УДК 519.7

П.О. Касьянов, Л.С. Паліїчук

ПОТРАЄКТОРНА ПОВЕДІНКА КЛАСУ КЕРОВАНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ З НЕМОНОТОННИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

The autonomous second order inclusion in a bounded domain, which is modeling the behavior of a class of the controlled piezoelectric fields with nonmonotonous potential, is studied. The investigated system describes not only controlled piezoelectric process with multivalued law “reaction-displacement”, but a wide class of controlled processes of Continuum Mechanics. Conditions on the parameters of the problem do not guarantee the uniqueness of solution of the corresponding Cauchy problem. In particular, any conditions on continuity, monotony of the nonlinear term by a phase variable are not assumed. We study the dynamics of weak solutions of the investigated problems in terms of the theory of trajectory and global attractors for multivalued semiflows generated by weak solutions of given problem. By using the well-known abstract results on the existence of trajectory attractor in the space of trajectories, we show the existence of trajectory attractor in the extended phase space for solutions of the considered evolution problem. Its structural properties are studied. Its relationship with the global attractor and space of complete trajectories is provided. Obtained results are applied to the mathematical model which describes the dynamics of the piezoelectric process.

Keywords: trajectory attractor, controlled piezoelectric field.

Вступ

Широке використання в сучасному житті технічного обладнання, дія якого ґрунтується на прямому чи зворотному п’єзоелектричному ефекті, зокрема датчиків тиску рідин і газів, мікрофонів, гідрофонів, контактних п’єзоелектричних детонаторів, п’єзовипромінювачів звуку в повітря, систем надточного позиціонування, п’єзоелектричних двигунів, адаптивної оптики, кварцевих резонаторів тощо, зумовило потребу в різнобічному, системному дослідженні п’єзоелектричних полів з наявним різного роду керуванням.

П’єзоефект, першопочатково виявлений в природних матеріалах, таких як кварц, турмалін, сегнетова сіль тощо, доволі слабкий. Через це вченими були синтезовані полікристалічні сегнетоелектричні керамічні матеріали з покращеними властивостями, які отримали назву п’єзокераміка. Одні з найбільш поширених в практичних застосуваннях є PZT-матеріали на основі титанату барію та цирконату-титанату свинцю, які являють собою групу високопотужних твердих матеріалів, що мають назву PZT-4. Серед інших їх вирізняють високі механічна добротність і коерцитивність поля, низькі питомий опір та діелектричні втрати. PZT-4 рекомендується до застосування у високопотужних акустичних випромінювальних перетворювачах через високу стійкість до деполяризації та низькі діелектричні втрати під високим електричним приводом. Високий опір до деполяризації при механічному навантаженні також робить PZT-4-матеріали придатними для використання в акустичних перетворювачах для глибоких занурень і як активні елементи в системах, що генерують електричну потужність [1, 2].

Використання таких складноструктурованих матеріалів вимагає виваженого підходу до вибору керування системами, в яких використовуються п’єзоелементи. Серед найбільш простих видів керування сигналом збудження п’єзокерамічного елемента можна виділити частотні, амплітудні, фазові. Але згадані керування мають ряд істотних недоліків. При частотному способі керування не завжди допустима зміна частоти в доволі широких межах. При амплітудному керуванні несинусоїдальна форма напруги збуджень може призвести до збудження вищих гармонік (паразитних коливань), що також негативно впливає на параметри і показники роботи системи. Фазовий спосіб керування параметрами самостійного значення до теперішнього часу не набув і зазвичай використовується в сукупності з іншими способами. Багатовимірні способи керування зіштовхуються з цілим рядом проблем при їх реалізації [3].

Значної уваги заслуговує імпульсний спосіб керування. Зокрема, дуже зручно й ефективно використовувати керування у формі зворотного зв’язку. При керуванні у формі зворотного зв’язку швидка зміна керуючої напруги викликає швидку зміну позиції. Ця відмінна риса має велике значення, особливо в динамічних режимах роботи, в таких пристроях, як сканувальні мікроскопи, системи стабілізації зображення, віброкомпенсатори, генератори ударних хвиль, перемикачі клапанів тощо.

Керування у формі зворотного зв'язку природно застосовувати до п'єзоелектричних моделей з розривною функцією взаємодії, яка трактується як об'ємна сила, прикладена до п'єзоелектричного тіла. Математичне подання такого керування може мати різні форми, зокрема інтегральну [4—6], субдиференціальну. Субдиференціальним визначаючим співвідношенням та субдиференціальним граничним умовам присвячені такі відомі праці [7—10]. Цікавим випадком є подання закону "реакції-зміщення" у вигляді різниці субдиференціалів, що дає змогу більш гнучко керувати п'єзоелектричною системою. Таким чином, важливим моментом є вибір керування, яке дасть можливість спрямувати динаміку системи до бажаного рівня та підтримувати стабільність системи.

Постановка задачі

Мета статті — дослідити динаміку розв'язків класу керованих п'єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом, зокрема потраєкторну поведінку слабких розв'язків математичної моделі п'єзоелектричної задачі з розривною за фазовою змінною функцією взаємодії, яка може бути подана у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів.

Еволюційне включення для класу керованих п'єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом

Розглянемо автономне включення другого порядку з розривною функцією взаємодії, що моделює керований п'єзоелектричний процес [11]:

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Bu_t(t) + Au(t) + \partial J_1(u(t)) - \\ \quad - \partial J_2(u(t)) \ni \bar{0} \quad \text{для м.в.} \quad t, \\ \quad u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

де $B: H \to V^*$, $A: V \to V^*$ — лінійні оператори в'язкості та пружності відповідно; $H = L^2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ і $V = \{v \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^n) : v = 0 \text{ на } \Gamma_F\} \subset H^1(\Omega; \mathbf{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — обмежена область в $\mathbf{R}^n$, $n = 2$, Γ_F — частина границі області Ω, в якій зафіксоване п'єзоелектричне тіло; $J_i : H \to R$, $i = 1, 2$ — локально ліпшицеві функціонали; ∂J_i — субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1, 2$; $(V; H; V^*)$ — еволюційна трійка просторів.

У неавтономному випадку абстрактне існування розв'язків такої задачі доведене в [12]. Потраєкторна поведінка розв'язків об'єктів такого типу, але з $J_2 \equiv 0$, досліджувалась у [13, 14]. Довгострокова поведінка всіх слабких розв'язків цієї задачі з розривною функцією взаємодії, яка може бути подана у вигляді різниці субдиференціалів, вивчалась у [11], а відповідний скалярний випадок розглядався в [15].

Система (1) описує широкий клас керованих процесів механіки суцільних середовищ, зокрема, і керовані п'єзоелектричні процеси з багатозначним законом "реакції-зміщення". В таких процесах визначальну роль відіграють властивості, наведених у моделі (1), операторів. Тому в ході дослідження ми накладаємо на параметри задачі такі умови, щоб досліджувана модель, з одного боку, з допустимою точністю описувала реальний фізичний процес, а з іншого боку, задовольняла умови, які дають можливість використати для неї наявний математичний апарат. Далі, для прикладу, отриманий абстрактний результат застосуємо до конкретної п'єзоелектричної задачі.

Нехай параметри задачі (1) задовольняють такі припущення:

Припущення (B) $B: H \to H$ — лінійний симетричний оператор такий, що існує таке $\beta > 0$, що

$$(Bv, v)_H = \beta \| v \|_H^2, \quad \forall v \in H,$$

де $\| \cdot \|_H$ і $(\cdot,\cdot)_H$ — норма та скалярний добуток в H відповідно.

Припущення (A) V — гільбертовий простір, $A: V \to V^*$ — лінійний симетричний оператор, та існує таке $c_A > 0$, що

$$\langle Av, v \rangle_V \ge c_A \| v \|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

де $\| \cdot \|_V$, $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ — норма та спарювання в V відповідно.

Припущення (J) $J_i : H \to R$, $i = 1, 2$ — такі функції, що

(i) $J_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ — локально ліпшицева та регулярна (див. [16]), тобто

- для будь-яких $x, v \in H$, існує звичайна одностороння похідна

$$J_i'(x; v) = \lim_{t \to 0} \frac{J_i(x + tv) - J_i(x)}{t}, \quad i = 1, 2,$$

- для всіх $x, v \in H$, $J_i'(x;v) = J_i^\circ(x;v)$, де

$$J_i^\circ(x;v) = \overline{\lim_{y\to x, t\to 0}} \frac{J_i(y+tv) - J_i(y)}{t}, \quad i = 1,2,$$

(*ii*) існують такі $c_i > 0, i = 1,2,$ що $\forall l \in \partial J_i(v)$, $\forall v \in H$,

$$\| l \|_H \le c_i (1 + \| v \|_H);$$

(*iii*) існує таке $c_2 > 0$, що $\forall l \in \partial J_2(v)$, $\forall v \in H$, $(l, v)_H \le \lambda \| v \|_H^2 + c_2$, де

$$\partial J_i(v) = \{p \in H | (p, w)_H \le J_i^\circ(v; w) \forall w \in H\}$$

позначають субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1,2,$ в точці $v \in H$ (див. [16] для деталей), $\lambda \in (0, \lambda_1)$, $\lambda_1 > 0$: $c_A \|v\|_V^2 \ge \lambda_1 \| v \|_H^2$, $\forall v \in V$.

Визначимо гільбертовий простір $X = V \times H$ як фазовий простір задачі (1).

Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$.

Означення. Нехай $T > 0$, $\tau < T$. Функція $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in L_\infty[\tau, T; X]$ називається слабким розв'язком задачі (1) на (τ, T), якщо для м.в. $t \in (\tau, T)$ існують такі функції $l_i \in L_2(\tau, T; H)$, $i = 1,2,$ $l_i(t) \in \partial J_i(u(t))$, що $\forall \psi \in V$, $\forall \eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ виконується наступне співвідношення:

$$-\int_\tau^T (u_t(t), \psi)_H \eta_t(t) dt + \int_\tau^T [(u_t(t), \psi)_H + (u(t), \psi)_H +$$
$$+ (l_1(t), \psi)_H - (l_2(t), \psi)_H] \eta(t) dt = 0.$$

Основні результати

Розглянемо клас функцій $W_\tau^T = C([\tau, T]; X)$. Визначимо множину всіх слабких розв'язків задачі (1) на $[\tau, T]$: $\forall \varphi_\tau = (a,b)^T \in X$ розглянемо $\mathrm{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) = \{(u(\cdot), u_t(\cdot))^T \mid (u, u_t)^T$ — слабкий розв'язок задачі (1) на $[\tau, T]$, $u(\tau) = a$, $u_t(\tau) = b\}$. З [11, лема 2] випливає, що $\mathrm{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau, T]; X) = W_\tau^T$. З леми 3 в [11] отримуємо, що трансляція та конкатенація слабких розв'язків також є слабким розв'язком. Таким чином, будь-який слабкий розв'язок задачі (1), визначений на $[\tau, T]$, може бути продовжений до глобального, визначеного на $[0, +\infty)$.

Позначимо сімейство всіх слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[0, +\infty)$, через $\mathrm{K}_+ = \cup_{u_0 \in X} \mathrm{D}(u_0)$, де $\mathrm{D}(u_0) = \{(u(\cdot), u_t(\cdot))^T | (u, u_t)^T$ — слабкий розв'язок задачі (1) на $[0, +\infty)$, $u(0) = a$, $u_t(0) = b\}$. K_+ має властивість трансляційної інваріантності, тобто

$$\forall u(\cdot) \in \mathrm{K}_+, \forall h \ge 0, u_h(\cdot) \in \mathrm{K}_+, \tag{2}$$

де $u_h(s) = u(h+s)$, $s \ge 0$. Визначимо трансляційну напівгрупу на K_+ як $\{T(h)\}_{h\ge0}$, $T(h)u(\cdot) = u_h(\cdot)$, $h \ge 0$, $u \in \mathrm{K}_+$. Зазначимо, що $T(h)\mathrm{K}_+ \subset \mathrm{K}_+$ при $h \ge 0$, оскільки виконується співвідношення (2). Тепер розглянемо на K_+ топологію, індуковану з простору Фреше $C^{\mathrm{loc}}(R_+; X)$, тобто

$$f_n(\cdot) \to f(\cdot) \text{ в } C^{\mathrm{loc}}(R_+; X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M > 0 \ \Pi_M f_n(\cdot) \to \Pi_M f(\cdot) \text{ в } C([0, M]; X),$$

де Π_M — оператор звуження на $[0, M]$ [17].

Розглянемо задачу (1) на всій часовій прямій. Простір $C^{\mathrm{loc}}(R; X)$, як і простір $C^{\mathrm{loc}}(R_+; X)$, на кожному інтервалі $[-M, M] \subset R$ наділений топологією локально рівномірної збіжності [17]. Позначимо оператор звуження на $[0, +\infty)$ через Π_+. Нагадаємо, що функція $u \in C^{\mathrm{loc}}(R; X) \cap L_\infty(R; X)$ є повною траєкторією задачі (1), якщо $\forall h \in R$ $\Pi_+ u_h(\cdot) \in \mathrm{K}_+$ [17]. Крім того, повна траєкторія $u \in \mathrm{K}$ є стаціонарною, якщо $u(t) = z$ для всіх $t \in R$ для деякого $z \in X$.

Розглянемо сімейство K всіх повних траєкторій задачі (1). Зазначимо, що $\forall h \in R$, $\forall u(\cdot) \in \mathrm{K}$ $u_h(\cdot) \in \mathrm{K}$.

Означення [17, означення 1.2]. Множина $\mathrm{U} \subset \mathrm{K}_+$ називається траєкторним атрактором у просторі траєкторій K_+ відповідно до топології $C^{\mathrm{loc}}(R_+; X)$, якщо:

- U — компактна множина в $C^{\mathrm{loc}}(R_+; X)$ і обмежена множина в $L_\infty(R_+; X)$;
- U — строго інваріантна множина щодо $\{T(h)\}_{h\ge0}$, тобто $T(h)\mathrm{U} = \mathrm{U}$ $\forall h \ge 0$;
- U — притягуюча множина в просторі траєкторій K_+ в топології $C^{\mathrm{loc}}(R_+; X)$, тобто для будь-якої обмеженої (в $L_\infty(R_+; X)$) мно-

жини $\mathsf{B} \subset \mathsf{K}_+$ і довільного номера $M \geq 0$ справджується співвідношення

$$\mathrm{dist}_{C([0,M];X)}(\Pi_M T(t)\mathsf{B}, \Pi_M \mathsf{U}) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Таким чином, з означення траєкторного атрактора випливає його єдиність.

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема щодо існування та структурних властивостей траєкторного атрактора в просторі траєкторій K_+ в топології $C^{\mathrm{loc}}(R_+;X)$ для задачі (1).

Теорема 1. Якщо існує глобальний атрактор A для багатозначного напівпотоку, породженого всіма слабкими розв'язками задачі (1), тоді існує траєкторний атрактор $\mathsf{U} \subset \mathsf{K}_+$ в просторі K_+. При цьому виконується наступне співвідношення

$$\mathsf{U} = \Pi_+ \mathsf{K} = \Pi_+ \{u \in \mathsf{K} \mid u(t) \in \mathsf{A} \ \forall t \in R\}. \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо багатозначний напівпотік $\mathsf{G}(t,\xi_0) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) \in \mathsf{D}(\xi_0)\}, t \geq 0,$ породжений слабкими розв'язками задачі (1).

З теореми 8 в [11] випливає, що для багатозначного напівпотоку G існує інваріантний компактний у фазовому просторі X глобальний атрактор. Крім того, для кожної $\psi \in \mathsf{K}$ граничні множини $\alpha(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z$ для деякої послідовності $t_j \to -\infty\}$, $\omega(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z$ для деякої послідовності $t_j \to +\infty\}$ — зв'язні підмножини множини точок спокою $Z(\mathsf{G}) = \{(\bar{0}, u) \mid u \in V,\ A(u) + \partial J_1(u) - \partial J_2(u) \ni \bar{0}\}$. У випадку, коли множина точок спокою — повністю незв'язна, існують границі $z_- = \lim_{t\to-\infty} \psi(t)$, $z_+ = \lim_{t\to+\infty} \psi(t)$ і z_-, z_+ — точки спокою; $\varphi(t)$ прямує до точки спокою при $t \to +\infty$ для кожної $\varphi \in \mathsf{K}_+$.

Для доведення існування в просторі K_+ траєкторного атрактора для досліджуваної задачі та виконання співвідношення (3) залишилось перевірити виконання умови теореми 1.12 в [14], а саме: $\forall \{\varphi_n(\cdot)\} \subset \mathsf{K}_+$, що задовольняє $\varphi_n(0) \to \varphi_0 \in \mathsf{A}$ в X, існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathsf{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$, що з точністю до деякої підпослідовності $\forall t \geq 0$ $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ в X.

З теореми 7 в [11] маємо виконання цієї умови для довільної послідовності слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[\tau, T]$, для яких $\varphi_n(\tau) \to \varphi(\tau)$ в X. Таким чином, можна вибрати таку підпослідовність $\{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq1}$ розв'язків задачі (1), визначених на $[0,1]$, $\varphi_{n,1}(0) \to \varphi_0$, що існує таке $\hat{\varphi}_1(\cdot) \in \mathsf{K}_+$: $\hat{\varphi}_1(0) = \varphi_0$, що $\varphi_{n,1}(t) \to \hat{\varphi}_1(t)$ в X.

Далі виберемо підпослідовність $\{\varphi_{n,2}(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq1}$ слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[0,2]$, $\varphi_{n,2}(0) \to \varphi_0$. За теоремою 7 в [11] отримуємо, що існує таке $\hat{\varphi}_2(\cdot) \in \mathsf{K}_+$: $\hat{\varphi}_2(0) = \varphi_0$, що $\varphi_{n,2}(t) \to \hat{\varphi}_2(t)$ в X для $\forall t \in [0,2]$. З іншого боку, $\varphi_{n,2}(t) \to \hat{\varphi}_1(t)$ в X для $\forall t \in [0,1]$. Таким чином, $\hat{\varphi}_1(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ для $\forall t \in [0,1]$.

Використовуючи діагональний метод Кантора, можна вибрати таку підпослідовність $\{\varphi_{n,k}(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \{\varphi_{n,k-1}(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \cdots \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq1}$ слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[0,+\infty)$, $\varphi_{n,k}(0) \to \varphi_0$, що $\varphi_{n,k}(t) \to \varphi(t)$ в X для $k \to \infty$, де $\varphi(\cdot) \in \mathsf{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

Таким чином, ми довели виконання умови, достатньої для існування в просторі траєкторій K_+ траєкторного атрактора $\mathsf{U} \in \mathsf{K}_+$ відносно топології $C^{\mathrm{loc}}(R_+;X)$ та справедливості співвідношення (3), яке встановлює його зв'язок з глобальним атрактором і простором повних траєкторій поставленої задачі.

Теорему доведено.

Розглянемо п'єзоелектричну модель із законом "реакції-зміщення" у субдиференціальній формі, описану в [11]:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mathrm{Div}(\mathrm{A}\varepsilon(u) - \mathrm{P}^T E(\phi)) = f_s - \gamma u_t \text{ в } Q, \\ \mathrm{div}(\mathrm{P}\varepsilon(u) + \mathrm{B}E(\phi)) = 0 \text{ в } Q, \\ -f_s(x) \in \partial G_1(x, u(x,t)) - \partial G_2(x, u(x,t)) \text{ в } Q, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1. \end{cases}$$

з умовами на границі області: $\phi = 0$, $u = 0$, $(\mathrm{P}\varepsilon(u) - \mathrm{B}E(\phi))\omega = 0$. У цій моделі: ω — зовнішня одинична нормаль; $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ — функція в'язкості; $G_i : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$, — вимірні в (x,u), опуклі в u для м.в. $x \in \Omega$ функціонали, $\partial G_i(x,\cdot)$, $i = 1,2$, — їх субдиференціали; u_0 — початкове зміщення; u_1 — початкова швидкість; f_s — об'ємна сила; $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ — електричний потенціал; div — оператор дивергенції для векторних функцій; Div — оператор дивергенції для тензорних функцій; $Q = \Omega \times (0, +\infty)$; $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $i, j = 1, 2$, — лінійний тензор деформації; $E(\varphi) = (E_i(\phi))$, $i = 1, 2$, — електричне векторне поле. Крім того, $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ — лінійний оператор пружності з тензором пружності $a = (a_{ijkl})$, $i, j, k, l = 1, 2$; $\mathsf{P} : \Omega \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{R}^n$ — лінійний оператор п'єзоелектрики з п'єзоелектричними коефіцієнтами $p = (p_{ijk})$, $i, j, k = 1, 2$; P^{T} — транспонований до P оператор з $p^T = (p^T_{ijk}) = (p_{kij})$, $i, j, k = 1, 2$; $\mathsf{B} : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — лінійний оператор діелектричної проникності з діелектричними константами $\beta = (\beta_{ij})$, $i, j = 1, 2$, з відповідними значеннями матеріальних констант для PZT-4:

$$a_{1111} = 13{,}9,\ a_{1112} = 0,\ a_{1121} = 0,\ a_{1122} = 7{,}43;$$

$$a_{1211} = 0,\ a_{1212} = 2{,}56,\ a_{1221} = 2{,}56,\ a_{1222} = 0;$$

$$a_{2111} = 0,\ a_{2112} = 2{,}56,\ a_{2121} = 2{,}56,\ a_{2122} = 0;$$

$$a_{2211} = 7{,}43,\ a_{2212} = 0,\ a_{2221} = 0,\ a_{2222} = 11{,}5\ (10^{10} N / m^2);$$

$$p_{111} = 0,\ p_{112} = 12{,}7,\ p_{121} = 12{,}7,\ p_{122} = 0;$$

$$p_{211} = -5{,}2,\ p_{212} = 0,\ p_{221} = 0,\ p_{222} = 15{,}1\ (C / m^2);$$

$$\beta_{11} = 6{,}45,\ \beta_{12} = 0,\ \beta_{21} = 0,\ \beta_{22} = 5{,}62\ (10^{-9} C / Vm)\ [1,\ 2].$$

Ця задача повністю задовольняє припущення (B), (A), (J), а, отже, для неї виконуються умови теореми 1. Ми можемо побудувати функціонали J_i, $i = 1, 2$, тобто вибрати керування системою, яке задовольняє зроблені припущення, так, щоб досягти бажаної в певних випадках поведінки п'єзоелектричної системи, а саме спрямувати розв'язки досліджуваної задачі в множину стаціонарних станів. Таким чином, ми дослідили потраєкторну поведінку розв'язків, що дає можливість скерувати цю модель до необхідного асимптотичного рівня.

Висновки

У статті доведено, що для розв'язків еволюційної задачі другого порядку з розривною функцією взаємодії, що моделює керований п'єзоелектричний процес, існує траєкторний атрактор у розширеному фазовому просторі та досліджено його структурні властивості. Також встановлено його зв'язок з глобальним атрактором та простором повних траєкторій поставленої задачі. Розглядаючи закон "реакції-зміщення" у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, при заданих припущеннях на параметри задачі, ми отримали, що наведені вище результати застосовні до математичної моделі динаміки керованого п'єзоелектричного процесу. Крім того, встановлено, що результати дослідження потраєкторної поведінки розв'язків задачі дають змогу скерувати п'єзоелектричну систему до необхідного асимптотичного рівня.

Вперше для класу керованих п'єзоелектричних полів з негладким та немонотонним потенціалом досліджена рівномірна асимптотична поведінка розв'язків, коли час $t \to +\infty$. Показано, що динаміка таких процесів є скінченновимірною з точністю до малого параметру. Отримані результати дають можливість обґрунтовувати високоточні алгоритми пошуку слабких розв'язків математичних моделей досліджуваних процесів, вивчати їх довгострокову поведінку та виводити стани системи потраєкторно на задані стаціонарні рівні. Результати роботи можна використати для подальшого якісного та конструктивного дослідження глобальної поведінки функцій стану класів керованих нелінійних процесів та полів різної природи.

Список літератури

1. *S. Park et al.,* "Crack extension in piezoelectric materials," SPIE. Smart Materials, V.K. Varadan, Ed., vol. 2189, pp. 357–368, 1994.
2. *X.D. Wang et al.,* "Coupled behaviour of interacting dielectric cracks in piezoelectric materials," Int. J. Fracture, vol. 132, pp. 115–133, 2005.
3. *Мірошниченко А.П., Шорохов А.Є.* Особливості керування параметрами п'єзокерамічних двигунів // Вісник КНУТД. – 2012. – № 3. – С. 33–37.
4. *J. Burns et al.,* "Representation of Feedback Operators for Hyperbolic Systems," Computation and Control IV. Progress in Systems and Control Theory, vol. 20, pp. 57–73, 1995.
5. *H. Khalil,* Nonlinear systems. New Jersey: Prentice Hall, 2002, 750 p.
6. *C. Rowley et al.,* "Dynamic and Closed-Loop Control," Fundamentals and Applications of Modern Flow Control, vol. 231, 40 p., 2009.

7. *Z. Naniewicz, P. Panagiotopoulos*, Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications. Nonconvex Optimization and Its Applications. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks. New York: Marcel Dekker, Inc., 1995, 267 p.
8. *V. Dem'yanov et al.*, "Quasidifferentiability and nonsmooth modeling in Mechanics, Engineering and Economics," Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 10. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, 348 p.
9. *P.D. Panagiotopoulos et al.,* "The nonmonotone skin effects in plane elasticity problems obeying to linear elastic and subdifferential laws," Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 70, is. 1, pp. 13–21, 1990.
10. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 494 с.
11. *M.Z. Zgurovsky et al.,* "Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems," System research and information technologies, no. 1, pp. 56–68, 2014.
12. *Liu Z. et al.,* "Noncoercive Damping in Dynamic Hemivariational Inequality with Application to Problem of Piezoelectricity," Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 9, no. 1, pp. 129–143, 2008.
13. *Zgurovsky M.Z. et al.,* "Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem," Applied Mathematics Letters, vol. 25, pp. 1569–1574, 2012.
14. *M.Z. Zgurovsky et al.,* Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. Long-Time Behavior of Evolution Inclusions Solutions in Earth Data Analysis. Series: Advances in Mechanics and Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2012, 330 p.
15. *N.V. Gorban et al.,* "On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity," in Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, M.Z. Zgurovsky, V.A. Sadovnichiy, Eds., vol. 211, pp. 221–237, 2014.
16. *F.H. Clarke,* Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley, 1983, 308 p.
17. *M. Vishik et al.,* "Trajectory and Global Attractors of Three-Dimensional Navier-Stokes Systems," Math. Notes, vol. 71, no. 2, pp. 177–193, 2002.
18. *J.M. Ball,* "Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations," J. of Nonlinear Sci., vol. 7, no. 5, pp. 475–502, 1997.
19. *V.S. Melnik et al.,* "On attractors of multivalued semiflows and differential inclusions," Set-Valued Analysis, vol. 6, no. 1, pp. 83–111, 1998.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
22 січня 2014 року