón de la matriz Y , la hipótesis nula H_0 es rechazada por el test KS, pues el valor tomado por h_1 es igual a 1 cada vez para los respectivos valores de s_1 y de p_1 anotados en la tripla $[s_1, p_1, h_1]$.

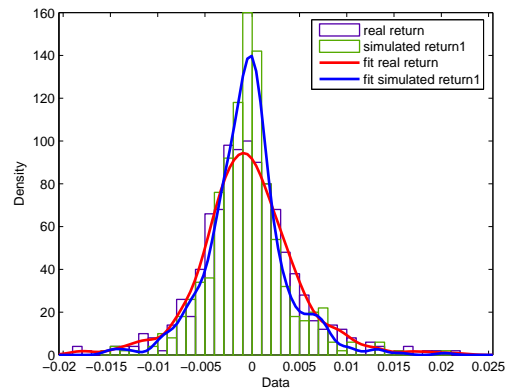
En la gráfica (5.3) se ilustran, cada vez, de izquierda a derecha, las densidades de probabilidad para la serie de retornos real y para el primer renglón de la matriz Y , obtenido a partir del respectivo valor de x , anotado en la tabla (5.2). Se visualiza además en estas figuras una gran diferencia entre el ajuste no paramétrico de las funciones de densidad de probabilidad para la serie real de retornos y para la serie simulada, correspondiendo la última al mejor ajuste de las tres.

Cuadro 5.2: Valores tomados por la función objetivo y test de bondad de ajuste KS para la series de retornos real y una serie de retornos simulada

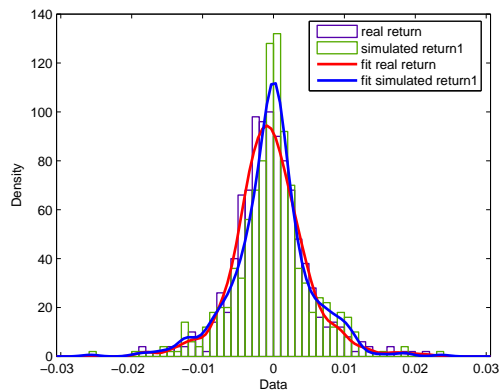
$x = \begin{pmatrix} \mu \\ \theta \\ \sigma \\ \kappa \\ \rho \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.1064 \\ 0.0064 \\ 0.2 \\ 1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.1064 \\ 0.0064 \\ 0.3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.1064 \\ 0.0064 \\ 0.4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Psi(x)$	0.7180	0.3030	0.1850
$[s_1, p_1, h_1]$	$[0.182, 10^{-7}, 1]$	$[0.096, 0.018, 1]$	$[0.0860, 0.0467, 1]$



(a) $x = [-0.1064, 0.0064, 0.2, 1, -0.1]$



(b) $x = [-0.1064, 0.0064, 0.3, 5, 0]$



(c) $x = [-0.1064, 0.0064, 0.4, 8, 0]$

Figura 5.3: Densidades de probabilidad para la serie de retornos real $\phi(t)$ y para el primer renglón de la matriz Y , con los valores anotados del vector paramétrico x .

5.3.2. Calibración de parámetros

De acuerdo a lo anterior, el vector paramétrico $x = (\mu, \theta, \sigma, \kappa, \rho)$ del modelo de Heston podemos estimarlo de manera empírica para la serie de retornos $\phi(t)$ de los precios de cierre de la tasa de cambio durante el intervalo de tiempo convenido. Hacia este norte, se propone simular un gran número m de realizaciones para series de retornos generadas por la función $\Gamma(x)$ y encontrar un valor x_{opt} del vector x , con las siguientes características: que tenga sentido financiero y económico de acuerdo con el tipo de activo que se está modelando, que la función $\Psi(x_{opt})$ retorne valores entre 0 y 0.05, y que la densidad asociada a los retornos del modelo simulado sea leptocúrtica y de colas anchas, tal como lo exhibe propiamente la densidad de retornos reales $\phi(t)$.

Puede notarse que el valor 0.05 se justifica en el hecho de que el nivel de significancia del test KS es 0.05, que es la cota superior de error del test de rechazar la hipótesis nula H_0 , cuando ésta es verdadera. Por tanto, si es posible encontrar x_{opt} con las características especificadas, podemos esperar que tal valor sea una aproximación al valor de los verdaderos parámetros del modelo de Heston para la serie $\phi(t)$, en vista de que con ellos se produce un ajuste óptimo de las densidades de probabilidad entre las series real y simulada. El carácter de este óptimo no puede esperarse que sea determinístico, y en tal sentido una nueva corrida del experimento puede redundar en un valor x_{opt} diferente que se aceptará si se satisfacen las características enunciadas.

Bajo este modo de razonar, surgen como preguntas naturales: ¿Admite la función $\Psi(x)$ un valor x_{opt} como el propuesto? Y en caso afirmativo, ¿cómo encontrarlo?

Si el valor x_{opt} existe, es posible que se trate de un mínimo local de la función $\Psi(x)$, cercano a cero, pero distinto de él, dado el nivel de significancia de 0.05 del test involucrado en la función objetivo y el carácter estocástico del experimento. En este caso puede emplearse un algoritmo auxiliar de optimización no lineal para encontrarlo, y tal algoritmo debe usar en su rutina sólo valores de la función $\Psi(x)$, sin que se requiera del uso de su gradiente, puesto que no se tienen garantías de condiciones de suavidad para esta función estocástica. Este es pues un problema de optimización estocástica que se resuelve encontrando un valor paramétrico de x , denotado por x_{opt} , tal que

$$x_{opt} = \operatorname{argmin}_x \Psi(x) . \quad (5.3.6)$$

La existencia de x_{opt} queda determinada si el siguiente algoritmo de búsqueda directa mediante un *simplex* logra encontrarlo.

Algoritmo auxiliar

Nelder-Mead simplex direct search [57], [48] [49] [47] es un algoritmo de optimización no lineal sin restricciones que puede ser usado para encontrar un mínimo relativo de la función Ψ en caso de que exista. Tal algoritmo puede encontrar un mínimo local para una función escalar $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables por medio de una búsqueda directa sin hacer uso del gradiente de f , como puede entenderse en la siguiente cita [48, p. 14]:

«Analytical results now exist to demonstrate that under assumptions comparable to those commonly used to analyze the global behavior of algorithms for solving unconstrained nonlinear optimization problems, direct search methods can be shown to satisfy the first-order necessary conditions for a minimizer (i.e., convergence to a stationary point). This seems remarkable given that direct search methods neither require nor explicitly estimate derivative information; in fact, one obtains these guarantees even when using only ranking information. The fact that most of the direct search methods require a set of directions that span the search space is enough to guarantee that sufficient information about the local behavior of the function exists to safely reduce the step length after the full set of directions has been queried ».

El algoritmo inicia ubicando $n + 1$ n -tuplas sobre los $n + 1$ vértices de un simplex (hipertetraedro). Por ejemplo, en el caso de dos dimensiones, se tienen dos variables y el simplex considerado es un triángulo. En tres dimensiones, se tienen tres variables y el simplex es un tetraedro. En el presente caso, $n = 5$ y el simplex a considerar es de seis vértices. Luego, el algoritmo evalúa f en los vértices del simplex y se rechaza el vértice en el que f se hace mayor para ser reemplazado por otro, que se escoge mediante un conjunto de reglas bien definido en la implementación del algoritmo, el cual controla la deformación del simplex, hasta que la función encuentra un valor menor en ese vértice. Para un simplex bidimensional, tal conjunto de reglas puede enunciarse y esquematizarse de la siguiente manera:

1. Movimiento de reflexión: el vértice de mayor valor (el peor) se refleja a través del centroide del lado opuesto comprendido por los otros dos vértices, para formar un nuevo simplex. Este procedimiento, repetido varias veces para los peores vértices, permite detectar si el de mejor valor está o no cerca de un punto estacionario; esto es, un punto tal que cuando se busca mejorar los otros dos vértices del simplex con el procedimiento de reflexión, se llega al mismo simplex. Con este tipo de procedimiento se preserva la forma del simplex original independientemente del número de dimensiones. Véase la figura (5.4) para una representación de este movimiento.

Cuando esto se completa, llegándose a detectar que un vértice del simplex está cerca de un punto estacionario, se pasa a los siguientes procedimientos.

2. Movimientos de expansión y contracción: En este movimiento se trata también de hacer un movimiento de reflexión como en el caso anterior, pero con factores de escala r , distintos de 1, que pueden ser por ejemplo: $r = 2$ para reflexión positiva con expansión, $r = 1/2$ para reflexión positiva con contracción, o $r = -1/2$ para una reflexión negativa con contracción. Como resultado de este movimiento puede obtenerse un vértice mejor que el que venía ganando en otra región del espacio de búsqueda. Los distintos casos mencionados se ilustran en la figura (5.5).
3. Movimiento de encogimiento: Cuando un vértice de un simplex se ha detectado como el mejor, habiéndose efectuado los dos movimientos anteriores, la arista comprendida entre los dos vértices peores, se desplaza paralelamente a sí misma en un factor, por ejemplo de $r = 1/2$, hacia el vértice de mejor valor, como puede observarse en la figura (5.6).

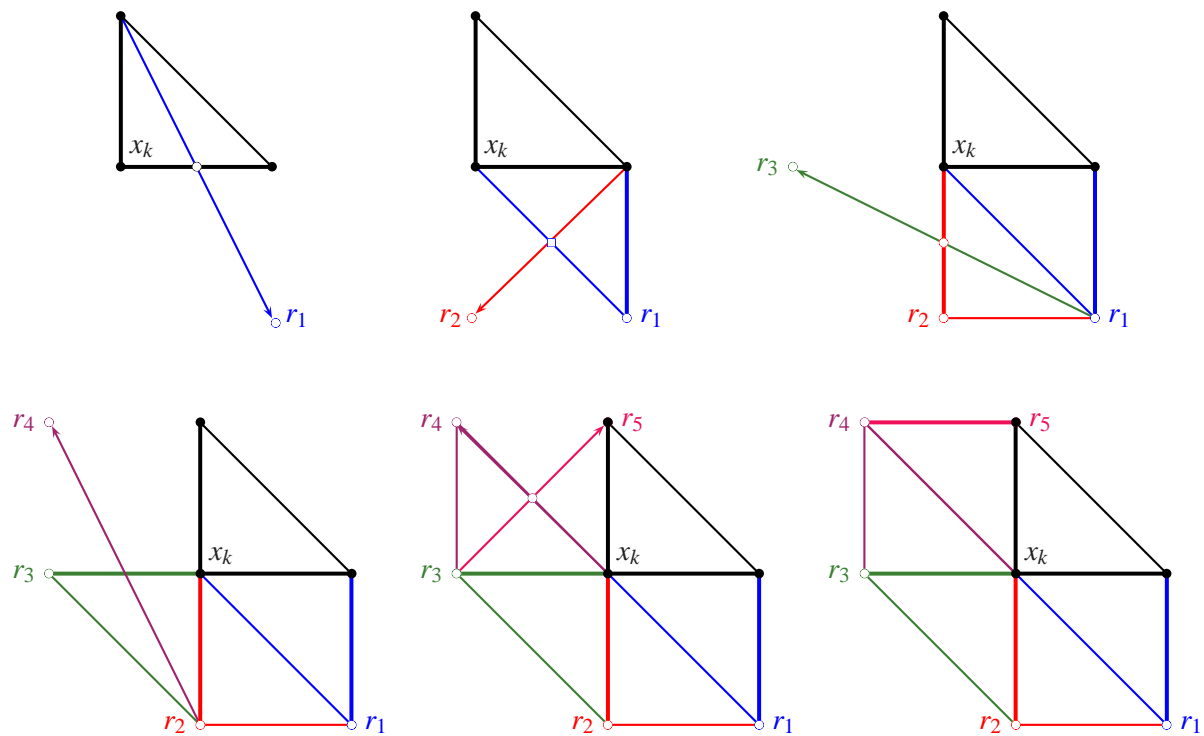


Figura 5.4: Una secuencia de reflexiones $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ en la cual el vértice x_k se mantiene como el de mejor valor, esto es, $\Psi(x_k)$ es menor que la función Ψ evaluada en los otros dos vértices y al cabo de las cuales el simplex vuelve a su forma inicial, evidenciándose que x_k está cerca de un punto estacionario.

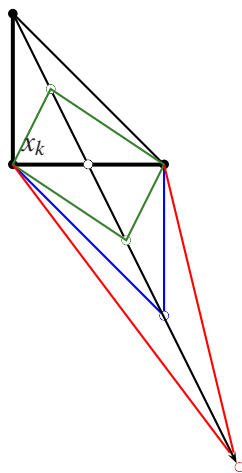


Figura 5.5: A partir del simplex **original** se consideran: una **reflexión** (factor de escala $r = 1$), una **expansión** (reflexión positiva con expansión, factor de escala $r = 2$) y dos **contracciones** (una positiva y otra negativa con factores de escala $r = 1/2$ y $r = -1/2$ respectivamente).

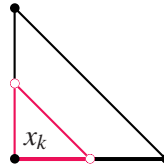


Figura 5.6: Encogimiento del simplex hacia el mejor vértice x_k . Este movimiento tiene lugar cuando se ha establecido a x_k como un vértice cercano a un punto estacionario.

Este proceso se repite hasta que el tamaño de los simplex conseguidos en las diferentes iteraciones se hace más pequeño que cierto margen de tolerancia y de este modo se encuentran las coordenadas del mínimo local.

Este algoritmo híbrido de optimización puede encontrarse implementado en el Toolbox Optimization de MatLab® y trabaja relativamente bien en funciones que presentan discontinuidades y en problemas de optimización estocástica, en los cuales intervienen funciones estocásticas descritas por un modelo de simulación de eventos discretos [8] [7] [37] [67]. El algoritmo Nelder-Mead se basa en el algoritmo de búsqueda SHH (Spendley, Hext y Himsforth) para funciones de respuesta estocástica en 1962. Se dice que opera relativamente bien en cuanto a que pueden encontrarse falsas convergencias del algoritmo. Este riesgo puede reducirse mediante nuevas modificaciones hechas al Nelder-Mead por Barton en [8, p. 958], pero que en el momento no están implementadas en el Toolbox mencionado y que al nivel de este trabajo quedará como un problema abierto.

El algoritmo requiere de una semilla x_0 con la cual evolucionar y se requiere llevar un control sobre la variedad de mínimos relativos que puede hallar el algoritmo en caso que $\Psi(x)$ admita más de uno. Cabe recordar que los criterios para seleccionar este mínimo x_{opt} no son solamente numéricos en cuanto a que $0 \leq \Psi(x_{opt}) \leq 0.05$, sino también que debe tener sentido económico y financiero, además de que la densidad simulada con los parámetros de x_{opt} debe ser leptocúrtica y de colas anchas, como ocurre con la densidad de retornos reales $\phi(t)$.

Este algoritmo de optimización se implementa de modo que retorne un vector

$$[x_{opt}, fval, exitflag, output]$$

donde x_{opt} es el vector paramétrico que indica los valores de los parámetros en el modelo de Heston para el cual se tiene un mínimo local de la función $\Psi(x)$; $fval$ es un escalar que indica el valor $\Psi(x_{opt})$; $exitflag$ es un escalar que indica las condiciones en que finaliza el algoritmo, donde un valor positivo indica convergencia, un valor negativo indica divergencia y un valor de cero indica que el número máximo de funciones evaluadas fue excedido sin haberse logrado un valor óptimo; y $output$ es una estructura de cuatro componentes que contiene el número de iteraciones hechas por el algoritmo hasta alcanzar x_{opt} , el número de veces que se evalúa la función objetivo, el nombre de la rutina de optimización empleada por el algoritmo (en este caso es Nelder-Mead) y un archivo que contiene la historia de la optimización.

Este modo empírico de proceder exige pues una búsqueda un poco intensa de vectores paramétricos x_0 que sirvan de semilla y orienten el algoritmo híbrido hacia la búsqueda de un mínimo local con las características mencionadas. Con el fin de reducir el espacio de búsqueda para la

semilla seleccionada $x_0 = (\mu_0, \theta_0, \sigma_0, \kappa_0, \rho_0)$, pueden hacerse las siguientes observaciones:

De la gráfica (5.1(c)) o el cuadro (5.1) para la serie de retornos reales $\phi(t)$, se puede observar que $\max(\phi(t)) = 0.02177$ y que $\min(\phi(t)) = -0.01844$, por lo cual cabe considerar que el parámetro μ se encuentra en intervalo $[-4.4809, 5.2901]$, obtenido de los valores mínimo y máximo anotados multiplicados por el promedio de días hábiles de un año para el período seleccionado, 243 días. Ahora, para formar la semilla x_0 , resulta coherente elegir como μ_0 la media anualizada de $\phi(t)$, esto es, $\mu_0 = -0.0004379 * 243 = -0.10642$. Similarmente para el parámetro θ , que es la media de la varianza anualizada de los retornos a largo plazo, se elige como intervalo de búsqueda $[0, a]$, donde $a = \max(\phi^2(t)) * 243 = 0.11519$, y como componente respectiva de la semilla x_0 , se elige la varianza anualizada de $\phi(t)$, o sea, $\theta_0 = 0.00643$.

Para elegir el intervalo de σ se observó por simulación que el intervalo adecuado era $(0, 1]$ en vista que debía ser positivo por tratarse de la volatilidad de la varianza v_t del modelo. Para la componente σ_0 de x_0 se eligió $\sigma_0 = 0.35$ a partir del cálculo de la volatilidad de la varianza de los retornos de la serie seleccionada y anualizado. Para κ se elige el intervalo $(0, \infty)$ consistente con el hecho de que, en el modelo de Heston, κ corresponde a la velocidad con que la varianza v_t retorna a su varianza media a largo plazo θ , y por consiguiente se hace que κ asuma valores positivos. Para la componente κ_0 de x_0 se elige $\kappa = 18$ a partir de la experimentación con el modelo simulado. Finalmente, el parámetro ρ de correlación tiene su intervalo natural $[-1, 1]$ y para la componente ρ_0 de x_0 se eligió $\rho_0 = -0.01$ debido a que este parámetro es cercano a cero por izquierda, según el efecto de apalancamiento ("*leverage effect*") que es frecuente en las series de retornos financieras [15].

De acuerdo con esto, el dominio de la función Ψ , originalmente \mathbb{R}^5 , puede restringirse al producto cartesiano:

$$[-4.4809, 5.2901] \times [0, 0.11519] \times (0, 1] \times (0, \infty) \times [-1, 1],$$

que resulta de los intervalos para cada uno de los parámetros μ , θ , σ , κ , y ρ , dados anteriormente.

5.3.3. Resultados

El cuadro (5.3) muestra los resultados de la búsqueda del vector paramétrico x_{opt} en el cual se presenta un mínimo local de la función $\Psi(x)$. El valor $n = 500$ representa el número de días en el intervalo de estudio 15-Abr-03 y 29-Abr-05; $m = 1000$ es el número de trayectorias simuladas de n retornos para n días sucesivos, $T = n/243 = 2.0576$ es el número de años a simular y $x_0 = (\mu_0, \theta_0, \sigma_0, \kappa_0, \rho_0)$ es la semilla para el vector paramétrico en el modelo de Heston, que de acuerdo con lo expresado antes, toma el valor $x_0 = (-0.10642, 0.00643, 0.35, 18, -0.01)$.

En este mismo cuadro, la convergencia del algoritmo Nelder-Mead se detecta en la salida $exit\ flag = 1$, lo cual indica que el algoritmo encontró un mínimo local x_{opt} para la función $\Psi(x)$. Por otra parte, las componentes del vector paramétrico x_{opt} hallado, exhiben sentido económico y financiero de acuerdo con el activo que se está modelando, ya que corresponden a valores tomados del dominio restringido de $\Psi(x)$; y el valor $fval = \Psi(x_{opt})$, que proporciona

la probabilidad de rechazo de H_0 , es 0.008, que es inferior a la cota superior del test KS cuyo valor es 0.05.

Cuadro 5.3: Calibración empírica para los parámetros del modelo de Heston

Optimización de la función $\Psi(x)$	
Semilla x_0	Parámetros estimados x_{opt}
$\begin{pmatrix} \mu \\ \theta \\ \sigma \\ \kappa \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.10642 \\ 0.00643 \\ 0.35 \\ 18 \\ -0.01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \theta \\ \sigma \\ \kappa \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.14402 \\ 0.00534 \\ 0.3411 \\ 22.34 \\ -0.0090 \end{pmatrix}$
Días: $n = 500$	Valor optimizado: $fval = 0.008$
Trayectorias: $m = 1000$	Estado de Convergencia: $exitflag = 1$
Tiempo (años): $T = 2.0576$	Condiciones de Convergencia: output: <ul style="list-style-type: none"> ▪ iterations: 41 ▪ funcCount: 147 ▪ algorithm: 'Nelder-Mead simplex direct search'

Debido a la naturaleza estocástica de la función $\Psi(x)$, una inquietud natural que surge es observar la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando se evalúa $\Psi(x_{opt})$ un número considerable de veces. Para lograr esto, se evalúa $\Psi(x_{opt})$ 100 veces y el mismo experimento se repite 50 veces (> 30), con el fin de realizar una nueva prueba de hipótesis sobre la forma como distribuye el conjunto de las 50 medias $\overline{\Psi^{(i)}(x_{opt})}$ ($i = 1, \dots, 50$), obtenidas a partir de muestras cada una de tamaño 100. De acuerdo con esto, la nueva hipótesis nula H_0 se formula, para la media $\overline{\Psi(x_{opt})}$ de estas medias muestrales como

$$H_0 : \Psi(x_{opt}) = 0.05$$

para ser contrastada con la nueva hipótesis alternativa

$$H_1 : \Psi(x_{opt}) < 0.05 ,$$

la cual se diseña basándose en que los resultados empíricos muestrales, obtenidos en las distintas simulaciones, han dado siempre un $\Psi(x_{opt}) < 0.05$. Valiéndose del Teorema del Límite Central, se calcula entonces el estadístico puntual para esta prueba de hipótesis como

$$z = \frac{\overline{\overline{\Psi(x_{opt})}} - 0.05}{s/\sqrt{50}} ,$$

donde se hace uso de la desviación estándar muestral s para aproximar la desviación estándar poblacional σ_{pob} , en nuestro caso desconocida. El cálculo de s se hace en la forma ordinaria a partir de las 50 medias muestrales $\overline{\Psi^{(i)}(x_{opt})}$.

En el cuadro (5.4) se presentan los resultados de esta prueba de hipótesis, de acuerdo con los cuales se acepta la hipótesis alternativa H_1 , logrando establecerse que la serie real de retornos $\phi(t)$ y una serie simulada por el modelo de Heston con los parámetros x_{opt} , tienen la misma distribución según el test KS, a un nivel de significancia máximo de 0.05.

Cuadro 5.4: Prueba de hipótesis para la media de la función estocástica $\Psi(x_{opt})$.

$\overline{\overline{\Psi(x_{opt})}}$	s	z	$z_{0.05}$	Resultado
0.0117584	0.00033291	-812.254844	-1.644854	$z < z_{0.05} \Rightarrow$ se acepta H_1

El cuadro (5.5) presenta algunas estadísticas para las series correspondientes a una de las m trayectorias generadas por simulación usando $\Psi(x_{opt})$, y para la serie real de retornos $\phi(t)$, con el fin de hacer una comparación directa entre los valores de los estadísticos. Se muestra también en el cuadro una prueba de bondad de ajuste KS a un nivel de significancia de 0.05 entre la serie simulada, mencionada antes, y la serie real de retornos $\phi(t)$. Los resultados de este cuadro sugieren que la serie simulada y la serie real de retornos $\phi(t)$ provienen de una misma distribución teórica, y a partir de esto, puede afirmarse que el modelo de Heston constituye una buena alternativa para la descripción de retornos y de precios de la divisa americana.

Finalmente, la figura (5.7) ilustra los resultados del ajuste para la misma simulación citada en el cuadro (5.5). En este caso, puede notarse de manera visual que una serie de retornos simulada mediante el algoritmo propuesto tiene una distribución empírica con las propiedades de ser leptocúrtica, asimétrica y de colas anchas, las cuales son características que se presentan en la serie de retornos reales $\phi(t)$. Por otra parte, la figura (5.8) ilustra el ajuste para otras cuatro series simuladas por el algoritmo desarrollado. Se aprecia de nuevo en ella que las distribuciones real y simulada reflejan gráficamente un buen ajuste, reafirmando lo adecuado que resulta ser el modelo de Heston, incluso a un nivel empírico, para el estudio de la tasa de cambio.

La metodología empírica utilizada y el algoritmo propuesto son susceptibles de mejoras y consolidan un breve aporte en el tema de estimación de parámetros del modelo de Heston para el estudio de la serie de precios de la divisa americana en países que no presentan un mercado

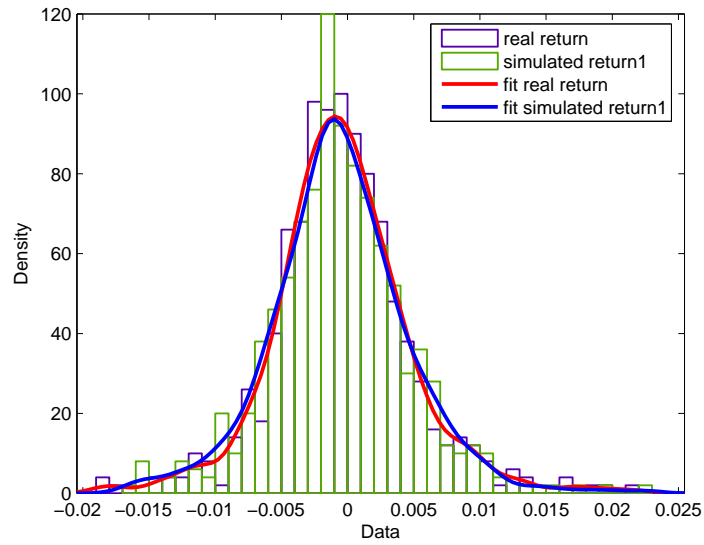
Cuadro 5.5: Comparación de algunas estadísticas entre una trayectoria de retornos simulada y la trayectoria real de retornos

Estadísticas retorno1 simulado		Estadísticas serie de retornos reales	
Media	-0.0005909	Media	-0.0004379
Mediana	-0.0007864	Mediana	-0.0006063
Des-Std	0.0051358	Des-Std	0.0051427
Varianza	$2.63774 \cdot 10^{-5}$	Varianza	$2.64478 \cdot 10^{-5}$
Curtosis	4.7033334	Curtosis	5.1904219
Asimetría	0.2670010	Asimetría	0.3015852
Rango	0.038835	Rango	0.0402164
Mínimo	-0.016332	Mínimo	-0.0184436
Máximo	0.022503	Máximo	0.0217728
Cuenta	500	Cuenta	500

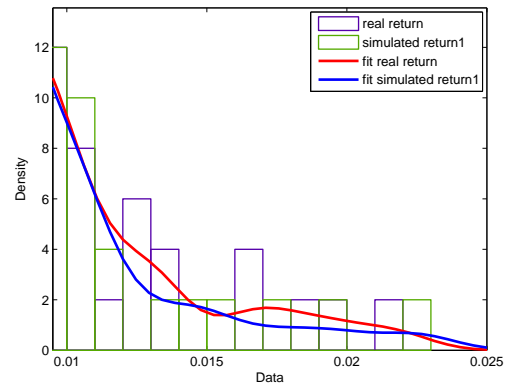
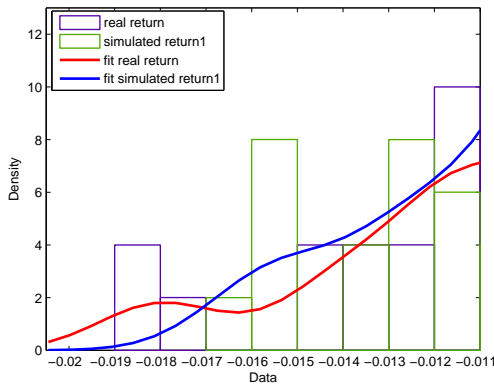
Prueba de bondad KS - nivel de significancia 0.05

retorno1 simulado vs retorno real	$[s_1, p_1, h_1] = [0.032, 0.957167, 0]$
-----------------------------------	--

de opciones desarrollado sobre dicha divisa. Puede señalarse como valor agregado la experiencia ganada para enfrentar a futuro metodologías de estimación más potentes y sofisticadas de modelos estocásticos.

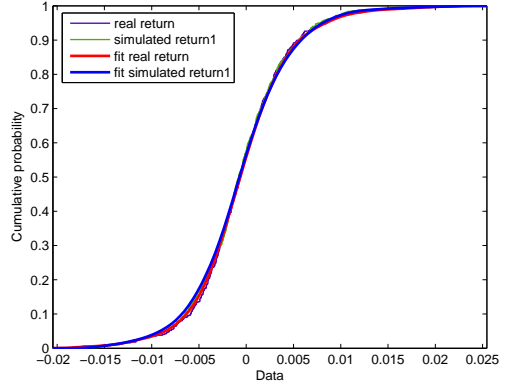
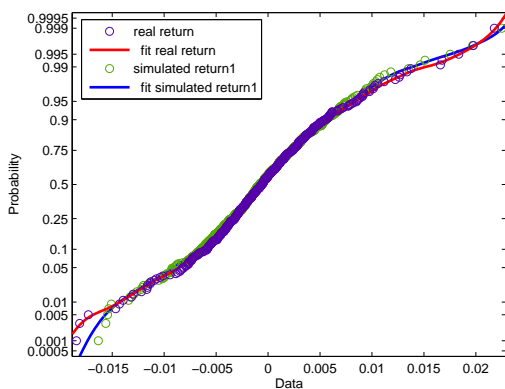


(a) Densidad para el retorno real y para trayectoria1 simulada



(b) Densidad para el retorno real y para trayectoria1 simulada - Cola izquierda

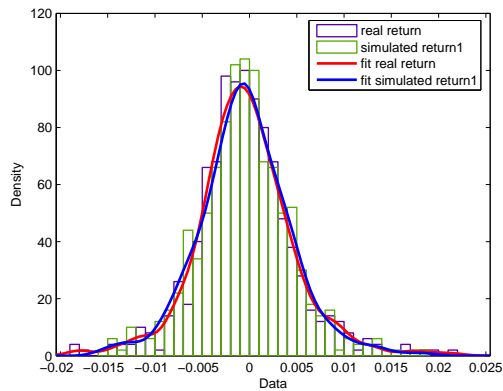
(c) Densidad para el retorno real y para trayectoria1 simulada - Cola derecha



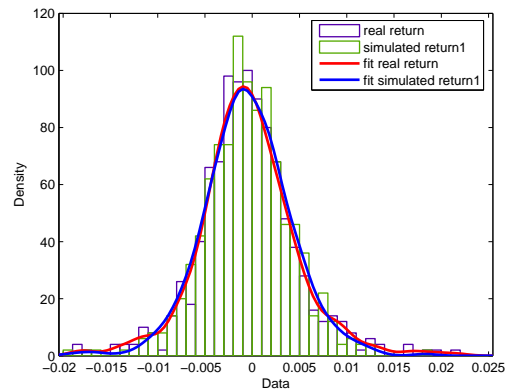
(d) Q-Plot para el retorno real y para trayectoria1 simulada

(e) Probabilidad acumulada para el retorno real y para trayectoria1 simulada

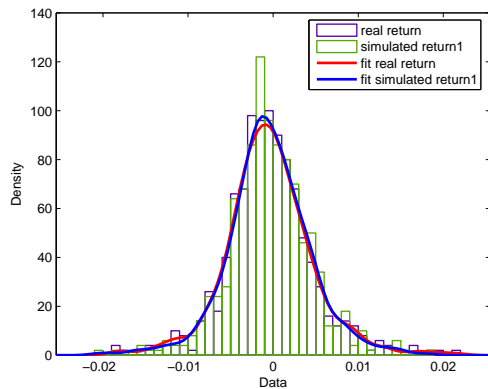
Figura 5.7: Ajuste a la serie de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio



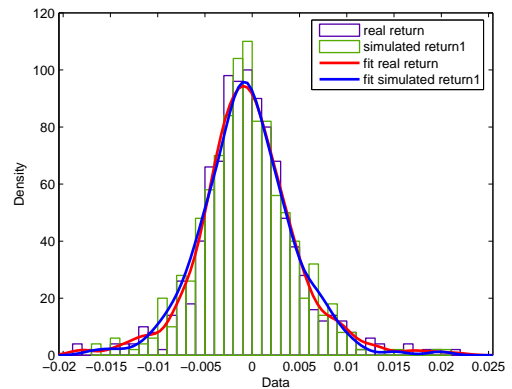
(a) Densidad para el retorno real y para trayectoria2 simulada



(b) Densidad para el retorno real y para trayectoria3 simulada



(c) Densidad para el retorno real y para trayectoria4 simulada



(d) Densidad para el retorno real y para trayectoria5 simulada

Figura 5.8: Cuatro ajustes a la serie de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio logrados con la función $\Psi(x_{opt})$

Conclusiones

Algunos conceptos interesantes dentro del cálculo estocástico y aplicaciones a las finanzas cuantitativas son examinados a lo largo de este breve trabajo; los apuntes principales son:

1. La simulación computacional constituye un mecanismo facilitador para el estudio de conceptos básicos relacionados con los procesos y el cálculo estocástico, como son entre otros, las martingalas, el movimiento browniano, la integral de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Tal ayuda se refleja en la capacidad computacional para construir ciertos procesos estocásticos, resolver numéricamente una ecuación diferencial estocástica y poder visualizar los resultados de cada simulación en trayectorias o superficies que consideraban las variaciones de las diferentes magnitudes que intervenían.
2. Se desarrollan algunos modelos estocásticos con volatilidad constante relevantes en la literatura actual. Concretamente se presentan algunos detalles del trabajo seminal de Black & Scholes, el proceso de Ornstein - Uhlenbeck con reversión a la media y el modelo de Cox-Ross-Rubinstein. En el primer caso, se refleja una de las grandes virtudes del modelo, y es la presentación de una expresión matemática cerrada que bajo ciertos supuestos en el mercado, calcula el valor de una opción europea sobre un activo subyacente dado. Algunas simulaciones computacionales en estos tópicos financieros se implementan para ayudar a entender los fundamentos básicos de dichos modelos y a esclarecer un norte importante de trabajo en el mercado de opciones.
3. Por otra parte se presentan algunos modelos estocásticos con volatilidad estocástica recientes en la literatura, en primer lugar para describir la forma de la distribución que presentan en general las series financieras de precios y de retornos. Con frecuencia, las series de retornos financieros son leptocúrticas, asimétricas y de colas anchas en contraste con una distribución normal. Y en segundo lugar estos modelos se constituyen en una alternativa que explica el efecto sonrisa de la volatilidad implícita presente cuando

varía el tiempo de expiración T y el precio de ejercicio K de una opción; esto como una fuente valiosa en la construcción de un mercado de opciones. Más específicamente, los modelos de Hull & White, Scott, Stein & Stein, Heston y el modelo empírico de Wilmott son descritos en sus aspectos básicos. Algunas simulaciones computacionales sencillas principalmente para el modelo de Heston se implementan con el fin de visualizar las diferentes formas estilizadas de curvas de precios y retornos que se generan cuando los parámetros del modelo de volatilidad estocástica son cambiados.

4. El modelo de volatilidad estocástica de Heston resulta ser adecuado para describir la serie de retornos de los precios de cierre de la divisa americana. Este hecho se ve reflejado en el poco más del 95 % de las simulaciones logradas con este modelo, las cuales replicaban una distribución empírica con las propiedades de ser leptocúrtica, asimétrica y de colas anchas, generada por un sistema bivariado de difusión cuyos parámetros tienen sentido económico y financiero y además la propiedad de tener conjuntamente con la serie de retornos reales, la misma distribución continua según el test de Kolmogorov - Smirnov a un nivel de significancia de 0.05.
5. La estimación del modelo de Heston a través del método empírico propuesto es un primer paso a la aproximación de los verdaderos parámetros del proceso de difusión bivariado de Heston, y dicho método configura una manera flexible de proceder ya que efectúa en primera instancia, un tanteo del vector paramétrico, el cual por simulación puede mejorar de manera substancial. En segundo, emplea el algoritmo híbrido “Nelder-Mead simplex direct search” de optimización no lineal sin restricciones para encontrar una estimación del vector paramétrico, el cual representa un mínimo local del número de rechazos de la hipótesis nula de que las distribuciones de retornos real y simulada, provienen de una misma distribución continua, haciendo uso de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras a un nivel de significancia de 0.05; y finalmente porque si un conocimiento cualitativo y cuantitativo de la distribución de precios y de retornos de una serie financiera es un factor determinante en un proceso de estudio y de toma de decisiones el interior de un mercado, entonces, la estimación realizada tiene por lo menos el valor de reproducir una serie de retornos con una forma estilizada similar a la serie de retornos real.

Problemas Abiertos

1. A partir de una curva estilizada que se ajuste y refleje el comportamiento de una serie de precios o retornos de un activo financiero, de la presencia de clusters de volatilidad y de la consideración de valores extremos de los retornos, ¿puede establecerse una medida de riesgo en un mercado? Esta es una pregunta cuyo interés en las negociaciones dentro de un mercado es importante, cuyo estudio se lleva a cabo actualmente por parte de especialistas internacionales y en el que se espera participar activamente a mediano plazo.
2. Explorar otros métodos de estimación de parámetros v. gr. método de momentos, métodos de filtros de Kalman, métodos bayesianos, métodos de aproximación de funciones de máxima verosimilitud y el método de funciones características empíricas para utilizar dichas estimaciones como input en el mismo modelo de Heston.
3. Extender el trabajo al estudio de volatilidad estocástica con salto difusión como una alternativa innovadora reciente en la literatura que pretende afinar la medida del riesgo en los mercados financieros. Esto de paso abre las puertas hacia la investigación en métodos sofisticados de simulación y numéricos así como a la estimación de parámetros en modelos de este tipo.

A.1. Movimiento Browniano

La función `BrownPath()` hace una gráfica de tres realizaciones del movimiento browniano estándar. La función `BrownCorr()` es una representación de la matriz de correlación para el movimiento browniano estándar (ver la figura (2.2)). La función `BrownPathGeom()` hace la gráfica de cinco realizaciones del movimiento browniano geométrico mostradas en la figura (2.3).

A.1.1. Función *BrownPath*

```
function BrownPath()
%BROWNPATH
% Genera tres realizaciones del Movimiento Browniano estándar.

% x: vector tiempo

n=500;
dt=1/n;
raiz_dt=sqrt(dt);
x=0:dt:dt*n;

dW=raiz_dt*randn(3,n);
W=cumsum(dW,2);
```

```
plot(x,[0,W(1,:)], x,[0,W(2,:)], x,[0,W(3,:)])

title('Movimiento Browniano Estándar'),xlabel('t'),ylabel('W_t')
```

A.1.2. Función *BrownCorr*

```
function BrownCorr()
%BROWNCORR
% gráfico de la matriz de correlación del Movimiento Browniano estándar

% [s,t] es una matriz de tiempos, (0,1]x(0,1]

[s,t]=meshgrid(.001:.001:1.000 , .001:.001:1.00 );

corr = min(s,t)./sqrt(s.*t);

imagesc (corr); figure(gcf);

title('Correlación para el Movimiento Browniano Estándar'),
xlabel('t'),ylabel('s')
```

A.1.3. Función *BrownPathGeom*

```
function X=BrownPathGeom()
%BROWNPATHEOM
% Cinco realizaciones del Movimiento Browniano Geométrico
%  $X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$ 

% mu = .01, sigma = .01

n=5000;
dt=10/n;
mu = .01;
sigma = .01;
raiz_dt=sqrt(dt);
t = [dt:dt:dt*n];

dW=raiz_dt*randn(5,n);
W=cumsum(dW,2);

for i=1:5
```



```

    X(i,:) = exp(mu*t + sigma.*W(i,:));
end

media = exp((mu + .5*sigma^2)*t );
desv = sqrt( exp((2*mu + sigma^2)*t) .* (exp(sigma^2*t) - 1) );

plot( [0, t] , [1, X(1,:)], [0 ,t] , [1, X(2,:)], [0 ,t] ,...
      [1, X(3,:)], [0 ,t] , [1, X(4,:)], [0 ,t] , [1, X(5,:)],...
      [0, t] , [1, media], 'k:', [0, t] , [1, media+2*desv],...
      'k:' , [0, t] , [1, media - 2*desv], 'k:')

title('Movimiento Browniano Geométrico'),xlabel('t'),ylabel('W_t')

```

A.2. Modelo de Black & Scholes

La función `pdflogPrice()` simula veinte trayectorias para el precio S_t de un activo financiero, $t \in [0, 1]$, según el Modelo BS. El valor inicial $S_0 = 1.5$ se mantiene fijo para cada trayectoria. La misma función genera una superficie que muestra la densidad de probabilidad del precio S_t del activo en un instante dado t , donde $t \in [0, 1]$ (ver las figuras (3.1(a)) y (3.1(c))). Por último, la función `bscall()` simula tres trayectorias para el precio S_t de un activo financiero, $t \in [0, 1]$, según el Modelo BS. El valor inicial S_0 de cada una de ellas es diferente. La función también genera una superficie a color para el valor de una opción call como función del tiempo t y del precio S_t , y sobre la superficie que resulta, tres trayectorias que muestran la evolución del precio de la call, las cuales están asociadas a las tres trayectorias de precios del activo que fueron simuladas en la primer etapa.

A.2.1. Función *pdflogPrice*

```

function pdflogPrice()
%PDFLOGPRICE
% Genera 20 realizaciones de precios de un activo financiero según el
% modelo BS: dS_t = mu*S_t*dt + sigma*S_t*dW_t. El precio inicial es fijo.
% Genera la densidad de distribución del precio de un activo como función
% del tiempo t.

% mu>0 es el valor esperado del retorno dS_t/S_t en la unidad de tiempo
% sigma>0 es la volatilidad del precio S_t del activo. W_t es un proceso de
% Wiener.

mu    = 0.05;
sigma = 0.6;

```

```

So = 1.5;           % Precio inicial del activo

N=5000;           % Número de iteraciones en cada realización
T=1;             % Tiempo máximo
dt=T/N; t=(0:dt:T);
S=zeros(size(t));
S(1)=So;

figure (1)
for j=1:20        % Número de trayectorias
    for i=1:N
        S(i+1)=S(i)+mu*S(i)*dt+sigma*S(i)*sqrt(dt)*randn;
    end;
    plot(t,S);
    hold on;
end;

title('20 Realizaciones para el precio de un activo en el Modelo
BS');
xlabel('t'); ylabel('S')
ax = axis;
axis([0 1 ax(3) ax(4)]);
grid on;
hold off

figure(2)
[S,t] = meshgrid(0.1:0.05:3.5,0.1:0.01:1); %grilla (S)x(t)

% Función densidad de probabilidad para los precios
beta = (mu-(sigma^2)/2);
a = (log(S/So)-beta*t)/sigma;
z=normpdf(a,0,sqrt(t)) ./ (sigma*S);

meshc(t,S,z);
shading flat;
xlabel('t'); ylabel('S');
title('Función Densidad de Probabilidad para S en t');
grid on;

```

A.2.2. Función *bscall*

```
function bscall()
```

```

%BSCALL
% Se generan tres trayectorias para el precio de un activo financiero según
% el modelo BS:  $dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_t$ . El precio inicial  $S_0$ 
% para cada una de ellas es diferente.
% Genera además una superficie para el valor de una opción call como
% función del precio  $S_t$  y del tiempo  $t$ . Sobre la superficie se muestran
% las tres trayectorias de precios mencionadas.

randn('state',51)
% Parámetros iniciales

K = 1;           % precio de ejercicio de la call
r = 0.05;       % tasa de interés libre de riesgo
sigma = 0.6;    % volatilidad del precio  $S_t$ 
mu = 0.05;     % valor esperado del retorno  $dS_t/S_t$ 
T = 1;         % tiempo de expiración de la call
N1 = 50;       % # particiones para  $[0,T]$ 
Dt = T/N1;     % paso del tiempo
N2 = 60;       % # particiones para el rango de  $S_t$ 

tvals = [0:Dt:T-Dt];
Svals = linspace(.01,2.5,N2); % Max precio  $S_t$  considerado: 2.5
[Sgrid,tgrid] = meshgrid(Svals,tvals);

dlgrid = (log(Sgrid/K) + ...
          (r+0.5*sigma^2)*(T-tgrid))./(sigma*sqrt(T-tgrid));
Ngrid = 0.5*(1+erf(dlgrid/sqrt(2)));

d2grid = dlgrid - sigma*sqrt(T-tgrid);

N2grid = 0.5*(1+erf(d2grid/sqrt(2)));

% valoración de la call según el modelo BS
call = Sgrid.*Ngrid - K*exp(-r*(T-tgrid)).*N2grid;

tvals = [0:Dt:T]; % adicionar la fecha de expiración T
[Sgrid,tgrid] = meshgrid(Svals,tvals); % Extender la grilla.

call(end+1,:) = max(Svals - K, 0); % condiciones de frontera para la call
figure(1)
surf(Sgrid,tgrid,call) % superficie para el valor de la call

title('Valor de una opción Call en el Modelo B-S',...
      'FontWeight','bold','FontSize',11)

```

```

xlabel('S','FontWeight','Bold','FontSize',10)
ylabel('t','FontWeight','Bold','FontSize',10)
zlabel('Call','FontWeight','Bold','FontSize',10,...
       'Rotation',90,'HorizontalAlignment','right')
ylim([0 T]), xlim([0 2.5]), zlim([0,1.6])
set(gca,'ZTick',[0:0.2:1.6]) set(gca,'YTick',[0:0.2:1])

% Superponer las trayectorias de precios sobre la superficie
% y trazado de las trayectorias en una nueva ventana
hold on
L = 200;           % # particiones para [0,T]
Dt = T/L; tpath = [0:Dt:T]'; So = [1.5;0.95;0.7]; Z=zeros(L+1,1);
for j = 1:3
    factors = exp((mu-0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*randn(L,1));
    Spath = [So(j);So(j)*cumprod(factors)];

    dlpath = (log(Spath(1:end-1)/K) + ...
              (r+0.5*sigma^2)*(T-tpath(1:end-1)))./ ...
              (sigma*sqrt(T-tpath(1:end-1)));
    N1path = 0.5*(1+erf(dlpath/sqrt(2)));

    d2path = dlpath - sigma*sqrt(T-tpath(1:end-1));
    N2path = 0.5*(1+erf(d2path/sqrt(2)));

    callpath = Spath(1:end-1).*N1path - ...
               K*exp(-r*(T-tpath(1:end-1))).*N2path;
    callpath(end+1)=max(Spath(end)-K,0);
    callpath=callpath + 0.05;

    plot3(Spath, tpath ,Z,'b-','Linewidth',0.5)
    plot3(Spath, tpath, callpath, 'w-','Linewidth',2)

    figure(2)
    plot(tpath, Spath, 'b-','Linewidth',1.5)
    hold on
    figure(1)
end
hold off

figure(2)
title('Precio de un activo en el Modelo B-S',...
      'FontSize',11)
xlabel('t','FontSize',10)
ylabel('S','FontSize',10)

```

```
grid on
hold off
```

A.3. Estimación del Modelo de Heston

La función `Heston_fnc(x)` corresponde a la implementación de la función objetivo $\Psi(x)$ descrita en la sección (5.3.1). La función `buscar()` implementa el algoritmo auxiliar de búsqueda directa Nelder-Mead Simplex para hallar un mínimo local de la función objetivo `Heston_fnc(x)` en caso que exista (ver sección (5.3.2)). La función `outfun(x,optimValues,state)` establece las opciones de ejecución del algoritmo Nelder-Mead Simplex y la función `graphcomparedens(.)` hace una gráfica que muestra dos histogramas para las series de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio, correspondientes a la serie real y una serie simulada lograda con el modelo de Heston (ver figura (5.8(d))).

A.3.1. Función *buscar*

```
function [xoptimo,fval,exitflag,output]=buscar()
%BUSCAR
% La función BUSCAR emplea el algoritmo Nelder-Mead simplex para hacer una
% búsqueda directa de un mínimo local de la función objetivo Heston_fnc
% en caso que exista alguno. El algoritmo Nelder-Mead no usa un gradiente
% numérico o analítico de la función objetivo.
%
% [xoptimo,fval,exitflag,output] Es una estructura que retorna la función
% buscar. XOPTIMO es el vector paramétrico que indica los valores de los
% parámetros en el modelo de Heston para el cual se tiene un mínimo local
% de la función Heston_fnc; FVAL es un escalar que indica el valor tomado
% por la función Heston_fnc en x=xoptimo; EXITFLAG es un escalar que
% indica las condiciones en que finaliza el algoritmo, donde un valor
% positivo indica convergencia, un valor negativo indica divergencia y un
% valor de cero indica que el número máximo de funciones evaluadas fue
% excedido; y OUTPUT es una estructura de cuatro componentes que contiene
% el número de iteraciones hechas por el algoritmo hasta alcanzar xoptimo,
% el número de veces que se evalúa la función objetivo, el nombre de la
% rutina empleada por el algoritmo y un archivo que contiene la historia
% de la optimización.

% Summary
% buscar.m
% Copyright 2006
% version 01 $Date: 2006/02/10 $
```

```

% Built-in function.

% Medida del tiempo de ejecución
tic

% REAL: serie de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio en el
% período 15-Abr-03 hasta 29-Abr-05.
REAL=textread('trm_return_data.txt');

% Semilla para Nelder-Mead
% MU, THETA, SIGMA, KAPA, RHO Son los parámetros básicos en
% el Modelo de Heston y están dados en el vector x en ese orden.
x=[-0.1064 0.0064 0.35 18 -0.01 ];

options = optimset('OutputFcn',@outfun,'LargeScale','off');
[xoptimo,fval,exitflag,output] = fminsearch(@Heston_fnc, x,
options)

toc
return

```

A.3.2. Función *Heston_fnc*

```

function Pr_rechazo = Heston_fnc(x);
%HESTON_FNC(X) Función objetivo.
% La función HESTON_FNC retorna Pr_rechazo. Pr_rechazo es la probabilidad
% de que se rechace la hipótesis nula Ho de que las series de retornos
% reales y simulados provengan de la misma distribución continua según el
% test de Kolmogorov-Smirnov (KS) a un nivel de significancia de 0.05.
% X es el vector paramétrico de Heston, X=[MU, THETA ,SIGMA , KAPA, RHO]

% Summary
% File Heston_fnc.m
% Copyright 2006
% version 01 $Date: 2006/02/10 $
% Built-in function

format long;

mu=x(1); theta=x(2); sigma=x(3); kapa=x(4); rho=x(5);

```

```

S_o=2924.00;           % Precio de cierre trm el día 14-Abr-03
var_o=theta;
n=500;                % días simulados 500
m=1000;               % trayectorias simuladas 1000
T=2.057613;          % tiempo en años

dt=T/n; raiz_dt=sqrt(dt);

% Generar archivos dw1.bin, dw2.bin. w1 y w2 son procesos de Wiener en el
% modelo de Heston. Cada archivo contiene (nm) ruidos brownianos.

fiddw1=fopen('dw1.bin','w'); fclose(fiddw1);
fiddw2=fopen('dw2.bin','w'); fclose(fiddw2);
fiddw1=fopen('dw1.bin','a+'); fiddw2=fopen('dw2.bin','a+');

for i=1:m
    randn('state',2*i-1);
    dW1=raiz_dt*randn(1,n);
    fwrite(fiddw1,dW1,'double');
    randn('state',2*i);
    dZ=raiz_dt*randn(1,n);
    dW2=rho*dW1+sqrt(1-rho*rho)*dZ;
    fwrite(fiddw2,dW2,'double');
end

clear dW1; clear dW2;

% Generar archivos s.bin, v.bin, r.bin. s, v, r contienen los precios, las
% varianzas de los precios y los retornos de los precios. El archivo s
% contiene ((n+1)m) precios simulados. Los archivos v y r contienen (nm)
% datos para las varianzas y los retornos respectivamente.

fids=fopen('s.bin','w'); fclose(fids); fidv=fopen('v.bin','w');
fclose(fidv); fidr=fopen('r.bin','w'); fclose(fidr);
fids=fopen('s.bin','a+'); fidv=fopen('v.bin','a+');

S=zeros(1,n+1); var=zeros(1,n+1); Ret=zeros(1,n+1);

S(1)=S_o; var(1)=var_o;

for k=1:m
    jumpW=(n)*8*(k-1);
    fseek(fiddw1,jumpW,-1);
    fseek(fiddw2,jumpW,-1);
    dW1=fread(fiddw1,n,'double');

```

```

dW2=fread(fidw2,n,'double');
for i=2:n+1
    S(i)=S(i-1)*(1+mu*dt+sqrt(var(i-1))*dW1(i-1));
    var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))...
        *sigma*dW2(i-1);
    while var(i)<0
        var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))...
            *sigma*(rho*dW1(i-1)+sqrt(1-rho*rho)*randn*raiz_dt);
    end
end
end
fwrite(fids, S, 'double');
fwrite(fidv, var, 'double');
end

fclose(fidw1); fclose(fidw2);

% REAL: serie de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio en el
% período 15-Abr-03 hasta 29-Abr-05.
REAL=textread('trm_return_data.txt');

% Test_KS: Matriz (m)x(2). Cada fila i contiene una prueba de hipótesis
% del test de bondad de ajuste KS para dos muestras. La primera posición
% es el valor_p de la prueba y la segunda es un valor 0 o 1 que indica la
% aceptación o el rechazo de Ho respectivamente.
Test_KS=zeros(m,2);

fidr=fopen('r.bin','a+'); for k=1:m
    jump=(n+1)*8*(k-1);
    fseek(fids,jump,-1);
    S=fread(fids,n+1,'double');
    Retorno=log(S(2:end)./S(1:end-1));
    fwrite(fidr,Retorno,'double');
    [H,P] = kstest2(Retorno, REAL);
    Test_KS(k,:)=[H,P];
end

Pr_rechazo=sum(Test_KS(:,1))/m;

fclose(fidr); fclose(fids); fclose(fidv);
fidw1=fopen('dw1.bin','w'); fclose(fidw1);
fidw2=fopen('dw2.bin','w'); fclose(fidw2);
return

```


A.3.3. Función *outfun*

```

function stop = outfun(x,optimValues,state)
%OUTFUN
% Opciones de ejecución del algoritmo Nelder-Mead simplex. Este algoritmo
% está implementado como FMINSEARCH del toolbox Optimization.
% X es el vector paramétrico del modelo de Heston.
% OPTIMVALUES es el valor de la función objetivo Heston_fnc en el valor X.
% STATE representa el estado del algoritmo en cada iteración.

stop=[];
persistent history
persistent searchdir

switch state
    case 'init'
        history = []; searchdir = [];
    case 'iter'
        history = [history;[x' optimValues.fval]];
    case 'done'
        assignin('base','hist', history);
otherwise
end

```

A.3.4. Función *graphcomparedens*

```

function graphcomparedens(REAL,ret_simul1)
%GRAPHCOMPAREDENS(REAL,RET_SIMUL1)
% Crea un gráfico que muestra dos histogramas para las series de retornos
% de precios de cierre de la tasa de cambio, correspondientes a las series
% real y simulada. También muestra los ajustes no paramétricos para sus
% respectivas densidades de probabilidad.
% REAL es la serie de retornos de precios de cierre de la tasa de cambio
% en el período 15-Abr-03 hasta 29-Abr-05.
% RET_SIMUL1 es la serie de retornos simulada con el modelo de Heston.

% Esta función fue automáticamente generada por MatLab, v. 7.0

% Eliminar valores no definidos
t_ = ~isnan(REAL); REAL = REAL(t_);

```

```

t_ = ~isnan(ret_simull); ret_simull = ret_simull(t_);

% Ventana para el gráfico
f_ = clf; figure(f_);
legh_ = []; legt_ = {}; % leyenda
ax_ = newplot; set(ax_,'Box','on'); hold on;

% Gráfico de la serie de datos REAL "real return"
REAL = REAL(:); [F_,X_] = ecdf(REAL,'Function','cdf'...
    ); % cdf empírica
Bin_.rule = 1; [C_,E_] =
dfswitchyard('dfhistbins',REAL,[],[],Bin_,F_,X_);
[N_,C_] = ecdfhist(F_,X_,'edges',E_); % pdf empírica a partir de la cdf
h_ = bar(C_,N_,'hist');
set(h_,'FaceColor','none','EdgeColor',[0.3333333 0 0.6666667],...
    'LineStyle','-','LineWidth',1);
xlabel('Data'); ylabel('Density') legh_(end+1) = h_; legt_{end+1}
= 'real return';

% Gráfico de la serie RET_SIMUL1 "simulated return1"
ret_simull = ret_simull(:); [F_,X_] =
ecdf(ret_simull,'Function','cdf'...
    ); % cdf empírica
Bin_.rule = 1; [C_,E_] =
dfswitchyard('dfhistbins',ret_simull,[],[],Bin_,F_,X_);
[N_,C_] = ecdfhist(F_,X_,'edges',E_); % pdf empírica a partir de la cdf
h_ = bar(C_,N_,'hist');
set(h_,'FaceColor','none','EdgeColor',[0.3333333 0.6666667 0],...
    'LineStyle','-','LineWidth',1);
xlabel('Data'); ylabel('Density') legh_(end+1) = h_; legt_{end+1}
= 'simulated return1';

% Límites para los ejes
xlim_ = get(ax_,'XLim'); if all(isfinite(xlim_))
    xlim_ = xlim_ + [-1 1] * 0.01 * diff(xlim_);
    set(ax_,'XLim',xlim_)
end

x_ = linspace(xlim_(1),xlim_(2),100);

% Ajuste no paramétrico de la serie REAL "fit real return"
y_ = ksdensity(REAL,x_,'kernel','normal',...
    'support','unbounded',...
    'function','pdf');

```

```
h_ = plot(x_,y_,'Color',[1 0 0],...
         'LineStyle','-', 'LineWidth',2,...
         'Marker','none', 'MarkerSize',6);
legh_(end+1) = h_; legt_{end+1} = 'fit real return';

% Ajuste no paramétrico de la serie RET_SIMUL1 "fit simulated return1"
y_ = ksdensity(ret_simul1,x_,'kernel','normal',...
              'support','unbounded',...
              'function','pdf');
h_ = plot(x_,y_,'Color',[0 0 1],...
         'LineStyle','-', 'LineWidth',2,...
         'Marker','none', 'MarkerSize',6);
legh_(end+1) = h_; legt_{end+1} = 'fit simulated return1';

hold off; legend(ax_,legh_, legt_, 'Location','NorthEast');
```

Bibliografía

- [1] Aït-Sahalia, Y. and Kimmel, R. Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models. Working Paper 10579, June 2004.
- [2] Andersen, T.G. and Sørensen, B. GMM estimation of a stochastic volatility model: a Monte Carlo Study. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14:328–352, 1996.
- [3] Anu, Maria. Introduction to Modeling and Simulation. Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference, ed. S. Andradóttir, K.J. Healy, D.H. Withers, and B.L. Nelson, 1997.
Eprint: <http://www.informs-cs.org/wscpapers.html>.
- [4] Asli Oztukel and Paul Wilmott. Uncertain Parameters, an Empirical Stochastic Volatility Model and Confidence Limits. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(1):175–189, 1998.
- [5] Bachelier, L. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 17(3^e série): 21–86, 1900.
- [6] Banks, Jerry ed. *Handbook of Simulation: Principles, Methodology, Advances, Applications, and Practice*. John Wiley & Sons, INC., New York, 1998.
- [7] Barton, Russell and Ivey, John. Modifications of the Nelder-Mead Simplex Methods for Stochastic Simulation Response Optimization. Proceedings of the 1991 Winter Simulation Conference, Barry L. Nelson, W. David Kelton, Gondon M. Clark (eds.), 1991.
- [8] Barton, Russell and Ivey, John. Nelder-Mead Simplex Modifications for Simulation Optimization. *Management Science*, 42(7):954–973, 1996.
- [9] Baumgartner, W. and WeiB, P. and Schindler, H. A Nonparametric Test for the General Two-Sample Problem. *Biometrics*, 54(3):1129–1135, Sep 1998.
- [10] Bollerslev, T. and Zhou, H. Estimating stochastic volatility diffusion using conditional moments of integrated volatility. *Journal of Econometrics*, 109:33–65, 2002.

- [11] Brown, Robert. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4:161–173, 1828.
- [12] Carr, P. and Madan B. Dilip. Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4):61–73, 1999.
- [13] Carson, J. S. Introduction to Modeling and Simulation. Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, ed. R.G. Ingalls, M.D. Rossetti, J.S. Smith, and B.A. Peters, 2004. Eprint: <http://www.informs-cs.org/wscpapers.html>.
- [14] Chernov, M. and Ghysels, E. Estimation of the Stochastic Volatility Models for the purpose of Options Valuation. Y. S. Abu-Mostafa, B. LeBaron, A. W. Lo, and A. S. Weigend (eds.) *Computational Finance - Proceedings of the Sixth International Conference*, MIT Press, Cambridge, 2000.
- [15] Cont, R. Empirical properties of assets returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1:1–14, 2001. Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique.
- [16] Cox, J. C. and Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2):385–408, Mar. 1985.
- [17] Cox, J. C. and Ross, S. A. and Rubinstein, M. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.
- [18] Cvitanović, Jakša and Zapatero, Fernando. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. The MIT Press, 2004.
- [19] Čížek, P. and Härdle, W. and Weron, R. *Statistical Tools for Finance and Insurance*, chapter 7, pages 161–181. Springer, 2005.
- [20] Derman, Emanuel and Iraj, Kani. Riding on a smile. *Risk*, 7(2):32–39, 1994.
- [21] Doran, James S. and Ronn, Ehud I. On the Market Price of Volatility Risk. Florida State University - University of Texas at Austin, December 2004.
- [22] Drăgulescu, Adrian and Yakovenko Victor. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative Finance*, 2:443–453, 2002. Institute of Physics Publishing.
- [23] Duffie, Darrell and Kenneth J. Singleton. Simulated moments estimation of Markov models of asset prices. *Econometrica*, 61:929–952, 1993.
- [24] Dupire, Bruno. Pricing with a Smile. *Risk Magazine*, 7(1):18–20, 1994.
- [25] Einstein, Albert. *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. New York: Dover, 1956.

- [26] Eraker, B. MCMC analysis of diffusion models with application to finance. *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(177-191), 2001.
- [27] Fiorentini, G. and León, A. and Rubio, G. Estimation and empirical performance of Heston's stochastic volatility model: the case of a thinly traded market. *Journal of Empirical Finance*, 9:225–255, 2002.
- [28] Fischer, Black and Myron, Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637 – 654, May-Jun 1973.
- [29] Frank, J. and Massey, Jr. The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):68–78, Mar 1951.
- [30] Gallant, A. R. and G. Tauchen. Which moments to match? *Econometric Theory*, 12: 657–681, 1996.
- [31] Harvey, A. C. and Ruiz, E. and Shephard, N. Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies*, 61:247–264, 1994.
- [32] Harvey, A. C. and Shephard, N. Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14:429–434, 1996.
- [33] Heston, Steven. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 1993.
- [34] Higham, Desmond J. and Higham, Nicholas J. *MATLAB Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2000.
- [35] Hull, John and White, Alan. The pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300, Jun 1987.
- [36] Hull, John C. *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice Hall, fifth edition edition, 2003. University of Toronto.
- [37] Humphrey, G. David and Wilson, R. James. A Revised Simplex Search Procedure for Stochastic Simulation Response Surface Optimization. *Journal on Computing*, 12(4): 272–283, 2000.
- [38] Jacquier, E. and Polson, N. G. and Rossi, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12:371–417, 1994.
- [39] J.L. Dobb. The Brownian Movement and Stochastic Equations. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., 43(2):351–369, Apr. 1942.
- [40] Karatzas, I. and Shreve, S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, Second edition, 1988.
- [41] Karatzas, I. and Shreve, S.E. *Methods of Mathematical Finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, 1998.

- [42] Kim, S. and Shephard, N. and Chib, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. Technical report, mimeo. Nuffield College, Oxford, 1996.
- [43] Kim, S. and Shephard, N. and Chib, S. Ltochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models. *Review of Economic Studies*, 65:361–393, 1999.
- [44] Kloeden, Peter and Platen, Eckhard. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, second corrected printing edition, 1992. Deakin University, Australian National University; Australia.
- [45] Kolmogorov, A. Sulla Determinazione Empirica di una Legge di Distribuzione. *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 4:1–11, 1933.
- [46] Krylov, N. V. *Introduction to the Theory of Random Processes*, volume 43 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2002.
- [47] Lagarias, J. C. and Reeds, J. A. and Wright, M. H. and Wright, P. E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9(1):112–147, 1998.
- [48] Lewis, Robert M. and Torczon, Virginia and Trosset, Michael. Direct Search Methods: Then and Now. Technical Report NASA/CR-2000-210125 ICASE Report No. 2000-26 , ICASE. Institute for Computer Applications in Science and Engineering - NASA Langley Reseach Center, Hampton, Virginia, 2000.
Eprint: <http://historical.ncstrl.org/tr/pdf/icase/TR-2000-26.pdf>.
- [49] Lewis, Robert M. and Torczon, Virginia and Trosset, Michael. Direct Search Methods: Then and Now. *Journal of computational and Applied Mathematics* , 124:191–207, 2000.
- [50] Mao, Xuerong. *Stochastic Differential Equations and their Applications*. Horwood Publishing Chichester, 1997. University of Strathclyde, Glasgow.
- [51] Maya, Cecilia. Modelación de la tasa de cambio Peso colombiano-Dólar americano. Pprint, available by e-mail: cmaya@eafit.edu.co, 2006.
- [52] Merton, Robert C. Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183, 1973.
- [53] Mikosch, Thomas. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*. World Scientific, 2000.
- [54] Muñoz, M. and Blanco, L. *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [55] Musiela, M. and Rutkowski, M. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 1997.
- [56] Neftci, Salih N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, second edition, 2000.

- [57] Nelder, J. A. and Mead, R. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.
- [58] Øksendal, Bernt. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Springer, fifth edition, 2000. "University of Oslo".
- [59] Rubinstein, Mark. Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49(3):771–818, Jul. 1994.
- [60] Scott, Louis O. Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4): 419–438, Dec 1987.
- [61] Singleton, K. Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *Journal of Econometrics*, 102:111–141, 2001.
- [62] Smirnov, H. Sur les Écarts de la Courbe de Distribution Empirique. *Recueil Mathématique (Matematicheskii Sbornik)*, N.S. 6:3–26, 1939.
- [63] Steele, Michael J. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, 2001. Applications of Mathematics - Stochastic Modelling And Applied Probability.
- [64] Stein, Elias M. and Stein, Jeremy C. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *The Review of Financial Studies*, 4(4):727–752, 1991.
- [65] Thao, Tran Hung. An approximate approach to fractional analysis for finance. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, pages 1 – 4, Agosto 2004. Elsevier, Science Direct.
- [66] Wackerly, Dennis and Mendenhall, William and Scheaffer, Richard. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Thomson, sexta edición edition, 2002.
- [67] Weistein, Eric W. Stochastic Optimization. MathWorld - A Wolfram Web Resource, 2000.
Eprint: <http://mathworld.wolfram.com/StochasticOptimization.html>.
- [68] Wiggins, James B. Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19:351–372, 1987.
- [69] Wilmott, Paul. *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. John Wiley & Sons, LTD, University Edition edition, 1998.
- [70] Wilmott, Paul. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, volume one. John Wiley & Sons, LTD, 2000.
Eprint: <http://www.wilmott.com>.