



МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 517.977

НАБЛИЖЕНИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

О.А. КАПУСТЯН, В.В. ЯСІНСЬКИЙ

Розглянуто задачу оптимальної стабілізації для еволюційного включення субдиференціального типу з неліпшицевою мнозначною функцією взаємодії $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. За умови, що при $\varepsilon = 0$ задача допускає оптимальний регулятор $u[y]$, доведено, що формула $u[y]$ забезпечує наближену стабілізацію вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$.

ВСТУП

Розглядається задача оптимальної стабілізації для еволюційного включення з субдиференціальною головною частиною — $\partial\varphi$ та неліпшицевим мнозначним збуренням $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Методи розв'язання нескінченновимірних еволюційних задач із розривними та мнозначними коефіцієнтами активно розвиваються у зв'язку з численними застосуваннями в механіці та фізиці, починаючи з 70-х рр. минулого сторіччя [1–3]. Системний підхід до вивчення питань розв'язності, прогнозування та керуваності для таких об'єктів було застосовано в роботах [4–7].

Мета роботи — з'ясування умов на відображення φ та F , при яких формула точного регулятора цієї задачі при $\varepsilon = 0$ дає наближений розв'язок вихідної задачі стабілізації при малих $\varepsilon > 0$.

Задача наближеного синтезу для таких об'єктів на скінченному проміжку часу розв'язана в [8], задача наближеної стабілізації для включення параболічного типу — у [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір; $\|\cdot\|$ і (\cdot, \cdot) — норма та скалярний добуток у H ; $\varphi: H \rightarrow (-\infty; +\infty]$ — власна, опукла, напівнеперервна знизу функція, $cl_H(D(\varphi)) = H$; $\partial\varphi$ — її субдиференціал; $C_v(H)$ — сукупність замкнених, опуклих, обмежених підмножин H ; $F: H \rightarrow C_v(H)$ — мнозначне відображення; $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $g \in H$.

Розглядається задача стабілізації

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + gu(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(\cdot) \in U \subseteq L^2(0, +\infty) \text{ замкнена, опукла, } 0 \in U, \quad (2)$$

$$J(y, u) = \int_0^{+\infty} (\|y(t)\|^2 + \gamma u^2(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (3)$$

Припустимо, що $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ — оптимальний процес в (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$. Нехай при $\varepsilon = 0$ відома формула оптимального регулятора $u[y]$. Розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + gu[y(t)], & t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4)$$

Нехай \hat{y}^ε — розв’язок задачі (4), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$.

Основним завданням роботи є обґрунтувати граничну рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \quad (5)$$

Рівність (5) означає, що ми можемо коректно використовувати формулу регулятора незбуреної задачі (при $\varepsilon = 0$) для наближеної стабілізації вихідної (збуреної) задачі.

Наприклад, у випадку

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, & u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$\partial\varphi(u) = -\Delta u$ і маємо включення параболічного типу, розглянене в [9]. Проте, у багатьох задачах механіки та фізики з вільною межею [1, 2] та в процесах, які описують потік однорідного газу через однорідне пористе середовище [3], виникають крайові задачі виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \Delta\beta(u) \ni f, & \text{на } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \beta(u(t, x)) \ni 0 & \text{на } (0, +\infty) \times \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

де $\beta = \partial j$, $j : R \rightarrow R$ — неперервна, $\lim_{|r| \rightarrow \infty} \frac{j(r)}{|r|} = \infty$.

Тоді (6) зводиться до включення вигляду $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi(u) + f$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j(u(x)) dx, & u \in L^1(\Omega), \quad j(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{інакше,} \end{cases} \quad \text{з } \overline{D(\varphi)} = H^{-1}(\Omega).$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянуто такі умови на параметри задачі (1)–(3):

- 1) $\forall R > 0$ множина $M_R = \{u \in H \mid \|u\| \leq R, \varphi(u) \leq R\}$ — компакт у H ;
- 2) $F : H \rightarrow C_v(H)$ — напівнеперервна зверху;
- 3) $\exists C_1 > 0 \forall u \in H \|F(u)\|_+ := \sup_{z \in F(u)} \|z\| \leq C_1(1 + \|u\|)$;
- 4) $\exists C_2 > 0 \forall u \in H \inf_{\xi \in F(u)} (\xi, u) \geq -C_2\|u\|^2$;
- 5) $\exists \delta > 0 \forall y \in D(\partial\varphi) \forall u \in -\partial\varphi(y) (u, y) \leq -\delta \|y\|^2$.

Задача (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$, причому має місце закон оберненого зв'язку

$$\tilde{u}(t) = u[\tilde{y}(t)]. \quad (7)$$

Відображення $u : H \rightarrow H$ неперервне,

$$\sup_{y \neq 0} \frac{|u[y]|}{\|y\|} < \frac{\delta}{\|g\|}. \quad (8)$$

Лема. За умов 1–5 задача (1)–(3) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ має розв'язок $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$.

Доведення. При фіксованому $u \in U$, $\|u\|_U^2 := \int_0^{+\infty} u^2(t) dt < \infty$ задача (1)

для $\forall \varepsilon > 0$ має принаймні один (сильний) розв'язок [7], для якого справедливі такі оцінки з константами $\delta_1 > 0$, $C > 0$, які не залежать від $\varepsilon > 0$: $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \forall t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 &\leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} + C \int_s^t e^{-\delta_1(t-p)} u^2(p) dp \leq \\ &\leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} + C \|u\|_U^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_s^t \|y(p)\|^2 dp &\leq \frac{1}{\delta_1} \left(\|y(s)\|^2 + C \int_s^t u^2(p) dp \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_1} \left(\|y(s)\|^2 + C \|u\|_U^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

З цих оцінок випливає, що $J(y, u) < \infty$. Нехай \tilde{J}_ε — значення задачі (1)–(3). Виберемо $\{u_n\} \subset U$ так, щоб $J(y_n, u_n) \leq \tilde{J}_\varepsilon + \frac{1}{n}$. Тоді $\|u_n\|_U^2 \leq \tilde{J}_\varepsilon + 1$

$\forall n \geq n_0$. Отже, $\exists \tilde{u} \in U$ таке, що по підпоследовності $u_n \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0, T)$ $\forall T > 0$.

Надалі будемо позначати $y = I_\varepsilon(y_0, u)f$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon f(t) + g u(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \quad (11)$$

де $f(t) \in F(y(t))$ майже скрізь. Тоді $y_n = I_\varepsilon(y_0, u_n)f_n$, $f_n(t) \in F(y_n(t))$ майже скрізь і за умовою 3 і оцінкою (9) $\|f_n(t)\| \leq m$ майже скрізь. Тоді з [7]

$f_n \xrightarrow{w} \tilde{f}$ в $L^2(0, T; H)$, $y_n \rightarrow \tilde{y}$ в $C([0, T]; H)$, де $\tilde{y} = I_\varepsilon(y_0, \tilde{u})f$. Відповідно

до теореми Мазура [10]: $f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_H \left(\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right)$ майже скрізь.

Отже, з умови 2 $f(t) \in F(\tilde{y}(t))$ майже скрізь. Таким чином, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ — допустимий процес у задачі (1)–(3) та з нерівності $J(y_n, u_n) \geq J_T(y_n, u_n) := \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u_n^2(t) dt$ маємо $\forall T > 0$

$$\tilde{J}_\varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J_T(y_n, u_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_n^2(t) dt \geq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}).$$

Тому $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3). Лему доведено.

Оскільки $y \mapsto u[y]$ — неперервне, $|u[y]| < \frac{\delta}{\|g\|} \|y\|$, то згідно з [7] задача

(4) має розв'язок, причому справедливі такі оцінки з константами $\delta_2 > 0$, $\tilde{C} > 0$, які не залежать від ε : $\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall t \geq s \geq 0$

$$\|y(t)\|^2 \leq e^{-\delta_2(t-s)} \|y(s)\|^2, \quad |u[y(t)]| \leq \tilde{C} \|y(t)\|, \quad (12)$$

із яких, зокрема, маємо, що $J(y, u[y]) < \infty$.

Теорема. Нехай виконані умови 1–5, а також (7)–(8), $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$, \hat{y}^ε — розв'язок задачі (4), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \quad (13)$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\hat{J}_\varepsilon \rightarrow J_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, де $J_0 = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ — єдиний оптимальний процес у задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

Нехай \hat{y}^ε — розв'язок задачі (4), $\hat{y}^\varepsilon = I_\varepsilon(y_0, u[\hat{y}^\varepsilon])f_\varepsilon$, $f_\varepsilon(t) \in F(\hat{y}^\varepsilon(t))$ майже скрізь. З оцінок (12) і умови 3 випливає, що $\|f_n(t)\| \leq m$ майже скрізь. Тоді з [7] отримаємо, що $\hat{y}^\varepsilon \rightarrow \hat{y}$ в $u[\hat{y}^\varepsilon(t)] \rightarrow u[\hat{y}(t)] \forall t \in [0, T]$, тобто \hat{y} — розв'язок задачі при $\varepsilon = 0$. В силу максимальної монотонності $\partial\varphi$ [3] задача (4) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок. Тому згідно з (7) $J_0 = J(\hat{y}, u[\hat{y}])$, тобто $\{\hat{y}, u[\hat{y}]\}$ — оптимальний процес в (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

З оцінок (12) маємо, що $\forall t \geq 0$

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \leq e^{-\delta_2 t} \|y_0\|^2 (1 + \tilde{C}^2).$$

Оскільки $\forall t \geq 0 \|\hat{y}^\varepsilon(t)\| \rightarrow \|\hat{y}(t)\|$, $u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \rightarrow u^2[\hat{y}(t)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}, u[\hat{y}]) = J_0. \quad (14)$$

Покажемо, що $\tilde{J}_\varepsilon \rightarrow J_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Нехай $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$, де $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ — оптимальний процес в (1)–(3).

Припустимо, що z^ε — розв'язок задачі (1) з керуванням $u = 0 \in U$. Тоді з оптимальності \tilde{u}^ε маємо:

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_U^2 \leq \frac{1}{\gamma} J(\hat{u}^\varepsilon) \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \|z^\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \frac{\|y_0\|^2}{\gamma \delta_1}. \quad (15)$$

Повторюючи попередні міркування, випливає, що існує $\tilde{u} \in U$ таке, що по підпоследовності $\forall T > 0 \tilde{u}^\varepsilon \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0, T)$, $\tilde{y}^\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ в $C([0, T]; H)$, де \tilde{y} — розв'язок задачі (1) з $\varepsilon = 0$, $u = \tilde{u}$. Зокрема, $\forall T > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \geq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}),$$

тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon \geq J(\tilde{y}, \tilde{u}). \quad (16)$$

За принципом оптимальності Беллмана $\forall T > 0$ процес $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ на $[T, \infty)$ є оптимальним для задачі (1)–(3) із початковими даними $(T, \tilde{y}^\varepsilon(T))$. Отже,

$$\int_T^{+\infty} \|\tilde{y}^\varepsilon(t)\|^2 dt + \gamma \int_T^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_T^{+\infty} \|p^\varepsilon(t)\|^2 dt, \quad (17)$$

де p^ε — розв'язок задачі (1) на $[T, +\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $(T, \tilde{y}^\varepsilon(T))$. З (9), (10) маємо:

$$\int_T^{+\infty} \|p^\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\delta_1} \|\tilde{y}^\varepsilon(T)\|^2. \quad (18)$$

Тепер зафіксуємо $u \in U$ і відповідний розв'язок w^ε задачі (1). Тоді аналогічно попереднім міркуванням $\forall T > 0$ $w^\varepsilon \rightarrow w$ в $C([0, T]; H)$, де $w \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$ — розв'язок задачі (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням u . Крім того,

$$\int_T^{+\infty} \|w^\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\delta_1} \left(\|w^\varepsilon(T)\|^2 + C \int_T^{+\infty} u^2(t) dt \right). \quad (19)$$

Тоді з нерівності $\tilde{J}_\varepsilon \leq J(w, u)$ та оцінок (17)–(19) для $\forall T > 0$ маємо:

$$J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \leq \int_0^T \|w^\varepsilon(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t) dt + \frac{1}{\delta_1} \|w^\varepsilon(T)\|^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t) dt. \quad (20)$$

Звідси

$$\begin{aligned} J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_1} \|w(T)\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t) dt + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді при $T \rightarrow \infty$ маємо, що $J(\tilde{y}, \tilde{u}) \leq J(w, u) \quad \forall u \in U$.

Отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3) із $\varepsilon = 0$. Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u = \tilde{u}$. Тоді внаслідок єдиності $\tilde{w}^\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ в $C([0, T]; H)$ і маємо оцінку

$$\gamma \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t) dt + \frac{1}{\delta_1} |\tilde{y}(T)|^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} \tilde{u}^2(t) dt, \quad (22)$$

з якої при $T \rightarrow \infty$ маємо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t) dt.$$

Таким чином, $\tilde{u}^\varepsilon \rightarrow \tilde{u}$ в $L^2(0, +\infty)$ і оскільки

$$\tilde{J}_\varepsilon \leq J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\delta_1} \|\tilde{y}^\varepsilon(T)\|^2,$$

то

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon \leq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) + \frac{1}{\delta_1} \|\tilde{y}(T)\|^2.$$

Отже, при $T \rightarrow \infty$ одержуємо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon \leq J(\tilde{y}, \tilde{u}) = J_0,$$

що разом із (16) гарантує збіжність $\tilde{J}_\varepsilon \rightarrow J_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Припускаючи від супротивного, що збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \rightarrow 0$, можемо повторити попередні міркування і, внаслідок єдиності оптимального процесу $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$, дійти до протиріччя. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянено задачу оптимальної стабілізації для еволюційного включення субдиференціального типу з нелінійним доданком $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Доведено, що вихідна задача має розв'язок за певних умов, накладених на параметри. За умови, що при $\varepsilon = 0$ задача допускає оптимальний регулятор, обґрунтовано, що такий регулятор забезпечує наближену стабілізацію вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с фр. Л.Р. Волевича. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
3. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. — Leyden: Noordhoff, 1976. — 360 p.
4. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — К.: Наук. думка, 1988. — 288 с.
5. Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — К.: Наук. думка, 2004. — 588 с.
6. Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O. Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing. — NY.: Springer, 2011. — 250 p.
7. Kapustya O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V. Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — К.: Наук. думка, 2008. — 215 p.
8. Ясінський В.В., Капустян О.А. Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2009. — № 4. — С. 109–116.
9. Капустян О.А. Задача наближеної стабілізації для параболічного включення // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 1. — С. 62–67.
10. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 623 с.

Надійшла 26.12.2011