

УДК 531.224

Молтасов А. В. м.н.с., Мотрунич С. И. м.н.с.
ІЭС им. Е.О.Патона НАН Украины, г. Киев, Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПОЛОСЫ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ НА ОСНОВАНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Moltasov A., Motrunich S.

E. O. Paton Electric Welding Institute, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, Ukraine (moltasov@gmail.com)

INVESTIGATION OF PURE BENDING OF THE BAND AT LARGE DEFORMATIONS BASED ON ENERGY CRITERIA OF PLASTICITY

Разработана методика и теоретически решена задача чистого изгиба узкой полосы с использованием энергетического условия пластичности. Установлено распределение радиальных и окружных напряжений по сечению полосы в зависимости от параметра, связанного с радиусом кривизны аналитической зависимостью. Введено понятие нейтрального угла, определяющего пределы изменения вышеупомянутого параметра, а, следовательно, и напряжённое состояние. Получены зависимости нейтрального угла от отношения внешнего и внутреннего радиуса кривизны. Получены формулы для определения нейтрального радиуса через нейтральный угол. Определены допустимые пределы изменения отношения внутреннего радиуса кривизны к внешнему радиусу. Введено понятие коэффициента смещения нейтральной поверхности, построены зависимости этого коэффициента от толщины полосы. Произведён расчёт напряжённого состояния полосы конкретных размеров с использованием энергетического критерия пластичности и критерия пластичности максимальных касательных напряжений. Установлено, что в некоторых точках различие между полученными значениями окружного напряжения достигает 13%.

Ключевые слова: пластический изгиб, узкая полоса, энергетический критерий пластичности, нейтральная поверхность напряжений, нейтральный радиус, нейтральный угол, коэффициент смещения

Введение

Во всех отраслях машиностроения широко используются такие конструктивные элементы как кольца, фланцы, обечайки, шпангоуты, звенья цепей и т. п. Такого рода детали, как правило, изготавливают посредством пластического изгиба стержневых или листовых заготовок с последующей сваркой.

При плоском деформированном состоянии, которое имеет место при изгибе листовых заготовок, удобно использовать энергетический критерий пластичности [1, 2]. При изгибе полос реализуется плоское напряжённое состояние и условие пластичности Мизеса принимает математически сложный вид, поэтому используют критерий пластичности максимальных касательных напряжений [3].

Поскольку экспериментально доказано [4, 5], что для пластичных конструкционных материалов, таких как стали и алюминиевые сплавы, энергетический критерий даёт более точные результаты, чем критерий максимальных касательных напряжений, решение задачи о чистом изгибе полосы с использованием энергетического критерия пластичности представляет научный и практический интерес.

Исследуемая задача в данной постановке рассматривается авторами впервые. Для решения поставленной задачи выбран подход, который впервые был использован для решения задач об упруго-пластическом состоянии дисков находящихся под действием внутреннего и внешнего давления [6, 7].

Поставленная авторами задача отличается от задачи о диске тем, что при нагружении внутренним и внешним давлением в диске различается чисто упругая и чисто пластическая область, а при изгибе полосы упругая область вырождается в линию, называемую нейтральной поверхностью напряжений. Таким образом, в растянутой и сжатой части полосы напряжённое состояние чисто пластическое, а на нейтральной поверхности напряжений происходит резкий переход от окружного растяжения к окружному сжатию.

Цель

Целью данной работы является разработка методики для решения задачи пластического изгиба полосы с использованием энергетического условия пластичности. Необходимо ввести параметр, определяющий напряжённое состояние и связать его с геометрическими размерами изгибаемой полосы, а также установить пределы изменения этого параметра. Вывести аналитическую зависимость для определения положения нейтральной поверхности напряжений. Путём введения коэффициента, указать различие в положении

нейтральной поверхности напряжений при изгибе листов и полос. Исследовать значения этого коэффициента для различных поперечных размеров полосы. Связать изгибающий момент, действующий на полосу, с переменной, через которую выражаются напряжения в сечениях изгибаемой полосы. Для полосы с конкретными геометрическими размерами определить напряжённое состояние, используя энергетический критерий пластичности и критерий пластичности максимальных касательных напряжений; сравнить полученные результаты.

Исследование

Рассмотрим полосу, изогнутую моментом на внутренний радиус a , при этом радиус кривизны его наружной поверхности равен b . Уравнение равновесия элемента изгибаемого бруса в полярных координатах имеет вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \quad (1)$$

Энергетическое условие пластичности при $\sigma_z = 0$ без учёта упрочнения материала полосы принимает вид

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = \sigma_s^2, \quad (2)$$

где σ_s – предел текучести материала полосы.

Компоненты напряжения согласно [8] могут быть представлены через переменную ψ следующим образом

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) \\ \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos(\psi - \frac{\pi}{6}) \end{cases}, \quad (3)$$

легко убедиться, что при такой подстановке условие пластичности (2) удовлетворяется тождественно.

Внося в дифференциальное уравнение равновесия (1) выражения для напряжений (3), получим

$$\sin(\psi + \frac{\pi}{6}) \frac{d\psi}{dr} + \frac{\sin \psi}{r} = 0, \quad (4)$$

это дифференциальное уравнение имеет интеграл

$$\frac{C}{r^2} = \exp[\sqrt{3}\psi] \sin \psi. \quad (5)$$

Найдём константу интегрирования C из граничных условий на внешней поверхности $r=b$, где $\sigma_r=0$, $\psi=\psi_b$

$$C = b^2 \exp[\sqrt{3}\psi_b] \sin \psi_b,$$

подставив последнее выражение в (5), получим уравнение, связывающее радиус кривизны r с параметром ψ в области тангенциального растяжения

$$r^2 = b^2 \exp[\sqrt{3}(\psi_b - \psi)] \frac{\sin \psi_b}{\sin \psi}. \quad (6)$$

Теперь определим константу интегрирования C из граничных условий на внутренней поверхности $r = a$, которые имеют вид $\sigma_r = 0$, $\psi = \psi_a$

$$C = a^2 \exp[\sqrt{3}\psi_a] \sin \psi_a,$$

подставим это выражение в (5), и аналогично получим уравнение, связывающее радиус кривизны r с параметром ψ в области тангенциального сжатия

$$r^2 = a^2 \exp[\sqrt{3}(\psi_a - \psi)] \frac{\sin \psi_a}{\sin \psi}. \quad (7)$$

Из выражений (3) очевидно, что $\psi_b = \pi/3$ ($\sigma_r = 0$, $\sigma_t = \sigma_s$), а $\psi_a = \psi_b + \pi = 4\pi/3$ ($\sigma_r = 0$, $\sigma_t = -\sigma_s$). Но здесь необходимо заметить, что параметр ψ не может изменяться непрерывно в промежутке от $\pi/3$ до $4\pi/3$, это замечание будет пояснено ниже.

Исходя из выше сказанного, можно утверждать, что в области растяжения параметр ψ изменяется в пределах от $\pi/3$ до некоторого значения ψ_n^+ , а в области сжатия от некоторого значения ψ_n^- до $4\pi/3$ соответственно (смотри рис. 1).

Для того чтобы определить неизвестные значения ψ_n^+ и ψ_n^- воспользуемся граничным условием на нейтральной поверхности $r = r_n$, которое имеет вид $\sigma_r(\psi_n^+) = \sigma_r(\psi_n^-)$, что говорит о равенстве радиальных напряжений в области растяжения и в области сжатия на нейтральной поверхности.

Подставим это граничное условие в (6) и получим

$$r_n^2 = b^2 \exp[\sqrt{3}(\psi_b - \psi_n^+)] \frac{\sin \psi_b}{\sin \psi_n^+}. \quad (8)$$

Теперь подставим его в (7), получим

$$r_H^2 = a^2 \exp[\sqrt{3}(\psi_a - \psi_H^-)] \frac{\sin \psi_a}{\sin \psi_H^-} \tag{9}$$

Приравняв правые части выражений (8) и (9), учитывая, что $\psi_H^+ = 5\pi/6 - \Delta\psi_H/2$, $\psi_H^- = 5\pi/6 + \Delta\psi_H/2$, где $\Delta\psi_H$ – нейтральный угол, физический смысл которого является из рисунка 1, получим уравнение

$$\frac{a}{b} = \exp\left[\sqrt{3}\left(\frac{\Delta\psi_H}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \sqrt{\frac{\sin(\frac{\Delta\psi_H}{2} + \frac{5\pi}{6})}{\sin(\frac{\Delta\psi_H}{2} - \frac{5\pi}{6})}} \tag{10}$$

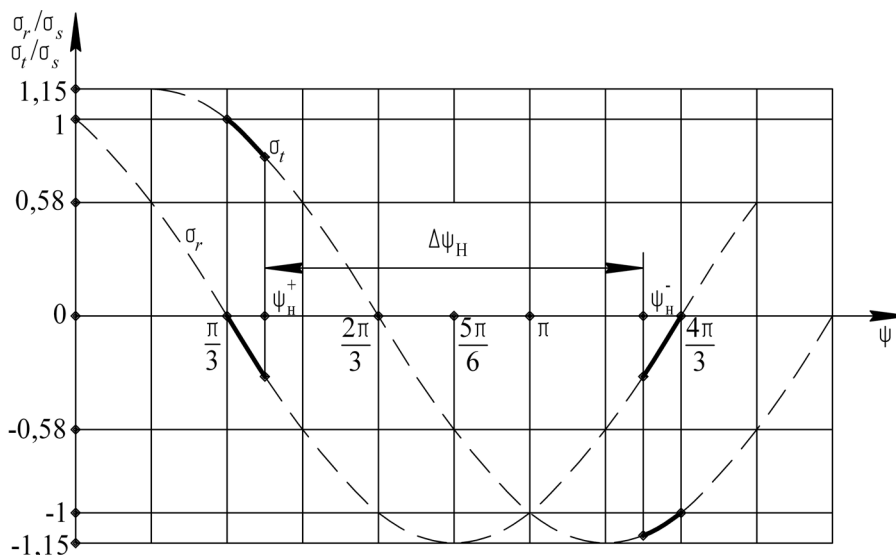


Рис. 1. Зависимость радиальных и окружных напряжений от параметра ψ (сплошными линиями показано изменение напряжений в областях растяжения и сжатия для некоторого отношения b/a)

Решая трансцендентное уравнение (10) относительно $\Delta\psi_H/2$, мы определим пределы изменения ψ в областях тангенциального растяжения и сжатия. Затем, подставляя значения ψ в выражения для напряжений (3) и в выражения для радиуса (6) и (7) в областях растяжения и сжатия соответственно, можем получить распределение напряжений по сечению полосы. Таким образом, можно утверждать, что нейтральный угол $\Delta\psi_H$ определяет напряжённое состояние.

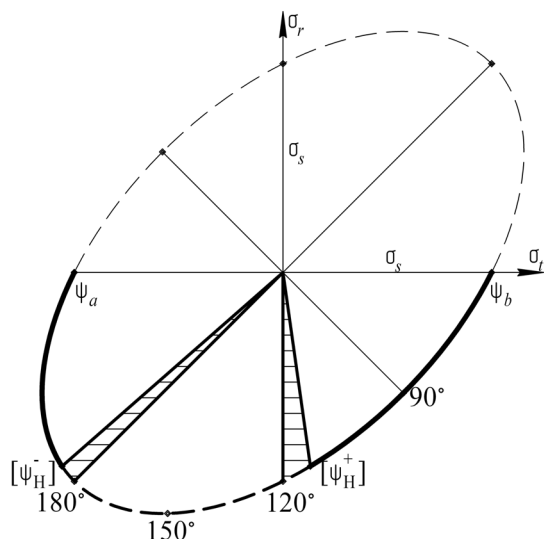


Рис. 2. Области определения (сплошные линии), неоднозначности (заштрихованы) и неопределённости (штриховая линия) напряжённого состояния, соответствующего задаче о чистом изгибе полосы, на эллипсе пластичности

Положение нейтральной поверхности напряжений определяется из формул (8) и (9) через внешний и внутренний радиусы соответственно, подставив конкретные значения a и b , легко убедиться, что значения r_H , подсчитанные по обеим формулам, совпадают. Здесь следует вернуться к замечанию о непрерывности изменения параметра ψ . При приближении a/b к 0 ($\Delta\psi_H \rightarrow \pi/3$) значения r_H , определённые по формуле (9) будут превосходить значения r_H , определённые по формуле (8), то есть в сечении полосы область сжатия накладывается на область растяжения и одному значению радиуса кривизны отвечают два различных значения напряжения. Расчёты показали, что область наложения для отношений $a/b \geq 0,04$ ($b/a \leq 25$) составляет около 1% от высоты полосы, поэтому в практических расчётах эту область можно не учитывать, с дальнейшим уменьшением соотношения a/b пределы этой области резко расширяются, например, при $a/b = 0,01$ она занимает уже 25% сечения. Предельно допустимому значению $[a/b]=0,04$, соответствует значение $[\Delta\psi_H]=65^\circ$, откуда $[\psi_H^+]=117,5^\circ$, $[\psi_H^-]=182,5^\circ$. Таким образом, задача имеет однозначное решение при изменении $60^\circ \leq \psi \leq 117,5^\circ$, что соответствует области растяжения, и $182,5^\circ \leq \psi \leq 240^\circ$ в области сжатия. Области неоднозначности располагаются в малых пределах изменения $117,5^\circ \leq \psi \leq 120^\circ$ и

$180^\circ \leq \psi \leq 182,5^\circ$. Промежуток $120^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ представляє собою область неопределенности, так як при $\psi = 180^\circ$ синус змінює знак і радіус нейтральної поверхності згідно (9) є мнимим числом. Зображення області визначення параметра ψ відповідно даній задачі на еліпсе пластичності представлено на рис. 2 (верхня частина еліпса не розглядається, так як σ_r стискаючі по всьому сеченню полоси).

В задачах про пластичне вигиби листів положення нейтральної поверхності напружень визначається формулою [9], що містить a і b

$$r_H = \sqrt{ab}. \quad (11)$$

Формулу аналогічну (11) можна отримати і в нашому випадку якщо помножити праві і ліві частини виражень (8) і (9), таким чином, після перетворень отримаємо

$$r_H = \chi(\Delta\psi_H) \sqrt{ab}, \quad (12)$$

де $\chi(\Delta\psi_H)$ – коефіцієнт зміщення, визначається по формулі

$$\chi(\Delta\psi_H) = \sqrt[4]{\frac{3}{4 \sin\left(\frac{\Delta\psi_H}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\Delta\psi_H}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)}}. \quad (13)$$

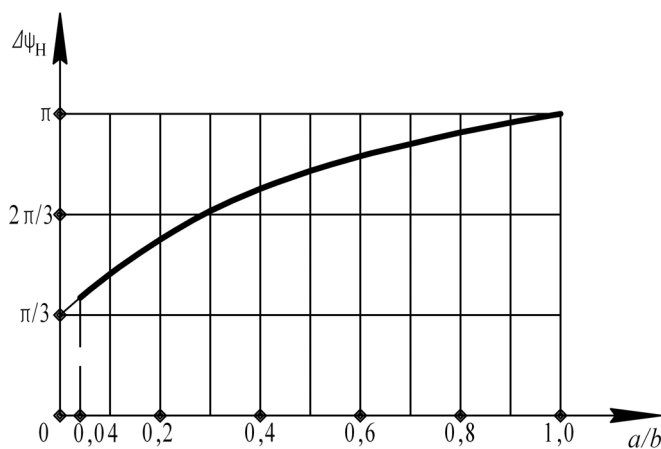
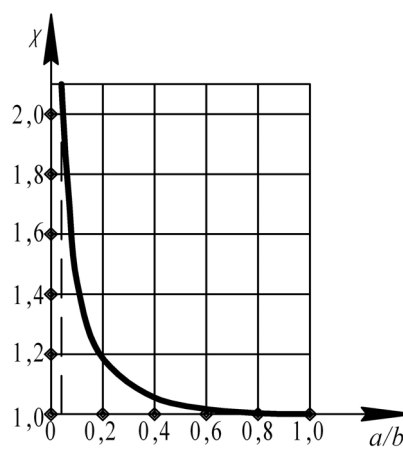
Подсчитаем по формуле (13) значення параметра χ для різних відношень a/b від граничного допустимого значення 0,04 до 1 і відповідні їм значення $\Delta\psi_H$, внесемо результати в таблицю.

Таблиця 1

Значення нейтрального кута $\Delta\psi_H$ і коефіцієнта зміщення χ для різних відношень a/b

a/b	0,04	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Delta\psi_H$	1,13	1,418	1,83	2,13	2,36	2,546	2,7	2,832	2,948	3,05	π
χ	2,097	1,441	1,187	1,098	1,055	1,031	1,017	1,008	1,003	1,001	1

По даним таблиці 1 можна побудувати графіки, при допомозі яких зручно визначати значення параметрів $\Delta\psi_H$ і χ для будь-яких допустимих відношень a/b . Ці графіки зображені на рис. 3 і рис. 4.

Рис. 3. Графік залежності нейтрального кута $\Delta\psi_H$ від відношення a/b Рис. 4. Графік залежності коефіцієнта зміщення χ від відношення a/b

Из таблиці 1 видно, що при $a/b = 1$ $\Delta\psi_H = \psi_a - \psi_b$, при цьому криві на рис. 1 вироджуються в точки $\psi_b = \psi_n^+$, $\psi_a = \psi_n^-$, тобто, маємо випадок лінійного напруженого стану: $\sigma_r = 0$, $\sigma_t = \sigma_s$ всюди в розтягнутій області, $\sigma_r = 0$, $\sigma_t = -\sigma_s$ всюди в стиснутій області. Крім того, в цьому випадку $\chi = 1$ і формули (11) і (12) збігаються.

Изгибающий момент, приложенный к единице ширины полоси, можно определить из условия равновесия

$$M = \int \sigma_t r dr = \int_{r_H}^b \sigma_t^+ r dr + \int_a^{r_H} \sigma_t^- r dr, \quad (14)$$

где σ_t^+ – окружное напряжение в области растяжения;

σ_t^- – окружное напряжение в области сжатия.

Выразим dr через $d\psi$ из дифференциального уравнения (4) и подставим вместо σ_t^+ и σ_t^- выражения для σ_r , определяемые формулой (3), в результате получим

$$M = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \int_{\psi_H^+}^{\psi_b} r^2 \frac{\cos(\psi - \frac{\pi}{6})\sin(\psi + \frac{\pi}{6})}{\sin \psi} d\psi - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \int_{\psi_a}^{\psi_H^-} r^2 \frac{\cos(\psi - \frac{\pi}{6})\sin(\psi + \frac{\pi}{6})}{\sin \psi} d\psi.$$

Подставим в первый и во второй интегралы выражения (6) и (7) для r^2 соответственно, тогда после преобразований получим окончательное выражение для изгибающего момента на единицу ширины

$$M = \sigma_s b^2 \int_{\pi/3}^{\psi_H^+} e^{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-\psi)} f(\psi) d\psi - \sigma_s a^2 \int_{\psi_H^-}^{4\pi/3} e^{\sqrt{3}(\frac{4\pi}{3}-\psi)} f(\psi) d\psi, \tag{15}$$

где

$$f(\psi) = \frac{\cos(\psi - \frac{\pi}{6})\sin(\psi + \frac{\pi}{6})}{\sin^2 \psi}.$$

Интегралы (15) вычисляются при помощи численных методов. Зависимость логарифма безразмерного момента от отношения a/b изображена на рисунке 5.

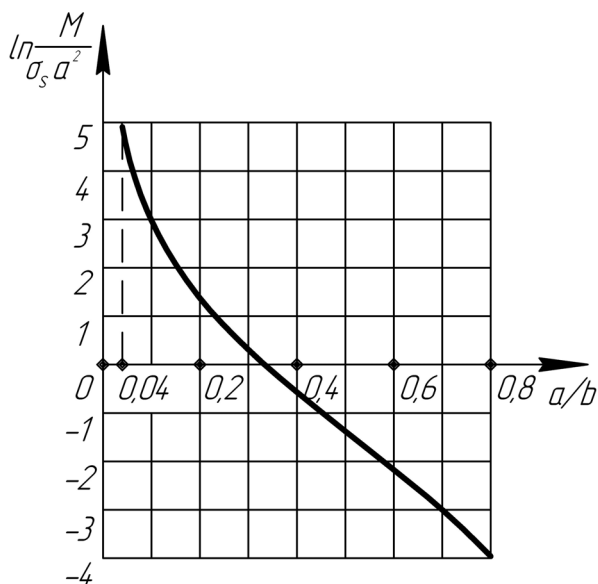


Рис. 5. График зависимости безразмерного момента от отношения a/b

области окружного сжатия. По формуле (3) определим напряжения, которые соответствуют заданным значениям радиуса r , результаты внесём в таблицу 2.

Исходя из рисунка 4 при изменении отношения a/b от 0,8 до 1 схема напряжённого состояния близка к линейной, поэтому зависимость логарифма безразмерного момента от a/b построена в интервале изменения от 0,04 до 0,8.

Рассмотрим полосу из стали Ст3кп ($\sigma_s = 255$ МПа) изогнутую моментом таким образом, что внутренний радиус $a = 40$ мм, внешний радиус $b = 80$ мм. Для соотношения $a/b = 0,5$ по данным таблицы 1 нейтральный угол $\Delta\psi_n = 146^\circ$, тогда согласно рисунку 1 $\psi_n^+ = 5\pi/6 - \Delta\psi_n/2 = 77^\circ$, $\psi_n^- = 5\pi/6 + \Delta\psi_n/2 = 223^\circ$. В результате установлено, что в области окружного сжатия $223^\circ \leq \psi \leq 240^\circ$ и в области окружного растяжения $60^\circ \leq \psi \leq 77^\circ$. Взяв из таблицы 1 значение коэффициента $\chi = 1,031$ определим положение нейтральной поверхности по формуле (12) $r_n = 58,32$ мм, здесь необходимо отметить, что по формуле приведённой в работе [10], где использовался критерий пластичности максимальных касательных напряжений, получается такой же результат. Установим значения параметра ψ в зависимости от текущего радиуса кривизны r , используя формулу (6) для области окружного растяжения и формулу (7) для области окружного сжатия.

Таблица 2

Результаты расчётов напряжений на основании энергетического критерия пластичности

r , мм	ψ , °	σ_r , МПа	σ_t , МПа
40	240	0	-255
45	234,5	-29	-268
50	229,6	-53	-277
55	225,5	-74	-284
58,32(-)	223	-86	-287
58,32(+)	77	-86	201
60	75,4	-78	207
65	70,9	-55	223
70	66,9	-35	236
75	63,3	-17	246
80	60	0	255

По формулам работы [10] рассчитаем компоненты напряжения на основании критерия пластичности максимальных касательных напряжений, результаты внесём в таблицу 3.

Таблиця 3

Результаты расчётов напряжений на основании критерия пластичности максимальных касательных напряжений

r , мм	σ_r , МПа	σ_t , МПа
40	0	-255
45	-28	-255
50	-51	-255
55	-70	-255
58,32(-)	-80	-255
58,32(+)	-80	175
60	-73	182
65	-53	202
70	-34	221
75	-16	239
80	0	255

По данным таблиц 2 и 3 построим эпюры распределения напряжений по сечению полосы, что даст возможность зрительно оценить разницу в расчётах с использованием разных критериев пластичности (рис. 6).

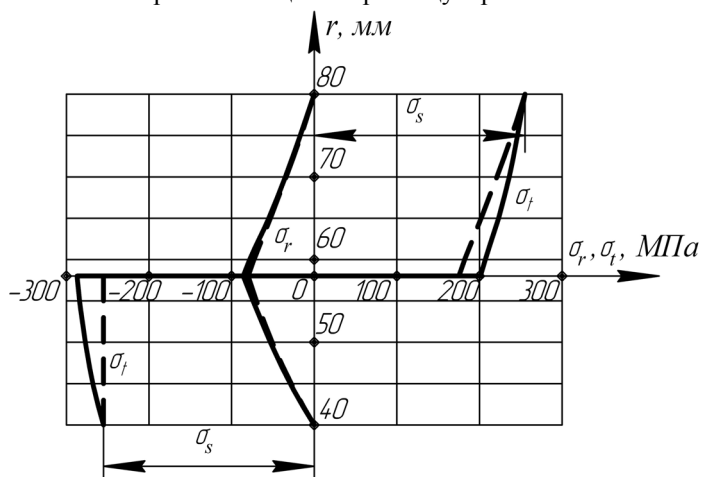


Рис. 6. Распределение напряжений по сечению полосы, полученных на основе расчётов с использованием энергетического критерия пластичности (сплошные линии) и критерия пластичности максимальных касательных напряжений (штриховые линии)

Рассмотрев рис. 6 видим, что отличие главным образом состоит в распределении окружного напряжения σ_t , причём расхождение между кривыми увеличивается с приближением к нейтральной поверхности напряжений, а на самой этой поверхности величина окружного напряжения, подсчитанная на основе энергетического критерия, превышает величину, посчитанную на основе критерия максимальных касательных напряжений, на 13 % в зоне растяжения и на 11 % в зоне сжатия.

Выводы

1. Разработана методика решения задачи чистого изгиба полосы на большую кривизну на основании теории пластического плоского напряжённого состояния. Особенностью методики является введение нейтрального угла $\Delta\psi_n$, который определяет пределы изменения параметра ψ , который

определяет напряжённое состояние. Нейтральный угол $\Delta\psi_n$ изменяется в пределах от 65° до 180° и связан с отношением внутреннего к внешнему радиусу кривизны a/b , которое определяет пределы изменения ψ . Очевидно, что предельные значения нейтрального угла соответствуют предельным соотношениям a/b .

2. Получены формулы для определения положения нейтральной поверхности напряжений. Введено понятие коэффициента смещения χ , который показывает разницу положений нейтральной поверхности при изгибе узких полос и широких листов. Коэффициент χ изменяется от 1 до 2,097 и связан с нейтральным углом, следовательно, он также зависит от отношения a/b .

3. Получено аналитическое выражение для определения изгибающего момента, действующего на единицу ширины полосы, через переменную ψ .

4. Произведены расчёты напряжённого состояния при чистом изгибе стальной полосы на основании энергетического критерия пластичности и критерия пластичности максимальных касательных напряжений. Сравнительный анализ показал, что в некоторых точках сечения полосы использование энергетического критерия даёт значение окружного напряжения на 13% выше, чем использование критерия максимальных касательных напряжений.

Анотація: Розроблена методика та теоретично розв'язана задача чистого згину вузької полоси з використанням енергетичної умови пластичності. Встановлено розподіл радіальних і окружних напружень по перерізу смуги залежно від параметра, пов'язаного з радіусом кривизни аналітичною залежністю. Введено поняття нейтрального кута, що визначає межі зміни вищезгаданого параметра, а, отже, і напружений стан. Отримано залежності нейтрального кута від співвідношення зовнішнього і внутрішнього радіуса кривизни. Отримано формули для визначення нейтрального радіусу

через нейтральний кут. Визначені допустимі межі зміни відношення внутрішнього радіуса кривизни до зовнішньому радіусу. Введено поняття коефіцієнта зміщення нейтральної поверхні, побудовані залежності цього коефіцієнта від товщини смуги. Проведено розрахунок напруженого стану смуги конкретних розмірів з використанням енергетичного критерію пластичності та критерію пластичності максимальних дотичних напружень. Встановлено, що в деяких точках різниця між отриманими величинами тангенціального напруження досягає 13 %.

Ключові слова: пластичний згин, вузька смуга, енергетичний критерій пластичності, нейтральна поверхня напружень, нейтральний радіус, нейтральний кут, коефіцієнт зміщення

Abstract. Subject, theme, aim. The subject of the research is strength of the band to pure bending for a large curvature. The aim is to establish patterns of stress distribution in the cross section of a flexible band using the plasticity condition Huber-Mises and distribution methods of the theory of plastic plane stress to the case of pure bending of the band.

Method or methodology. It was based on the earlier decision of the problem of elastic-plastic state of the ring under external or internal pressure. During the study, the authors introduced a new parameter that defines the limits of the variable through which the stress components are expressed. This option is called a neutral corner and, depending on the ratio of the inner and outer radii of curvature of the band varies from 65 ° to 180 °.

Results. We developed the technique of the theoretical solution of the problem, based on the introduction of the parameter defining the state of stress. Also we got the formulas for determining the position of the neutral surface stresses and dependence of the bending moment per unit bandwidth, the entered variable

Field of application of the results. Results of the solution of this problem can be used by the scientific and technical personnel engaged in the field of metal forming.

Keywords: plastic bending, narrow band, the energy condition of plasticity, neutral surface stress, neutral radius, neutral corner, displacement factor

Библиографический список использованной литературы

1. Зубцов М. Е. Листовая штамповка: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Машины и обработка металлов давлением». – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980. – 432с., ил.
2. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов // М.: «Высшая школа», 1963. – 388с.
3. Малинин Н. Н. Исследование больших деформаций при пластическом изгибе полосы с учётом упрочнения / Н. Н. Малинин, А. А. Ширшов // «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, №2.
4. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряжённом состоянии. «Инженерный сборник», 1954, т. XX.
5. Жуков А. М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов, «Известия АН СССР, Отд. техн. наук», 1955, №8.
6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. М., «Машиностроение». 1968. стр. 1 – 400.
7. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник – К.: Вища шк., 2002. – 308 с.: іл.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности. – М.: «Высшая школа», 1969. – 608с. с илл.
9. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956. 407 с.
10. Молтасов А. В. О причинах разрушения звеньев якорных цепей, выполненных контактно-стыковой сваркой / А. В. Молтасов, С. М. Самотрясов, П. Н. Чвертко // Вісник НУК. – 2012. – №5. – С. 149-152.

References

1. Zubtsov M. Ye. Listovaya shtampovka: Uchebnik dlya studentov vuzov, obuchayushchikhsya po spetsial'nosti «Mashiny i obrabotka metallov davleniyem» (Textbook for undergraduate students majoring in "Machinery and metal forming ."). 3-ed. Leningrad: Mashinostroyeniye. Leningr. otd-niye, 1980. p. 432
2. Storozhev M. V. Ye. A. Popov. Teoriya obrabotki metallov davleniyem (Theory of metal forming), Moscow: «Vysshaya shkola», 1963. p. 388
3. Malinin N. N. A. A. Shirshov. Issledovaniye bol'shikh deformatsiy pri plasticheskom izgibe polosity s uchotom uprochneniya (Studying of large deformations in plastic bending of a strip based on hardening), «Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye», 1965, no 2.
4. Zhukov A. M. Plasticheskiye svoystva i razrusheniye stali pri dvukhosnom napryazhonnom sostoyanii. «Inzhenernyy sbornik» (Plastic properties and fracture of steel under biaxial stress state), 1954, t. KHKH.
5. Zhukov A. M. Slozhnoye nagruzheniye i teoriya plastichnosti izotropnykh metallov (Complex loading and isotropic metal plasticity theory), «Izvestiya AN SSSR, Otd. tekhn. nauk», 1955, no 8.
6. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. Uchebnik dlya studentov vtuzov (Applied Theory of Plasticity and Creep). Moscow, «Mashinostroyeniye». 1968. pp. 1 – 400.
7. Mozharovskiy M. S. Teoriya pruzhnosti, plastichnosti i povzuchosti (theory of elasticity, plasticity and creep): Pidruchnik Kyiv: Vishcha shk., 2002. p. 308
8. Sokolovskiy V. V. Teoriya plastichnosti(Theory of Plasticity). Moscow: «Vysshaya shkola», 1969. p. 608
9. Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti (Mathematical Theory of Plasticity). Moscow, GITTL, 1956. p. 407
10. Moltasov A. V. S. M. Samotryasov, P. N. Chvertko O prichinakh razrusheniya zven'yev yakornykh tsepey, vypolnennykh kontaktno-stykovoy svarkoy (On the causes of the destruction of parts of anchor chains made flash butt welding). Visnik NUK. 2012. No 5. pp. 149-152.