

УДК 539.3

Бабенко<sup>1</sup> А. Є. д.т.н., проф., Д'якова<sup>1</sup> Ю. А., Балицька<sup>2</sup> Н. О.

1 – НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

2 – Житомирський державний технологічний університет, м. Житомир, Україна

## СТІЙКІСТЬ ДИСКОВОЇ ФРЕЗИ НАВАНТАЖЕНОЇ РАДІАЛЬНОЮ СИЛОЮ

Babenko<sup>1</sup> A., Dyakova<sup>1</sup> J., Balicka<sup>2</sup> N.

1 - National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

2 - Zhytomyr State Technological University, Zhytomyr, Ukraine

### STABILITY OF THIN MILL TOOL LOADED WITH RADIAL LOAD

В роботі розглядається задача стійкості дискових фрез (пил), товщини яких змінюються в межах від 0,6 до 0,8 мм і моделюються круглою пластинкою навантаженою радіальною силою, що прикладена на границі. Задача моделює умови роботи такого інструменту, як дискова фреза, тонкий відрізний круг, для яких така сила може призвести до руйнування, а також може впливати на їх коливання. Одним з факторів, який може привести до її руйнування є втрата стійкості. Фрезу можна розглядати як круглу пластину. Основною задачею розрахунку на стійкість є визначення критичної сили, прикладеної на границі цієї пластини.

**Ключові слова:** кругла пластинка, стійкість, критичне навантаження, НДС, енергетичний критерій стійкості.

Під час різання дисковою фрезою на її границі діє сила різання, яка може бути розкладена на радіальну і дотичну складові. Під дією радіальної сили тонкі фрези можуть втрачати стійкість, що веде до їх руйнування. В данній статті мова йде про стійкість у класичному розумінні цього поняття в механіці еквівалент російською мовою «устойчивость», як здатність конструкції зберігати початкову геометричну форму. Тонку фрезу можна розглядати як круглу пластинку (рис.1) радіуса  $R$ , яка жорстко закріплена в центрі і навантажена радіальною силою  $P$ , а на її зовнішньому краю радіальний зосереджений момент і поперечна сила відсутні.

Практика використання тонких відрізних фрез показує, що дуже часто має місце їх руйнування, і враховуючи ці аспекти задача є актуальною.

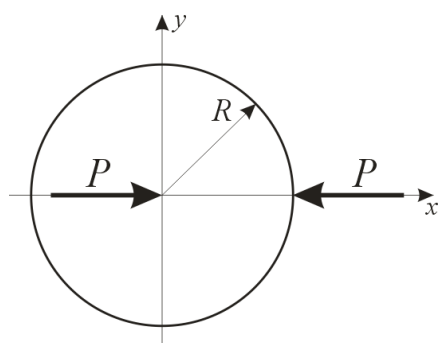


Рис. 1. Схема навантаження пластинки

визначенню цієї максимальної сили. Для знаходження критичних значень параметра  $P_{кр}$  в даній роботі використано енергетичний критерій стійкості у формі Брайана [1,2].

Критична сила визначається з умови мінімуму повної енергії системи:

$$E = U - W$$

де  $U$  – потенціальна енергія деформації, а  $W$  – робота прикладених сил.

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - циліндрична жорсткість при згині пластинки;  $h$  - товщина пластинки;  $w(\rho, \theta)$  - переміщення точок серединної площини;  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

$$W = \frac{h}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \sigma_\rho \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\sigma_\theta}{\rho^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \rho d\rho d\theta.$$

де  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$  - напруження.

Для визначення роботи прикладених сил необхідно визначити напружено-деформований стан пластини. Для цього використано методи теорії функцій комплексної змінної [3]. Передбачається, що сила, прикладена до краю в точці  $(R, 0)$  дорівнює  $(-P, 0)$  і урівноважується силою прикладеною у центрі пластини  $(P, 0)$ . При розв'язку задачі було використано полярну систему координат.

Використовуємо конформне відображення круга на одиничній  $z = \omega(\zeta)$ ,  $\omega(\zeta) = R\zeta$ ,  $\omega'(\zeta) = R$ . Таким чином, крайові умови для функції Мусхелішвілі приймуть вигляд:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f,$$

$$\varphi(\sigma) + \sigma \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f.$$

особливості функції Мусхелішвілі від сили прикладеної в центрі

$$\varphi(z) = -\frac{P}{2\pi(1+\chi)} \ln z, \quad \psi(z) = \frac{\chi P}{2\pi(1+\chi)} \ln z$$

особливості функції Мусхелішвілі від сили прикладеної в точці  $(R, 0)$

$$\varphi(z) = \frac{P}{2\pi} \ln \left( \frac{R-z}{R} \right) + \frac{P}{4\pi} \frac{z}{R}, \quad \psi(z) = -\frac{P}{2\pi} \ln \left( \frac{R-z}{R} \right) + \frac{P}{2\pi} \frac{R}{R-z}$$

Таким чином, особливості функції Мусхелішвілі від сил прикладених до пластини, матимуть вигляд:

$$\varphi(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln z + \ln \left( \frac{R-z}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{R} \right],$$

$$\psi(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \ln z - \ln \left( \frac{R-z}{R} \right) + \frac{R}{R-z} \right],$$

$$\varphi'(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{z} - \frac{1}{R-z} + \frac{1}{2R} \right],$$

$$\varphi''(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(R-z)^2} \right],$$

$$\psi'(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \frac{1}{z} + \frac{1}{(R-z)} + \frac{R}{(R-z)^2} \right].$$

Крім особливостей приведених вище необхідно ввести  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$ , які є голоморфні всередині області  $\gamma$ . Функції  $\varphi(\zeta)$  і  $\psi(\zeta)$  шукаються у вигляді:

$$\varphi(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \zeta + \ln(1-\zeta) + \frac{1}{2} \zeta \right] + \varphi_0(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \ln \zeta - \ln(1-\zeta) + \frac{1}{1-\zeta} \right] + \psi_0(\zeta),$$

Крайові умови мають вигляд:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0,$$

$$\varphi(\sigma) + \sigma \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0.$$

$$\frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \sigma + \ln(1-\sigma) + \frac{1}{2} \sigma \right] + \varphi_0(\sigma) + \sigma \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \sigma - \frac{\sigma}{\sigma-1} + \frac{1}{2} \right] + \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} +$$

$$+ \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{\chi}{(1+\chi)} \ln \sigma - \ln \left( \frac{\sigma-1}{\sigma} \right) + \frac{\sigma}{\sigma-1} \right] + \overline{\psi_0(\sigma)} = 0,$$

$$\frac{P}{2\pi} [\ln(-1)] + \varphi_0(\sigma) + \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \sigma^2 \right] + \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = 0,$$

$$\varphi_0(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \sigma^2 - \ln(-1) \right],$$

В даній роботі для розв'язання задачі використаємо інтеграли типу Коші. Розділимо обидві частини на  $\sigma - \zeta$  і  $2\pi i$  і візьмемо інтеграли по границі області  $\gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\psi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{\sigma - \zeta} d\sigma.$$

Оскільки  $\varphi_0(\sigma)$  представляє собою граничне значення однозначної аналітичної функції всередині кола, то для  $|\zeta| < 1$  інтеграл дорівнює  $\varphi_0(\zeta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \varphi_0(\zeta).$$

Оскільки  $\overline{\psi_0(\sigma)}$  представляє собою граничне значення аналітичної функції зовні кола, то для  $|\zeta| < 1$  інтеграл дорівнює  $\overline{\psi_0(\infty)} = \overline{a'_0}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\psi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{a'_0}.$$

Оскільки при заданні навантажень функції  $\varphi_0(\zeta)$  і  $\psi_0(\zeta)$  можна визначити з точністю до похідної постійної, то можна покласти  $\overline{a'_0} = 0$ .

$$\text{Розглянемо інтеграл } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} :$$

$$\varphi_0(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots,$$

$$\overline{\varphi_0(\sigma)} = \overline{a_1} + 2\overline{a_2} \overline{\sigma} + 3\overline{a_3} \overline{\sigma}^2 + \dots = \overline{a_1} + \frac{2\overline{a_2}}{\sigma} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma^2} + \dots,$$

$$\overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} = \overline{a_1} \sigma + 2\overline{a_2} + \frac{3\overline{a_3}}{\sigma} + \dots$$

Підінтегральна функція  $\overline{\sigma \varphi_0(\sigma)}$  представляє собою граничне значення функції  $\overline{a_1} \zeta + 2\overline{a_2} + \frac{3\overline{a_3}}{\zeta} + \dots$  аналітичної зовні круга за виключенням полоси на нескінченності з головною частиною  $G(\zeta) = \overline{a_1} \zeta + 2\overline{a_2}$ , тому інтеграл типу Коші буде дорівнювати:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\sigma \varphi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{a_1} \zeta + 2\overline{a_2},$$

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \zeta^2 - i\pi \right] - \overline{a_1} \zeta,$$

$$2a_1 = \frac{d}{d\zeta} \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \zeta^2 - i\pi \right]_{\zeta=0} = 0,$$

Таким чином, після елементарних перетворень отримаємо:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \zeta^2 \right]$$

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \zeta + \ln(1-\zeta) + \frac{1}{2} \zeta + \frac{\zeta^2}{1+\chi} \right], \\ \varphi(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \frac{z}{R} + \ln \left( 1 - \frac{z}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{R} + \frac{1}{(1+\chi)} \frac{z^2}{R^2} \right], \\ \Phi(z) = \varphi'(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{z} - \left( \frac{1}{R-z} \right) + \frac{1}{2R} + \frac{2}{(1+\chi)} \frac{z}{R^2} \right], \\ \operatorname{Re} \Phi(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{\rho} \cos \theta - \frac{R - \rho \cos \theta}{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + \frac{1}{2R} + \frac{2}{(1+\chi)} \frac{\rho \cos \theta}{R^2} \right].\end{aligned}$$

Підставимо, на границі  $\rho = R$ , тоді  $\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{P}{2\pi R} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \cos \theta \right]$ . Останній результат має місце, якщо йти по границі по  $\theta = 0$ ,  $\rho \rightarrow R$ ,  $\operatorname{Re} \Phi \rightarrow -\infty$ .

Перейдемо до визначення  $\psi(z)$ , для цього скористаємося граничними умовами:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(\sigma)} + \overline{\sigma} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) &= 0, \\ \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) &= 0, \\ \frac{P}{2\pi} [\ln(-1)] + \overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{\sigma^2} \right] + \frac{1}{\sigma} \varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) &= 0, \\ \overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{\sigma^2} - \ln(-1) \right].\end{aligned}$$

Оскільки  $|\zeta| \leq 1$  інтеграл дорівнює

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma^2 (\sigma - \zeta)} &= 0, \\ \psi_0(\zeta) &= 0\end{aligned}$$

Нарешті, для  $\varphi(\zeta)$  і  $\psi(\zeta)$  на підставі формул наведених вище матимемо вирази:

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \ln \zeta - \ln(1-\zeta) + \frac{1}{1-\zeta} \right], \\ \psi(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \ln \frac{z}{R} - \ln \left( \frac{R-z}{R} \right) + \frac{R}{R-z} \right], \\ \Psi(z) = \psi'(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\chi}{(1+\chi)} \frac{1}{z} + \frac{1}{R-z} + \frac{R}{(R-z)^2} \right] \\ \varphi(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \zeta + \ln(1-\zeta) + \frac{1}{2} \zeta + \frac{\zeta^2}{1+\chi} \right], \\ \varphi(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \ln \frac{z}{R} + \ln \left( 1 - \frac{z}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{R} + \frac{1}{(1+\chi)} \frac{z^2}{R^2} \right], \\ \Phi(z) = \varphi'(z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{z} - \left( \frac{1}{R-z} \right) + \frac{1}{2R} + \frac{2}{(1+\chi)} \frac{z}{R^2} \right],\end{aligned}$$

$$\Phi'(z) = \Phi''(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(R-z)^2} + \frac{2}{(1+\chi)} \frac{1}{R^2} \right],$$

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+\chi)} \frac{1}{\rho} \cos \theta - \frac{R - \rho \cos \theta}{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + \frac{1}{2R} + \frac{2}{(1+\chi)} \frac{\rho \cos \theta}{R^2} \right],$$

Напруження знайдемо з формули Колосова-Мусхелішвілі:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z); \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\tau_{\rho\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \cdot e^{2i\theta}. \end{cases}$$

Після перетворень отримуємо напружений стан пластини:

$$\sigma_{\rho} = \frac{p}{\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{R - \rho \cos \theta}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)} - \frac{1}{2R} - \frac{2\rho \cos \theta}{(1+\chi)R^2} \right] -$$

$$- \frac{p}{2\pi} \left[ \rho \frac{(R^2 \cos \theta - 2R\rho + \rho^2 \cos \theta)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{2\rho \cos \theta}{(1+\chi)R^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{\rho} \frac{(R \cos \theta - \rho)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)} - R \frac{(R^2 \cos 2\theta - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{p}{\pi} \left[ \frac{1}{(1+\chi)} \frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{R - \rho \cos \theta}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)} - \frac{1}{2R} - \frac{2\rho \cos \theta}{(1+\chi)R^2} \right] +$$

$$+ \frac{p}{2\pi} \left[ \rho \frac{(R^2 \cos \theta - 2R\rho + \rho^2 \cos \theta)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{2\rho \cos \theta}{(1+\chi)R^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{\rho} \frac{(R \cos \theta - \rho)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)} - R \frac{(R^2 \cos 2\theta - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right]$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{p}{2\pi} \sin \theta \left[ \frac{2}{(1+\chi)} \frac{1}{\rho} + \rho \frac{(R^2 - \rho^2)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{2\rho}{(1+\chi)R^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{R^2}{\rho} \frac{1}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)} - 2R^2 \frac{(R \cos \theta - \rho)}{(R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right]$$

Переміщення вибиралися у вигляді  $w(\rho, \theta) = w(\rho) \cos \theta$ , де  $w(\rho) = a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + \dots + a_n\rho^n$ , поліном  $w(\rho)$  вибраний так, що задовольняє граничним умовам у центрі пластини.

Отже, тепер перейдемо до визначення критичної сили, прикладеної на границі пластини. Точність критичної сили було визначено в залежності від апроксимації переміщення. Частина коефіцієнтів визначалася з граничних умов на контурі пластинки, де радіальний згинаючий момент і поперечна сила дорівнюють нулю:

$$M_{\rho} = D(\chi_{\rho} + \nu\chi_{\theta}), \quad M_{\theta} = D(\chi_{\theta} + \nu\chi_{\rho}), \quad H = D(1-\nu)\chi_{\tau}, \quad R_{\rho} = \frac{\partial M_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{M_{\rho} - M_{\theta}}{\rho} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$M_{\rho} = 0, \quad R_{\rho} = 0.$$

Для визначення коефіцієнтів  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  використано варіаційний метод – метод Рітца [4], і крайові умови. Задача є симетричною відносно діаметра вздовж якого діє сила, тому переміщення вибрані у вигляді степеневих рядів по радіусу, який помножено на косинус полярного кута. Так як визначається мінімальна сила, то утримується тільки косинус кута. Кількість членів степеневих рядів визначається необхідною точністю і необхідністю задовольнити граничним умовам. Показано, що достатньо утримати п'ять членів ряду:

$$w(\rho, \theta) = \sum a_n \rho^n \cdot \cos \theta, \quad n=2,3\dots 6$$

Останні коефіцієнти визначаються з умови мінімуму енергетичного функціоналу [5].

В першому випадку, при  $n=2,3,4$ , інтегруючи потенціальну енергію и роботу зовнішніх сил, отримаємо:

$$U = \frac{\pi R^2}{2} (7 + 2\nu) \cdot a_2^2, \quad W = \frac{5}{4} P R^3 \cdot a_2^2$$

$$\delta(U - W) = 0$$

$$\frac{\pi R^2}{2} (7 + 2\nu) - \frac{5}{4} P R^3 = 0$$

Звідки отримаємо мінімальне значення параметра  $P_{кр}$ :

$$P_{1кр} = \frac{2\pi}{5R} \frac{D}{h} (7 + 2\nu).$$

При  $n = 2, 3, 4, 5$  переміщення приймуть вигляд:

$$w_2(\rho, \theta) = \left( a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 - \frac{(8\nu a_3 \rho + 2\nu a_2 + 24a_3 \rho + 13a_2) \rho^2}{23 + 7\nu} + \frac{1}{2} \frac{(15a_3 \rho + 4\nu a_2 + 5\nu a_3 \rho + 11a_2) \rho^2}{23 + 7\nu} \right) \cdot \cos \theta$$

Тоді інтегруючи, маємо

$$U = \frac{D}{2} \frac{\pi R^2}{8(529 + 322\nu + 49\nu^2)} ((6727 + 5394\nu + 1440\nu^2 + 128\nu^3) \cdot a_2^2 + (2152\nu^2 R + 7952\nu R + 9672R + 192R\nu^3) \cdot a_2 a_3 + (72\nu^3 R^2 + 840\nu^2 R^2 + 3224R^2\nu + 4056R^2) \cdot a_3^2)$$

$$W = \frac{h}{8} \frac{P R^3}{240(23 + 7\nu)^2} ((37200\nu + 4800\nu^2 + 72075) \cdot a_2^2 + (4032\nu^2 R + 33096\nu R + 67704R) \cdot a_2 a_3 + (900\nu^2 R^2 + 16900R^2 + 7800\nu R^2) \cdot a_3^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} (U - W) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_3} (U - W) = 0$$

$$\left( \frac{1}{4} \frac{(6727 + 5394\nu + 1440\nu^2 + 128\nu^3) \pi R^2}{529 + 322\nu + 49\nu^2} - \frac{1}{120} \frac{(37200\nu + 4800\nu^2 + 72075) R^3 P}{(23 + 7\nu)^2} \right) a_2 + \left( \frac{1}{8} \frac{(9672 + 7952\nu + 2152\nu^2 + 192\nu^3) \pi R^3}{529 + 322\nu + 49\nu^2} - \frac{1}{240} \frac{(33096\nu + 4032\nu^2 + 67704) R^4 P}{(23 + 7\nu)^2} \right) a_3 = 0,$$

$$\left( \frac{1}{8} \frac{(9672 + 7952\nu + 2152\nu^2 + 192\nu^3) \pi R^3}{529 + 322\nu + 49\nu^2} - \frac{1}{240} \frac{(33096\nu + 4032\nu^2 + 67704) R^4 P}{(23 + 7\nu)^2} \right) a_2 + \left( \frac{1}{4} \frac{(4056 + 3224\nu + 840\nu^2 + 72\nu^3) \pi R^4}{529 + 322\nu + 49\nu^2} - \frac{1}{120} \frac{(7800\nu + 900\nu^2 + 16900) R^5 P}{(23 + 7\nu)^2} \right) a_3 = 0.$$

Складемо матрицю, з характеристичного рівняння знайдемо її власні числа:

$$P_{2кр} = \frac{\pi}{37R} \frac{D}{h} (160v + 605 - 5\sqrt{1024v^2 + 6856v + 11977})$$

Аналогічно для третього варіанта, де  $n = 2, 3, \dots, 6$

### Висновки

В даній роботі було розглянуто задачу стійкості круглї пластинки навантаженої радіальною силою, що прикладена на границі. Було визначено вихідні характеристики напружено-деформованого стану (НДС) пластини при зосередженому радіальному навантаженні методами теорії функцій комплексної змінної. Безпосередньо величину критичної сили пластини було визначено енергетичними методами. Визначено потенціальну енергію деформації, роботу прикладених сил, досліджено точність визначення критичної сили в залежності від апроксимації переміщення.

**Аннотація.** В работе рассмотрена задача устойчивости круглой пластинки нагруженной радиальной силой приложенной на границе. Задача моделирует условия работы такого инструмента, как дисковая фреза, тонкий отрезной круг, для которых такая сила может привести к разрушению, а также может влиять на ее колебания. Одним из факторов, который может привести к ее разрушению является потеря устойчивости. Основной задачей расчета на устойчивость является определение критической силы, приложенной на границы пластины.

**Ключевые слова:** круглая пластина, устойчивость, критическая нагрузка, НДС, энергетический критерий устойчивости.

**Abstract.** When cutting disk cutter at its border force of cutting, which can be decomposed into radial and tangential components. Under the action of radial force thin cutters may lose stability, leading to their destruction. Thin cutter can be seen as a circular plate unit thickness radius  $R$ , which is rigidly fixed in the center and loaded radial force  $F$ , and on its outer edge radial concentrated moment and shear force available.

The use of thin detachable cutters shows that very often the case of destruction, and taking into account these aspects of the problem is urgent.

Problem determination of critical power actually divided into two phases. First - the definition of the stress-strain state of mills under the applied forces. This problem is seen as a problem of plane strain condition for the development of the method of application of the theory of functions of a complex variable, developed in the works M.Mushelishvili. The second stage - the definition of critical power, which uses the energy method.

The main aim of the calculation is to determine the stability of the critical force applied to the plate boundary. To find the critical values of  $P_{cr}$  in this paper uses the energy stability criterion in the form of Brian.

**Keywords:** The circular plate, stability, critical load, energy criterion.

### Бібліографічний список використаної літератури

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Наука, 1967, 984 с.
2. Алфутов Н.А. Энергетический критерий устойчивости упругих тел. – М.: Машиностроение, 1978, 311 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966г, 709с.
4. Абовский Н.П., Андреев Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. Красноярск: Изд-во Красноярского пед. ин-та, 1973г., 190с.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970г, 512с.

### References

1. Vol'mir A.S. Ustojchivost' uprugih system (Stability of elastic systems). Moscow: Nauka, 1967, 984 p.
2. Alfutov N.A. Jenergeticheskij kriterij ustojchivosti uprugih tel (Energy criterion of stability of elastic bodies) Moscow: Mashinostroenie, 1978, 311 p.
3. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskij teorii uprugosti (Some basic problems of mathematical theory of elasticity) Moscow: Nauka, 1966, 709 p.
4. Abovskij N.P., Andreev N.P. Variacionnye principy teorii uprugosti i teorii obolochek (Variational principles of elasticity theory and the theory of shells) Krasnojarsk: Izd-vo Krasnojarskogo ped. in-ta, 1973, 190 p.
5. Mihlin S.G. Variacionnye metody v matematicheskij fizike (Variational methods in mathematical physics) Moscow: Nauka, 1970, 512 p.

Подана до редакції 28.04.2014