ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 519.246

СПЕКТРИ ОДНОМІРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Майстренко В.М., Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут", м.Київ, Україна

Обгрунтовано можливість та доцільність спектрального способу опису одномірної функції розподілу випадкового процесу. Показано, що незмінна по часу величина має рівномірний нескінченний спектр функції розподілу, а детермінована зміна цієї величини звужує спектр її функції розподілу.

Вступ

Випадковий процес є основною математичною моделлю сигналів як тих, що переносять інформацію, так і перешкод, котрі їх супроводять. У вимірювальних пристроях перешкоди призводять до спотворення результатів вимірювання і тому якість засобів і результатів вимірювань характеризують за значенням їх похибок.

Випадкові процеси математично описуються ймовірнісними методами. Ці методи глибоко розроблені, широко використовуються й базуються на понятті функцій розподілу випадкового процесу, котрі є характеристиками випадкового процесу.

Функції розподілу випадкового процесу є величинами, що змінюються в залежності від значення випадкової величини, а не від часу.

В літературі, наприклад [1], [5], широко використовується характеристична функція, але характеристична функція, яка є зворотнім перетворенням Фур'є без відповідного коефіцієнта, відрізняється від запропонованого спектрального перетворення. Тому питання з запропонованих позицій на даний момент не розглядалося.

Постановка завдання

Спектри функції розподілу є дуже інформативними при проходженні випадкових сигналів через різні кола. Проблема визначення поведінки спектрів функції розподілу при аналізі, наприклад, похибок вимірювання, являє собою актуальне наукове значення, і є метою даної роботи.

Особливості спектрів функцій розподілу

На щільність розподілу ймовірностей випадкового процесу (функцію розподілу) накладаються певні обмеження, котрі для одномірної функції розподілу $p(x)$ є наступними [1].

1. Функція розподілу завжди позитивна:

$$p(x) \geq 0 \tag{1}$$

2. Функція розподілу підпорядковується умові нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{2}$$

Аргумент функції розподілу x не є часом, а являє собою дійсне випадкове значення в діапазоні від $-\infty$ до ∞, що може приймати випадкова величина ξ, котра змінюється в часі, тобто $\xi(t)$.

Незважаючи на вказані обмеження до функції розподілу може бути використане перетворення Фур'є, в результаті чого буде отримано спектр Фур'є функції розподілу:

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-j\omega x}dx, \tag{3}$$

де $S_p(\omega)$ — спектр функції розподілу.

Відмітимо основну властивість спектра функції розподілу. Для цього, використовуючи зворотне перетворення Фур'є, запишемо

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega)e^{j\omega x}d\omega \tag{4}$$

і після підставлення (4) в (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega)e^{j\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}dx \tag{5}$$

Виходячи з відомого виразу [4]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}d\omega = \delta(\omega) \tag{6}$$

та підставляючи його в (5), отримаємо з врахуванням властивостей дельта-функції [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)S_p(\omega)d\omega = S_p(0) = 1. \tag{7}$$

Цей вираз можна розглядати як умову нормування в частотній області. Він погоджується також з властивістю функції розподілу (2), тому що постійна складова функції розподілу дорівнює

$$S_p(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx. \tag{8}$$

Вираз (7) можна розглядати також, як спектр енергії функцій, що мають відповідно спектри $\delta(\omega)$ та $S_p(\omega)$. Через те, що функції енергетичної спектральної щільності не містять інформації про початкову фазу складових спектру, вихідна функція є завжди позитивною, що погоджується з вимогами до функції розподілу (1).

Спробуємо встановити фізичне трактування спектра функції розподілу. Для цього припустимо, що функція розподілу має тільки одну частотну складову ω_0. Тоді, як випливає з (7), нормований спектр функції розподілу є

$$S_p(\omega) = \delta^2(\omega_0). \tag{9}$$

У відповідності з теоремою Рейлі спектр квадрату функції дорівнює квадрату спектрів функції. Тоді при парній функції розподілу

$$p(x) = \cos^2 \omega_0 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_0 x). \tag{10}$$

Таким чином функція розподілу (10) буде періодичною полімодальною з відстанню між модами $x = \dfrac{4\pi}{\omega_0}$, тобто при зміні частоти ω_0 буде змінюватися відстань між модами. Отже функція розподілу будь-якої форми формується з полімодальних функцій з різними відстанями між модами. Спектр, тобто спектральна щільність функції розподілу визначає амплітуди кожної з цих полімодальних функцій. Нормування спектральної функції гарантує виконання умови (1). Іншими словами, в спектрі функції розподілу завжди повинна бути постійна складова.

Розкладемо спектр функції розподілу $S_p(\omega)$ в ряд Маклорена. Тоді отримаємо, обмежуючись п’ятьма членами ряду

$$S_p(\omega) = S_p(0) + \omega S_p'(0) + \frac{\omega^2}{2} S_p''(0) + \frac{\omega^3}{6} S_p'''(0) + \frac{\omega^4}{24} S_p^{IV}(0). \tag{11}$$

Знайдемо відповідні похідні спектра функції розподілу. Перша похідна, враховуючи (3)

$$S_p'(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-j\omega x} dx\right]'_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(x) e^{-j\omega x}\right]'_x = -j \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) e^{-j\omega x} dx. \tag{12}$$

В загальному вигляді для *n*-ї похідної

$$\frac{d^n S_p(\omega)}{d\omega^n} = (-1)^n j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(\omega) e^{-j\omega x} dx. \tag{13}$$

Підставляючи в (12) значення $\omega = 0$, отримуємо, враховуючи відомі вирази для моментів розподілу відповідного порядку [1]

$$S_p'(0) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = -ja, \tag{14}$$

де a — математичне сподівання випадкової величини ξ або її середнє значення.

$$S_p''(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = -m_2\{\xi\}, \tag{15}$$

де $m_2\{\xi\}$ — початковий момент другого порядку.

Таким чином для *n*-ї похідної при $\omega = 0$

$$\left(\frac{d^n S_p(\omega)}{d\omega^n}\right)_{\omega=0} = (-1)^n j^n m_n\{\xi\}, \tag{16}$$

де $m_n\{\xi\}$ — початковий момент *n*-го порядку.

Як бачимо, початкові моменти розподілу *n*-го порядку відрізняються від значень *n*-х похідних спектра функції розподілу при $\omega = 0$ тільки множником $(-1)^n j^n m_n\{\xi\}$.

Підставляючи (8, 14-15) в (11), отримаємо кінцевий вираз для спектра функції розподілу

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= 1 - j\omega a - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi\} = \\ &= 1 - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi\} + j\left(-\omega a + \frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi\}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Якщо випадковий процес описано парною функцією розподілу, то уявна частина спектра буде дорівнювати 0, і вираз для спектра функції розподілу спроститься:

$$S_p(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2} D + \frac{\omega^4}{24} M_4\{\xi\}, \tag{18}$$

де $D = \delta^2$ — дисперсія випадкової величини ξ,

δ — середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ від її середнього значення,

$M_4\{\xi\}$ — центральний момент четвертого порядку.

Виходячи з того, що центральні моменти — це моменти розподілу ймовірності відхилення випадкової величини, тобто моменти функції розподілу при середньому значенні $a = 0$ [1]

$$M_n\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^n p(x) dx,$$

можна з (14) отримати спектр функції розподілу, що зміщена на величину a по вісі x. Для цього використаємо теорему затримки [3]. Але в нашому випадку замість затримки буде випередження на величину a. Щоб отримати вираз для спектра зміщеної функції розподілу, помножимо (17) на $e^{j\omega a}$, попередньо розклавши цю функцію в степеневий ряд і обмежившись п'ятьма членами ряду.

Таким чином спектр функції розподілу при нульовому середньому значенні

$$\begin{aligned} S_{(p-a)}(\omega) &= 1 - \frac{\omega^2}{2}\left(m_2 - a^2\right) + j\frac{\omega^3}{6}\left(m_3 - 3m_2 + 2a^3\right) + \\ &+ \frac{\omega^4}{24}\left(m_4 - 4m_3 a + 6m_2 a^2 - 3a^4\right) + j\frac{\omega^5}{24}\left(m_4 a - 2m_3 a^2 + 2m_2 a^3 - a^5\right) - \\ &- \frac{\omega^6}{12}\left(4m_4 a^2 - 3m_3 a^3 + 4m_2 a^4\right) - j\frac{\omega^7}{144}\left(m_4 a^3 - m_3 a^4\right) + \frac{\omega^8}{576} m_4 a^4, \end{aligned} \tag{19}$$

де $m_n = m_n\{\xi\}$.

Отриманий вираз (19) відрізняється від (17) тим, що початкові моменти перетворюються в відповідні центральні. На цій підставі можна знайти зв'язок між центральними і початковими моментами, які найбільше характеризують випадковий процес, тобто при $n = 2, 3$ і 4.

Дисперсія випадкового процесу

$$D = \delta^2 = m_2 - a^2 . \tag{20}$$

Центральний момент третього порядку

$$M_3 = m_3 - 3m_2 a + 2a^3 . \tag{21}$$

Центральний момент четвертого порядку

$$M_4 = m_4 - 4m_3 a + 6m_2 a^2 - 3a^4 . \tag{22}$$

Звернемо увагу ще на одну властивість спектра функції розподілу. Якщо вона описується дельта-функцією, що розташована на початку координат, то буде мати нескінченно широкий рівномірний спектр, тому що

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j\omega x} dx = 1 \text{ і } D = 0 .$$

При зміщенні дельта-функції по вісі x на величину a, виходячи з теореми затримки

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j\omega a} e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega a} .$$

І в формі (17) $\quad S_p(\omega) = 1 - j\omega a - \dfrac{\omega^2}{2} a^2 + j\dfrac{\omega^3}{6} a^3 + \dfrac{\omega^4}{24} a^4 .$

Отже початкові моменти: $m_2 = a^2;\ m_3 = a^3;\ m_4 = a^4.$

З врахуванням (20 — 22) центральні моменти

$D = a^2 - a^2 = 0; \quad M_3 = a^3 - 3a^3 + 2a^3 = 0; \quad M_4 = a^4 - 4a^4 + 6a^4 - 3a^4 = 0.$

Таким чином при зміщенні дельта-функції по вісі x від початку координат центральні моменти функції розподілу, в тому числі дисперсія, дорівнюють 0. В той же час початкові моменти відрізняються від 0 і являють собою середнє значення в відповідній степені.

З цього можна зробити висновок, що відома незмінна в часі величина має рівномірний, нескінченно широкий спектр функції розподілу. Будь-яка зміна цієї величини, навіть детермінована, приводить до зменшення ширини спектра. Так, наприклад, спектр дискретного двозначного розподілу, що складається з двох дельта-функцій $p(x) = \dfrac{\delta(x-a)}{2} + \dfrac{\delta(x+a)}{2}$, буде

$$S_p(\omega) = \frac{e^{-j\omega x} + e^{j\omega x}}{2} = \cos \omega a \text{ і } D = a^2 .$$

При з'явленні елементів випадковості дисперсія зростає, а спектр функції розподілу звужується.

Висновки

Спектральний спосіб опису явищ, котрий отримав загальне визнання, може бути розповсюджений на опис випадкових процесів, котрі характеризуються

одномірною функцією розподілу (щільністю ймовірностей випадкових процесів).

Функції розподілу будь-якої форми формуються з полімодальних функцій з різними відстанями між модами з обов'язковою наявністю постійної складової.

Спектр функції розподілу може бути приведений в нормовану форму. При розкладенні його в степеневий ряд коефіцієнтами ряду є моменти розподілу відповідного порядку, помножені на $(-1)^n j^n$.

Відома незмінна в часі величина має рівномірний, нескінченно широкий спектр функції розподілу. Будь-яка, навіть детермінована зміна цієї величини, призводить до звуження спектра функції її розподілу.

Спектральне уявлення функції розподілу дає можливість встановити простий математичний зв'язок між її центральними та відповідними початковими моментами.

Описаний метод буде надалі використовуватися при при оцінці адитивних і мультиплікативних похибок, при цьому цікавим питанням є вивчення поведінки отриманих спектрів.

Література

1. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
2. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с.
3. В.Г. Криксунов. Спектральний аналіз електричних сигналів. – К.: Техніка, 1971. – 193 с.
4. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 671 с.
5. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. – М.: «Наука», 1969. – 573 с.
6. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
7. Матеметическая энциклопедия, т. 2. Главный редактор И.М. Виноградов. – М.: Советская Энциклопедия, 1979. – 1100 с.

В.Н. Майстренко. **Спектры одномерных функций распределения случайниых процессов**

Обоснована возможность и целесообразность спектрального способа описания одномерной функции распределения случайного процесса. Показано, что неизменная во времени величина имеет равномерный бесконечный спектр функции распределения, а любое, даже детерминированное изменение этой величины сужает спектр её функции распределения.

V.Maystrenko. **Specters of univariate functions of distribution of the random process.**

Posiblity and expedience of the specter method of description of univariate functions of distribution of the random process have been grounded. Constant has uniform in infinite spectrum of function of distribution has been shown . Any, even if determined, changes of this constant restricts the spectrum of its function of distribution.

Надійшла до редакції
15 серпня 2003 року