View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Electronic Archive of Kyiv Polytechnic Institute

УДК 519.766.4

П.І. Бідюк, О.А. Кожухівська, В.Ю. Поліщук

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРАТЕГІЙ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

The basic purpose of the work is a study of existing approaches to reinsurance directed towards modeling of distribution and minimization of risk for an insurance portfolio, and forming a strategy for its optimal reinsurance using developed decision support system. A method for a search of optimal reinsurance strategy is proposed. For this purpose statistical models were selected that correspond to the structure and volume of portfolio losses as well as the number of these losses. The simulation model for the total insurance losses is developed. While finding an optimal reinsurance strategy it was taken into consideration the dependence of the load coefficient on a specific form of reinsurance. A numerical study of the dependence between optimal reinsurance strategy and the varying load coefficient has been performed. It was established that taking into consideration of the variable load coefficient for specific risk capital values for an insurance company the stop-loss strategy provides worse results than other forms considered. An architecture and the functional layout for decision support system are proposed, and appropriate software was developed in C#. The DSS functioning has been illustrated on simulated example. The system will provide a useful instrument for a business analytic to support decision making while selecting a strategy for insurance portfolio.

Keywords: modeling in reinsurance, optimization of reinsurance, load coefficient, decision support system, choice of reinsurance strategy.

Вступ

Сучасний страховий ринок України вимагає від його учасників забезпечення належної фінансової стійкості. За умов існуючої фінансової нестабільності показник платоспроможності виступає ключовим критерієм конкурентоспроможності страховиків. Для вирівнювання страхових сум стосовно прийнятих на страхування ризиків і збалансування, таким чином, страхового портфеля, приведення потенційної відповідальності за сукупною страховою сумою у відповідність до фінансових можливостей страховика існує інститут перестрахування. Впровадження у практику сучасних стратегій перестрахування сприяє підвищенню фінансової стійкості страхових операцій і їх рентабельності, передачі частини ризиків, прийнятих на страхування, іншим страховикам.

При розробці програми перестрахування (reinsurance) для мінімізації ризику потрібно знайти оптимальне рішення стосовно вибору форми та обсягів перестрахування. Іншими словами, виникає задача розгляду таких факторів: бізнес-модель, фінансова стійкість і неприйняття ризику, ринкові умови і поточні можливості стосовно розв’язання задач менеджменту ризиків. Хоча страховик і перестраховик разом беруть участь у процесі перестрахування, більшість теоретичних праць за цією темою присвячені пошуку оптимальної форми перестрахування з точки зору цедента (страховика) і схиляються на користь тієї чи іншої форми перестрахування залежно від вибраних критеріїв оптимальності та принципу розрахунку страхової премії.

Оскільки в задачах перестрахування прийняті рішення пов’язані з фінансовим ризиком, то постановка відповідних завдань має полягати у тому, щоб зводити цей ризик до мінімуму. Тому загальний підхід до їх розв’язання на основі математичної теорії ризику та теорії прийняття рішень має включати деякі нововведення у процесі обробки інформації, зокрема давати в руки бізнес-аналітику критерії для їх використання при прийнятті рішення стосовно менеджменту відповідного ризику.

Пошук оптимальних, у різних сенсах, стратегій перестрахування є важливим напрямом досліджень протягом кількох десятиліть і не втратив своєї значущості на сьогодні, а тому йому присвячено багато дослідницьких праць. Перші роботи були спрямовані на пошук оптимальної форми перестрахування або функції розподілу збитку між страховою та перестраховою компаніями. У працях [1–4] показано, що stop-loss-перестрахування забезпечує мінімальну дисперсію виплат і максимальний очікуваний доход страхової компанії порівняно з будь-якими іншими видами перестрахування (функціями розподілу збитку) тієї ж вартості за умови, що премія перестрахової компанії визначається за принципом очікуваного значення (принципу еквівалентності). У праці [5] показано, що квотне перестрахування є оптимальним у тому сенсі, що це найдешевший спосіб обмежити дисперсію нерозподіленого ризику за умови, що коефіцієнт навантаження збільшується зі збільшенням дисперсії перестрахованої частини збитку.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження існуючих підходів до перестрахування з метою оптимізації ризику страхового портфеля, моделювання розподілу заданого портфеля та формування стратегії його оптимального перестрахування за допомогою системи підтримки прийняття рішень (СППР). Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі: вибрати статистичні моделі для опису величин збитків портфеля страхових договорів; проаналізувати існуючі підходи до оптимізації страхового портфеля шляхом перестрахування та сформувати оптимальні стратегії перестрахування; вибрати критерій оптимальності для вибору форми перестрахування; розробити СППР для забезпечення бізнес-аналітика інструментарієм для прийняття рішення стосовно перестрахування страхового портфеля.

Побудова моделі сукупного збитку портфеля

Для аналізу розподілу ризику портфеля між страховиком і перестраховиком необхідно побудувати модель його сукупного збитку. Сукупний портфель полісів ризикового страхування, як правило, дуже неоднорідний, навіть якщо його можна поділити на однорідні групи. Отже, потрібно застосовувати методи апроксимації розподілу сукупного збитку довільного неоднорідного портфеля. Ефективним підходом до розв'язання цієї задачі вважається побудова колективної моделі ризику. Ідея колективної моделі полягає у тому, щоб розглядати портфель тільки як джерело збитків, не беручи до уваги належність цих збитків конкретним ризикам. Справа в тому, що вихідні розподіли колективної моделі, а саме розподіли кількості та розмірів збитків, можуть бути оцінені значно точніше, ніж розподіли збитків окремих однорідних груп ризиків.

Модель колективного ризику будується за таких припущень [6]:

– плата за страховку вноситься на початку періоду страхування, розрахунок виконується в кінці строку страхування, а надходження протягом цього періоду відсутні;

– позови $Y_1, Y_2, \ldots$, що надходять до компанії, не пов'язані з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії, тобто Y_i – i-й реально пред'явлений позов, а не позов за i-м договором; випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ – незалежні та однаково розподілені;

– випадкова величина N – загальна кількість позовів за період страхування та випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ – незалежні.

Розглянемо моделювання кількості випадків настання збитків. Нехай N – випадкова кількість страхових подій, що відбуваються у певному фіксованому часовому проміжку (наприклад, у майбутньому календарному році) стосовно портфеля ризиків (наприклад, сукупності ризиків страхування автоцивільної відповідальності). Тоді при виконанні досить загальних передумов N має розподіл Пуассона:

$$P(N=n)=\frac{1}{n!}\,\theta^n e^{-\theta},\ n=0,1,2,\ldots,$$

з параметром $\theta = E(N) = \mathrm{Var}(N)$; такими передумовами є: випадкові величини кількості випадків настання збитків у двох часових інтервалах, що не перетинаються, є незалежними; одночасно не можуть мати місце два і більше страхових випадків; страхові випадки можуть відбуватися у будь-які моменти часу.

Вказані передумови на практиці будемо вважати такими, що виконуються і для портфеля, і для окремого ризику. Дійсно, при зіткненні автомобілів страховий випадок наступає тільки у винного, а можливої кумуляції подій автоцивільного страхування й страхування КАСКО або страхування будівель і страхування їх вмісту можна уникнути завдяки окремому розгляду підвидів страхування, що акумулюють або об'єднують кілька полісів у один ризик.

Розподіл збитку в окремому страховому випадку

При використанні колективної моделі припускається, що протягом періоду часу, коли зовнішні фактори (наприклад, інфляція) змінюються незначною мірою, випадкові величини розміру збитку в окремому страховому випадку конкретного портфеля незалежні та однаково розподілені. Якщо припущення стосовно незалежності після деяких перетворень (наприклад, у результаті об'єднання акумулюючих полісів) вважається виконаним, то припущення стосовно однакового розподілу здається нереалістичним уже хоча б у світлі розбіжності страхових сум. Але оскільки у колективній моделі збитки не ставляться у відповідність окремим ризикам, а розглядаються в сукупності на певному часовому проміжку, то можна вважати, що вони є вибіркою з одного розподілу, що являє собою суміш різних розподілів окремих збитків.

Зазвичай кожному виду страхування і кожному портфелю відповідає свій (змішаний) розподіл збитків, що залежить, зокрема, від розмірів страхових сум за окремими ризиками, а також від страхових подій. Так, середній збиток від пожежі на промисловому підприємстві значно вищий за збиток від пожежі у житловому будинку. При цьому обидва випадки відрізняються від середніх збитків у страхуванні автоцивільної відповідальності і страхуванні КАСКО, які в свою чергу різняться між собою. Але, як показує практика, структури збитків в усіх видах страхування дуже схожі. Зазвичай спостерігається набагато більше дрібних збитків, ніж великих. Строго кажучи, "концентрація збитків" зі збільшенням розміру збитку все сильніше зменшується. Найчастіше зовсім дрібні збитки також нечисленні і з економічної точки зору не мають великого значення. При цьому кількісне співвідношення великих і дрібних збитків, так само як і межа між великими та дрібними збитками, у різних видів страхування різне.

Для розв'язання багатьох практичних задач найбільш важливою є адекватність моделі розподілу розміру збитку в області великих збитків, тому що саме великі збитки мають вирішальну економічну вагу. У пошуках моделі розподілу доцільно розглянути сімейство розподілів, що мають скалярний параметр і містять разом із розподілом $F(x)$ всі розподіли типу $F(x/b), b>0$. Це зручно тим, що при зміні грошової одиниці змінюється тільки скалярний параметр, а інші параметри та вид щільності розподілу $f(x)=F'(x)$ зберігаються.

Досить часто у практиці обробки статистичних даних доводиться працювати з несиметричними даними і розподілами, що перетворюються на нормальні. Дійсно, для несиметричних даних із позитивною асиметрією існує багато прикладів, де використання натурального логарифму спостережень приводить до цілком допустимого для використання нормального розподілу. Наприклад, якщо X — величина позову і необхідно побудувати модель $Y=\ln(X)$, використовуючи нормальний розподіл $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$, то можна скористатися цим розподілом для того, щоб побудувати модель для самих значень X. Це можна зробити за допомогою запису $X=e^Y$ і переміни змінних. Таким чином, отримаємо логнормальний розподіл $LN(\mu,\sigma^2)$ зі скалярним параметром μ і параметром форми σ^2:

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2};$$

$$F(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right);$$

$$E(X^k)=\exp(k\mu+k^2\sigma^2/2).$$

Логнормальний розподіл можна використати як модель для розміру збитку в окремому страховому випадку. Менше відомий, але дуже подібний до нормального, логістичний розподіл має таку щільність:

$$f(x)=\frac{1}{c\sigma}(1+\exp((y-\mu)/c\sigma))^{-2}\exp((y-\mu)/c\sigma),$$

де $c=\sqrt{3}/\pi$; μ — математичне сподівання; σ^2 — дисперсія; функція цього розподілу

$$F(y)=(1+\exp((y-\mu)/c\sigma))^{-1}.$$

У результаті перетворення отримаємо логарифмований логістичний розподіл:

$$f(x)=\frac{\alpha(x/b)^{\alpha-1}}{b(1+(x/b)^{\alpha})^2};$$

$$F(x)=1-\frac{1}{1+x/b^{\alpha}};$$

$$E(X^k)=b^kB\left(1+\frac{k}{\alpha},1-\frac{k}{\alpha}\right)=b^k\frac{k\pi/\alpha}{\sin(k\pi/\alpha)},$$

де $b=e^{\mu}$ — скалярний параметр; $\alpha=1/(c\sigma)$ — параметр форми. Недоліком цього розподілу є складність обчислення оцінок параметрів.

Симетричну та визначену для всіх дійсних аргументів щільність розподілу має також розподіл Лапласа

$$f(y)=0,5\alpha\exp(-\alpha|y-\mu|),$$

що складається з двох симетричних відносно μ експоненціальних розподілів. Функція розподілу Лапласа має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0,5\alpha\exp(\alpha(y-\mu)), y\le\mu,\\ 1-0,5\alpha\exp(-\alpha(y-\mu)), y>\mu.\end{cases}$$

Після перетворення $X=e^Y$ отримаємо логарифмований розподіл Лапласа з параметром форми α і скалярним параметром $b=e^{\mu}$:

$$F(x)=\begin{cases}0,5(x/b)^{\alpha}, 0<x\le b,\\ 1-0,5(x/b)^{-\alpha}, x>b.\end{cases}$$

Щільність логарифмованого розподілу Лапласа визначається за виразом

$$f(x)=\begin{cases}\alpha(x/b)^{\alpha-1}/(2b), 0<x\le b,\\ \alpha(x/b)^{-\alpha-1}/(2b), x>b,\end{cases}$$

$$E(X^k)=b^k\alpha^2/(\alpha^2-k^2).$$

Як правило, ділянки малих і середніх збитків недостатньо точно апроксимуються двома відрізками прямих. Але в зоні великих збитків така апроксимація цілком можлива, навіть у випадку, коли частота великих збитків дещо переоцінюється. Ліву частину $(x\le b)$ логарифмованого розподілу Лапласа можна замінити розподілами, більш придатними для опису малих збитків, наприклад, гамма- чи оберненим гауссовим розподілом. Найбільш простий спосіб задати розподіл Парето на інтервалі $(0,b)$ – зсунути його вліво на величину b; функція розподілу Парето $F(x)=1-(x/b)^{-\alpha}$, $x\ge b$, перетворюється на розподіл з нульовою точкою $F(x)=$ $=1-((b+x)/b)^{-\alpha}$, визначений для всіх $x\ge 0$. Його щільність задається функцією

$$f(x)=\frac{\alpha}{b}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\alpha-1}.$$

У деяких видах страхування розподіл Парето з нульовою точкою також має тенденцію до переоцінювання частоти найбільших збитків. У таких випадках рекомендується заміняти перетворення $X=e^Y$, що трансформує експоненціальний розподіл в розподіл Парето, "слабкішим перетворенням" $X=Y^Z$, $z>1$. З незміщеного експоненціального розподілу $F(y)=1-e^{-\beta y}$ можна отримати розподіл Вейбулла

$$F(x)=1-\exp(-(x/b)^{\alpha}),\ x>0,$$

де $\alpha=1/z$. Його щільність визначається виразом

$$f(x)=\frac{\alpha}{b}(x/b)^{\alpha-1}\exp(-x/b)^{\alpha}).$$

Наведений огляд дає можливість скористатись широкою множиною допустимих моделей для опису розміру збитку в окремому страховому випадку.

Розподіл сукупного збитку

Колективна модель припускає, що випадкові розміри збитків у портфелі в окремих страхових випадках незалежні, однаково розподілені і не залежать від випадкової кількості збитків на часовому інтервалі, що розглядається. Остання вимога означає, зокрема, незалежність середнього розміру збитку від кількості збитків, що мали місце. Ця умова може порушуватися, наприклад, у страхуванні автоцивільної відповідальності: у період ожеледиці частішають ушкодження кузова автомобілів, унаслідок чого частка дрібних збитків зростає, а середній розмір збитку знижується.

Такі ситуації неминучі за наявності зовнішніх факторів (кон'юнктура, кліматичні умови), що одночасно впливають і на кількість випадків, і на розміри збитків. Якщо покриття поширюється на збитки від стихійних лих (як у страхуванні КАСКО або комплексному страхуванні житлових будинків), то кількість і розміри збитків не можна вважати незалежними. Але цьому перешкоджає лише одночасне страхування декількох причин збитку тим самим полісом. При окремому розгляді причин збитку кількість збитків майже завжди не залежить від їх розмірів. Таким чином, колективна модель у більшості випадків є придатною для застосування. Більше того, саме колективна модель поклала початок теорії ризику і вирішальним чином вплинула на її розвиток та успіх. Нехай N – кількість збитків заданого портфеля на заданому часовому інтервалі (як правило, це один рік), і нехай $X_1, X_2, \ldots, X_N$ – незалежні однаково розподілені розміри збитків, розподіл яких не залежить від N. Тепер сукупний збиток можна представити у вигляді

$$S=X_1+\ldots+X_N.$$

Властивості умовного математичного сподівання дають можливість виразити моменти випадкової величини S через моменти величин N і X ($X_1, X_2, \ldots, X_N$ – розподілені так само, як X):

$$E(S) = E_N\left(E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n | N\right)\right) =$$

$$= E_N\left(\sum_{n=1}^{N} E(X_n | N)\right) = E(N)E(X);$$

$$\mathrm{Var}(S) = E_N(\mathrm{var}(S|N)) + \mathrm{var}_N(E(S \mid N)) =$$

$$= E_N(N\,\mathrm{var}(X)) + \mathrm{var}_N(N\,E(X)) =$$

$$= E(N)\,\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(N)(E(X))^2.$$

Значно складніше одержати розподіл G сукупного збитку S із розподілів величин N і X. Але іншого способу знайти розподіл сукупного збитку практично не існує. Для прямої підгонки деякої моделі розподілу майже завжди невистачає даних, адже кожний рік дає тільки одне спостереження, а значення сукупного збитку віддалених минулих років у більшості випадків не актуальні. Можна виразити розподіл G через розподіл $p_n = P(N = n)$ кількості збитків N і розподіл $F(x) = P(X \le x)$ розміру збитку X:

$$G(s) = P(S \le s)\sum_{n=0}^{\infty} p_n P(S \le s | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(s),$$

де F^{*n} позначає n-кратну згортку розподілу F ($F^{*0}(x) = 0$ при $x < 0$, а $F^{*0}(x) = 1$ – при $x > 0$). Однак явний розрахунок нескінченної суми ступенів згортки можливий тільки у рідкісних малоймовірних випадках, наприклад коли N має геометричний розподіл (тобто негативний біноміальний розподіл з параметром $\alpha = 1$), а X має експоненціальний розподіл. Одним зі способів розрахунку сукупного збитку з використанням числової апроксимації є рекурсивний метод Пейнджера, але він вирізняється значними обчислювальними затратами. Уникнути громіздких обчислень дає змогу одночасне моделювання кількості збитків і середнього збитку та генерування заданого розподілу за методом Монте-Карло.

Форми перестрахування

Якщо участь перестраховика у кожному переданому йому покритті ризику визначається за заздалегідь обумовленим співвідношенням власної участі цедента, то таке перестрахування називають пропорційним. При пропорційному розподілі ризику величина збитку X (розмір збитку в одному страховому випадку або сукупний збиток за рік) ділиться на дві частини qX і $(1-q)X$ за правилом: $X = qX + (1-q)X$, $0 < q < 1$. У цьому випадку обидві складові завжди містять збиток. Які існують причини поділу ризику між страховиком і перестраховиком? Імовірність виконання зобов'язань перед страхувальниками $G(B+C)$ визначається сумарною нетто-премією B, розподілом сукупного збитку G і гарантійним капіталом C. Вважаючи недостатньою надійність зобов'язання $G(B+C)$, компанія сама може придбати страховий захист в іншій страховій компанії.

Форми пропорційного перестрахування.

1. Квотне перестрахування. У цьому випадку перестраховик приймає від всіх полісів фіксовану однакову процентну частку, наприклад 50 %, тобто відшкодовує 50 % від кожного збитку та отримує 50 % від кожної премії (за винятком частки витрат на залучення клієнтів та адміністративних витрат – так званої перестрахувальної комісії). Таким чином, 50 % від сукупного річного збитку і сумарної річної премії страховика переходять до перестраховика.

2. Перестрахування ексцедента сум. Якщо при квотному перестрахуванні всі ризики діляться між страховиком і перестраховиком в однаковій пропорції $c : (1-c)$, то при перестрахуванні ексцедента сума утримання варіюється залежно від страхової суми v за правилом $c = c(v) = \min(v_0/v, 1)$. Іншими словами, страховик повністю залишає собі ризики зі страховою сумою $v \le v_0$ і ділить з перестраховиком ризики зі страховою сумою, що перевищує v_0. При цьому перестраховик приймає частину, відповідну різниці між страховою сумою і v_0. В іншому все збігається із квотним перестрахуванням: за ризиком зі страховою сумою v премія та збитки діляться між страховиком і перестраховиком у співвідношенні $c(v)$ до $1 - c(v)$. Таким чином, мова йде про чисто

пропорційний розподіл ризику, але власне утримання не пропорційне страховій сумі v.

Форми непропорційного перестрахування.

1. Перестрахування ексцедента збитку. За кожним збитком X страховик виплачує суму $\min(X, a_0)$, обмежену зазначеним у договорі максимальним значенням a_0 (її називають пріоритетною), а перестраховик — суму $\max(X - a_0, 0)$. Іноді перестрахування відбувається у межах обумовленого максимуму a_1, тобто $\min(\max(X - a_0), 0)$. Залишена після вирахування суми $a_1 + a_0$ частина збитку $\max(X - a_1 - a_0, 0)$ знову потрапляє під відповідальність страховика, якщо не існує іншого договору перестрахування ексцедента збитку із пріоритетом $a_1 + a_0$. Для всіх ризиків, охоплених одним договором перестрахування, зазвичай діють однакові значення a_0 і a_1, що визначають правило ділення збитків. Розмір належної перестраховикові премії залежить від очікуваної кількості і розмірів збитків, що перевищують a_0, та від величини a_1.

2. Перестрахування ексцедента кумулятивного збитку відрізняється від перестрахування ексцедента збитку тільки тим, що пріоритет встановлюється не стосовно окремого збитку, а стосовно суми збитків, зумовлених однією страховою подією (наприклад, ураганом або землетрусом). Ця форма перестрахування враховує можливість одночасного настання (при урагані або землетрусі) великої кількості дрібних збитків, що в сукупності становлять значну суму. Що конкретно слід розуміти під окремою подією, не завжди очевидно, особливо коли кілька подій близькі територіально і в часі — відповідні критерії повинні бути чітко виписані у договорі перестрахування.

3. Перестрахування stop-loss — це результат розвитку принципу перестрахування ексцедента збитку від окремого збитку через кумулятивний до річного. Якщо сукупний річний збиток S страховика (за одним видом страхування) перевищує встановлений пріоритет L, то перестраховик приймає частину збитку понад цим пріоритетом. У деяких випадках — не більше фіксованої величини L_1. Іншими словами, страховик несе збиток $\min(S, L)$ або $\min(S, L) + \max(S - L - L_1, 0)$, а перестраховик — $\max(S - L, 0)$ або $\min(\max(S - L_0), L_1)$. За низької ймовірності перевищення сукупним збитком границі $(L_0 + L_1)$ (а на практиці найчастіше це має місце) варіант stop-loss надає страховику найбільший захист. Обмежуючи потенціал збитку страховика значенням L, перестраховик майже повністю приймає на себе страховий ризик.

Для розв'язання оптимізаційної задачі необхідно вибрати критерій оптимізації. При виборі договору перестрахування страховика найбільше цікавлять два питання: на скільки зменшиться ризик страхового портфеля та який дохід із цього портфеля він отримає. Отже, саме ці дві величини і мають лягти в основу критерію оптимізації. За міру ризику доцільно взяти величину VaR — максимально можливий збиток, що може статися із заданою ймовірністю на певному часовому інтервалі. Це популярний підхід завдяки наявності множини методик оцінювання можливого збитку та простоті їх практичного використання. Для розрахунку VaR необхідно визначити квантиль розподілу сумарного збитку. Про можливості моделювання заданого розподілу було сказано вище. Дохід за страховим портфелем визначається за формулою [7]

$$R = P - S,$$

де S — сукупний збиток страхового портфеля, P — премія. Премія (прибуток страхового портфеля) розраховується за принципом середнього значення:

$$P = (1 + \theta)E(S),$$

де θ — надбавка за ризик за страховим портфелем. Очевидно, що дохід — стохастична величина, оскільки він включає випадковий збиток S. Тому будемо розглядати очікуваний дохід, тобто його середнє:

$$E(R) = P - E(S) = \theta E(S).$$

Визначивши розмір премії, можна знайти розмір власного капіталу страхової компанії, яким вона ризикує із заданою ймовірністю. Цю величину називають CaR (Capital-at-Risk):

$$CaR = VaR - P.$$

Очевидно, що задана таким чином величина має велике значення для страхової компанії, адже вона показує — яким капіталом необхідно володіти, щоб не збанкрутувати із заданою ймовірністю. Оскільки бізнес-аналітик страхової компанії при розв'язанні задачі перестрахування страхового портфеля буде намагатися зменшити CaR та збільшити доход $E(R)$, то саме ці величини доцільно включити у критерій вибору оптимального параметра при перестрахуванні. Зв'язок між цими величинами характеризує величина, яку називають $RoCaR$ (Return on Capital-at-Risk):

$$RoCaR = E(R)/CaR.$$

Максимізація $RoCaR$ враховує як максимізацію очікуваного доходу $E(R)$, так і мінімізацію CaR. Отже, саме величину $RoCaR$ доцільно використовувати як критерій для знаходження оптимального параметра перестрахування. Зауважимо, що параметри мають різні значення для різних форм перестрахування, але порівнявши їх значення $RoCaR$, можна вибрати кращу форму перестрахування. Відповідно, оптимальним перестрахуванням є така програма: форма перестрахування та її параметр, у якої показник $RoCaR$ максимальний. Для виконання числових експериментів стосовно оптимізації розв'язку задачі перестрахування побудовано СППР, яка ґрунтується на розглянутих вище моделях та критеріях.

Архітектура СППР

Розроблена СППР призначена для бізнес-аналітика страхової компанії; вона використовується для вибору оптимальної стратегії перестрахування страхового портфеля (програмна платформа C#). Описана нижче система дає можливість знайти оптимальний розв'язок задачі перестрахування, використовуючи імітаційне моделювання. СППР складається з трьох основних модулів: модуля збитків, модуля перестрахування і модуля результатів. Архітектуру запропонованої системи наведено на рис. 1.

Модуль збитків призначений для оцінювання сукупного збитку страхового портфеля. Для визначення цього збитку скористаємося (з ілюстративною метою) відповідною модифікацією методу Монте-Карло. Ключовим питанням процедури моделювання є вибір найбільш придатного розподілу для середнього збитку і частоти страхових випадків. Рішення стосовно прийняття тієї чи іншої форми розподілу повинно ґрунтуватися на результатах статистичних тестів. Параметри розподілу випадкових величин – кількості збитків (N) і розміру середнього збитку (S) визначаються за статистичними даними, накопиченими страховою компанією. Сумарний збиток є випадковою величиною, рівною $N \times S$. Кожна ітерація дає можливість отримати значення сумарного збитку за підсумками року. Після виконання заданої кількості циклів моделювання (зазвичай від 20000 до 100000), отримаємо розподіл сумарного збитку [6]. Для прикладу розглянемо страховий портфель КАСКО: збитки розподілені за логарифмічним законом з параметрами $\mu = 8,3$ і $\sigma^2 = 2,0$; кількість збитків портфелю розподілена за пуассонівським законом з параметром $\lambda = 200$. Згенерований за цими параметрами розподіл відображено на рис. 2.

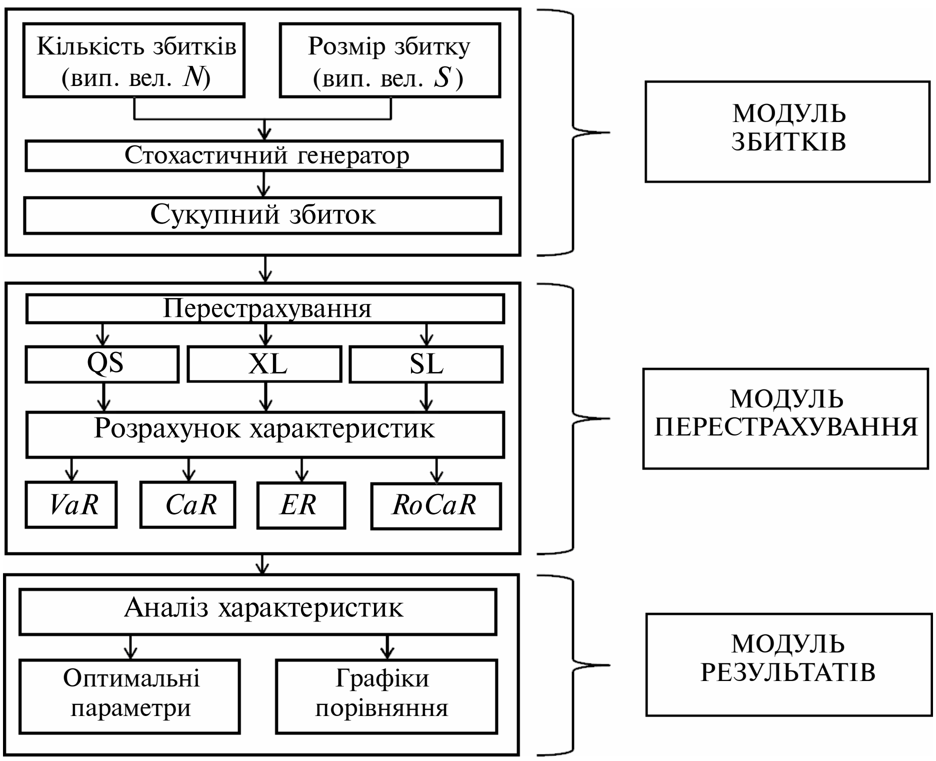

Рис. 1. Функціональна схема СППР

Модуль перестрахування призначений для введення значень, необхідних для аналізу та пошуку оптимального варіанта перестрахування: ймовірність неплатоспроможності – ймовірність, з якою розмір необхідного власного капіталу для погашення збитків перевищить CaR, розмір надбавки за ризик для даного портфеля, а також коефіцієнтів навантаження і границі значень параметрів для трьох форм перестрахування, що аналізуються, а саме: квотне, ексцедента збитку та stop-loss. Також у модулі перестрахування міститься інформація стосовно залежності значень $VaR, E(R), CaR$ і $RoCaR$ від параметрів вказаних форм перестрахування. Розглянемо результати на прикладі вказаного вище портфеля і таких значень параметрів: $\theta = 0{,}15$ – надбавка за ризик; $P = 0{,}05$ – ймовірність неплатоспроможності. Всі інші вхідні дані такі: для форми QS – $\min(q) = 0{,}25$, $\max(q) = 1{,}0$, $\theta = 0{,}15$; для форми XL: $\min(a_0) = 200000$, $\max(a_0) = 7000000$, $\theta = 0{,}30$; для форми ER: $\min(L) = 7{,}2$ мільйона, $\max(L) = 20{,}0$ мільйонів, $\theta = 0{,}50$.

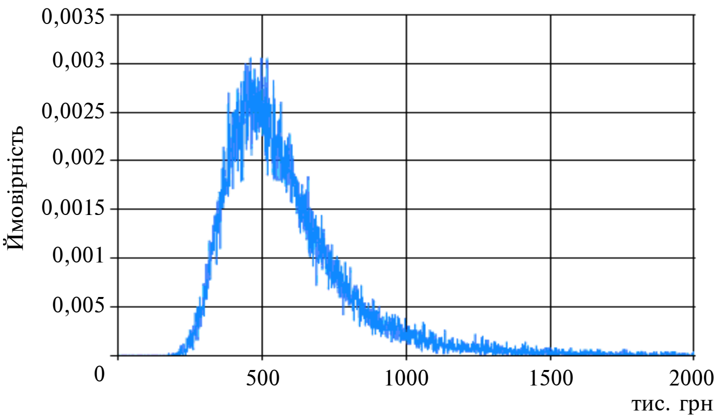

Рис. 2. Розподіл сукупного збитку портфеля

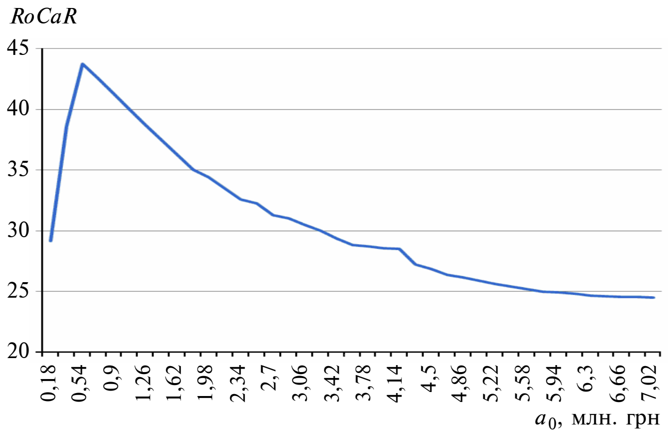

Рис. 3. Залежність значення $RoCaR$ від значення a_0

Після виконання розрахунків з використанням наведених вище вхідних даних встановлено, що значення доходу $E(R)$ і ризикового капіталу зростають експоненційно зі збільшенням значення коефіцієнта a_0, який задає пріоритетну суму перестрахування. Експонента входить у режим насичення за значень a_0, близьких до 6,0 мільйонів. У розрахунках використано ексцендентну форму збитку.

На рис. 3 зображено залежність значення $RoCaR$ також від значення a_0. Крива має явно виражений максимум: показник $RoCaR$ досягає найвищого рівня $RoCaR = 43\,\%$ при оптимальному значенні параметра $a_0 = 0{,}5333$ мільйона.

У модулі результатів виконується порівняння різних форм перестрахування залежно від розміру капіталу, яким страхова компанія готова ризикнути, та від розміру очікуваного доходу. Для перестрахування вибирається оптимальне значення параметра найкращої, при заданих умовах, форми перестрахування. В результаті виконання обчислювальних експериментів встановлено, що значення ризикового капіталу CaR, прийнятне для страхової компанії, може бути різним при використанні різних форм перестрахування. Тобто пошук кращої форми необхідно виконувати у кожному конкретному випадку перестрахування.

Висновки

Розглянуто задачу пошуку оптимальної форми перестрахування і запропоновано метод її знаходження. Для розв'язання цієї задачі вибрано статистичні моделі, що відповідають структурі розміру збитку та кількості збитків страхового портфеля, а також побудовано імітаційну модель сукупного страхового збитку. При визначенні оптимального варіанта перестрахування враховано залежність коефіцієнта навантаження від форми перестрахування. В спеціальній літературі не знайдено варіанта розв'язання цієї задачі числовими методами, а аналітичні методи не дають інструментарію для його використання у повсякденній практиці. Коефіцієнт навантаження враховувався при розрахунку премії, але при порівнянні різних форм перестрахування використано однакові значення цього коефіцієнта. В реальних умовах коефіцієнт навантаження залежить від форми перестрахування. Відповідно, виконано дослідження залежності оптимальної форми перестрахування від змінного коефіцієнта навантаження. За відсутності цієї умови оптимальною формою перестрахування є stop-loss, з чим узгоджуються результати виконаного дослідження. Встановлено, що при врахуванні змінного коефіцієнта навантаження за певних значень капіталу, яким готова ризикнути страхова компанія, варіант stop-loss дає гірші результати, ніж інші форми перестрахування.

Розроблено архітектуру, функціональну схему, а також програмне забезпечення СППР для розв'язання задачі оптимізації перестрахування. Проілюстровано функціонування СППР, яка може забезпечити бізнес-аналітика критеріями для керівництва при прийнятті рішення стосовно вибору форми перестрахування страхового портфеля.

У подальших дослідженнях доцільно розширити множину статистично-ймовірнісних моделей, прийнятних для створення СППР розглянутого типу, зокрема, моделями багатовимірних умовних розподілів (наприклад, копулами), байєсівськими мережами, а також альтернативними оптимізаційними процедурами.

Список літератури

1. *K. Borch,* "The utility concept applied to the theory of insurance", ASTIN Bull., no. 1, pp. 245–255, 1991.
2. *S.A. Klugman et al.*, Loss models: from data to decisions. New York: John Wiley and Sons, 2004, 688 p.
3. *S.A. Klugman,* Bayesian statistics in actuarial science. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992, 243 p.
4. *A.J. McNeil et al.*, Quantitative risk management. New Jersey: Princeton University Press, 2005, 554 p.
5. *R.E. Beard et al.*, Risk Theory. London: Chapman and Hall, 1977, 191 pp.
6. *Бондаренко Я.С.*, *Турчин В.М.*, *Турчин Є.В.* Теорія ризику в страхуванні. – Донецьк: Донецький нац. ун-т, 2008. – 112 с.
7. *Пилипчук А.А.* Динамический подход к определению оптимального уровня собственного удержания для страховой компании // Финансы и бизнес. – 2008. – № 1. – С. 190–199.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
6 червня 2014 року