ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 621.314

СПЕКТР ФУНКІЇ РОЗПОДІЛУ ПРИ КВАНТИЛЬНІЙ ОЦІНЦІ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК

Майстренко В.М., Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

Знайдені формули для розрахунку спектра функції розподілу та другого енергетичного спектра похибки із заданою довірчою ймовірністю. Отримані формули можуть бути використані для проведення інженерних розрахунків випадкових похибок при їх квантильній оцінці

Вступ

В різних задачах теорії вимірювань виникає необхідність підсумовувати випадкові похибки. Наприклад при проектуванні вимірювальних пристроїв, котрі складаються з окремих блоків, а ті, в свою чергу, - з окремих елементів, сумарна похибка пристрою буде визначатися похибками окремих елементів та блоків, які для визначення сумарної похибки потрібно підсумовувати. Аналогічна задача виникає при непрямих вимірюваннях, коли потрібно підсумовувати випадкові похибки прямих вимірювань. Складові похибки можуть мати різне походження. Крім основної похибки потрібно враховувати похибку від коливання температури, напруги живлення, тиску тощо.

При визначенні похибки як прямих, так і непрямих вимірювань, до похибок засобів вимірювань, які використовуються, повинні бути додані методичні похибки, похибки, що виникають при відліку показань та інші похибки, котрі обов'язково мають місце. Всі складові похибки повинні розглядатися як випадкові величини, що приймають різні значення (систематичні складові похибок підсумовуються окремо). З випадковими величинами дуже важко мати справу, тому в теорії ймовірностей намагаються від випадкових процесів перейти до еквівалентних детермінованих, за допомогою яких і виконуються необхідні математичні операції. Такий перехід здійснюється введенням поняття функції розподілу [1], коли набір реалізацій, в котрих випадкові величини можуть приймати будь-які різні значення, усереднюється та замінюється однією функцією в іншій системі координат. Сумісна дія випадкових величин може бути описана багатомірним законом розподілу.

В сучасній теорії підсумовування похибок для спрощення задачі підсумовування замість визначення багатомірних законів розподілу підбирають для характеристики складових різні числові оцінки, наприклад середнє квадратичне значення, ексцес, контрексцес тощо. Операція з ними дозволяє визначити відповідні числові чинники результуючої похибки без визначення багатомірних або результуючих одномірних законів розподілу випадкових величин, що розглядаються. Але такий метод дає досить приблизну оцінку сумарної похибки.

Для оцінки випадкових похибок частіше за все використовується їх квантильна оцінка [1].

Постановка завдання

У роботах [2 – 7] запропоновано для оцінки випадкових процесів використовувати не тільки функцію розподілу, а її спектр Фур'є — спектр функції розподілу (СФР).

В [8] показано, що підсумовування випадкових похибок дуже зручно виконувати за допомогою других енергетичних спектрів окремих складових похибок, які знаходяться на підставі функцій розподілу похибок та СФР.

Обчислення СФР випадкових похибок зводиться до знаходження їх спектрів Фур'є, тобто така задача є тривіальною. Але при квантильній оцінці випадкових похибок вона ускладнюється тим, що пряме використання перетворення Фур'є не завжди виявляється зручним. Існують інші підходи для визначення СФР та другого енергетичного спектра при квантильній оцінці випадкових похибок, які й розглянемо.

Спектральне уявлення випадкових похибок з квантильною оцінкою

При квантильній оцінці випадкової похибки як основа є функція розподілу, яка за допомогою вертикальних ліній з координатами $-X$ та X (квантилями) розподіляється на три частини (рис. 1). Якщо функція розподілу описує тільки випадкову похибку, то математичне сподівання такого процесу дорівнює нулю, центр розподілу співпадає з віссю ординат. Розподіл похибок приладів або результатів вимірювань зазвичай є симетричним. Тому відносно до розподілу ймовірностей похибок центр розподілу може бути визначеним як центр симетрії розподілу [1]. Крім того вважається, що квантильна випадкова похибка є симетричною і квантилі завжди розташовують симетрично відносно вісі симетрії. Через це після розділення функції розподілу на три частини, дві з них майже завжди будуть од-

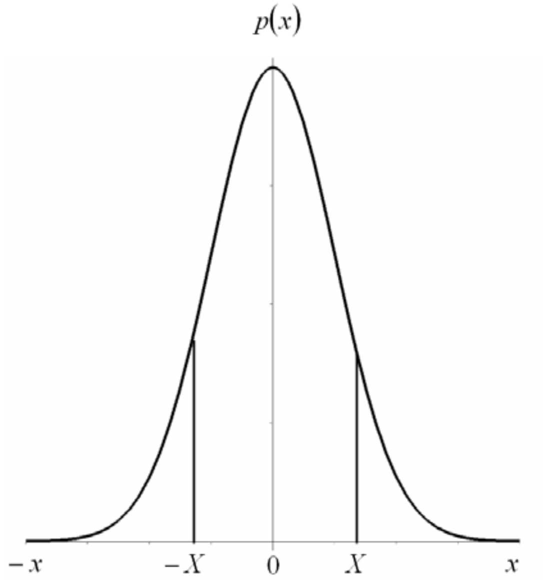

Рис. 1. Функція розподілу

наковими і їх можна об'єднати і вважати, що функція розподілу розділена на дві частини.

СФР можна визначити безпосередньо за допомогою перетворення Фур'є, вводячи як границі інтегрування значення граничної похибки X:

$$S_{pД}(\omega) = \int_{-X}^{X} p(x) e^{-j\omega x} dx,$$

де $S_{pД}(\omega)$ — довірчий СФР.

Але часто зручніше користуватися іншим способом визначення СФР. Від частин функції розподілу можна перейти до їх СФР. Через те, що перетворення Фур'є є лінійною операцією, розбиття функції розподілу на частини призведе до створення відповідних частин СФР, тобто

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{-X} p(x) e^{-j\omega x} dx + \int_{-X}^{X} p(x) e^{-j\omega x} dx +$$

$$+ \int_{X}^{\infty} p(x) e^{-j\omega x} dx = S_{p-}(\omega) + S_{pД}(\omega) + S_{p+}(\omega), \quad (1)$$

де $S_{p-}(\omega)$ та $S_{p+}(\omega)$ — позитивний та негативний залишок СФР.

Для оцінки взаємодії незалежних випадкових процесів будемо використовувати другий енергетичний спектр випадкового процесу. Операція диференціювання теж є лінійною, тому друга похідна від суми спектрів є сумою других похідних від складових спектрів, тобто

$$S''_p(\omega) = S''_{pД}(\omega) + S''_{p-}(\omega) + S''_{p+}(\omega). \quad (2)$$

На підставі (2), для другого енергетичного спектра

$$F(\omega) = F_Д(\omega) + F_{p-}(\omega) + F_{p+}(\omega) \quad (3)$$

Функцію розподілу, розділену вертикальними лініями на частини (рис. 1), виходячи з (1), можна уявити як суму її добутків на прямокутний імпульс

$$f_П(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } & -X \le x \le X, \\ 0 \text{ при } & x < -X \text{ т } \quad x > X, \end{cases} \quad (4)$$

та одиничні стрибки $f_{-1}(x)$ та $f_{+1}(x)$, що відбуваються відповідно в моменти часу $-X$ та X.

На рис. 2 показана взаємодія функції розподілу з прямокутним імпульсом (функція $f_П(x)$), а на рис. 3 —з одиночними стрибками, тобто функціями $f_{-1}(x)$та $f_{+1}(x)$. Використовуючи пряме перетворення Фур'є можна знайти спектри цих сигналів.

Спектр прямокутного імпульсу [12]

$$S_П(\omega) = \frac{2\sin(\omega X)}{\omega}. \quad (5)$$

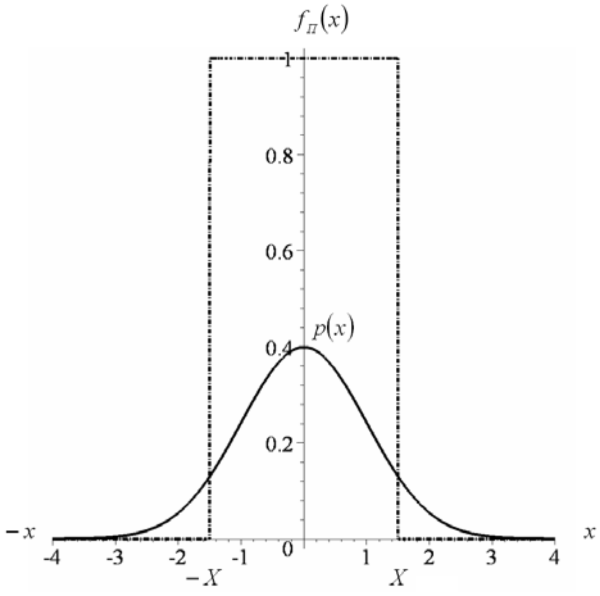

Рис. 2. Взаємодія функції розподілу з прямокутним імпульсом.

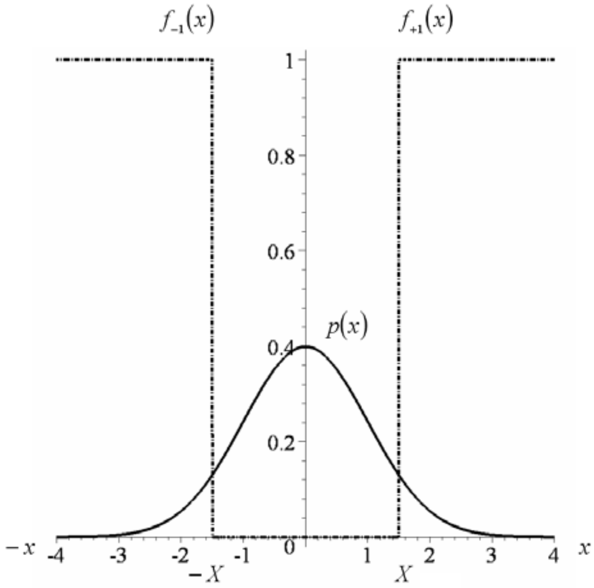

Рис. 3. Взаємодія функції розподілу з одиночними стрибками.

Спектр одиночного стрибка $f_{+1}(x)$ [12] з урахуванням затримки на X

$$S_{+1}(\omega)=\frac{e^{-j\omega X}}{j\omega}. \tag{6}$$

Відповідно спектр другого одиночного стрибка $f_{-1}(x)$ можна знайти аналогічно, якщо вважати, що цей стрибок знаходиться шляхом віднімання від одиничної постійної складової одиничного стрибка з випередженням на X (тобто затриманий на $-X$). Отже

$$S_{-1}(\omega)=\delta(\omega)-\frac{e^{j\omega X}}{j\omega}. \tag{7}$$

Щоб перевірити правильність отриманих результатів знайдемо спектр сумарного сигналу, тобто сигналу $f_П(x)+f_{-1}(x)+f_{+1}(x)$. З рис. 2 та рис. 3 видно, що цей сигнал є постійною величиною, що має значення одиниці. Спектр сумарного сигналу знайдемо, склавши (5, 6 та 7):

$$\begin{gathered}S_\Sigma(\omega)=S_П(\omega)+S_{-1}(\omega)+S_{+1}(\omega)=\frac{2\sin(\omega X)}{\omega}+\delta(\omega)-\\-\frac{e^{j\omega X}}{j\omega}+\frac{e^{-j\omega X}}{j\omega}=\delta(\omega)+\frac{2\sin(\omega X)}{\omega}-\frac{e^{j\omega X}-e^{-j\omega X}}{j\omega}=\delta(\omega)+\\+\frac{2\sin(\omega X)}{\omega}-\frac{2\sin(\omega X)}{\omega}=\delta(\omega),\end{gathered} \tag{8}$$

тобто (8) є спектром постійної складової, величина котрої (наприклад напруга), дорівнює одиниці.

Сумарний спектр двох одиночних стрибків

$$S_1(\omega) = S_{+1}(\omega) + S_{-1}(\omega) = \frac{e^{-j\omega X}}{j\omega} + \delta(\omega) - \frac{e^{j\omega X}}{j\omega} =$$
$$= \delta(\omega) - \frac{e^{j\omega X} - e^{-j\omega X}}{j\omega} = \delta(\omega) - \frac{2\sin(\omega X)}{\omega}.$$

Цей результат можна було б отримати прямо, якщо від спектра постійної складової відняти спектр прямокутного імпульсу.

Функція розподілу при квантильній оцінці випадкової похибки розділяється на три окремі функції множенням її на прямокутний імпульс і відповідні два одиничні стрибки. На підставі (1) можна розглядати спектри цих окремих частин, котрі, виходячи з теореми про спектр добутку сигналів, є спектрами згорток СФР з спектрами відповідних сигналів (5, 6 та 7). Тоді СФР при квантильній оцінці випадкової похибки

$$S_{рД}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\Pi}(\nu) S_p(\omega-\nu)d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\Pi}(\omega-\nu) S_p(\nu)d\nu .$$

Використаємо обидва варіанти підходу до знаходження спектра згортки. Відповідно до першого варіанту СФР при квантильній оцінці випадкової похибки

$$S_{рД}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\nu X) S_p(\omega-\nu)}{\nu} d\nu . \tag{9}$$

Відповідно до другого варіанту СФР при квантильній оцінці випадкової похибки

$$S_{рД}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[(\omega-\nu)X\right] S_p(\nu)}{\omega-\nu} d\nu =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\sin\omega X \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\nu X}{\omega-\nu} S_p(\nu)\, d\nu - \cos\omega X \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\nu X}{\omega-\nu} S_p(\nu)\, d\nu\right]. \tag{10}$$

З (9) та (10) можна знайти відповідні вирази для другого енергетичного спектра, знайшовши другі похідні від цих виразів:

$$F_Д(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\nu X) F_p(\omega-\nu)}{\nu} d\nu \tag{11}$$

та

$$F_Д(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\omega-\nu)X] S_p(\nu)}{(\omega-\nu)^3} d\nu + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(\omega-\nu)X] X S_p(\nu)}{(\omega-\nu)^2} d\nu +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\omega-\nu)X] X^2 S_p(\nu)}{\omega-\nu} d\nu. \tag{12}$$

Як бачимо, вирази для другого енергетичного спектра (11, 12) відрізняються тим, що в одному випадку згортка здійснюється з другим енергетичним СФР, а в другому — безпосередньо з СФР.

Сумарний залишок СФР, що відрізається при квантильній оцінці, може бути знайдений з (1) безпосередньо як різниця СФР та СФР при квантильній оцінці:

$$S_{рЗД}\left(\omega\right)=S_{р}\left(\omega\right)-S_{рД}\left(\omega\right).$$

Висновки

Квантильна оцінка похибки може здійснюватись за допомогою спектра функції розподілу.

Функція розподілу при квантильній оцінці випадкової похибки розділяється на три окремі функції множенням її на прямокутний імпульс і відповідні два одиничні стрибки.

Для інженерних розрахунків у подальшому зручно використовувати два вирази для другого енергетичного спектра, котрі відрізняються тим, що в одному з них згортка здійснюється з другим енергетичним СФР, а в другому — безпосередньо з СФР.

Література

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
3. Майстренко В.М. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2003. – № 26. – С. 145 – 150.
4. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138.
5. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2004. – № 27. – С. 163 – 170.
6. Майстренко В.М. Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2005. – № 29. – С. 160 – 168.
7. Майстренко В.М. Другий енергетичний спектр ергодичного випадкового процесу // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2006. – № 32. – С. 158 – 170.
8. Майстренко В.М. Підсумовування випадкових похибок вимірювань // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2007. – № 34. – С. 161 – 167.
9. Гоноровский И.С.. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 671 с.

Майстренко В.Н. **Спектр функции распределения при квантильной оценке случайных погрешностей.** Найдены формулы для расчета спектра функции распределения и второго энергетического спектра погрешности с заданной доверительной вероятностью. Полученные формулы могут быть использованы для проведения инженерных расчетов случайных погрешностей при их квантильной оценке	Maystrenko V.N. **Spectrum of distributing function at kvantil estimate of casual errors.** The formulas for account of a spectrum of function of distribution and second power spectrum of an error with the given confidential probability are found. The got formulas can be utillized for conducting of engineerings calculations of random error terms at their quantile estimation

Надійшло до редакції
22 лютого 2008 року