

## ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

УДК 621.372.82

ВЛАСНІ ХВИЛІ В НЕОДНОРІДНОМУ ЗА ПЕРЕРІЗОМ  
ВІДКРИТОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ  
ХВИЛЕВОДІ

М.С.Горб, аспірант

О.В. Гусєва, к.т.н., доцент

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

## Вступ

Метою даної роботи є знаходження сталих поширення в неоднорідному діелектричному хвилеводі. Задача розв'язується методом часткових областей.

На рис.1 зображено поперечний перетин хвилеводу, який складається з трьох областей – 1, 2 та 3. Кожна з областей характеризується відносними діелектричною  $\epsilon'$  та магнітною  $\mu'$  проникностями, які є сталими в межах області. Таку структуру можна розглядати, як однорідний круговий хвилевід (область 2), із внесеною в нього неоднорідністю (область 1).

Відповідно до методу часткових областей переріз хвилеводу розбивається на декілька областей, в кожній з яких поля розкладаються в ряди за системою функцій, які задовольняють хвильовому рівнянню і умові неперервності на спільних границях.

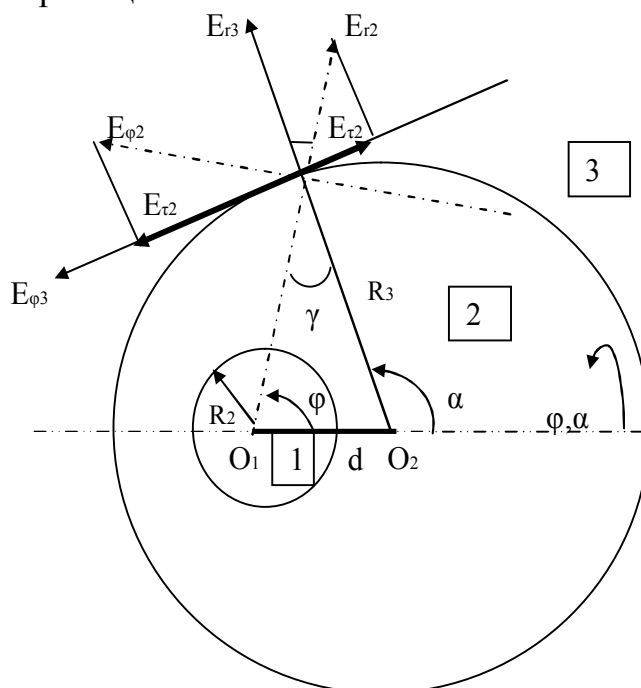


Рис.1

Перевагою даної методики є те, що у випадку однорідних часткових областей поля знаходяться з розв'язку хвильового рівняння, в якому параметри середовища не залежать від поперечних координат.

Важкість аналізу полягає в тому, що неоднорідність не є координатною лінією в системі координат з центром в точці  $O_2$ , що ускладнює виконання граничних умов на границі 1 і 2 областей.

Далі прийнято залежність від часу -  $e^{j\omega t}$ , а від позовжньої координати -  $e^{-j\beta z}$ , (де  $\beta$  - позовжня стала поширення). Хвильове рівняння для позовжньої ( $z$ -ової) компоненти електричного поля має вигляд:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \alpha^2} + \chi^2 E_z = 0$$

Як відомо [1], дане рівняння розв'язуються методом розділення змінних. Його розв'язок у загальному випадку має вигляд:

$$E_z(r, \alpha) = \begin{cases} (A \cdot J_n(\chi \cdot r) + B \cdot N_n(\chi \cdot r)) \cdot (C \cdot \text{Cos}(n\alpha) + D \cdot \text{Sin}(n\alpha)), \\ (A \cdot H_n^{(1)}(\chi \cdot r) + B \cdot H_n^{(2)}(\chi \cdot r)) \cdot (C \cdot e^{jn\alpha} + D \cdot e^{-jn\alpha}), \end{cases} \quad (1)$$

де  $A, B, C, D$  – невідомі константи (амплітуди);  $J_n(x)$ ,  $N_n(x)$ ,  $H_n^{(1)}(x)$ ,  $H_n^{(2)}(x)$  – функції Беселя, Неймана та Ханкеля  $n$ -ого порядку;  $\chi$  – поперечне хвильове число,  $\chi^2 = \beta^2 - k_0^2 \epsilon' \mu'$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – хвильове число вільного простору.

### Поля в часткових областях

Оскільки хвилевід в поперечному перетині має вісь симетрії, то можна розглядати окремо парні і непарні хвилі. Парними називають такі хвилі у яких азимутальна залежність  $E_z$  прийнята у вигляді  $\text{Cos}(n\alpha)$ , у непарних -  $\text{Sin}(n\alpha)$ . Врахування лише парних або непарних хвиль спростить подальший аналіз.

Вид запису полів має також враховувати особливі точки, в даному випадку це точки  $r = 0$  та  $r \rightarrow \infty$ .

Введемо дві полярні системи координат:  $(r_2, \alpha)$  – з центром в точці  $O_2$  та  $(r_1, \varphi)$  – з центром в точці  $O_1$ .

Враховуючи вигляд розв'язку хвильового рівняння (1) представимо поля в кожній з областей:

поля в 1 області (система координат  $(r_1, \varphi)$ ):

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cdot J_n(\chi_1 r_1) \cdot \text{Cos}(n\varphi), \\ H_z^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} \cdot J_n(\chi_1 r_1) \cdot \text{Sin}(n\varphi); \end{aligned} \quad (2)$$

поля в 2 області (система координат  $(r_1, \varphi)$ ):

$$\begin{aligned}
 E_z^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (R_n^{(2)} \cdot J_n(\chi_2 r_1) + T_n^{(2)} \cdot N_n(\chi_2 r_1)) \cdot \text{Cos}(n\phi), \\
 H_z^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_n^{(2)} \cdot J_n(\chi_2 r_1) + V_n^{(2)} \cdot N_n(\chi_2 r_1)) \cdot \text{Sin}(n\phi);
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

поля в 3 області (система координат  $(r_2, \alpha)$ ):

$$\begin{aligned}
 E_z^{(3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} \cdot K_n(\chi_3 r_2) \cdot \text{Cos}(n\alpha), \\
 H_z^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(3)} \cdot K_n(\chi_3 r_2) \cdot \text{Sin}(n\alpha),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

де  $A_n, D_n, R_n, T_n, U_n, V_n$  - невідомі амплітуди;  $K_n(x)$  – модифікована функція Ханкеля  $n$ -ого порядку;  $\chi_{1,2}^2 = \beta^2 - k_0^2 \epsilon'_{1,2} \mu'_{1,2}$ ,  $\chi_3^2 = k_0^2 \epsilon'_3 \mu'_3 - \beta^2$ .

Вирази (4) представляють випадок поверхневих хвиль, коли поле ззовні хвилеводу спадає зі збільшенням радіусу. Для цього аргумент функції Ханкеля має бути уявним [2].

Із запису для полів бачимо, одна хвиля, яка визначена певним значенням  $\chi$ , представляється у вигляді нескінченної суми (невідоме поле апроксимується нескінченною сумою). Зрозуміло, що для знаходження рішення нескінченні суми необхідно обмежити, а ступінь обмеження впливатиме на точність розв'язку.

Для знаходження невідомих амплітуд і сталих поширення необхідно виконати граничні умови, які полягають в рівності дотичних до границі поділу двох середовищ компонент електричного та магнітного поля. В даному випадку це є повздовжня та тангенціальна компоненти.

Поперечні складові поля виражаються через повздовжню за допомогою співвідношень [9]:

$$\begin{aligned}
 E_\phi &= -\frac{j}{\chi^2} \cdot \left( \beta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), & H_\phi &= -\frac{j}{\chi^2} \cdot \left( \beta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega \epsilon \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \\
 E_r &= -\frac{j}{\chi^2} \cdot \left( \beta \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \mu \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right), & H_r &= -\frac{j}{\chi^2} \cdot \left( \beta \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \epsilon \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Зазначемо, що оскільки  $\chi_3$  - уявне, то при знаходженні поперечних складових поля необхідно враховувати, що  $\chi_3^2 < 0$ .

Граничні умови між 1 і 2 областями при  $r_1 = R_2$  мають вигляд:

$$E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \quad E_\phi^{(1)} = E_\phi^{(2)}, \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)}, \quad H_\phi^{(1)} = H_\phi^{(2)}.$$

Виконання цих умов приводить до наступних співвідношень:

$$\begin{aligned}
 -f_\chi \cdot (R_n^{(2)} J_n(\chi_2 R_2) + T_n^{(2)} N_n(\chi_2 R_2)) + U_n^{(2)} \cdot f_{J\mu} + V_n^{(2)} \cdot f_{N\mu} &= 0, \\
 n &= 1 \dots \infty \\
 f_\chi \cdot (U_n^{(2)} J_n(\chi_2 R_2) + V_n^{(2)} N_n(\chi_2 R_2)) + R_n^{(2)} \cdot f_{J\epsilon} + T_n^{(2)} \cdot f_{N\epsilon} &= 0, \quad n = 0 \dots \infty
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{де} \quad u_f &= \frac{J'_n(\chi_1 R_2)}{J_n(\chi_1 R_2)}, & f_\chi &= \frac{n\beta}{R_2} \cdot \left( \frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right), \\
 f_{J_\mu} &= \frac{w\mu_2}{\chi_2} \cdot J'_n(\chi_2 R_2) - \frac{w\mu_1}{\chi_1} \cdot u_f \cdot J_n(\chi_2 R_2), \\
 f_{N_\mu} &= \frac{w\mu_2}{\chi_2} \cdot N'_n(\chi_2 R_2) - \frac{w\mu_1}{\chi_1} \cdot u_f \cdot N_n(\chi_2 R_2), \\
 f_{J_\varepsilon} &= \frac{w\varepsilon_1}{\chi_1} \cdot u_f \cdot J_n(\chi_2 R_2) - \frac{w\varepsilon_2}{\chi_2} \cdot J'_n(\chi_2 R_2), \\
 f_{N_\varepsilon} &= \frac{w\varepsilon_1}{\chi_1} \cdot u_f \cdot N_n(\chi_2 R_2) - \frac{w\varepsilon_2}{\chi_2} \cdot N'_n(\chi_2 R_2).
 \end{aligned}$$

Для зменшення порядку системи у виразах (6) визначимо амплітуди  $R_n$  і  $U_n$  через амплітуди  $T_n$  і  $V_n$ :

$$V_n^{(2)} = R_n^{(2)} \cdot \Phi_1 + U_n^{(2)} \cdot \Phi_2, \quad T_n^{(2)} = R_n^{(2)} \cdot \Phi_3 + U_n^{(2)} \cdot \Phi_4,$$

$$\begin{aligned}
 \text{де} \quad \Phi_1 &= \frac{J_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi f_{N_\varepsilon} - f_{J_\varepsilon} \cdot N_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi}{(f_\chi \cdot N_n(\chi_2 R_2))^2 + f_{N_\varepsilon} f_{N_\mu}}, \\
 \Phi_2 &= \frac{-f_{J_\mu} f_{N_\varepsilon} - J_n(\chi_2 R_2) \cdot N_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi^2}{(f_\chi \cdot N_n(\chi_2 R_2))^2 + f_{N_\varepsilon} f_{N_\mu}}, \\
 \Phi_3 &= \frac{-f_{J_\varepsilon} - \Phi_1 \cdot N_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi}{f_{N_\varepsilon}}, \\
 \Phi_4 &= \frac{-J_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi - \Phi_2 \cdot N_n(\chi_2 R_2) \cdot f_\chi}{f_{N_\varepsilon}}.
 \end{aligned}$$

На границі областей 2 і 3 дотичні до границі поділу складові полів мають бути рівними. Оскільки дана границя в системі координат з центром в точці  $O_1$  не є координатною, граничні умови будемо виконувати в окремих точках на границі поділу, тобто застосуємо метод точкового узгодження. Даний метод використовувався для розв'язання подібних задач в роботах [3-8].

Враховуючи симетрію хвилеводу можна розглядати лише його половину, і виконувати граничні умови лише на верхньому або нижньому півколі  $r = R_3$ . Граничні умови мають вигляд:

$$E_z^{(2)} = E_z^{(3)}, \quad E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(3)}, \quad H_z^{(2)} = H_z^{(3)}, \quad H_\tau^{(2)} = H_\tau^{(3)},$$

де  $E_\tau$  та  $H_\tau$  – дотичні до границі поділу в певній точці компоненти поля, які знаходяться як сума проєкцій радіальної та тангенціальної компоненти

на дотичну до границі поділу областей 2 і 3 в певній точці (див. рис.1).

Для структури на рис.1 для всіх точок на границі поділу областей 2 і 3, які розташовані вище штрихової лінії (вісі симетрії) дотичні компоненти в системі координат  $(r_1, \phi)$ :

$$\begin{aligned} E_{\tau}^{(2)} &= E_{\phi}^{(2)} \cdot \text{Cos}(\gamma) - E_r^{(2)} \cdot \text{Sin}(\gamma), \\ H_{\tau}^{(2)} &= H_{\phi}^{(2)} \cdot \text{Cos}(\gamma) - H_r^{(2)} \cdot \text{Sin}(\gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\gamma = \text{ArcSin}\left(\frac{1}{r_1} \cdot d \cdot \text{Sin}(\phi)\right)$ ,  $d = O_1O_2$ ,  $(r_1, \phi)$ - координати точки на гра-

ниці поділу, які задані в системі координат з центром в точці  $O_1$ .

Знак мінус у виразах (7) вказує на різний напрямок проєкцій компонент поля на дотичну до певної точки (див. рис.1).

Врахуємо у виразах для полів  $N$  складових.

Виконання граничних умов в  $N$  точках приводить до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ)  $4 \cdot N$ -го порядку відносно  $4 \cdot N$  невідомих амплітуд  $A_n^{(3)}$ ,  $D_n^{(3)}$ ,  $R_n^{(2)}$ ,  $U_n^{(2)}$ . Згідно до правил лінійної алгебри [10], однорідна СЛАУ, у якої однакове число невідомих та рівнянь має нетривіальний розв'язок тільки тоді коли її визначник дорівнює нулю. Ця умова призводить до дисперсійного рівняння (ДУ) відносно невідомих поперечних хвильових чисел, які пов'язані співвідношеннями:

$$\chi_2 = \sqrt{\chi_1^2 + k_0^2(\epsilon'_2 \mu'_2 - \epsilon'_1 \mu'_1)}, \quad \chi_3 = \sqrt{k_0^2(\epsilon'_1 \mu'_1 - \epsilon'_3 \mu'_3) - \chi_1^2}.$$

### Результати розрахунків

За наведеним алгоритмом проведено розрахунок неоднорідного діелектричного хвильоводу, з використанням програмних середовищ Matlab та Mathcad. Розрахунки виконувались для  $N = 11$ . При зменшенні  $N$  не можна знайти всі корені дисперсійного рівняння, та їх точність недостатня при заданих вихідних даних. Якщо обирати  $N > 11$ , то значення коренів співпадають з точністю до п'ятого знаку з випадком  $N = 11$ .

Вихідні дані для розрахунку:  $R_3 = 0.05$  м – радіус хвильоводу;  $\epsilon'_3 = 1$ ,  $\epsilon'_2 = 40$ ,  $\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = 1$ .

На рис.2-4 наведені залежності  $\beta/k_0$  для різних типів хвиль від різних параметрів неоднорідності. Прийнята класифікація (нумерація) типів хвиль в напрямку зменшення  $\beta/k_0$ .

На рис.2 показана залежність  $\beta/k_0$  від відстані  $d$  для  $d = [0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04]$  м, при  $R_2 = 0.01$  м,  $\lambda = 5 \cdot R_3$ ,  $\epsilon'_1 = 16$ .

Рис.3 відображає залежність  $\beta/k_0$  від  $R_2/R_3$  для  $R_2/R_3 = [0.01, 0.08, 0.16, 0.24, 0.32, 0.4]$  м, при  $d = 0.03$  м,  $\lambda = 5 \cdot R_3$ ,  $\epsilon'_1 = 16$ .

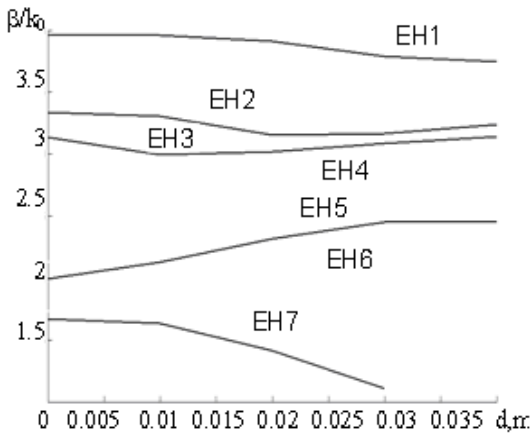


Рис.2

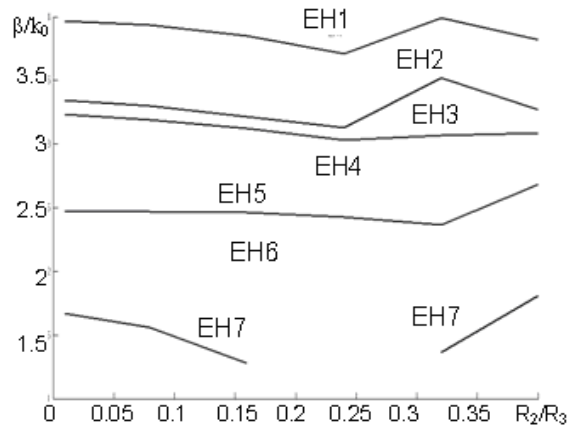


Рис.3

На рис.4 наведена залежність  $\beta/k_0$  від  $\epsilon'_1$  для  $\epsilon'_1 = [16, 22, 28, 34, 40]$ , при  $d = 0.03$  м,  $\lambda = 5 \cdot R_3$ ,  $R_2 = 0.01$  м. Видно, що при збільшенні  $\epsilon'_1$  з'являються нові типи хвиль.

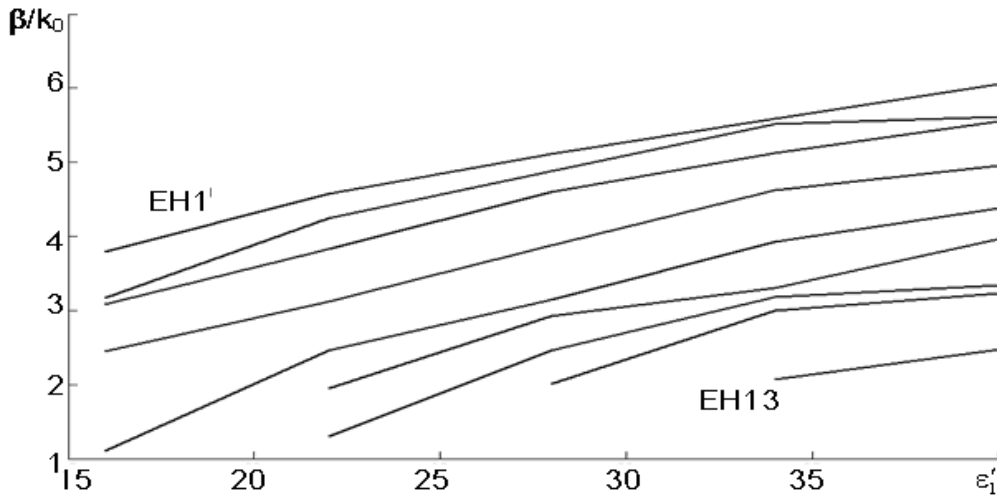


Рис.4

Дисперсійні характеристики (залежність  $\beta/k_0$  від  $\lambda_0/R_3$ ) зображено на рис.5 для  $\lambda_0/R_3 = [4, 5, 6, 7, 8]$ ,  $d = 0.03$  м,  $R_2 = 0.01$  м,  $\epsilon'_1 = 16$ . Видно, що при збільшенні довжини хвилі вищі типи хвиль зникають.

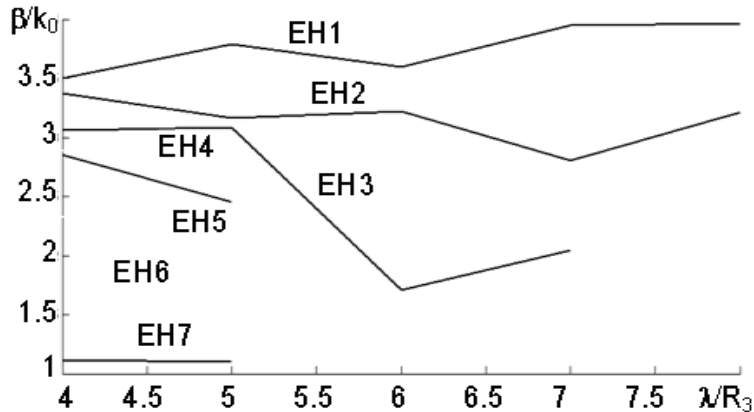


Рис.5

Розподіл модулю поздовжніх та тангенціальних компонент електричного поля, що поширюються в областях 2 і 3, на границі між цими областями (коли  $r_2 = R_3$ ) зображено на рис.6 і 7 в залежності від кута. Розподіли наведені для  $d = 0.03$  м,  $R_2 = 0.01$  м,  $\epsilon'_1 = 16$ ,  $\lambda = 5 \cdot R_3$ ,  $N = 11$ ,  $\beta/k_0 = 2.7519$ . З графіків видно, що при  $N = 11$  на границі поділу між областями виконуються граничні умови з достатньою точністю.

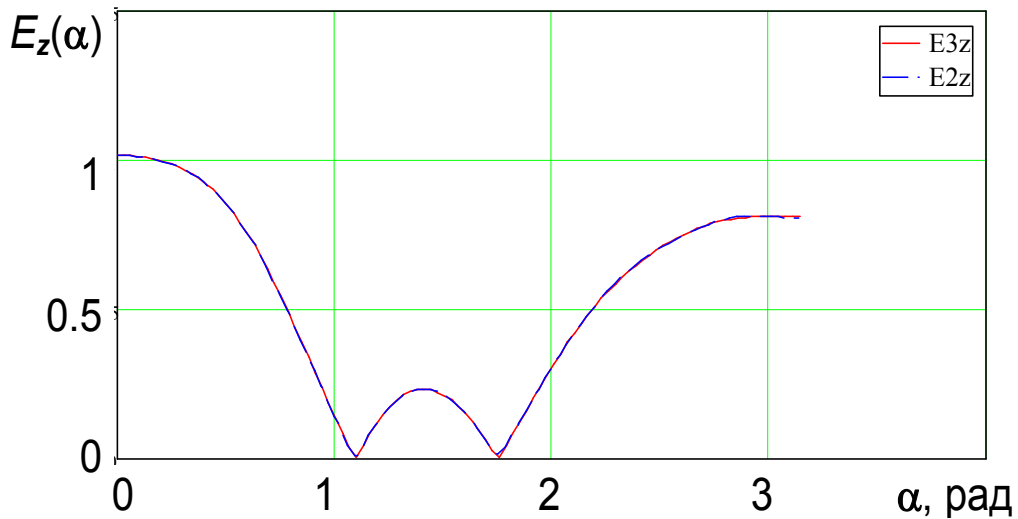


Рис.6

Для перевірки всіх наведених залежностей використовувалося рішення для випадків  $\epsilon'_1 = \epsilon'_2$  або  $R_2 \rightarrow 0$ , які відповідають відомій структурі «однорідний круговий циліндр в однорідній середі з іншими властивостями» [1]. Результати для цих випадків, які обчислені методом точкового узгодження і методом розділення змінних, повністю співпадають, що свідчить про правильність наведених співвідношень.

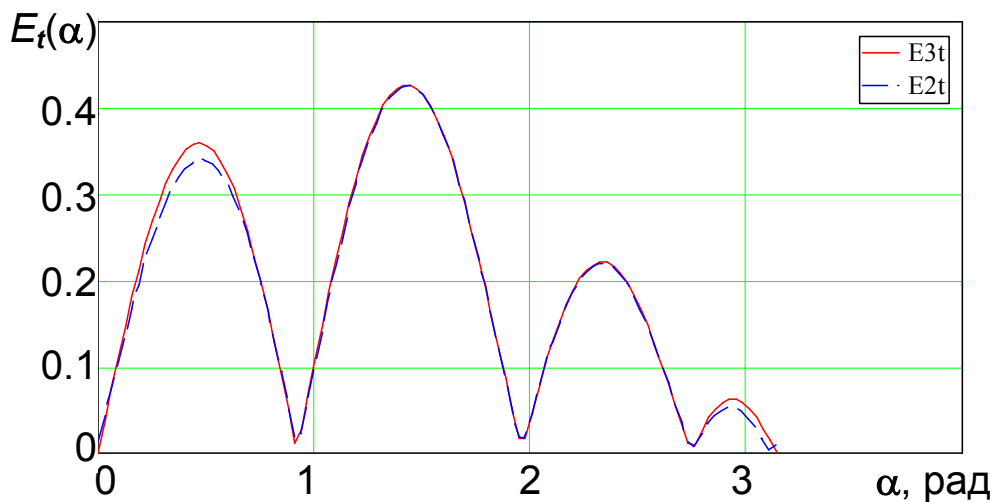


Рис.7

### Висновки

Аналітичний розв'язок задачі на власне значення можна легко переформулювати для випадку хвилеводів з декількома неоднорідними областями або також для хвилеводів з зовнішньою границею, яка має відмінну від кругової форму. Наявність аналітичної моделі неоднорідного за перерізом відкритого діелектричного хвилеводу повинна значною мірою полегшити розв'язок завдань електроімпедансної томографії.

### Література

- 1.Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука.,1973. – 607с.
- 2.Янке.Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука.,1968. – 344с.
- 3.Yamashita E. Modal analysis of homogeneous optical fibers with deformed boundaries// IEEE Trans. – 1979. – V. MTT.-27. – №4. – p.352-356.
- 4.Yamashita E. Composite dielectric waveguides // IEEE Trans. – 1980. – V. MTT.-28. – №9. – p.986-990.
- 5.Yamashita E. Composite dielectric waveguides with two elliptic-cylinder boundaries // IEEE Trans. – 1981. – V. MTT.-29. – №9. – p.987-990.
- 6.Rothwell E.J., Frasch L.L. Propagation characteristics of dielectric-rod-loaded waveguides // IEEE Trans. – 1988. – V. MTT.-36. – №3. – p.594-600.
- 7.Yeo S.P. Application of least-squares boundary residual method to the analysis of a circular waveguide loaded with a nonconcentric dielectric rod// IEEE Trans. – 1990. – V. MTT.-38. – №8. – p.1092-1095.
- 8.James J.R., Gallett, I.N.L. Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods// IEEE Radio and Electronic Engineer. – 1972. – V.42. – №3. – p.103-113.
- 9.Маркузе Д. Оптические волноводы. – М.: Мир.,1974. – 567с.
10. Высшая математика: Учеб. пособие/ П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; Под общ. ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 552 с.

*Горб М.С., Гусева О.В. Власні хвилі в неоднорідному за перерізом відкритому циліндричному діелектричному хвилеводі. Методом точкового узгодження, з врахуванням лише парних поздовжніх складових електричного поля, розв'язується задача на власні значення – сталі поширення хвиль в неоднорідному діелектричному хвилеводі. Розглядається наступна модель: діелектричний хвилевід кругового поперечного перетину з однією неоднорідністю кругової форми. Наведені результати чисельних досліджень залежності сталої поширення для різних типів хвиль в залежності від параметрів та місцеположення неоднорідності. Результати даної роботи можуть бути поширені для дослідження хвилеводів, які мають перетин іншої форми та/або містять декілька неоднорідних областей з різними параметрами.*

**Ключові слова:** *неоднорідний діелектричний хвилевід, циліндрична система координат, метод часткових областей, поперечні хвильові числа, постійна поширення*

*Горб Н.С., Гусева Е.В. Собственные волны в поперечно неоднородном открытом цилиндрическом диэлектрическом волноводе. Методом точечного согласования, с учетом только четных продольных составляющих электрического поля, решается задача на собственные значения – постоянные распространения волн в неоднородном*



диелектрическом волноводе. Рассматривается следующая модель: диелектрический волновод круглого поперечного сечения с одной неоднородностью круглой формы. Приведены результаты численных исследований зависимости постоянной распространения для разных типов волн в зависимости от параметров и месторасположения неоднородности. Результаты данной работы можно расширить для исследования волноводов, имеющих сечение другой формы и/или содержащих несколько неоднородных областей с разными параметрами.

**Ключевые слова:** неоднородный диелектрический волновод, цилиндрическая система координат, метод частичных областей, поперечные волновые числа, постоянная распространения

Gorb N.S., Guseva E.V. **Own waves in a transversely inhomogeneous open cylindrical dielectric waveguide.** By the point matching method, taking into account only the even electric longitudinal field components, is considered the eigenvalue problem - constant propagation in inhomogeneous dielectric waveguide. The following model is accepted: a dielectric waveguide of round cross-section with single circular heterogeneity. A result of numerical studies of the dependence of the propagation constant for different types of waves, depending on the parameters and the location of the in homogeneity, are introduced. The results of the study can be extended to the study of waveguides with a cross section of different shapes and/or contain multiple heterogeneous domains with different parameters.

**Keywords:** Inhomogeneous dielectrical waveguide, cylindrical coordinate system, method of partial regions, transverse wave numbers, propagation constant.