

ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 519.246

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРІВ ОДНОМІРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

*Майстренко В.М., Національний технічний університет України “Київський
політехнічний інститут”, м. Київ, Україна*

Проведено дослідження поведінки модуля і аргументу спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів в залежності від середнього значення, частоти та центральних моментів до четвертого порядку. Запропоновано використання для дослідження відносних спектрів, котрі залежать від відносних параметрів.

Вступ

Спотворення сигналу через вплив на нього шумів та перешкод зменшують ймовірність правильного прийому переданого повідомлення. Аналогічно результати вимірювання спотворюються випадковими похибками, вплив яких можна зменшити тільки статистичними методами, а самі похибки можна розглядати як випадкові сигнали, що накладаються на детермінований сигнал – результат вимірювання.

Сучасна теорія для опису випадкових процесів (корисних сигналів, шумів, перешкод, випадкових похибок тощо) пропонує інтегральні функції розподілу ймовірностей випадкових процесів та щільності розподілу ймовірностей випадкових процесів (функції розподілу) [1, 2, 3, 4]. Останні є більш зручними, тому частіше використовуються.

У простішому випадку функції розподілу є одномірними, але складні нестационарні випадкові процеси описуються багатомірними функціями розподілу. Проте замість багатомірних функцій розподілу можна використовувати одномірні залежні функції розподілу. В зв'язку з цим викликає цікавість дослідження саме одномірних функцій розподілу, котрі характеризують поведінку будь-яких випадкових сигналів.

Постановка задачі

При вирішенні теоретичних і практичних задач, пов'язаних з випадковими сигналами, що описуються функціями розподілу, оцінюється проходження цих сигналів через різні кола. В цьому випадку дуже інформативним є використання спектральних методів. Тому в [5] пропонується застосувати спектри функцій розподілу, котрі є дуже зручними при вирішенні задач проходження випадкових сигналів через кола.

Спектри функцій розподілу мають свої особливості, дослідження котрих є

окремою науковою задачею.

Модуль і аргумент функції розподілу

Щільності ймовірностей випадкових процесів (функції розподілу) мають комплексні спектри, котрі в загальному випадку описуються приблизним виразом [5]:

$$S_p(\omega) = 1 - \frac{m_2}{2} \omega^2 + \frac{m_4}{24} \omega^4 + j \left(\frac{m_3}{6} \omega^3 - a\omega \right), \quad (1)$$

де m_n – початкові моменти функції розподілу випадкового процесу відповідного порядку,

a – математичне сподівання (середнє значення) випадкового процесу.

Враховуючи співвідношення між центральними моментами функції розподілу та їх початковими моментами [5].

$$D = \delta^2 = m_2 - a^2, \quad (2)$$

$$M_3 = m_3 - 3m_2a + 2a^3, \quad (3)$$

$$M_4 = m_4 - 4m_3a + 6m_2a^2 - 3a^4, \quad (4)$$

де $D = \delta^2$ – дисперсія випадкової величини ξ ,

δ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ від її середнього значення.

M_n – центральні моменти функції розподілу випадкового процесу відповідного порядку,

і отримуючи з (2), (3) та (4) вирази для початкових моментів:

$$m_2 = D + a^2, \quad (5)$$

$$m_3 = M_3 + 3Da + a^3, \quad (6)$$

$$m_4 = M_4 - 4M_3a + 6Da^2 + a^4, \quad (7)$$

знайдемо комплексний спектр функції розподілу після підсталення (5), (6) і (7) у (1)

$$S_p(\omega) = 1 - (D + a^2) \frac{\omega^2}{2} + (M_4 - 4M_3a + 6Da^2 + a^4) \frac{\omega^4}{24} + j \left[(M_3 + 3Da + a^3) \frac{\omega^3}{6} - a\omega \right]. \quad (8)$$

Відомо [5], що парна функція має дійсний спектр, тобто уявна частина для цього випадку буде дорівнювати нулю:

$$(M_3 + 3Da + a^3) \frac{\omega^3}{6} - a\omega = 0. \quad (9)$$

Функція розподілу буде парною, якщо математичне сподівання $a = 0$, а сама функція буде симетричною відносно осі ординат. Отже, якщо в (9) підставити значення $a = 0$, то умова симетричності функції розподілу буде

$$M_3 = 0$$

При аналітичних розрахунках певну цікавість являють собою вирази для модуля і аргументу цього спектра, які легко отримати з (1).

Модуль спектра функції розподілу (спектра амплітуд) з урахуванням незалежності від вибору початкової точки відліку, тобто можливості прирівняти математичне сподівання a нулю [2, 6]

$$\Phi_p(\omega) = \sqrt{1 - D\omega^2 + \left(D^2 + \frac{M_4}{3}\right)\frac{\omega^4}{4} + \left(\frac{M_3}{3} - \frac{DM_4}{2}\right)\frac{\omega^6}{12} + \frac{M_4^2}{576}\omega^8}. \quad (10)$$

Аргумент спектра функції розподілу

$$\varphi_p(\omega) = \arctg \frac{4\omega[\omega^2(M_3 + 3Da + a^3) - 6a]}{24 - 12(D + a^2)\omega^2 + (M_4 - 4M_3a + 6Da^2 + 4a^4)\omega^4}. \quad (11)$$

Комплексний спектр функції розподілу випадкового процесу, а також його модуль та аргумент, зручніше використовувати у відносному вигляді, для чого потрібно ввести відносні параметри:

відносну частоту $\nu = \omega\delta$,

відносне середнє значення $b = \frac{a}{\delta}$,

коефіцієнт симетрії $s = \frac{M_3}{\delta^3}$,

ексцес $\varepsilon = \frac{M_4}{\delta^4}$.

Тоді відносний комплексний спектр функції розподілу

$$S_p(\nu) = 1 - \frac{1+b^2}{2}\nu^2 + \frac{\varepsilon - 4sb + 6b^2 + b^4}{24}\nu^4 + j\left(\frac{s + 3b + b^3}{6}\nu^3 - b\nu\right), \quad (12)$$

відносний спектр амплітуд

$$\Phi_p(\nu) = \frac{1}{6}\sqrt{36 - 36\nu^2 + 3(3 + \varepsilon)\nu^4 + \left(s^2 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)\nu^6 + \frac{\varepsilon^2}{16}\nu^8}, \quad (13)$$

і відносний спектр фаз

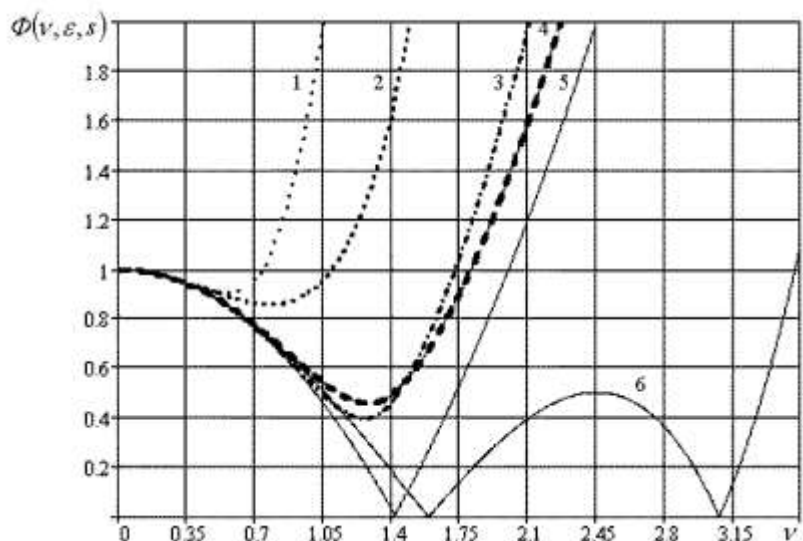
$$\varphi_p(\nu) = \arctg \frac{4\nu[\nu^2(s + 3b + b^3) - 6b]}{24 - 12(1 + b^2)\nu^2 + (\varepsilon - 4sb + 6b^2 + b^4)\nu^4}. \quad (14)$$

Сім'я відносних спектрів амплітуд і фаз наведені відповідно на рис. 1 та рис. 2.

Приведені на рис. 1 і 2 сім'ї спектрів амплітуд і фаз побудовані на підставі приблизних формул, тому вони точно відображають хід кривих тільки при малих значеннях частоти (апроксимація проводилася за допомогою ряду Маклорена [5]). Але саме ця область спектрів є найбільш інформативною. Тому дослідження поведінки спектра функції розподілу будемо проводити в області значень відносної частоти $\nu \leq 3,2$.

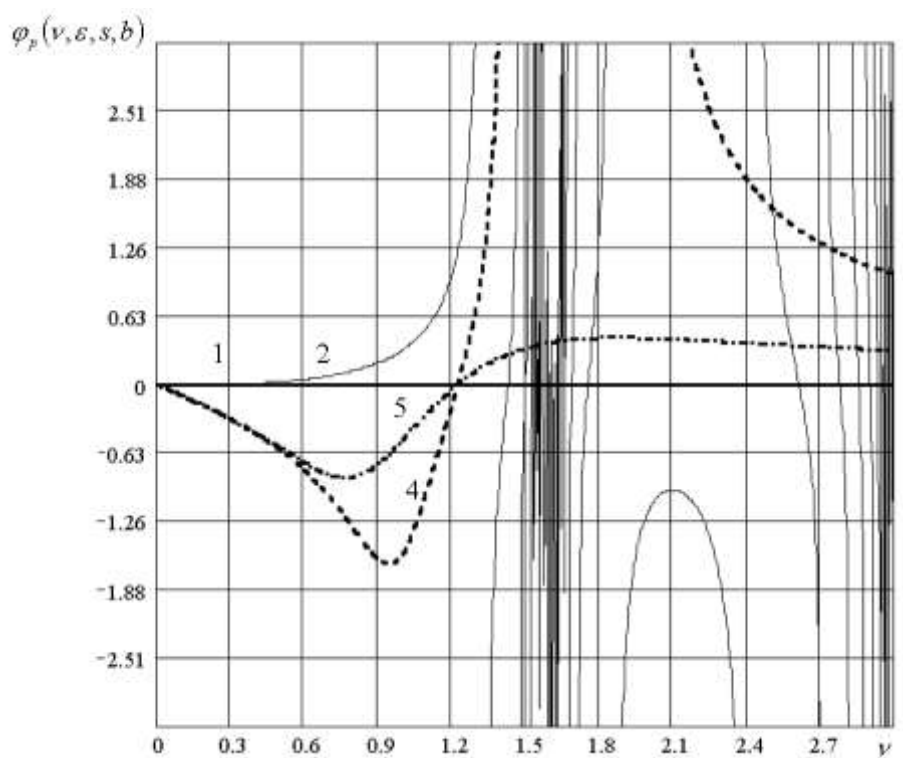
З рис. 1 видно, що хід спектра амплітуд в значній мірі залежить від значень ексцесу ε та коефіцієнта симетрії s . Виходячи з того, що функції розподілу

частіше за все є симетричними, на першому етапі в цій роботі будемо вважати, що $s = 0$.



1 — $\varepsilon=1, s=10$; 2 — $\varepsilon=10, s=0$; 3 — $\varepsilon=0, s=1$; 4 — $\varepsilon=1, s=1$; 5 — $\varepsilon=1, s=-1$; 6 — $\varepsilon=1, s=0$

Рисунок 1 – Сім'ї відносних спектрів амплітуд



1 — $\varepsilon=1, s=0, b=0$; 2 — $\varepsilon=1, s=1, b=0$; 3 — $\varepsilon=1, s=0, b=1$; 4 — $\varepsilon=10, s=0, b=1$

Рисунок 2 – Сім'ї відносних спектрів фаз

Тоді, з (13) відносний спектр амплітуд

$$\Phi_p(\nu) = \frac{1}{6} \sqrt{36 - 36\nu^2 + 3(3 + \varepsilon)\nu^4 - \frac{3\varepsilon}{2}\nu^6 + \frac{\varepsilon^2}{16}\nu^8}. \quad (15)$$

Прирівнюючи (15) нулю, знаходимо корені рівняння, котрі виражають точки переходу функції через 0 (нульові точки)

$$\nu_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{6 \pm 2\sqrt{3}\sqrt{3-3\varepsilon}}{\varepsilon}}. \quad (16)$$

Графік залежності частот нульових точок від ексцесу для позитивних частот представлений на рис. 3. Графік для негативних частот буде мати аналогічний вигляд.

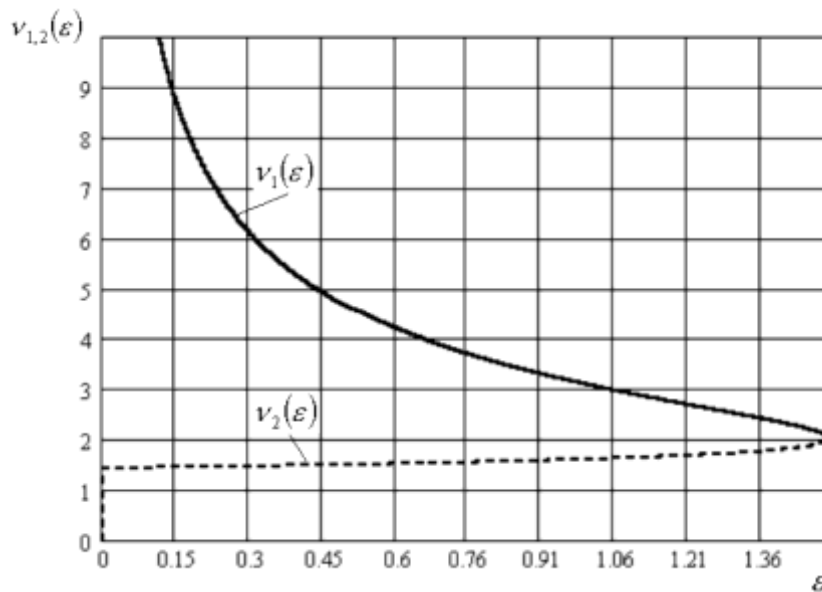


Рисунок 3 – Графік залежності частот нульових точок від ексцесу для позитивних частот

З виразу (16) видно, що відносна частота має дійсне значення при $2\varepsilon \leq 3$, тобто максимальне значення ексцесу, при котрому частота є дійсною, дорівнює $\varepsilon_{\max} = 1,5$. Це відповідає відносній частоті $\nu = 2$. При цьому значенні ексцесу крива спектра амплітуд тільки торкається осі абсцис ν . При більших значеннях ексцесу ця крива проходить вище осі ν , а при менших значеннях — пересікає вісь ν в чотирьох точках, тобто існують дві позитивні і дві негативні частоти нульових точок.

При малих значеннях ексцесу, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, відстань між частотами нульових точок значно збільшується і при дуже малих ексцесах залишаються тільки дві нульові точки. Дійсно, з (15) видно, що відносний спектр амплітуд при $\varepsilon = 0$

$$\Phi_p(\nu) = 1 - \frac{\nu^2}{2}. \quad (17)$$

Корені рівняння $\Phi_p(\nu) = 0$: $\nu_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Іншими словами можна сказати, що нульові точки існують в діапазоні зміни

ексцесу від нуля до значення $\varepsilon_{\max} = 1,5$, коли нульові точки на позитивних частотах і окремо на негативних частотах при відносній частоті зливаються.

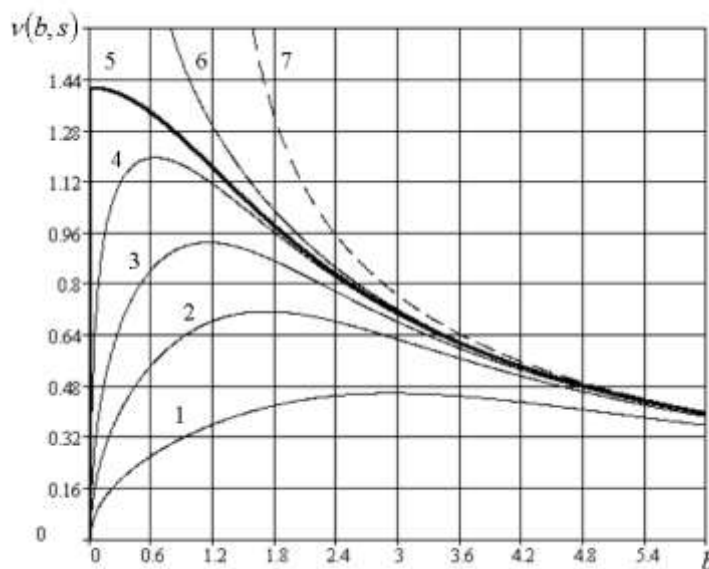
З визначення ексцесу видно, що $\varepsilon = 0$ при $M_4 = 0$ або $\delta = \infty$, тобто $D = \infty$. Це відповідає умові повної невизначеності, коли випадкова величина ξ з рівною ймовірністю буде приймати будь-яке значення.

З сказаного можна зробити висновок, що функція розподілу може мати ексцес в границях від 0 до ∞ , а не від 1 до ∞ як це стверджується в [7].

Прирівнюючи (14) нулю і вирішуючи рівняння, отримуємо три наступні корені:

$$v_1 = 0; \quad v_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{6b}{s-3b+b^3}}. \quad (17)$$

Сім'ю кривих залежності відносних частот від відносного середнього значення при різних коефіцієнтах симетрії наведено на рис. 5.



1 — $s = 50$; 2 — $s = 10$; 3 — $s = 3$; 4 — $s = 0,5$; 5 — $s = 0$; 6 — $s = -1$; 7 — $s = -5$

Рисунок 5 – Сім'я кривих залежності відносних частот від відносного середнього значення при різних коефіцієнтах симетрії

Таким чином можна зробити висновок, що аргумент спектра функції розподілу має нульове значення тільки на одній позитивній і одній негативній частотах, а також на нульовій частоті.

Для визначення екстремумів відносного спектру амплітуд (15) знайдемо його похідну

$$\frac{d\Phi_p(v)}{dv} = 4v \frac{\varepsilon^2 v^6 + 6(2s^2 - 3\varepsilon)v^4 + 24(\varepsilon + 3)v^2 - 144}{\sqrt{\varepsilon^2 v^8 + 32(2s^2 - 3\varepsilon)v^6 + 48(\varepsilon + 3)v^4 - 576v^2 + 576}}$$

і при $s = 0$

$$\frac{d\Phi_p(\nu)}{d\nu} = 4\nu \frac{\varepsilon^2\nu^6 - 18\varepsilon\nu^4 + 24(\varepsilon + 3)\nu^2 - 144}{\sqrt{\varepsilon^2\nu^8 + 96\varepsilon\nu^6 + 48(\varepsilon + 3)\nu^4 - 576\nu^2 + 576}} \quad (18)$$

Визначимо нульові точки, прирівнюючи (18) нулю і знаходячи корені цього рівняння. Отримуємо три корені

$$\nu_1 = 0; \quad \nu_{2,3} = \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}. \quad (19)$$

При цьому екстремальні значення спектра амплітуд

$$\Phi_p(0) = 1; \quad \Phi_p\left(\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}\right) = 1 - \frac{3}{2\varepsilon}.$$

Графік залежності екстремального значення спектра амплітуд від ексцесу приведений на рис. 6.

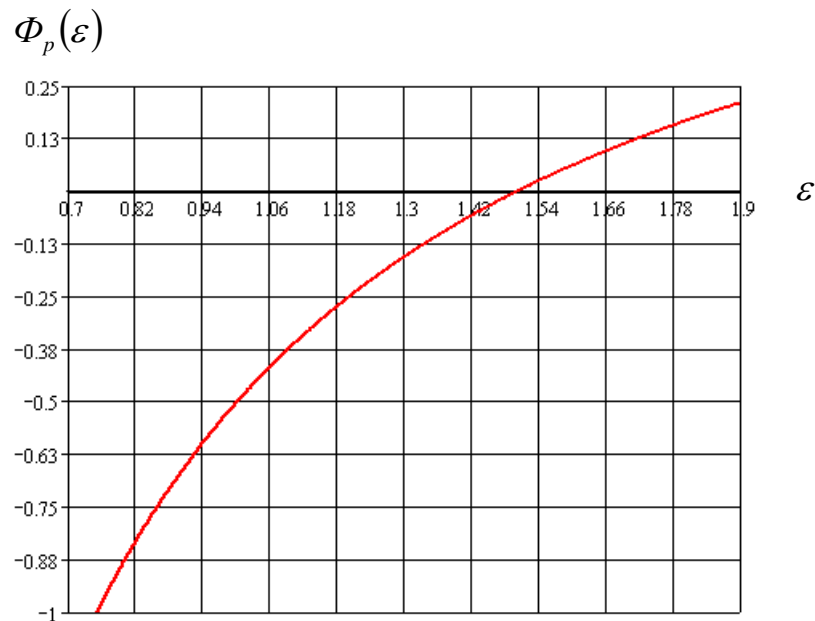


Рисунок 6 – Графік залежності екстремального значення спектра амплітуд від ексцесу

Спектральне уявлення функції розподілу дозволяє значно спростити аналіз взаємодії сигналу і перешкод, а також вдосконалити і підвищити точність розрахунку впливу випадкових похибок вимірювальних приладів.

Висновки

Функція розподілу буде симетричною, якщо її центральний момент третього порядку буде дорівнювати нулю.

Комплексний спектр функції розподілу випадкового процесу, а також його модуль і аргумент для дослідження їх залежності від частоти та середнього значення зручно використовувати в відносному вигляді. Для цього потрібно ввести поняття відносної частоти та відносного середнього значення, а також використати коефіцієнт симетрії та ексцес.

Для симетричних функцій розподілу відносна частота має дійсне значення при умові $2\varepsilon \leq 3$. Максимальне значення ексцесу, при котрому частота є дійсною, дорівнює 1,5 (відносна частота $\nu = 2$). При цьому значенні ексцесу крива спектра амплітуд торкається осі абсцис. При більших значеннях ексцесу крива спектра проходить вище осі частот, а при менших значеннях – пересікає вісь в чотирьох точках (існують дві позитивні і дві негативні частоти нульових точок).

Нульові точки існують в діапазоні зміни ексцесу від 0 до 1,5. На відносній частоті $\pm \nu = 2$ ці точки зливаються в одну.

Функція розподілу може мати значення ексцесу від 0 до ∞ , а не від 1 до ∞ як це стверджується в деяких роботах.

Аргумент спектра функції розподілу має нульове значення тільки на одній позитивній і одній негативній частотах, а також на нульовій частоті, а екстремуми – на нульовій частоті та на частотах $\nu_{2,3} = \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$.

Перспективами подальших розвідок у цьому напрямку є дослідження оцінки впливу перешкод на якість сигналу, що значно спростить відповідні розрахунки.

Література

1. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. – М.: «Наука», 1969. – 573 с.
2. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: «Советское радио», 1974. – 549 с.
3. В.И. Тихонов. Статистическая радиотехника. – М.: «Радио и связь», 1982. – 623 с.
4. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи т. 1. – М.: «Советское радио», 1961. – 781 с.
5. В.М. Майстренко. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, “Приладобудування – 2003”. – № 26. – С. 145–150.
6. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с.
7. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.

<p>Майстренко В.Н. Исследование спектров одномерных функций распределения случайных процессов</p> <p>Проведены исследования поведения модуля и аргумента спектров одномерных функций распределения случайных процессов в зависимости от среднего значения частоты и центральных моментов до четвертого порядка. Предложено использование для исследования относительных спектров, зависящих от относительных параметров.</p>	<p>Maystrenko V.N. Study spectrum univariate function strife-fissions of the casual processes</p> <p>The Organized studies of the behaviour of the module and argument spectrum univariate function of the sharing the casual processes depending on average importance of the frequency and central moments before the fourth order. Offered use for study relative spectrum, hanging from relative parameter.</p>
---	--

*Надійшло до редакції
23 квітня 2004 року*