УДК 519.6

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНИМИ МЕТОДАМИ

Д.М. ПАРХОМЧУК, Ю.О. ТИМОШЕНКО

Апроксимація неперервних диференційних та інтегральних рівнянь скінченними дискретними алгебраїчними системами, локальна лінеаризація систем нелінійних рівнянь за заданою інформацією у разі вирішення обернених задач зводиться до задач розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриці таких систем зазвичай є погано обумовленими, тому задачі розв'язання таких систем є некоректними, оскільки порушується третя умова коректності за Адамаром. Для розв'язання некоректних задач запропоновано динамічний метод регуляризації [1]. З метою зменшення часу роботи алгоритму, що пропонується динамічним методом запропоновано модифікований метод — динамічний метод другого порядку. Розроблено математичний апарат та на його основі запропоновано алгоритм для модифікованого методу, а також показано його ефективність на практичному прикладі.

ВСТУП

Ж. Адамар на початку XX століття ввів наступне поняття коректності задачі. Задача називається *коректною,* якщо виконано наступні вимоги:

- задача має містити розв'язок;
- вирішення задачі є єдиним;
- розв'язок задачі неперервно залежить від вхідних даних.

Якщо порушено хоча б одну з наведених вище вимог, то така задача називається некоректною.

Адамар навів наступний приклад некоректно поставленої задачі. Як відомо, диференційне рівняння Лапласа описує фізичний процес — стаціонарний розподіл температури у просторовому тілі:

$$\begin{cases} u_{yy}(x,y) = -u_{xx}(x,y), \;\; y>0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \;\; u_y\big|_{y=0} = \dfrac{1}{k}\sin kx. \end{cases} \tag{1}$$

Нескладно показати, що розв'язком такого рівняння буде функція

$$u_k(x,y) = \frac{\operatorname{sh} ky}{k^2}\sin kx .$$

При $k\to\infty$ видно, що $\dfrac{1}{k}\sin kx \to 0$ по x (тут збіжність розуміється у рівномірному сенсі); тоді розв'язок також має прямувати до нуля. Однак, у загальному випадку, коли $x\neq \pi n,\; n=0,\pm1,...,\; u_k(x,t)\to 0,\; k\to\infty$. Тому неперервної залежності від початкових умов немає, і відповідно, задачу (1) поставлено некоректно [1].

Мета роботи — модифікація динамічного методу регуляризації некоректних задач для поліпшення певних характеристик методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Цілі цього дослідження можна умовно поділити на 2 частини: модифікація існуючого динамічного методу регуляризації та розробка відповідного чисельного методу, а також демонстрація роботи розробленого методу на практичному прикладі.

Надалі будемо розглядати систему лінійних рівнянь виду

$$Ax = b,\ A \in \mathbf{R}^{M\times N},\ b \in \mathbf{R}^{N},\ x \in \mathbf{R}^{M}, \tag{2}$$

де матриця A погано обумовлена, що унеможливлює застосування прямих методів [2].

Серед сучасних методів розв’язання задачі (1) виділяють методи *регуляризації* — додавання певної інформації в умову задачі так, щоб отримана задача стала коректною. Найвідомішими методами регуляризації є: регуляризація Тихонова та регуляризація Лаврентьєва.

В роботі [3] розглядається динамічний метод регуляризації некоректних задач, відповідно до якого за наближений розв’язок системи рівнянь (2) приймається розв’язок наступної задачі Коші:

$$\begin{cases} x' + Ax = b, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Загальну схему застосування цього методу можна описати таким чином: нехай відомо, що в задачі (2) матриця A відома з деякою точністю α, а права частина — з точністю β. Тоді, виходячи з умови задачі, обирається деякий функціонал $H(\alpha,\beta,x(\theta^*))$ і деякий рівень зупинки e_d. θ^* обирається як перший момент часу, коли виконано умову $H(\alpha,\beta,x(\theta^*)) \le e_d$, а у якості наближеного розв’язку (2) обирають $x^* = x(\theta^*)$.

У роботі досліджується наступна система диференційних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \xi_1 x'' + \xi_2 x' + Ax = b, \\ x(0) = x_1,\ x'(0) = x_2, \end{cases} \tag{3}$$

де ξ_1 та ξ_2 — параметри.

РОЗВ’ЯЗОК СИСТЕМИ

Наведемо основні кроки розв’язання системи (3).

Спочатку введемо наступні позначення.

Нехай a_i — i-й стовпчик матриці $A^{\mathrm{T}}A$, $\delta(a_i, a_2, \ldots, a_n)$ — визначник матриці, у якої $(a_i, a_2, \ldots, a_n)$ є стовпчиками, λ_i — i-е власне число матриці $A^{\mathrm{T}}A$.

Застосуємо до (3) перетворення Лапласу й отримаємо:

$$\xi_1 (p^2 X(p) - px_1 - x_2) + \xi_2 (pX(p) - x_1) + AX(p) = b/p. \tag{4}$$

Вище отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язком якої буде образ розв'язку системи (3). Систему (4) було розв'язано за методом Крамера.

Таким чином,

$$X_i(p) = \frac{\Delta_i(p)}{\Delta(p)}. \tag{5}$$

Користуючись означенням характеристичного поліному, можна стверджувати, що визначник системи (4) дорівнює

$$\Delta(p) = \delta((\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_1 + a_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_2 +$$

$$+ a_2, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_n + a_n)). \tag{6}$$

Далі розпишемо $\Delta_{sysi}(p)$:

$$\Delta_i(p) = \delta((\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_1 + a_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_2 + a_2, \ldots$$

$$\ldots, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i-1} + a_{i-1}, b1/p + \xi_1 x_2 + \xi_2 x_1 +$$

$$+ \xi_1 p x_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i+1} + a_{i+1}, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_n + a_n)). \tag{7}$$

Введемо наступні позначення, щоб переписати вираз (7) у більш компактній формі:

$$D_1(p) = \delta((\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_1 + a_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_2 + a_2, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i-1} +$$

$$+ a_{i-1}, b1/p, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i+1} + a_{i+1}, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_n + a_n);$$

$$D_2(p) = \delta((\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_1 + a_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_2 +$$

$$+ a_2, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i-1} + a_{i-1}, \xi_1 x_2 + \xi_2 x_1, +(\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i+1} +$$

$$+ a_{i+1}, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_n + a_n);$$

$$D_3(p) = \delta((\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_1 + a_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_2 +$$

$$+ a_2, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i-1} + a_{i-1}, \xi_1 p x_1, (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_{i+1} +$$

$$+ a_{i+1}, ..., (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)e_n + a_n).$$

Тоді

$$\Delta_i(p) = D_1(p) + D_2(p) + D_3(p). \tag{8}$$

Підставляючи (8) у (5), отримаємо

$$x_i(p) = \frac{D_1(p)}{\Delta(p)} + \frac{D_2(p)}{\Delta(p)} + \frac{D_3(p)}{\Delta(p)}. \tag{9}$$

Для явного наведення розв'язку системи (3) залишилося знайти обернене перетворення Лапласу від кожного доданку (9) та просумувати. Наведемо остаточний результат таких перетворень. Для цього введемо наступні позначення:

$$c_i = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1}, \quad d_i = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1},$$

$$\Delta_i^j = \delta(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, e_j, a_{j+1}, ..., a_n),$$

$$\nabla_i^j = \delta(a_1, ..., a_{i-1}, \xi_1 x_2 + \xi_2 x_1, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, e_j, a_{j+1}, ..., a_n),$$

$$\aleph_i^j = \delta(a_1, ..., a_{i-1}, \xi_1 x_1, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, e_j, a_{j+1}, ..., a_n),$$

$$F_1(p) = (\Delta_i + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \Delta_i^j +$$

$$+ (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^2 \sum_{1<j_1<j_2<n}^{j_1, j_2 \neq i} \Delta_i^{j_1, j_2} + \ldots + p(\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^{n-1} b_i,$$

$$F_2(p) = p \prod_{i=1}^{n} (p - c_i)(p - d_i),$$

$$G_1(p) = (\nabla_i + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \nabla_i^j + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^2 \sum_{1<j_1<j_2<n}^{j_1, j_2 \neq i} \nabla_i^{j_1, j_2} + \ldots$$

$$\ldots + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^{n-1} (\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1)_i, \quad G_2(p) = \prod_{i=1}^{n} (p - c_i) * (p - d_i),$$

$$H_1(p) = (\aleph_i + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \aleph_i^j +$$

$$+ (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^2 \sum_{1<j_1<j_2<n}^{j_1, j_2 \neq i} \aleph_i^{j_1, j_2} + \ldots + (\xi_1 p^2 + \xi_2 p)^{n-1} (\xi_1 x_1)_i .$$

Користуючись наведеними вище позначеннями, розв'язок системи (3) можна записати як

$$x_i(t) = \frac{\Delta_i}{\Delta} + \sum_{j=1}^{n} \left(e^{c_j t} \left(\frac{F_1(c_j)}{F_2'(c_j)} + \frac{G_1(c_j) + H_1(c_j)}{G_2'(c_j)} \right) + \right.$$

$$\left. + e^{d_j t} \left(\frac{F_1(c_j)}{F_2'(d_j)} + \frac{G_1(c_j) + H_1(c_j) \dfrac{d_j}{c_j}}{G_2'(d_j)} \right) \right). \tag{10}$$

АНАЛІЗ ОТРИМАНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Наслідок 1. Для стійкості розв'язку (10) достатньо, щоб було виконано умову $(\forall i \in [1, n]: c_i < 0, \ d_i < 0)$, тобто

$$\forall i \in [1, n]: \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1} < 0, \quad \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1} < 0. \tag{11}$$

Визначимо, які умови необхідно накласти на ξ_1 та ξ_2, щоб наведена вище умова виконувалась.

Розглянемо два випадки.

Перший випадок. Нехай $\xi_1 > 0$, тоді (11) еквівалентно

$$\forall i \in [1,n]: \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1} < 2\xi_1 \xi_2 ,$$

звідки

$$\forall i \in [1,n]: -4\lambda_i \xi_1 < 0, \ 0 < \xi_2 .$$

Враховуючи той факт, що $0 < \lambda_i$, остаточно отримуємо, що $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$ і цієї умови достатньо, щоб рішення (10) було стійким.

Другий випадок. Нехай $\xi_1 < 0$, тоді (11) еквівалентно

$$-\xi_2 - \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1} > 0,$$

звідки $\forall i \in [1,n]: -4\lambda_i \xi_1 < 0, \ 0 < \xi_2$. Як і у попередньому випадку, отримуємо $\xi_1 > 0$, але це суперечить початковому припущенню $\xi_1 < 0$. Таким чином достатньою умовою для стійкості рішення (10) є $\xi_1 > 0, \ \xi_2 > 0$.

Наслідок 2. Дослідимо асимптотичні властивості розв'язку (10), якщо виконано умови, які наведено у попередньому наслідку. Справді, при $t \to \infty$ виконано: $e^{c_j t} \to 0, \ e^{d_j t} \to 0$, тому з виразу (8) отримуємо:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \frac{\Delta_i}{\Delta} .$$

Таким чином розв'язок системи (3) збігається до точного розв'язку системи (2).

Наслідок 3. Вище було отримано, що умови $(\xi_1 > 0, \ \xi_2 > 0)$ достатньо для того, щоб розв'язок (3) був стійким. З метою підвищення швидкодії методу отримаємо умови, які необхідно накласти на ξ_1 та ξ_2. Для цього необхідно, щоб коефіцієнти у показниках експонент рішення (10) відповідали умовам:

$$\frac{\xi_2 + \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1} > \lambda_i , \ \frac{\xi_2 - \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1}}{2\xi_1} > \lambda_i .$$

Дослідимо це. Для цього достатньо перевірити тільки другу умову. Отже:

$$\xi_2 - \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1} > 2\xi_1 \lambda_i \ \text{ або } \ \xi_2 - 2\xi_1 \lambda_i > \sqrt{{\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1} .$$

Звідки ${\xi_2}^2 - 4\xi_1 \lambda_i + 4{\xi_1}^2 {\lambda_i}^2 > {\xi_2}^2 - 4\lambda_i \xi_1, \xi_2 - 2\lambda_i \lambda_1 > 0$. Таким чином, остаточно отримуємо

$$\xi_2 > 2\lambda_i \xi_1 . \tag{12}$$

Для її виконання необхідно знайти модуль найбільшого власного числа матриці A та прийняти, наприклад, що $\xi_1 = 1$, а $\xi_2 = 2\lambda_{\max} + 1$.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНИМ МЕТОДОМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Спираючись на отриманий вище результат та використовуючи правило зупинки, яке було запропоновано у динамічному методі [3]. В роботі розглядається наступний алгоритм динамічного методу другого порядку для розв'язання некоректних задач:

1. Звести обернену задачу до задачі вигляду (2).
2. Визначити $\lambda_{\max}$ — найбільше власне число матриці $A^T A$.
3. Обрати значення ξ_1, ξ_2 виходячи з умови $\xi_2 > 2\xi_1 \lambda_{\max}$.
4. Визначити вигляд функціоналу $H(\alpha, \beta, x(\theta^*))$.
5. Визначити рівень зупинки e_d.
6. Чисельно розв'язувати систему (3) до виконання умови $H(\alpha, \beta, x(\theta^*)) \le e_d$.
7. За наближений розв'язок задачі (3) приймається $x^* = x(\theta^*)$.

ПРАКТИЧНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Задля демонстрації роботи запропонованого методу було виконано наступний чисельний експеримент.

Розглянемо наступне рівняння:

$$\int_0^1 K(t,\tau) y(\tau) d\tau = f(t), \tag{13}$$

де $K(t,\tau) = \dfrac{1}{\pi(1 + (t-\tau)^2)}$ (розподіл Коші з математичним сподіванням у точці τ). Ядра такого типу зустрічаються у задачах гравіметрії [4]. Нехай $y(\tau) = (1-\tau^2)^2$. Вважаємо, що праву частину рівняння (13) можна заміряти лише з певною точністю β. Задача полягає у визначенні значень y на деякій дискретній сітці. Розв'яжемо її відповідно наведеного вище алгоритму.

Застосуємо наступну схему для лінеаризації задачі (13):

$$\sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j) y_j h = f(x_i).$$

Для остаточного формування системи рівнянь (2) введемо наступні позначення:

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = K(x_i, x_j)h,\ b = (b_i),\ b_i = f(x_i),\ x = (x_i).$$

У якості кількості замірів правої частини та n візьмемо 50. Число обумовленості отриманої матриці $\operatorname{cond}(A) = 6{,}7665 \cdot 10^{18}$, а отже задача є некоректною. Найбільше власне число матриці $A^T A$ $\lambda_{\max} = 0{,}078402$. Згідно з (12) припускаємо, що $\xi_1 = 1$ та $\xi_2 = 1$. Враховуючи той факт, що матриця A в цій задачі задана точно, вважаймо, що $e_d = 1$. Тоді

$$H(\alpha, \beta, x(\theta^*)) = \frac{\| Ax(\theta^*) - b \|}{\beta}. \tag{14}$$

Таким чином, чисельно розв'язуючи систему (3), знаходиться значення θ^* згідно з (14).

Для оцінки результатів роботи алгоритму було підраховано похибку знайденого результату роботи алгоритму:

$$\| y^* - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{50} (y_i^* - y_i)^2} \, ,$$

а також похибку відносно правої частини $f^* = Ay^*$:

$$\| f^* - f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{50} (f_i^* - f_i)^2} \, .$$

Нижче наведено порівняльну таблицю результатів розв'язання задачі за регуляризацією за Тихоновим та динамічним методом першого (ДМ1) та другого (ДМ2) порядків.

Таблиця. Порівняння результатів

Похибка *y*			**Похибка *f***		
Тихонов	ДМ1	ДМ2	Тихонов	ДМ1	ДМ2
0,0771	0,0764	0,0764	0,00052	0,00059	0,00059

Як бачимо, ДМ1 та ДМ2 надали кращий результат за шуканою функцією і дещо гірший результат для правої частини рівняння (13).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто модифікацію динамічного методу регуляризації шляхом введення в рівняння другої похідної. Знайдено аналітичний розв'язок такої системи диференційних рівнянь другого порядку. Проведено аналіз на стійкість отриманих рішень. Розроблено правила з вибору параметрів динамічного методу другого порядку. Знайдено певні залежності між параметрами системи, які дозволяють збільшити швидкодію методу. Запропоновано чисельний алгоритм розв'язку динамічного методу другого порядку. Наведено практичне застосування розробленого методу для вирішення інтегрального рівняння Фредгольму першого порядку, яке часто зустрічається у задачах гравіметрії. Виконано порівняння наближених рішень, що знайдені динамічними методами першого та другого порядку та регуляризацією за Тихоновим.

Практичне значення роботи полягає у можливості створення замкнених систем автоматичного керування для обернених задач об'єктів, які описуються неперервними диференційними та інтегральними рівняннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 284 с.
2. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. Икрамова Х.Д. — М.: Мир, 1980. — 277 с.
3. *Гутенмахер Л.И., Тимошенко Ю.А., Тихончук С.Т.* О динамическом методе решения некорректных задач // Докл. АН СССР. — 1977. — **237**. — № 4. — С. 776−778.
4. *Васильева А.Б., Тихонов А.Н.* Интегральные уравнения. — М: Физматлит, 2002. — 158 с.

Надійшла 08.07.2013