

---

---

**Обчислювальні методи в радіоелектроніці**

---

---

УДК 621.391

**АЛГОРИТМ ДВУХЭТАПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ВНУТРИКАДРОВОЙ  
КАУЗАЛЬНОЙ ОБРАБОТКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ  
НЕКОРРЕЛИРОВАННОЙ ПОМЕХИ<sup>1</sup>**

*Ляшук А. Н., аспирант; Вишневы С. В., к.т.н., ассистент;  
Жук С. Я., д.т.н., профессор  
НТУУ «КПИ», Киев, Украина, oleksii.liashuk@gmail.com*

**TWO-STAGE FILTRATION ALGORITHM WITH INTERFRAME CAUSAL  
PROCESSING FOR MULTICHANNEL IMAGE WITH PRESENCE OF  
UNCORRELATED NOISE**

*Liashuk O. M., Vishnevy S. V., Zhuk S. Ya.  
NTUU "KPI", Kyiv, Ukraine oleksii.liashuk@gmail.com*

**Вступление**

При решении ряда практических задач характерно использование многоканальных изображений, к которым можно отнести цветные оптические, многочастотные и многополяризационные радиолокационные, мульти- и гиперспектральные изображения. Как многоканальные изображения в определенной степени можно рассматривать также видео и последовательности медицинских изображений [1]. Многоканальность таких данных позволяет либо повысить эффективность решения задачи, либо получить полезную информацию, которую принципиально невозможно извлечь из одноканальных изображений.

В многоканальных изображениях коэффициент межкадровой корреляции составляет 0.8 - 0.9, а в некоторых случаях приближается к 1 [1].

Одним из основных типов помех, встречающихся в многоканальных изображениях, является некоррелированная помеха. Поэтому для повышения качества изображений, а также эффективности решения конечных задач (классификации, обнаружения объектов, измерения параметров и т.п.) используют фильтрацию изображений. Оптимальные алгоритмы фильтрации изображений требуют огромных вычислительных затрат [2]. В работе [3] синтезирован двухэтапный алгоритм фильтрации двумерных изображений, в котором на первом этапе выполняется одномерная каузальная фильтрация вдоль строк и столбцов, а на втором – объединение полученных результатов. Данный алгоритм позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с оптимальным алгоритмом и обеспе-

---

<sup>1</sup> <http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1138>

читать при этом приемлемые точностные характеристики. В данной статье получен алгоритм двухэтапной фильтрации некоррелированной помехи в многоканальных изображениях с внутрикадровой каузальной обработкой.

### Теоретическое обоснование

Неискаженное помехой многоканальное изображение рис. 1, представляется в виде трехмерной матрицы, состоящей из элементов  $x(n, m, k)$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , которые соответствуют значениям яркости пикселей изображения. Искаженные некоррелированной помехой наблюдения опишем, соответственно,  $y(n, m, k)$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Обозначим текущую обрабатываемую точку  $k$ -го изображения  $x(n, m, k)$ . Введем векторы  $X_n = (x(n, 1, k), \dots, x(n, m-1, k))$ ,  $X_m = (x(1, m, k), \dots, x(n-1, m, k))$ ,  $X_k = (x(n, m, 1), \dots, x(n, m, k-1))$ , которые содержат элементы многоканального изображения согласно рис. 1. Векторы  $X_n$ ,  $X_m$ ,  $X_k$  не включают в себя текущую обрабатываемую точку  $x(n, m, k)$ . Векторам  $X_n$ ,  $X_m$ ,  $X_k$  соответствуют наблюдения  $Y_n$ ,  $Y_m$ ,  $Y_k$ , а текущей точке  $x(n, m, k)$  соответствует текущее наблюдение  $y(n, m, k)$ .

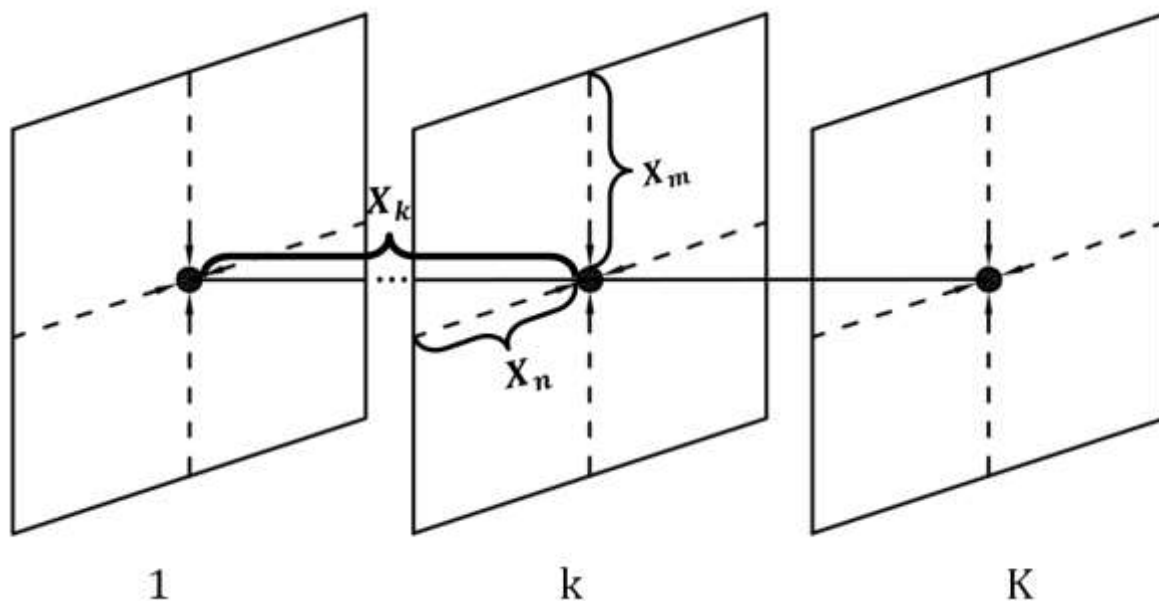


Рис. 1

Использование данных, содержащихся в векторах  $X_n$ ,  $X_m$ ,  $X_k$  при формировании оценки в точке  $x(n, m, k)$ , лежащей на их пересечении, позволяет рассматривать фильтрацию как каузальную.

Совместная плотность вероятности  $P(X)$  отчетов изображения, содержащихся в векторах  $X_n$ ,  $X_m$ ,  $X_k$ , с учетом текущей точки  $x(n, m, k)$ , имеет

вид:

$$P(X) = P(X_n, x, X_m, X_k) = p(x)P(X_n, X_m, X_k | x), \quad (1)$$

где  $x$  – текущей элемент, расположенный на пересечении осей, по которым ведется обработка, при этом для краткости записи были опущены индексы  $n, m, k$ .

Следуя методике [2] и полагая, что отсчеты, содержащиеся в векторах  $X_n, X_m, X_k$ , являются условно независимыми относительно текущей обрабатываемой точки  $x$ , выражение (1) может быть записано:

$$P(X) = p(x)P(X_n | x)P(X_m | x)P(X_k | x) \quad (2)$$

Функция правдоподобия для решаемой задачи может быть представлена в виде:

$$P(Y | X) = P(Y_n, y, Y_m, Y_k | X_n, x, X_m, X_k) = P(Y_n, y | X_n, x) \times \\ \times P(Y_m | X_m)P(Y_k | X_k) \quad (3)$$

Применяя формулу Байеса, а также теорему умножения вероятностей, учитывая выражения (2), (3), запишем выражение для апостериорной плотности вероятности  $P(X | Y)$ :

$$P(X | Y) = \frac{P(X_n, x | Y_n, y)P(Y_n, y)}{P(Y)} \frac{p(x | X_m)P(X_m)}{p(x)} \times \\ \times \frac{P(X_m | Y_m)P(Y_m)}{P(X_m)} \frac{p(x | X_k)P(X_k)}{p(x)} \frac{P(X_k | Y_k)P(Y_k)}{P(X_k)} \quad (4)$$

Выполнив сокращения в выражении (4), после интегрирования по  $X_n, X_m, X_k$ , получим выражение для определения апостериорной плотности вероятности  $p(x | Y)$  отсчета изображения  $x$ :

$$p(x | Y) = \frac{1}{p^2(x)} p(x | Y_n, y) p(x | Y_m) p(x | Y_k) \times \\ \times \frac{P(Y_n, y)P(Y_m)P(Y_k)}{P(Y)}, \quad (5)$$

где  $p(x | Y_n, y)$  – апостериорная плотность вероятности текущей обрабатываемой точки, вычисляемая на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений  $(Y_n, y)$ , где  $y$  – текущее наблюдение;  $p(x | Y_m)$ ,  $p(x | Y_k)$  – экстраполированные плотности вероятности текущей обрабатываемой точки, вычисляемые на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений  $Y_m$  и  $Y_k$  соответственно;

$P(Y_n, y), P(Y_m), P(Y_k), P(Y)$  – плотности вероятности соответствующих наблюдений, которые после их получения играют роль нормирующих

множителів.

При решении задачи оптимальной фильтрации широко используются случайные гауссовские поля. С целью сокращения объемов обозначений и, не снижая общности рассмотрения, будем полагать, что трехмерное гауссовское поле является разделимым и описывается корреляционной функцией:

$$R(n, m, k) = \sigma^2 \rho_1^{|n|} \rho_2^{|m|} \rho_3^{|k|}, \quad (6)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – коэффициенты корреляции элементов строк, столбцов и межкадровой корреляции элементов соответственно;  $\sigma^2$  – дисперсия случайного поля.

Рассмотрим случай каузальной фильтрации, когда плотности вероятности, входящие в выражение (5) являются гауссовскими  $p(x|Y_n, y) = N(\hat{x}_n, \hat{\sigma}_n^2)$ ,  $p(x|Y_m) = N(x_m^*, \sigma_m^{*2})$ ,  $p(x|Y_k) = N(x_k^*, \sigma_k^{*2})$ ,  $p(x) = N(\bar{x}, \bar{\sigma}^2)$ .

На первом этапе алгоритма объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при каузальной обработке однородного многомерного изображения осуществляется одномерная каузальная калмановская фильтрация вдоль каждой из координат изображения. Одномерная каузальная калмановская фильтрация вдоль  $n$ -й строки  $k$ -го изображения по наблюдениям  $(Y_n, y)$  описывается выражениями [4]:

$$x^*(n, j, k) = \rho_1 \hat{x}(n, j-1, k); \quad (7)$$

$$\sigma^{*2}(n, j, k) = \rho_1^2 \hat{\sigma}^2(n, j-1, k) + G_1^2; \quad (8)$$

$$K(n, j, k) = \sigma^{*2}(n, j, k) / (\sigma^{*2}(n, j, k) + R); \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}^2(n, j, k) = \sigma^{*2}(n, j, k) - K(n, j, k) \sigma^{*2}(n, j, k); \quad (10)$$

$$\hat{x}(n, j, k) = x^*(n, j, k) - K(n, j, k) (y(n, j, k) - m_y - x^*(n, j, k)), \quad (11)$$

где  $x^*(n, j, k)$ ,  $\hat{x}(n, j, k) = \hat{x}_n$  – экстраполированная и апостериорная оценки;  $\rho_1$  – коэффициент корреляции элементов строки изображения;  $\sigma^{*2}(n, j, k)$ ,  $\hat{\sigma}^2(n, j, k) = \hat{\sigma}_n^2$  – экстраполированная и апостериорная дисперсии ошибки оценок;  $K(n, j, k)$  – коэффициент усиления одномерного фильтра Калмана;  $R$  – дисперсия ошибки наблюдения;  $y(n, j, k)$  – наблюдение случайного поля;  $m_y$  – математическое ожидание случайного поля;

$G_1 = \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho_1^2}$ ;  $\bar{\sigma}$  – СКО случайного поля. Одномерная калмановская фильтрация наблюдений  $Y_m$  и  $Y_k$  вдоль остальных координат осуществляется таким же образом с помощью выражений аналогичных (7)-(11).

Поскольку плотности вероятностей в правой части выражения (5) являются гауссовскими, поэтому плотность вероятности  $p(x|Y)$  также будет гауссовской и имеет вид:

$$p(x|Y) = C \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\sigma'^2}\right), \quad (12)$$

где  $C$  является константой, а  $p(x|Y) = N(x', \sigma'^2)$ .

Приравнивая коэффициенты при  $x$  и  $x^2$  в выражениях (5) и (12) и следуя методике, приведенной в [3], можно показать, что вычисление оценок на втором этапе для текущей обрабатываемой точки изображения при каузальной внутрикадровой и межкадровой фильтрации осуществляется с помощью выражений:

$$\tilde{x} = \hat{x}_n + (x_m^* - \hat{x}_n) \tilde{\sigma}^2 / \sigma_m^{*2}; \quad (13)$$

$$\check{x} = \tilde{x} - (\bar{x} - \tilde{x}) \check{\sigma}^2 / \bar{\sigma}^2; \quad (14)$$

$$\check{\check{x}} = \check{x} + (x_n^* - \check{x}) \check{\check{\sigma}}^2 / \sigma_n^{*2}; \quad (15)$$

$$x' = \check{\check{x}} - (\bar{x} - \check{\check{x}}) \sigma'^2 / \bar{\sigma}^2; \quad (16)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma_m^{*2} - \sigma_m^{*4} / (\hat{\sigma}_n^2 + \sigma_m^{*2}); \quad (17)$$

$$\check{\sigma}^2 = -\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4 / (\tilde{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2); \quad (18)$$

$$\check{\check{\sigma}}^2 = \sigma_k^{*2} - \sigma_k^{*4} / (\check{\sigma}^2 + \sigma_k^{*2}); \quad (19)$$

$$\sigma'^2 = -\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4 / (\check{\check{\sigma}}^2 - \bar{\sigma}^2); \quad (20)$$

где  $\hat{x}_n$ ,  $\hat{\sigma}_n^2$  – апостериорные оценка и дисперсия ошибки оценки, рассчитанные для текущей обрабатываемой точки изображения на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений  $(Y_n, y)$ , при этом  $y$  – наблюдение, соответствующее текущей обрабатываемой точке;  $x_m^*$ ,  $\sigma_m^{*2}$ ,  $x_k^*$ ,  $\sigma_k^{*2}$  – экстраполированные оценки и дисперсии ошибок оценок, рассчитанные для текущей обрабатываемой точки изображения на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений соответственно  $Y_m$  и  $Y_k$ ;  $\bar{x}$ ,  $\bar{\sigma}^2$  – математическое ожидание и дисперсия случайного поля, заданные априорно;  $x'$ ,  $\sigma'^2$  – оценка и дисперсия ошибки оценки, рассчитанные с помощью алгоритма каузальной фильтрации на втором этапе.

Для разработанных алгоритмов, при вычислении оценок в каждой точке изображения, на втором этапе используются апостериорные оценки, рассчитанные на первом этапе при фильтрации наблюдений  $(Y_n, y)$ , а так-

же экстраполированные оценки, вычисленные на первом этапе при фильтрации наблюдений  $Y_m$  и  $Y_k$ .

### Результаты экспериментальных исследований

В качестве примера рассмотрим модель последовательности гауссовских изображений с разделимой корреляционной функцией вида (8). Ее параметры полагались  $\sigma = 1$ ,  $\rho_1 = 0.9$ ,  $\rho_2 = 0.9$ ,  $\rho_3 = 1$ , а СКО ошибки измерения  $\sigma_v = 0.8$ . Размеры последовательности  $N \times M \times K$  полагались  $N = M = 20$ ,  $K = 7$ .

На рис. 2 сплошными линиями показаны выведенные последовательно по строкам зависимости СКО ошибки оценки  $\sigma'$ , вычисленные по формуле (20) полученным в статье алгоритмом фильтрации, а штриховыми линиями – аналогичные зависимости  $\sigma'_{MK}$ , полученные методом Монте-Карло, соответственно для 1-го и 7-го кадров.

Как следует из полученных результатов, теоретические  $\sigma'$  и фактические  $\sigma'_{MK}$  СКО ошибок оценки хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о правильности работы алгоритма.

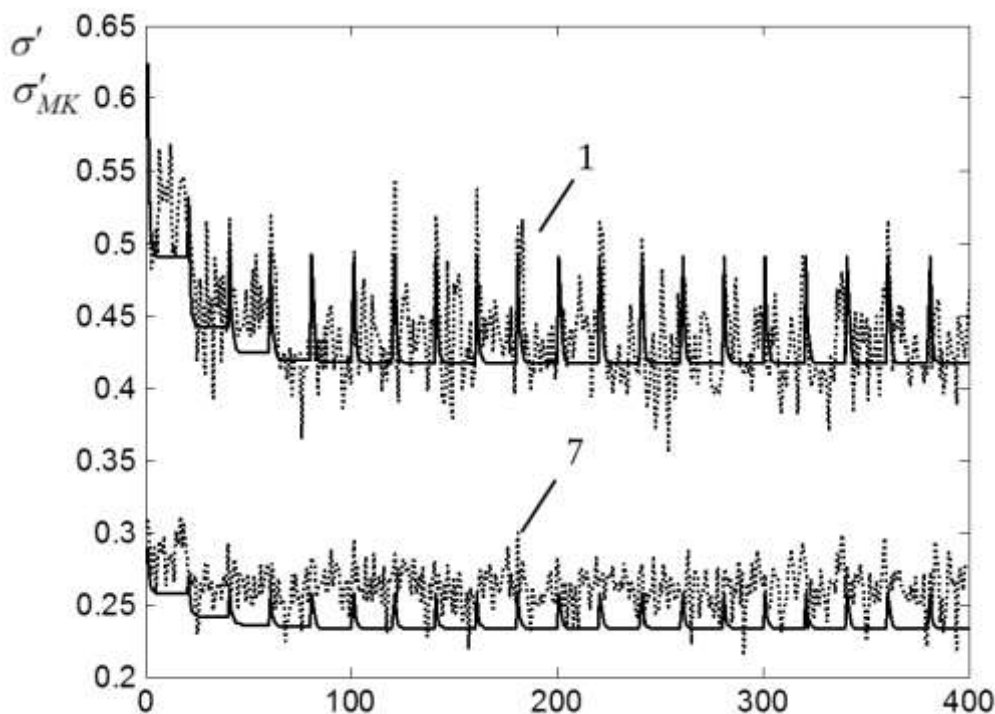


Рис.2

На рис. 3 штриховой и штрих-пунктирной линиями представлены полученные путем усреднения по всему кадру зависимости фактических СКО ошибки оценки  $\sigma'_C$  на каждом кадре при внутрикадровой корреляции  $\rho_1 = \rho_2 = 0.95$  и  $\rho_1 = \rho_2 = 0.8$  соответственно. С целью сравнительного анализа на рис. 3 показана зависимость СКО ошибки оценки на каждом кадре,

полученного методом Монте-Карло на основе алгоритма межкадрового усреднения [5] для рассмотренных вариантов последовательностей изображений, которая не зависит от внутрикадровой корреляции.

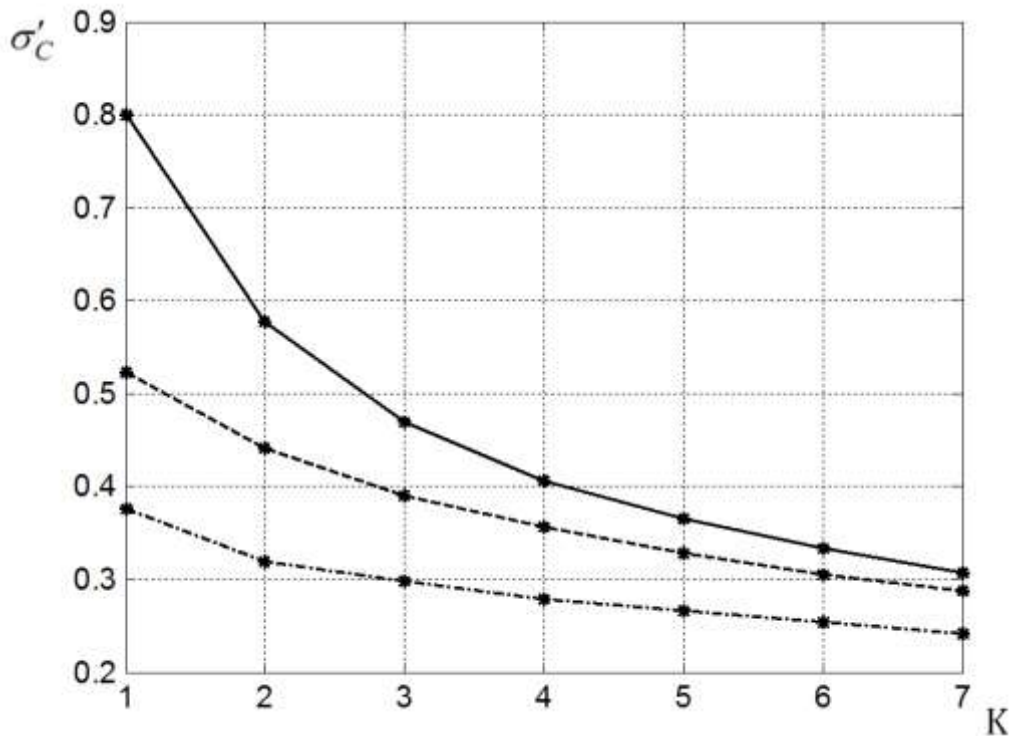


Рис.3

Из рис. 3 следует, что на 2-ом кадре выигрыш в точности фильтрации для изображений с корреляцией  $\rho_1 = \rho_2 = 0.95$  составляет 44% по сравнению с алгоритмом межкадрового усреднения, который обеспечивает аналогичный результат примерно на 6-м кадре. Для изображений с корреляцией  $\rho_1 = \rho_2 = 0.8$  выигрыш составляет 23%, а результат фильтрации 5-го кадра примерно совпадает с 6-м для алгоритма межкадрового усреднения. При увеличении внутрикадровой корреляции отсчетов изображений достигается большая точность оценивания.

### Выводы

С использованием свойства условной независимости получено выражение (5) для апостериорной плотности вероятности отсчетов многоканальных изображений при двухэтапной фильтрации с внутрикадровой каузальной обработкой при наличии некоррелированной помехи.

Для случая гауссовских многоканальных изображений получен алгоритм определения оценки отсчета изображения и дисперсии ошибки оценки при каузальной внутрикадровой и межкадровой обработке изображений (13)-(20).

Для рассмотренного примера разработанный алгоритм позволяет получить увеличение точности фильтрации последовательности однородных

гауссовских изображений на 20%-45% по сравнению с алгоритмом межкадрового усреднения.

**Перечень источников**

1. Лукин В. В. Современные методы и проблемы фильтрации многоканальных изображений / В. В. Лукин // Цифровая обработка сигналов и ее применение : труды науч.-техн. конф. – 2011. – Вып. XIII-1, Т. 1. – Москва. – С. 3-6.
2. Грузман И.С. Двухэтапная фильтрация изображений на основе использования ограниченных данных / И. С. Грузман, В. И. Микерин, А. А. Спектор // Радиотехника и электроника. – 1995. – Вып. 5. – С. 817-822.
3. Вишневий С. В. Алгоритм об'єднання результатів одновірної оптимальної фільтрації при обробці зображень / С.В. Вишневий, С.Я. Жук // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2010. – № 40. – с. 55-60.
4. Жук С.Я. Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайной структурой : монография / С. Я. Жук. – К. : НТУУ «КПИ», 2008. – 232 с.
5. Борзов С. М. Разработка многокадрового алгоритма подавления шума для мобильных тепловизионных систем наблюдения / С. М. Борзов, С. Б. Узилов // Вестник НГУ. Серия – Информационные технологии. – 2013. – Т. 11, Вып. 1. – С. 16–23.

**References**

1. Lukin V. V. (2011) *Sovremennyye metody i problemy fil'tratsii mnogokanal'nykh izobrazhenii* [Modern methods and problems of multi-channel image filtering]. *Tsifrovaya obrabotka signalov i ee primeneniye* [Digital signal processing and its application], Iss. XIII-1, Vol. 1., Moscow, pp. 3-6.
2. Gruzman I.S., Mikerin V. I. and Spektor A. A. (1995) *Dvukhetapnaya fil'tratsiya izobrazhenii na osnove ispol'zovaniya ogranichennykh dannykh* [Two-stage filtering of images on the basis of limited data]. *Radiotekhnika i elektronika*, Iss. 5, pp. 817-822.
3. Vishnevyy, S. V., Zhuk, S. Ya. (2010) Algorithm of uniting of optimal one-dimensional filtering outcomes for image processing. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobuduv.*, no. 40, pp. 55-60. (in Ukrainian).
4. Zhuk S.Ya. (2008) *Metody optimizatsii diskretnykh dinamicheskikh sistem so sluchainoi strukturoi* [Methods of optimization of discrete dynamical systems with random structure], Kiev, NTUU «KPI», 232 p.
5. Borzov S. M. and Uzilov S. B. (2013) Development of multiframe noise reduction algorithm for mobile thermalvision systems. *Vestnik NGU. Seriya – Informatsionnye tekhnologii*, Vol. 11, No. 1, pp. 16–23. (in Russian)

*Ляшук А. Н., Вишневий С. В., Жук С. Я. Алгоритм двухэтапной фильтрации многоканальных изображений с внутрикадровой каузальной обработкой при наличии некоррелированной помехи. С использованием свойства условной независимости получено выражение для апостериорной плотности вероятности отсчетов многоканальных изображений при двухэтапной фильтрации с внутрикадровой каузальной обработкой при наличии некоррелированной помехи. Получены выражения для вычисления ее первого и второго моментов в случае гауссовских многоканальных изображений. Анализ алгоритма проведен на модельном примере с помощью статистического моделирования на ЭВМ.*

**Ключевые слова:** многоканальные изображения, фильтрация изображения, объединение оценок, апостериорная плотность вероятности, случайное поле.



Ляшук О. М., Вишневий С. В., Жук С. Я. Алгоритм двоетапної фільтрації багатоканальних зображень з внутрішньокадровою каузальною обробкою при наявності некорельованої завади. З використанням властивості умовної незалежності отримано вираз для апостеріорної щільності ймовірності відліків багатоканальних зображень при двоетапній фільтрації з внутрішньокадровою каузальною обробкою при наявності некорельованої завади. Отримано вирази для обчислення її першого і другого моментів у випадку гауссівських багатоканальних зображень. Аналіз алгоритму проведено на модельному прикладі за допомогою статистичного моделювання на ЕОМ.

**Ключові слова:** багатоканальні зображення, фільтрація зображення, об'єднання оцінок, апостеріорна щільність ймовірності, випадкове поле.

*Liashuk O. M. Vishnevyy S. V., Zhuk S. Ya. Two-stage filtration algorithm with inter-frame causal processing for multichannel image with presence of uncorrelated noise.*

Introduction. When solving a number of practical problems the usage of multichannel images is common practice. Multichannel of this data permits or increases the efficiency of solving the problem, or allows to obtain useful information, which in principle cannot be extracted from the single-channel images. One of the main types of noise occurring in a multichannel image is uncorrelated noise. The optimal image filtering algorithms require enormous computational cost. Therefore, the important practical value is the synthesis of multi-channel image filtering algorithms, providing the required performance indicators at moderate computational cost.

Theoretical results. Using conditional independence properties, the expression for the a posteriori probability density of pixels at the two-stage multi-channel image filtration with causal frame processing in the presence of uncorrelated noise is obtained.

Gaussian algorithm for determining the estimates of image pixels and error variance estimation with causal intra and inter-frame processing is obtained in the case of multichannel image.

Experimental results. The developed algorithm for considered example allows increasing the filtration accuracy of the sequence of homogeneous Gaussian images on a 20% - 45% compared to inter-frame averaging algorithm.

Conclusion. Optimal and quasi-two-stage multi-channel image filtration algorithms were synthesized. In algorithms the first stage is one-dimensional causal filtration along each of the coordinates, and the second is the union of the results. These algorithms allow reducing the computational cost in comparison with the optimal algorithm and thus ensuring acceptable accuracy characteristics.

**Keywords:** multi-channel image, image filtration, combine estimates, a posteriori probability density, random field.