ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 519.246

СПЕКТРИ ДВОМІРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Майстренко В.М., Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, м. Київ, Україна

Обгрунтована можливість та математична реалізація спектрального способу опису двомірної функції розподілу випадкового процесу. Показаний зв’язок змішаних моментів та коефіцієнтів кореляції з параметрами спектра двомірної функції розподілу. Зроблено висновок, що для оцінки впливу форми функцій розподілу випадкових процесів на їх взаємодію потрібно використовувати п’ять перших коефіцієнтів кореляції

Вступ

В будь-якій системі передачі інформації разом з корисним сигналом існують шуми та перешкоди, дія яких спотворює корисний сигнал. Випадкові похибки, котрі виникають через одночасну дію багатьох відомих та невідомих причин, спотворюють результат вимірювання, тобто виступають у ролі перешкод по відношенню до сигналу — результату вимірювання. З цим спотворенням неможна не рахуватися. Тому завжди виникає необхідність оцінки впливу шумів, перешкод та випадкових похибок з метою зведення до мінімуму спотворення сигналу.

В подальшому, враховуючи, що з математичного погляду вплив шумів, перешкод та випадкових похибок є аналогічним, будемо говорити про перешкоди, розуміючи при цьому вплив будь-якого з перерахованих фізичних факторів.

При аналізі взаємодії сигналу і перешкоди будемо виходити з того, що обидва є випадковими процесами, котрі прийнято оцінювати відповідними щільностями ймовірності або одномірними функціями розподілу випадкового процесу $p(x)$ (функціями розподілу) [1].

В [2, 3, 4] показано, що у низці задач для оцінки взаємодії випадкових процесів замість функції розподілу зручніше користуватися спектром Фур’є функції розподілу (СФР), а в [5, 6, 7] — що багатомірну функцію розподілу можна замінити одномірною залежною. При цьому замість багатомірної функції розподілу можна використовувати одномірну функцію розподілу.

Постановка завдання

Взаємодію двох випадкових процесів оцінюють сумісною щільністю ймовірності $p_2(x, y)$ двох випадкових процесів, котру будемо називати двомірною функцією розподілу. Якщо випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є незалежними, то $p_2(x,y) = p_{1\xi}(x)p_{1\eta}(y)$ [1].

Таким чином для незалежних випадкових процесів можна користуватися функціями розподілу окремо кожного процесу та їх СФР для оцінки взаємодії процесів. Для залежних випадкових процесів така можливість ускладнена, тому що такі процеси оцінюються двомірною функцією розподілу, яка не може бути розділена на окремі функції розподілу. Отже для оцінки взаємодії двох залежних випадкових процесів спектральним методом необхідно ввести поняття двомірного СФР, особливості котрого необхідно дослідити.

Особливості двомірних СФР

Як і одномірна, двомірна функція розподілу має наступні основні властивості [1].

1. Двомірна функція розподілу завжди позитивна:

$$p_2(x,y) \geq 0 \tag{1}$$

2. Повний об'єм під поверхнею розподілу завжди дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x,y)dxdy = 1 \tag{2}$$

Двомірний СФР може бути отриманий шляхом використання прямого перетворення Фур'є по двом змінним:

$$S_p(\omega,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy\,, \tag{3}$$

де $S_p(\omega,\Omega)$ — двомірний СФР.

Відповідно від двомірного СФР до двомірної функції розподілу можна повернутись за допомогою зворотного перетворення Фур'є по двом змінним, тобто

$$p_2(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega,\Omega)e^{j\omega x}e^{j\Omega y}d\omega d\Omega\,. \tag{4}$$

По аналогії з одномірними СФР [2]

$$S_p(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x,y)dxdy\,. \tag{5}$$

Підставляючи (4) в (5) і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned} S_p(0,0) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega,\Omega)e^{j\omega x}e^{j\Omega y}d\omega d\Omega \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega,\Omega)d\omega d\Omega \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}e^{j\Omega y}dxdy \end{aligned} \tag{6}$$

Якщо врахувати, що [8

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}dx = \delta(\omega) \quad \text{і} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega y}dy = \delta(\Omega) \tag{7}$$

то

$$\delta(\omega)\delta(\Omega)=\delta(\omega,\Omega)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\Omega y}dy=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}e^{j\Omega y}dxdy. \tag{8}$$

І отже з урахуванням (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_2(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega,\Omega)S_p(\omega,\Omega)d\omega d\Omega=S_p(0,0)=1. \tag{9}$$

Таким чином постійна складова двомірної функції розподілу дорівнює об'єму під поверхнею розподілу.

Якщо розкласти двомірний СФР (3) в ряд Маклорена і обмежитись п'ятьма членами ряду, отримаємо:

$$\begin{aligned}
S_p(\omega,\Omega)=S_p(0,0)&+\left.\frac{\partial S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega+\left.\frac{\partial S_p(\omega,\Omega)}{\partial\Omega}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\Omega+\\
&+\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^2+2\left.\frac{\partial^2 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega\partial\Omega}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega\Omega+\left.\frac{\partial^2 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\Omega^2}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\Omega^2\right]+\\
&+\frac{1}{6}\left[\left.\frac{\partial^3 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^3}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^3+\left.\frac{\partial^3 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\Omega^3}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\Omega^3\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^3 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^2\partial\Omega}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^2\Omega+\left.\frac{\partial^3 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega\partial\Omega^2}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega\Omega^2\right]+\\
&+\frac{1}{24}\left[\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^4}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^4+\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\Omega^4}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\Omega^4\right]+\\
&+\frac{1}{6}\left[\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^3\partial\Omega}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^3\Omega+\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega\partial\Omega^3}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega\Omega^3\right]+\\
&+\frac{1}{4}\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^2\partial\Omega^2}\right|_{\omega=0,\Omega=0}\cdot\omega^2\Omega^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Як відомо [1], вирази для середніх значень двомірних функцій розподілу $p_2(x,y)$ випадкових процесів наступні:

$$m_1\{\xi(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{1\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp_2(x,y)dxdy, \tag{11}$$

$$m_1\{\eta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}yp_{1\eta}(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yp_2(x,y)dxdy. \tag{12}$$

СФЗ в формі (10) скорочено можна було б записати наступним чином:

$$S_p(\omega,\Omega)=1+\omega S'_{p\omega}(0,0)+\Omega S'_{p\Omega}(0,0)+\frac{\omega^2}{2}S''_{p\omega^2}(0,0)+\omega\Omega S''_{p\omega\Omega}(0,0)+$$
$$+\frac{\Omega^2}{2}S''_{p\Omega^2}(0,0)+\frac{\omega^3}{6}S'''_{p\omega^3}(0,0)+\frac{\Omega^3}{6}S'''_{p\Omega^3}(0,0)+\frac{\omega^2\Omega}{2}S'''_{p\omega^2\Omega}(0,0)+$$
$$+\frac{\omega\Omega^2}{2}S'''_{p\omega\Omega^2}(0,0)+\frac{\omega^4}{24}S'^{v}{}_{p\omega^4}(0,0)+\frac{\Omega^4}{24}S'^{v}{}_{p\Omega^4}(0,0)+\frac{\omega^3\Omega}{6}S'^{v}{}_{p\omega^3\Omega}(0,0)+$$
$$+\frac{\omega\Omega^3}{6}S'^{v}{}_{p\omega\Omega^3}(0,0)+\frac{\omega^2\Omega^2}{4}S'^{v}{}_{p\omega^2\Omega^2}(0,0) \qquad (13)$$

де індекси після p вказують на змінні, по яких здійснювалося диференціювання, наприклад, $S'^{v}{}_{p\omega^2\Omega^2}(0,0)=\left.\frac{\partial^4 S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega^2\partial\Omega^2}\right|_{\omega=0,\Omega=0}$.

Знайдемо відповідні похідні спектра функції розподілу. Перша похідна, враховуючи (3)

$$S'_{p\omega}(\omega,\Omega)=\frac{\partial S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega}=\frac{\partial\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy\right]}{\partial\omega}=$$
$$=-j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy \qquad (14)$$

По аналогії

$$S'_{p\Omega}(\omega,\Omega)=-j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}yp_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy\,. \qquad (15)$$

Отже, виходячи з (11, 12) та (14, 15), та підставляючи значення $\omega=0$ та $\Omega=0$, отримуємо вирази для моментів першого порядку:

$$S'_{p\omega}(0,0)=-j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp_2(x,y)dxdy=-jm_1\{\xi(t)\}=-jm_1\{\xi\}=-ja_x\,, \qquad (16)$$

$$S'_{p\Omega}(0,0)=-j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}yp_2(x,y)dxdy=-jm_1\{\eta(t)\}=-jm_1\{\eta\}=-ja_y\,, \qquad (17)$$

де a_x — середнє значення випадкового процесу $\xi(t)$, а a_y — $\eta(t)$.

Похідні другого, третього і четвертого порядків

$$S''_{p\omega}(\omega,\Omega)=-j\frac{\partial S_p(\omega,\Omega)}{\partial\omega}=\frac{\partial\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy\right]}{\partial\omega}=$$
$$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2p_2(x,y)e^{-j\omega x}e^{-j\Omega y}dxdy\,, \qquad (18)$$

$$S''_{p\Omega^2}(\omega,\Omega) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,, \tag{19}$$

$$S''_{p\omega\Omega}(\omega,\Omega) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,, \tag{20}$$

$$S'''_{p\omega^3}(\omega,\Omega) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,, \tag{21}$$

$$S'''_{p\Omega^3}(\omega,\Omega) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^3 p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,, \tag{22}$$

$$S'''_{p\omega^2\Omega}(\omega,\Omega) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 y p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,. \tag{23}$$

По аналогії можна знайти вирази для інших похідних. Наприклад

$$S'^{v}{}_{p\omega^4}(\omega,\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 p_2(x,y) e^{-j\omega x} e^{-j\Omega y} dxdy\,. \tag{24}$$

Підставляючи в (18 – 24) значення $\omega = 0$ та $\Omega = 0$, отримуємо, враховуючи відомі вирази для моментів розподілу відповідного порядку [1]

$$S''_{p\omega^2}(0,0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_2(x,y) dxdy = -m_2\{\xi\}, \tag{25}$$

$$S''_{p\Omega^2}(0,0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 p_2(x,y) dxdy = -m_2\{\eta\}, \tag{26}$$

$$S''_{p\omega\Omega}(0,0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy p_2(x,y) dxdy = -m_2\{\xi,\eta\}, \tag{27}$$

$$S'''_{p\omega^3}(0,0) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 p_2(x,y) dxdy = -m_3\{\xi\}, \tag{28}$$

$$S'''_{p\omega^2\Omega}(0,0) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 y p_2(x,y) dxdy = -m_3\{\xi_2,\eta\}, \tag{29}$$

$$S'''_{p\omega\Omega^2}(0,0) = j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy^2 p_2(x,y) dxdy = -m_3\{\xi,\eta_2\}, \tag{30}$$

де $m_n\{\xi_i,\eta_j\}$ — початковий момент n-го порядку, при $n=i$ — випадкового процесу $\xi(t)$, при $n=j$ — випадкового процесу $\eta(t)$, при $i\neq n\neq j$ — змішаний момент порядку i та j по відповідним випадковим процесам.

По аналогії можна знайти вирази і для моментів більш високого порядку.

Підставляючи (16, 17, 25 — 30) та інші вирази для моментів в (13), отримаємо кінцевий вираз для двомірного СФР

$$S_p(\omega,\Omega)=1-j\left(\omega a_x+\Omega a_y\right)-\frac{1}{2}\left(\omega^2 m_2\{\xi\}+2\omega\Omega m_2\{\xi,\eta\}+\Omega^2 m_2\{\eta\}\right)+$$
$$+j\frac{1}{6}\left(\omega^3 m_3\{\xi\}+3\omega^2\Omega m_3\{\xi_2,\eta\}+3\omega\Omega^2 m_3\{\xi,\eta_2\}+\Omega^3 m_3\{\eta\}\right)+$$
$$+\frac{1}{24}\left(\omega^4 m_4\{\xi\}+4\omega^3\Omega m_4\{\xi_3,\eta\}+6\omega^2\Omega^2 m_4\{\xi_2,\eta_2\}+4\omega\Omega^3 m_4\{\xi,\eta_3\}+\Omega^4 m_4\{\eta\}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(\omega^2 m_2\{\xi\}+2\omega\Omega m_2\{\xi,\eta\}+\Omega^2 m_2\{\eta\}\right)+$$
$$+\frac{1}{24}\left(\omega^4 m_4\{\xi\}+4\omega^3\Omega m_4\{\xi_3,\eta\}+6\omega^2\Omega^2 m_4\{\xi_2,\eta_2\}+4\omega\Omega^3 m_4\{\xi,\eta_3\}+\Omega^4 m_4\{\eta\}\right)-$$
$$-j\left[\left(\omega a_x+\Omega a_y\right)-\frac{1}{6}\left(\omega^3 m_3\{\xi\}+3\omega^2\Omega m_3\{\xi_2,\eta\}+3\omega\Omega^2 m_3\{\xi,\eta_2\}+\Omega^3 m_3\{\eta\}\right)\right].\quad(31)$$

При нульових середніх значеннях, тобто при $a_x=a_y=0$, початкові моменти переходять в центральні, тому на підставі (31) двомірний СФР

$$S_p(\omega,\Omega)=1-\frac{1}{2}\left(\omega^2 M_2\{\xi\}+2\omega\Omega M_2\{\xi,\eta\}+\Omega^2 M_2\{\eta\}\right)+$$
$$+j\frac{1}{6}\left(\omega^3 M_3\{\xi\}+3\omega^2\Omega M_3\{\xi_2,\eta\}+3\omega\Omega^2 M_3\{\xi,\eta_2\}+\Omega^3 M_3\{\eta\}\right)+\quad(32)$$
$$+\frac{1}{24}\left(\omega^4 M_4\{\xi\}+4\omega^3\Omega M_4\{\xi_3,\eta\}+6\omega^2\Omega^2 M_4\{\xi_2,\eta_2\}+4\omega\Omega^3 M_4\{\xi,\eta_3\}+\Omega^4 M_4\{\eta\}\right).$$

З іншого боку цей СФР можна отримати на підставі теореми затримки [8, 9] шляхом множення (31) на функцію $e^{j\left(\omega a_x+\Omega a_y\right)}$, попередньо розклавши цю функцію в степінний ряд і обмежившись п'ятьма членами ряду. В результаті двомірний СФР при нульових середніх значеннях

$$S_p(\omega,\Omega)=1-\frac{1}{2}\left[\omega^2\left(m_2\{\xi\}-a_x^2\right)+2\omega\Omega\left(m_2\{\xi,\eta\}-a_x a_y\right)+\Omega^2\left(m_2\{\eta\}-a_y^2\right)\right]+$$
$$+j\frac{1}{6}[\omega^3\left(m_3\{\xi\}-3m_2\{\xi\}a_x+2a_x^3\right)+3\omega^2\Omega\left(m_3\{\xi_2,\eta\}-2m_2\{\xi,\eta\}a_x-m_2\{\xi\}a_y+2a_x^2 a_y\right)+$$
$$+3\omega\Omega^2\left(m_3\{\xi,\eta_2\}-2m_2\{\xi,\eta\}a_y-m_2\{\eta\}a_x+2a_x a_y^2\right)+\Omega^3\left(m_3\{\eta\}-3m_2\{\eta\}a_y+2a_y^3\right)]+$$
$$+\frac{1}{24}[\omega^4\left(m_4\{\xi\}-4m_3\{\xi\}a_x+6m_2\{\xi\}a_x^2-3a_x^4\right)+$$
$$+4\omega^3\Omega\left(m_4\{\xi_3,\eta\}-m_3\{\xi\}a_y-3m_3\{\xi_2,\eta\}a_x+3m_2\{\xi\}a_x a_y-3a_x^3 a_y\right)+$$
$$+6\omega^2\Omega^2(m_4\{\xi_2,\eta_2\}-2m_3\{\xi,\eta_2\}a_x-2m_3\{\xi_2,\eta\}a_y+m_2\{\xi\}a_y^2+4m_2\{\xi,\eta\}a_x a_y+$$
$$+m_2\{\eta\}a_x^2+4a_x^2 a_y^2)+$$
$$+4\omega\Omega^3\left(m_4\{\xi,\eta_3\}-m_3\{\eta\}a_x-3m_3\{\xi,\eta_2\}a_y+3m_2\{\eta\}a_x a_y-3a_x a_y^3\right)+$$
$$+\Omega^4\left(m_4\{\eta\}-4m_3\{\eta\}a_y+6m_2\{\eta\}a_y^2-3a_y^4\right)]\quad(33)$$

Співвідношення між початковими та центральними моментами можна знайти з (32) та (33). Таким чином моменти другого порядку

$$m_2\{\xi\}=M_2\{\xi\}+a_x^2$$

$$m_2\{\eta\}=M_2\{\eta\}+a_y^2$$

$$m_2\{\xi,\eta\}=M_2\{\xi,\eta\}+a_xa_y$$

Моменти третього порядку

$$m_3\{\xi\}=M_3\{\xi\}+3M_2\{\xi\}a_x+a_x^3$$

$$m_3\{\eta\}=M_3\{\eta\}+3M_2\{\eta\}a_y+a_y^3$$

$$m_3\{\xi_2,\eta\}=M_3\{\xi_2,\eta\}+2M_2\{\xi,\eta\}a_x+M_2\{\xi\}a_y-a_x^2a_y$$

$$m_3\{\xi,\eta_2\}=M_3\{\xi_2,\eta\}+2M_2\{\xi,\eta\}a_y+M_2\{\eta\}a_y-a_xa_y^2$$

Моменти четвертого порядку

$$m_4\{\xi\}=M_4\{\xi\}+4M_3\{\xi\}a_x+6M_2\{\xi\}a_x^2+a_x^4$$

$$m_4\{\xi_3,\eta\}=M_4\{\xi_3,\eta\}+M_3\{\xi\}a_y+3M_3\{\xi_2,\eta\}a_x+3M_2\{\xi\}a_xa_y+3M_2\{\xi,\eta\}a_x^2-5a_x^3a_y$$

$$m_4\{\xi_2,\eta_2\}=M_4\{\xi_2,\eta_2\}+2M_3\{\xi_2,\eta\}a_y+2M_3\{\xi,\eta_2\}a_x+$$

$$+M_2\{\xi\}a_y^2+2M_2\{\xi,\eta\}a_xa_y+M_2\{\eta\}a_x^2-7a_x^2a_y^2$$

$$m_4\{\xi,\eta_3\}=M_4\{\xi,\eta_3\}+M_3\{\eta\}a_x+3M_3\{\xi,\eta_2\}a_y+3M_2\{\eta\}a_xa_y+3M_2\{\xi,\eta\}a_y^2-5a_xa_y^3$$

$$m_4\{\eta\}=M_4\{\eta\}+4M_3\{\eta\}a_y+6M_2\{\eta\}a_y^2+a_y^4$$

Повернемось до виразу двомірного СФР в формі (32), котрий можна уявити в наступній формі:

$$S_p(\omega,\Omega)=1-\frac{1}{2}\left(\omega\sqrt{M_2\{\xi\}}+\Omega\sqrt{M_2\{\eta\}}\right)^2+j\frac{1}{6}\left(\omega\sqrt[3]{M_3\{\xi\}}+\Omega\sqrt[3]{M_3\{\eta\}}\right)^3+$$

$$+\frac{1}{24}\left(\omega\sqrt[4]{M_4\{\xi\}}+\Omega\sqrt[4]{M_4\{\eta\}}\right)^4. \quad (34)$$

при $M_2\{\xi,\eta\}=R_1\sqrt{M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}}$,

$M_3\{\xi_2,\eta\}=R_2\sqrt[3]{M_3^2\{\xi\}M_3\{\eta\}}$, $M_3\{\xi,\eta_2\}=R_3\sqrt[3]{M_3\{\xi\}M_3^2\{\eta\}}$,

$M_4\{\xi_3,\eta\}=R_4\sqrt[4]{M_4^3\{\xi\}M_4\{\eta\}}$, $M_4\{\xi,\eta_3\}=R_5\sqrt[4]{M_4\{\xi\}M_4^3\{\eta\}}$,

де $R_1,\ldots,R_5$ — коефіцієнти кореляції.

Отже випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ будуть корельованими, якщо коефіцієнти кореляції $R_1=R_2=\ldots=R_5=1$ і некорельованими, при $R_1=R_2=\ldots=R_5=0$. Нагадаємо, що прийнято вважати [1, 10, 11, 12], що коефіцієнт кореляції є тільки один (R_1). Це припущення є дуже грубим, тому що не враховує вплив форми кривої функції розподілу, котра, як відомо [1, 10, 11, 12], визначається моментами третього та четвертого порядків.

Для підтвердження цього висновку використаємо інші вихідні дані.

Розглянемо взаємодію двох некорельованих випадкових процесів. Як відомо [2, 7] СФР таких процесів перемножуються. Якщо $S_p(\omega)$ та $S_p(\Omega)$ — СФР двох некорельованих процесів:

$$S_p(\omega)=1-\frac{\omega^2}{2}M_2\{\xi\}+j\frac{\omega^3}{6}M_3\{\xi\}+\frac{\omega^4}{24}M_4\{\xi\},$$

$$S_p(\Omega)=1-\frac{\Omega^2}{2}M_2\{\eta\}+j\frac{\Omega^3}{6}M_3\{\eta\}+\frac{\Omega^4}{24}M_4\{\eta\},$$

то після їх перемноження отримаємо:

$$S_p(\omega,\Omega)=1-\frac{1}{2}\left(\omega^2M_2\{\xi\}+\Omega^2M_2\{\eta\}\right)+j\frac{1}{6}\left(\omega^3M_3\{\xi\}+\Omega^3M_3\{\eta\}\right)+$$

$$+\frac{1}{24}\left(\omega^4M_4\{\xi\}+6\omega^2\Omega^2M_4\{\xi_2,\eta_2\}+\Omega^4M_4\{\eta\}\right).$$

що співпадає з результатом, отриманим з (34) при $R_1=R_2=...=R_5=0$.

Висновки

Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів дають можливість зробити оцінку взаємодії двох випадкових процесів, що є перспективним напрямком для подальших досліджень.

Мірою залежності між двома випадковими процесами є коефіцієнти кореляції зв’язку між випадковими процесами, кількість котрих в загальному випадку є необмеженою. Кількість коефіцієнтів кореляції, котрі використовуються для оцінки взаємодії випадкових процесів, залежить від точності врахування цієї взаємодії.

Для оцінки взаємодії випадкових процесів на підставі тільки їх дисперсії достатньо використовувати один перший коефіцієнт кореляції. Для оцінки впливу форми функцій розподілу випадкових процесів потрібно використовувати п’ять перших коефіцієнтів кореляції. Два випадкові процеси є некорельовані, якщо всі коефіцієнти кореляції дорівнюють нулю. Два випадкові процеси є повністю корельованими, якщо всі коефіцієнти кореляції дорівнюють одиниці.

Література

1. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: «Советское радио», 1974. – 549 с.
2. В.М. Майстренко. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”, “Приладобудування – 2003”. – № 26. – С. 145 – 150.
3. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція “Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138.
4. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”, “Приладобудування – 2004”. – № 27. – С. 163 – 170.

5. В.М. Майстренко. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція "Приладобудування – 2004: Стан і перспективи" 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 138 – 139.
6. В.М. Майстренко. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Методи та прилади контролю якості. – 2004. – №12. – С.77 – 80.
7. В.М. Майстренко. Метод оцінки взаємодії випадкових некорельованих перешкод і сигналу в системі передачі інформації // Вісник національного технічного університету "Київський політехнічний інститут", "Приладобудування – 2004". – № 28. – С. 155 – 162.
8. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с.
9. В.Г. Криксунов. Спектральний аналіз електричних сигналів. – К.: Техніка, 1971. – 193 с.
10. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 671 с.
11. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 573 с.
12. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.

Майстренко В.Н. **Спектры двумерных функций распределения случайниых процессов.** Обоснована возможность и математическая реализация способа описания двумерной функции распределения случайного процесса. Показана связь смешанных моментов и коэффициентов корреляции с параметрами спектра двумерной функции распределения. Сделан вывод, что для оценки формы функции распределения случайных процессов нужно использовать пять первых коэффициентов корреляции.	Maystrenko V.N. **Spectrs of two-dimensional functions of distribution of random processes.** The opportunity and mathematical realization of a way of the description of two-dimensional functions of distribution of casual process is proved. The connection of the mixed moments and factors of correlation with parameters of a spectrum of two - dimensional functions of distribution is shown. The conclusion is made, that for an estimation of the form function of distribution of casual processes it is necessary to use of the five first factors of correlation.

Надійшло до редакції
18 червня 2004 року

УДК 543.43.001:535.8.031

МЕТОДОЛОГІЯ ПОБУДОВИ ЗАСОБІВ МЕТРОЛОГІЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НЕФЕЛОМЕТРИЧНОГО АНАЛІЗАТОРА

Миндюк Я.Л., Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Розглянуто принципи побудови засобів метрологічного забезпечення нефелометричних аналізаторів – імітатора аналованого середовища. Проведено аналіз схемних рішень різних типів імітаторів

Вступ. Постановка задачі

При виробництві продуктів побутової хімії, мінеральних добрив, харчових продуктів, чорних та кольорових металів використовуються технологічні процеси, пов'язані з приготуванням та переробкою дисперсних матеріалів, що