

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ НАФТИ ТЕПЛОНОСІЄМ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ГІДРОРОЗРИВУ

А.Я. БОМБА, А.М. СІНЧУК, С.В. ЯРОЩАК

На основі розроблених методів комплексного аналізу, створено підхід до розв'язання нелінійних крайових задач неізотермічної багатофазної фільтрації в елементах площового заводнення за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву пласта. Побудовано числовий алгоритм для розрахунку гідродинамічної сітки, відшукування полів температури та насиченості, координат критичних точок, фільтраційних витрат як на нагнітальних, так і на експлуатаційних свердловинах, моментів часу прориву витісняючого реагенту та повного заводнення експлуатаційних свердловин, встановлення значень об'єму витісненого флюїду протягом визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема після припинення процесу витіснення, а також відшукування місцезнаходження ділянок «застою» нафти тощо. Проведено аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик та встановлено особливості протікання процесу витіснення нафти у випадках неізотермічної та ізотермічної фільтрації.

ВСТУП

У процесі видобутку нафти середньої та високої в'язкості (наприклад, природних бітумів) ефективною, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технологія нагнітання в пласт різних робочих агентів — теплоносіїв. При цьому, за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами, у зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і тим самим покращується гідродинамічний зв'язок між ними.

Мета роботи — математичне моделювання процесів витіснення флюїдів у нафтових пластах з урахуванням впливу тріщин ГРП та розвиток числових методів комплексного аналізу розв'язання відповідних крайових задач багатофазної фільтрації.

Розвинуто методи [1–2] комплексного аналізу математичного моделювання нелінійних процесів ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти з горизонтального пласта теплоносієм в умовах його гідравлічного розриву (ГРП) [3–6]. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних нелінійних крайових задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо нелінійну крайову задачу двофазної неізотермічної фільтрації у процесі витіснення нафти теплоносієм (зокрема, водою) в горизонтальному пласті \tilde{G}_z , який обмежений зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщеними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (рис. 1, а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами. За умов існування певного роду симетрії, можна виділити елемент G_z ($z = x + iy$), що містить дві нагнітальні та одну експлуатаційну свердловини (рис. 1, б).

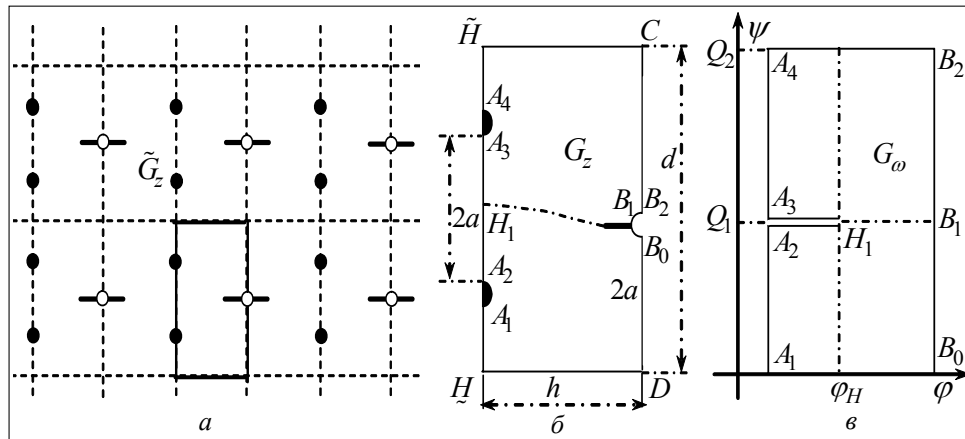


Рис. 1. Модель нафтового пласта, де: а — схематичне зображення розміщення свердловин у пласті з виділеним елементом симетрії; б — елемент симетрії пласта з відповідними розмірами (r — радіус свердловин, a — половина відстані між нагнітальними свердловинами, h — відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, $d = 4(r + a)$); в — відповідна область комплексного квазіпотенціалу елемента симетрії пласта

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії записано відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$, де $p(x, y, t)$ — тиск в точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} — деяке характерне його значення), згідно з [1, 3, 4, 7] представимо у вигляді: $\vec{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l(s)}{\mu_l(T)} \text{grad } \varphi$,

$$\sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1, \quad \text{де } \vec{v}_l, \mu_l(T) \text{ — вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості для } l\text{-ї фази; } T(x, y, t) \text{ — температура; } k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, & (x, y) \in D_\lambda, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_\lambda D_\lambda, \end{cases} \text{ — коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту; } D_\lambda$$

($\lambda \in N$) — ділянка пласта, що відповідає λ -й тріщині; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$ — відносні фазові проникності ($s = s_2$); σ — коефіцієнт пористості ґрунту; $s_l(x, y, t)$ — насиченість пористого середовища відповідною фазою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними). Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s, T) \text{grad } \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} f(s, T) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T) \tilde{k}_1(s) + \mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T)}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних L_g ($g = \overline{1, 2}$) та експлуатаційній L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо як φ_* та φ^*), на межі ∂D_λ тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску. Інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\bar{L}} = 0,$$

де

$$L_g = \{z = x + iy : u_g(x, y) = 0\} = \{z : x = r \cdot \cos \theta, \\ y = r \cdot \sin \theta + (2g - 1) \cdot (a + r), 1,5\pi \leq \tau \leq 2,5\pi\},$$

$$L^* = \{z = x + iy : u^*(x, y) = 0\} = \\ = \{z : x = r \cdot \cos \theta + h, y = r \cdot \sin \theta + d/2, 0,5\pi \leq \tau \leq 1,5\pi\},$$

$$\tilde{L} = A_1 \tilde{H} \cup \tilde{H} D \cup D B_0 = \{z : \tilde{u}(x, y) = 0\}, \quad A_1 \tilde{H} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\}, \quad 0 \leq x \leq h\},$$

$$\tilde{H} D = \{z : y = 0, D B_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq d/2 - r\},$$

$$\tilde{L} = A_4 \tilde{H} \cup \tilde{H} C \cup C B_2 = \{z : \tilde{u}(x, y) = 0\}, \quad A_4 \tilde{H} = \{z : x = 0, d - a \leq y \leq d\},$$

$$\tilde{H} C = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}, \quad C B_2 = \{z : x = h, d/2 + r \leq y \leq d\},$$

$$\tilde{L} = A_2 H_1 A_3 = \{z : x = 0, 2(a + r) - a \leq y \leq 2(a + r) + a\}.$$

Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s^0(x, y)$ та $s|_{L_g} = s_*$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, прийемо однотемпературну модель, згідно з якою передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку є миттєвою. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння [8]:

$$\frac{\partial C(s)T}{\partial t} + \operatorname{div}[(c_1 \rho_1 \bar{v}_1 + c_2 \rho_2 \bar{v}_2)T] = 0, \quad (3)$$

де $C(s) = \sigma \rho_1 c_1 (1 - s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1 - \sigma) \rho_3 c_3$ — об'ємна теплоємність пористого середовища; c_κ , ρ_κ — питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта ($\kappa = \overline{1, 3}$). Використовуючи формули для визначення швид-

костей руху нафти та води [1]: $\vec{v}_1 = (1 - f(s, T))\vec{v}$, $\vec{v}_2 = f(s, T)\vec{v}$ та співвідношення (1), рівняння (3) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \tilde{T}(s)}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \tilde{f}(s, T) = 0, \quad (4)$$

де $\tilde{T}(s) = C(s)T = (\tilde{\alpha}s + \tilde{\beta})T$, $\tilde{f}(s, T) = (\tilde{\alpha}f(s, T) + c_1\rho_1)T$, $\tilde{\alpha} = \rho_2c_2 - \rho_1c_1$, $\tilde{\beta} = \rho_1c_1 + (\sigma^{-1} - 1)\rho_3c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (4) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (2) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених у роботах [1, 2, 4, 5] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатофазної фільтрації.

Для відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл у початковий момент часу $T(x, y, 0) = T^0(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_L = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = 0, \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T^*. \quad (5)$$

У ході розв'язання описаної вище нелінійної задачі використовуємо розроблені і апробовані нами [1–3] числові методи квазіконформних відображень та ідеї поетапної фіксації характеристик середовища і процесу.

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Аналогічно до [1], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у цей момент часу) полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$G_\omega = \bigcup_{g=1}^2 G_g \cup \bar{L}_1$ (рис. 1, в). А саме:

$$\begin{aligned} \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_1} = \varphi|_{L_2} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad [\varphi]|_{\partial D_\lambda} = 0, \quad [v_n]|_{\partial D_\lambda} = 0, \\ \psi|_{\tilde{L}} = 0, \quad \psi|_{A_2H_1A_3} = Q_1, \quad \psi|_{\tilde{L}} = Q_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_1} = s|_{L_2} = s^*, \quad s|_{t=0} = s^0(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right), \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T^*, \quad T|_{t=0} = T^0(x, y), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}, \quad G_1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}, \\
 G_2 &= \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\} \quad \bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{H_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}, \\
 Q_1 &= \oint_{L_1} -v_y dx + v_x dy, \quad Q_2 - Q_1 = \oint_{L_2} -v_y dx + v_x dy \quad \text{— невідомі витрати,} \\
 Q_2 &\text{ — сумарна витрата на експлуатаційній свердловині,} \\
 [\bullet]_{\partial D_\lambda} &\text{ — стрибок відповідної функції на } \partial D_\lambda.
 \end{aligned}$$

Обернену до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ та уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (9)$$

$$u(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{u}(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$u_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1,$$

$$u_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$x_-(\varphi, Q_1) = 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_1) \leq y_{H_1},$$

$$x_+(\varphi, Q_1) = 0, \quad y_{H_1} \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq 2(a+r) + a, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_1},$$

$$[x(\varphi, \psi)]_{\partial D_\lambda} = [y(\varphi, \psi)]_{\partial D_\lambda} = 0,$$

$$\left[\bar{k} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\bar{v}, \bar{n}) \right]_{\partial D_\lambda} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (11)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (9) та формули для обчислення

компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$, задачі для насиченості та теплопровідності (7)–(8) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [0, Q_1) \cup (Q_1, Q_2],$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = s^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) T_*, \quad \psi \in [0, Q_1) \cup (Q_1, Q_2],$$

$$\tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \tilde{\beta}) T^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (15)$$

де рівняння (12) та (14) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

На основі методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу нами запропоновано комплексний підхід, який дозволяє суттєво спростити розв'язання задачі неізотермічної багатофазної фільтрації. Такий підхід забезпечує можливість одночасно та більш ефективно враховувати різноманітні аспекти протікання досліджуваного процесу в одній розрахунковій процедурі без додаткового перерахунку фільтраційних характеристик (поля швидкостей, фільтраційних витрат тощо) та використання інтерполяційних і градієнтних методів для побудови еквіпотенціалей, ліній та трубок течії.

Алгоритм розв'язування відповідної крайової задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних у сітковій області представимо у вигляді такої послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури (розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення — будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (12) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (14) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму (зокрема, однією з таких умов зупинки, може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини).

АЛГОРИТМ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_{H_1} - \varphi_*)/(n_1 + 1), \\ \varphi_{H_1} + (i - n_1 - 1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{H_1})/(n_2 + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j\Delta\psi_g, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1})/m_g, \quad g = \overline{1, 2}, Q_0 = 0, m_0 = 0,$$

$$n = n_1 + n_2 + 1, m = m_1 + m_2 + 1, m_1, m_2, n_1, n_2 \in N.$$

Рівняння (11) апроксимуємо, використавши метод скінченних об'ємів [2] наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j),$$

$$a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, \quad a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}, \quad a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}, \quad a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w,$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2,$$

$$k_n = 2k_{i,j}k_{i,j+1}/(k_{i,j} + k_{i,j+1}), \quad k_s = 2k_{i,j}k_{i,j-1}/(k_{i,j} + k_{i,j-1}),$$

$$k_e^{-1} = 0,5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0,5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) до тієї чи іншої підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_H, \psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2, \Delta\psi_+ = \Delta\psi_1, \Delta\psi_- = \Delta\psi_1$. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, j = \overline{0, m_1}, \quad f_2(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, j = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \quad \tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad \tilde{f}(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{0, n},$$

$$x_{i,m_1} = 0, 2(a + r^0) - a \leq y_{i,m_1} \leq y_{H_1}$$

$$x_{i,m_2} = 0, y_{H_1} \leq y_{i,m_2} \leq 2(a + r^0) + a, i = \overline{0, n_1}. \tag{17}$$

Тут, як і в [1, 3], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності при-

граничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ & \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ & + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (18)$$

Невідомі витрати Q_g ($g = \overline{1, 2}$) та значення потенціалу φ_{H_1} в точці розгалуження ліній течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами: $\varphi_{H_1} =$

$$= \varphi_* + (n_1 - 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де } \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а } \gamma_l^g \text{ одер-}$$

жуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma_1^g &= \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \\ a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\ b_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рівняння (12) та (14) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [1]:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} (f(s_{i,j}, T_{i,j}) - f(s_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (20)$$

$$\tilde{T}_{i,j} = \tilde{T}_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} (\tilde{f}(\tilde{s}_{i,j}, T_{i,j}) - \tilde{f}(\tilde{s}_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (21)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1 + 1}$, для $l = 1$, $i = \overline{n_1 + 2, n}$, для $l = 2$; τ — крок по часу; $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ — насиченості у відповідні моменти часу; $\tilde{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha}\hat{s}_{i,j} + \tilde{\beta})T_{i,j}$, $\tilde{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha}\tilde{s}_{i,j} + \tilde{\beta})\tilde{T}_{i,j}$, $\tilde{f}(\tilde{s}_{i,j}, T_{i,j}) = (\tilde{\alpha}f(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) + c_1\rho_1)T_{i,j}$, $v_{i,j}$ — швидкість (шукаємо як і в роботі [1]). Граничну й початкову умови для насиченості та температури в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s^0(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \tilde{T}_{0,j} = (\tilde{\alpha}s_* + \tilde{\beta})T_*,$$

$$\tilde{T}(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = (\tilde{\alpha}\tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}) + \tilde{\beta})T^0(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_ω (підбираються аналогічно як і в роботах [1–3]) та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб

виконувалися умови (17)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ знаходимо за формулами (19) наближення величин γ_i^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (16) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [9], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{H_1} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на цьому ітераційному етапі: є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазі-конформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $v_{i,j}$, поле насиченості $s_{i,j}$ та температури $\tilde{T}_{i,j}$ з попереднього ітераційного кроку (з урахуванням граничних умов), знаходимо розподіл насиченості $\hat{s}_{i,j}$ у пласті на цьому часовому етапі згідно з (20) та, використовуючи (21), розраховуємо поле температури $\hat{T}_{i,j}$, після чого перераховуємо поле швидкості і потенціалу.

ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ

Описаний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізовано у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. На рис. 2,а зображено гідродинамічну сітку в елементі симетрії G_z в момент часу $t = 8,15$, при $r = 0,3$, $a = 1,2$, $h = 5$, $d = 6$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\rho_1 = 800$, $c_1 = 1880$, $\rho_2 = 1000$, $c_2 = 4200$, $\rho_3 = 2200$, $c_3 = 1800$, $D_1 = \{(x, y) : (x - h)^2 / 4 + (y - d / 2)^2 / 0,04 \leq 1\}$, $\sigma = 0,2$, $\mu_1 = 5e^{120(1/T - 1/60)}$, $\mu_2 = \frac{9,1787}{1 + 0,0337 \cdot T + 0,000221 \cdot T^2}$ [6], $s_* = 1$, $s^0 = 0$, $T_* = 90$, $T^0(x, y) = 30$, $\tau = 0,01$, $n_1 = 3$, $n_2 = 45$, $m_1 = 30$, $m_2 = 30$, $k_* = 1$, $k_1 = 10$, $\tilde{k}_1(s) = (1 - s)^2$, $\tilde{k}_2(s) = s^2$, а на рис. 2,б та 2,в представлено поле температур і поле насиченості відповідно. У ході витіснення нафти водою у випадку неізотермічного процесу фільтрації. Для порівняння ефективності застосування теплового методу витіснення, на рис. 2,г наведено поле насиченості для елемента симетрії пласта із такими ж геометричними параметрами та фізичними властивостями середовища та нафти у випадку ізотермічного процесу витіснення.

На рис. 3 представлено графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу у випадку неізотермічного (суцільною лінією) та ізотермічного (штрих-пунктирною лінією) процесу витіснення.

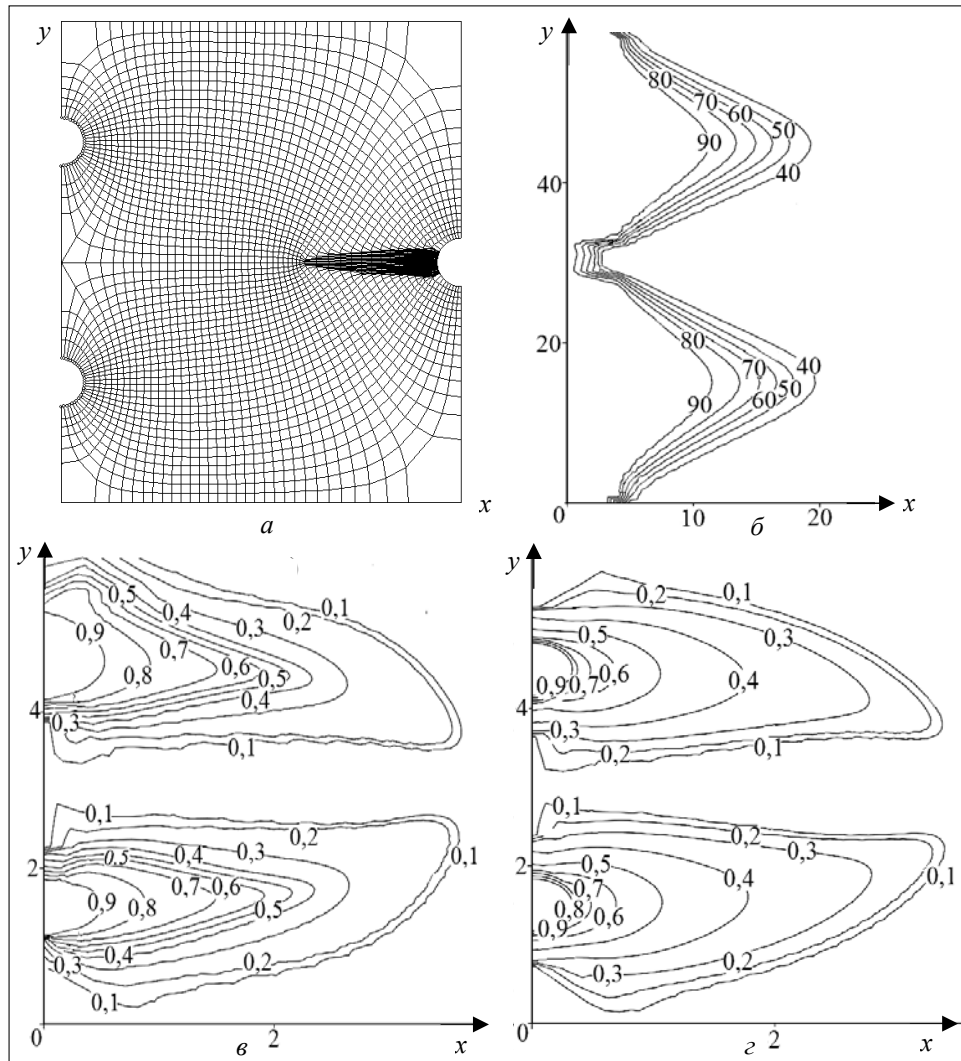


Рис. 2. Елементи числових розрахунків, де: а — гідродинамічна сітка в елементі симетрії G_z ; б — розподіл температур; в-г — розподіл насиченості у випадку неізотермічної та ізотермічної фільтрації

У результаті проведених числових розрахунків, підтверджується факт значного збільшення дебіту експлуатаційної свердловини у процесі витіснення нафти гарячою водою, так як при збільшенні температури в'язкість нафти зменшується і швидкість фільтрації зростає. Відзначимо, що з початку моменту нагрівання до певного часу t_* (у нашому

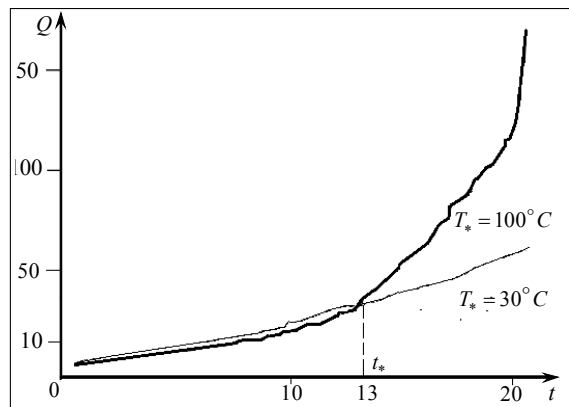


Рис. 3. Графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу при $T_* = 100^\circ C$ та $T_* = 30^\circ C$

випадку $t_* = 13$) інтенсивність відбору менша ніж у випадку ізотермічного процесу. Це пояснюється тим, що енергія гарячої води втрачається на нагрівання середовища і нафти, що знаходиться в елементі симетрії.

ВИСНОВКИ

Розвинуто розроблені авторами методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти з горизонтального пласта теплоносієм в умовах гідравлічного розриву. На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічної сітки, відшукування полів температури та насиченості, координат критичних точок, фільтраційних витрат, часу повного заводнення, встановлено значення об'єму витісненого флюїду протягом визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, тощо. Проведено аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик та встановлено особливості протікання процесу витіснення у випадках неізотермічної та ізотермічної фільтрації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., Капитан С.С., Пригорницький Д.О., Яроцук С.В. Методи комплексного аналізу. — Рівне: НУВГП, 2013. — 415 с.
2. Bomba A.Ya., Yaroshak S.V. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — **184**, № 1. — P. 56–69.
3. Бомба А.Я., Сінчук А.М. Комплексний аналіз поведінки системи «свердловини-тріщини-пласт» в елементах площадного заводнення // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». — Харків: НТУ «ХПІ», 2013 — № 54(1027) — С. 4–15.
4. Бомба А.Я., Сінчук А.М., Яроцук С.В. Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2011. — № 3(40). — С. 32–36.
5. Бомба А.Я., Сінчук А.М., Яроцук С.В. Метод комплексного аналізу дослідження двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидроразрыва // Электронное моделирование. — 2013. — **35**, № 2. — С. 25–33.
6. Dahi Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures, PhD Dissertation // University of Texas at Austin. — 2009. — 216 p. — <http://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/18381>.
7. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М.: Мир, 1971. — 452 с.
8. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972. — 288 с.
9. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. — М.: Недра, 1965. — 238 с.

Надійшла 08.10.2014