УДК 517.927.4

ІНТЕГРУВАННЯ ПАРАМЕТРИЗОВАНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

І.І. КОРОЛЬ

Розглядаються питання існування та наближеної побудови розв'язків багатоточкових крайових задач для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з невідомими параметрами за допомогою модифікації чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

ВСТУП

Одним з ефективних і конструктивних методів дослідження питань якісної теорії та наближеної побудови розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих різного роду обмеженням, зокрема дво- та багатоточковим крайовим умовам, є чисельно-аналітичний метод послідовних наближень. Детальний огляд досліджень з цього питання можна знайти в роботі [2], де результати, одержані в [3] для триточкових крайових задач з параметрами, узагальнюються на випадок багатоточкових крайових умов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\right), \tag{1}$$

підпорядкованих багатоточковим крайовим умовам

$$A_0 x(0) + \sum_{k=1}^{q} A_k x(t_k) + A_{q+1} x(T) = d\,, \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{01}, \\ x_2(0) = x_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_s(0) = x_{0s}, \end{cases} \tag{3}$$

де $x, f, d \in \mathrm{R}^n$, $n \ge s+1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — невідомі скалярні параметри: $\lambda_i \in I_i = [a_i; b_i]$, $i = 1, \ldots, s$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q < t_{q+1} = T$, $x(0) = (x_{01}, \ldots, x_{0s}, x_{s+1}(0), \ldots, x_n(0))$; A_k, $k = 0, \ldots, q+1$ — сталі матриці, які задовольняють умову $\det \sum_{k=1}^{q+1} A_k \ne 0$.

Вважаємо, що для крайової задачі (1)–(3) виконуються такі умови.

1. Функція $f(t,x,\Lambda)$ визначена і неперервна в області $\Omega=[0,T]\times D\times I$, $\Omega\subset R^{n+s+1}$, де D — замкнена обмежена область в R^n, $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s)\in$ $\in I=I_1\times I_2\times\ldots\times I_s$, і обмежена вектором $M(t)$.

$$|f(t,x,\Lambda)|\le M(t),\quad |f(t,x,\Lambda)|=(|f_1(t,x,\Lambda)|,\ldots,|f_n(t,x,\Lambda)|).$$

2. Функція $f(t,x,\Lambda)$ в області Ω задовольняє умову Ліпшіца по x,Λ.

$$|f(t,x',\Lambda')-f(t,x'',\Lambda'')|\le K|x'-x''|+L|\Lambda'-\Lambda''|, \tag{4}$$

де $K\in R_+^{n\times n}$, $L\in R_+^{s\times n}$.

Нерівності між векторами розуміємо покомпонентно.

3. $D_0\ne\varnothing$, де D_0 — $(n-s)$-вимірна множина точок z_0 така, що точки $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0s},z_0)$ містяться в D разом із своїм β - околом, де

$$\beta=\frac{T}{2}M'+\beta_1(z_0),\quad M'=\frac{1}{2}\left[\max_{(t,x,\Lambda)\in\Omega}f(t,x,\Lambda)-\min_{(t,x,\Lambda)\in\Omega}f(t,x,\Lambda)\right],$$

$$\beta_1(z_0)=\left|H\left\{d-\sum_{k=0}^{q+1}A_kx_0\right\}\right|+PM',\quad H=\left[\sum_{k=1}^{q+1}A_k\frac{t_k}{T}\right]^{-1},\quad P=\sum_{k=1}^{q}|HA_k|\alpha_1(t_k),$$

$$\alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

4. Власні значення $s_i(Q)$ матриці $Q=\left(\frac{T}{2}E+P\right)K$, де E — одинична матриця, лежать в одиничному крузі

$$|s_i(Q)|<1,\quad i=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Під розв'язком задачі розуміємо неперервно-диференційовану на проміжку $[0,T]$ вектор-функцію $x=x^*(t)$ і такі значення параметрів $\Lambda=\Lambda^*=$ $=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_s^*)$, тобто сукупність $(x^*(t),\Lambda^*)$, яка задовольняє як систему (1), так і крайові умови (2), (3).

ОБГРУНТУВАННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ

Розглянемо послідовність вектор-функцій $\{x_m(t,z_0,\Lambda)\}$, заданих рекурентним співвідношенням

$$x_m(t,z_0,\Lambda)=x_0+\int_0^t\left[f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-\overline{f(s,x_{m-1}(s,z_0,\Lambda),\Lambda)}\right]d\tau+$$

$$+\frac{t}{T}H\left\{d-\sum_{k=0}^{q+1}A_kx_0-\sum_{k=1}^{q}A_k\int_0^{t_k}\left[f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-\overline{f(s,x_{m-1}(s,z_0,\Lambda),\Lambda)}\right]d\tau\right\},$$

$$x_0(t, z_0, \Lambda) = x_0 = (x_{01}, ..., x_{0s}, z_0), \quad m = 1,2,\dots, \tag{6}$$

де $\overline{f(s, x_{m-1}(s, z_0, \Lambda), \Lambda)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z_0, \Lambda), \Lambda) ds$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що всі члени послідовності (6) задовольняють крайові умови (2), (3) при довільних значеннях параметрів з області $(z_0, \Lambda) \in D_0 \times I$. Має місце твердження про збіжність послідовності (6).

Теорема 1. Нехай крайова задача $(1)-(3)$задовольняє умови $1-4$. Тоді

1) послідовність (6) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, z_0, \Lambda) \in \Omega_0 = [0, T] \times D_0 \times I$, $\Omega_0 \subset R^{n+1}$ до неперервної граничної функції $x^*(t, z_0, \Lambda)$, і для збіжності справедливі оцінки

$$\left| x^*(t, z_0, \Lambda) - x_m(t, z_0, \Lambda) \right| \le Q^m (E - Q)^{-1} \beta(z_0); \tag{7}$$

2) $\forall (z_0, \Lambda) \in D_0 \times I$ гранична функція $x^*(t, z_0, \Lambda)$ при $t = 0$ проходить через точку $x(0, z_0, \Lambda) = x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0s}, z_0)$ і є розв'язком збуреної по відношенню до (1)–(3) крайової задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \Lambda) + \Delta(z_0, \Lambda), \\ A_0 x(0) + \sum\limits_{k=1}^{q} A_k x(t_k) + A_{q+1} x(T) = d, \\ x_1(0) = x_{01}, \ \dots, \ x_s(0) = x_{0s}, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$\Delta(z_0, \Lambda) = -\overline{f(s, x^*(s, z_0, \Lambda), \Lambda)} +$$

$$+ \frac{1}{T} H \left\{ d - \sum_{k=0}^{q+1} A_k x_0 - \sum_{k=1}^{q} A_k \int_0^{t_k} \left[f(\tau, x^*(\tau, z_0, \Lambda), \Lambda) - \overline{f(s, x^*(s, z_0, \Lambda), \Lambda)} \right] d\tau \right\}. \tag{9}$$

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (6) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною. Спочатку доведемо, що $\forall (t, z_0, \Lambda) \in \Omega_0$, $\forall m \in N$, $x_m(t, z_0, \Lambda) \in D$. За лемою 3 [4]

$$|x_1(t, z_0, \Lambda) - x_0| \le \left| \int_0^t \left[f(\tau, x_0, \Lambda) - \overline{f(s, x_0, \Lambda)} \right] d\tau \right| + \left| H \left[d - \sum_{k=0}^{q+1} A_k x_0 \right] \right| +$$

$$+ \left| H \sum_{k=1}^{q} A_k \int_0^{t_k} \left[f(\tau, x_0(\tau, z_0, \Lambda), \Lambda) - \overline{f(s, x_0(s, z_0, \Lambda), \Lambda)} \right] d\tau \right| \le \alpha_1(t) M' +$$

$$+\left|H\left[d-\sum_{k=0}^{q+1}A_k x_0\right]\right|+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|\alpha_1(t_k)M'\le\alpha_1(t)M'+\beta_1(z_0)\le\beta(z_0).$$

Отже, при $(t,z_0,\Lambda)\in\Omega_0$ маємо $x_1(t,z_0,\Lambda)\in D$. За індукцією можна легко встановити, що $x_m(t,z_0,\Lambda)\in D,\ \forall m=1,2,\ldots,\ \forall(t,z_0,\Lambda)\in\Omega_0$. Оцінимо різницю функцій

$$|x_{m+1}(t,z_0,\Lambda)-x_m(t,z_0,\Lambda)|\le$$

$$\le\left|\int_0^t\left[f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\overline{f(s,x_m(s,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(s,x_{m-1}(s,z_0,\Lambda),\Lambda)}\right)\right]d\tau\right|+$$

$$+\left|H\sum_{k=1}^{q}A_k\int_0^{t_k}\left[f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\overline{f(s,x_m(s,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(s,x_{m-1}(s,z_0,\Lambda),\Lambda)}\right)\right]d\tau\right|\le$$

$$\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t|f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)|d\tau+$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T|f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)|d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}|f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)|d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^T|f(\tau,x_m(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)-f(\tau,x_{m-1}(\tau,z_0,\Lambda),\Lambda)|d\tau\right\}.$$

Якщо позначити $r_{m+1}(t,z_0,\Lambda)=|x_{m+1}(t,z_0,\Lambda)-x_m(t,z_0,\Lambda)|$, то, враховуючи умову Ліпшіца (4), одержимо

$$r_{m+1}(t,z_0,\Lambda)\le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(\tau,z_0,\Lambda)d\tau+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(\tau,z_0,\Lambda)d\tau\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|K\left[\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}r_m(\tau,z_0,\Lambda)d\tau+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^T r_m(\tau,z_0,\Lambda)d\tau\right].$$

Ми вже довели, що $r_1(t,z_0,\Lambda)\le\alpha_1(t)M'+\beta_1(z_0)$, а тому, враховуючи лему 2.2 [1], за методом математичної індукції отримуємо

$$r_2(t,z_0,\Lambda)\le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t[\alpha_1(\tau)M'+\beta_1(z_0)]d\tau+\frac{t}{T}\int_t^T[\alpha_1(\tau)M'+\beta_1(z_0)]d\tau\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|K\left[\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}[\alpha_1(\tau)M'+\beta_1(z_0)]d\tau+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^T[\alpha_1(\tau)M'+\beta_1(z_0)]d\tau\right]\le$$

$$\le K\left[\alpha_2(t)M'+\alpha_1(t)\beta_1(z_0)\right]+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|K\left[\alpha_2(t_k)M'+\alpha_1(t_k)\beta_1(z_0)\right]\le$$

$$\le\left[E\alpha_1(t)+\sum_{k=1}^{q}|HA_k|\alpha_1(t_k)\right]K\left[\frac{T}{3}M'+\beta_1(z_0)\right]\le$$

$$\le\left[\frac{T}{2}E+P\right]K\left[\frac{T}{3}M'+\beta_1(z_0)\right]\le Q\beta(z_0),$$

$$r_{m+1}(t,z_0,\Lambda)\le Q^m\beta(z_0).$$

З урахуванням (5) одержимо оцінку різниці

$$\left|x_{m+j}(t,z_0,\Lambda)-x_m(t,z_0,\Lambda)\right|\le\sum_{i=1}^{j}r_{m+i}(\tau,z_0,\Lambda)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\beta(z_0)\le Q^m(E-Q)^{-1}\beta(z_0).$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}Q^m=0$, то послідовність (6) у просторі неперервних вектор-функцій є фундаментальною, а отже, за критерієм Коші вона рівномірно збігається. Перейшовши у співвідношенні (6) до границі при $m\to\infty$ отримаємо, що гранична функція $x^*(t,z_0,\Lambda)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t)=x_0+\int_0^t\left[f(\tau,x(\tau),\Lambda)-\overline{f(s,x(s),\Lambda)}\right]d\tau+$$

$$+\frac{t}{T}H\left\{d-\sum_{k=0}^{q+1}A_kx_0-\sum_{k=1}^{q}A_k\int_0^{t_k}\left[f(\tau,x(\tau),\Lambda)-\overline{f(s,x(s),\Lambda)}\right]d\tau\right\},$$

з чого слідує, що $x^*(0,z_0,\Lambda)=x_0=(x_{01},\ldots,x_{0s},z_0)$ і $x^*(t,z_0,\Lambda)$ є розв'язком крайової задачі (8).

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай крайова задача (1)−(3)задовольняє умови 1−4. Тоді набір $\left(x^*(t),\Lambda^*\right)$ є розв'язком вихідної крайової задачі (1)−(3) тоді і тільки тоді, коли $\left(z_0^*,\Lambda^*\right)$ є розв'язком визначального рівняння $\Delta(z_0,\Lambda)=0$. При цьому $x^*(t)=x^*\left(t,z_0^*,\Lambda^*\right)$ і $x^*(0)=x_0=\left(x_{01},\ldots,x_{0s},z_0^*\right)$.

Доведення проводиться за аналогією з доведенням теореми 3 [5].

На практиці розглядають наближену збурюючу функцію

$$\Delta_m(z_0,\Lambda) = -\overline{f(s, x_m(s, z_0, \Lambda), \Lambda)} +$$

$$+\frac{1}{T}H\left\{d - \sum_{k=0}^{q+1} A_k x_0 - \sum_{k=1}^{q} A_k \int_0^{t_k}\left[f(\tau, x_m(\tau, z_0, \Lambda), \Lambda) - \overline{f(s, x_m(s, z_0, \Lambda), \Lambda)}\right]d\tau\right\},$$

на підставі аналізу якої можна робити висновки про існування розв'язку крайової задачі (1)–(3). Достатні умови для цього дає теорема 3.

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Теорема 3. Нехай крайова задача (1)–(3) задовольняє умови 1–4, а також існує випукла замкнена область $V' = D_0' \times I' \subset D_0 \times I$ така, що для деякого фіксованого $m \geq 1$ наближене визначальне рівняння $\Delta_m(z_0,\Lambda) = 0$ має в V' єдиний розв'язок, індекс якого не дорівнює нулю і на межі S області V' виконується нерівність

$$\inf_{(z_0,\Lambda)\in S} \left|\Delta_m(z_0,\Lambda)\right| > \left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(z_0).$$

Тоді крайова задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $(x^*(t), \Lambda^*)$, початкове значення якого $x^*(0) = \left(x_{01}, \ldots, x_{0s}, z_0^*\right)$, де $\left(z_0^*, \Lambda^*\right) \in V'$.

Доведення. Враховуючи умову Ліпшіца (4) та оцінки (7), для різниці точної $\Delta^*(z_0,\Lambda)$ і наближеної $\Delta_m(z_0,\Lambda)$ збурюючих функцій одержимо

$$\left|\Delta(z_0,\Lambda) - \Delta_m(z_0,\Lambda)\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T \left|f\left(s, x^*(s, z_0, \Lambda), \Lambda\right) - f(s, x_m(s, z_0, \Lambda), \Lambda)\right| ds +$$

$$+\frac{1}{T}\left|H\sum_{k=1}^{q} A_k \int_0^{t_k}\left[f\left(\tau, x^*(\tau, z_0, \Lambda), \Lambda\right) - f(\tau, x_m(\tau, z_0, \Lambda), \Lambda) - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{\left(f\left(s, x^*(s, z_0, \Lambda), \Lambda\right) - f(s, x_m(s, z_0, \Lambda), \Lambda)\right)}\right]d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}K\int_0^T \left|x^*(s, z_0, \Lambda) - x_m(s, z_0, \Lambda)\right| ds +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{q}\left|HA_k\right|K\left[\left(1 - \frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}\left|x^*(\tau, z_0, \Lambda) - x_m(\tau, z_0, \Lambda)\right| d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^{T}\left|x^*(\tau, z_0, \Lambda) - x_m(\tau, z_0, \Lambda)\right| d\tau\right] \leq \left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(z_0). \quad (10)$$

Далі доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 4 [5].

Доведемо неперервну залежність збурюючої функції вигляду (9) від параметрів z_0, Λ.

Теорема 4. Нехай крайова задача (1)–(3)задовольняє умови 1–4. Тоді вектор-функція $\Delta(z_0,\Lambda)$ вигляду (9) визначена і неперервна в області $D_0 \times I$, і для довільних точок (z_0',Λ'), $(z_0'',\Lambda'') \in D_0 \times I$ виконується оцінка

$$\left|\Delta(z_0',\Lambda') - \Delta((z_0'',\Lambda''))\right| \le \left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|x_0' - x_0''\right| +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\Lambda' - \Lambda''\right|,$$

де $R = \sum\limits_{k=0}^{q+1}\left|HA_k\right|$.

Доведення. Для довільної точки $(z_0,\Lambda) \in D_0 \times I$ функція $x^*(s,z_0,\Lambda)$ є неперервною як границя рівномірно збіжної послідовності (6). А тоді і $\Delta(z_0,\Lambda)$ є неперервною і обмеженою $\forall (z_0,\Lambda) \in D_0 \times I$.

$$\left|\Delta(z_0,\Lambda)\right| \le \frac{1}{T}\left|H\left[d - \sum_{k=0}^{q+1}A_k x_0\right]\right| + \left(E + \frac{1}{T}P\right)M'.$$

Спочатку оцінимо близькість функцій $x_m(s,z_0',\Lambda')$ і $x_m(s,z_0'',\Lambda'')$. При $m=1$ для довільних (z_0',Λ'), $(z_0'',\Lambda'') \in D_0 \times I$, виконуючи перетворення, подібні до тих, які використовували при встановленні оцінки (7), маємо

$$\left|x_1(t,z_0',\Lambda') - x_1(t,z_0'',\Lambda'')\right| \le \left|x_0' - x_0''\right| + \frac{t}{T}\left|H\sum_{k=0}^{q+1}A_k\left|x_0' - x_0''\right|\right| +$$

$$+\left|\int_0^t\left[f(\tau,x_0',\Lambda') - f(\tau,x_0'',\Lambda'') - \left(\overline{f(s,x_0',\Lambda') - f(s,x_0'',\Lambda'')}\right)\right]d\tau\right| +$$

$$+\frac{t}{T}\left|H\sum_{k=1}^{q}A_k\int_0^{t_k}\left[f(\tau,x_0',\Lambda') - f(\tau,x_0'',\Lambda'') - \left(\overline{f(s,x_0',\Lambda') - f(s,x_0'',\Lambda'')}\right)\right]d\tau\right| \le$$

$$\le (E+R)\left|x_0' - x_0''\right| + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t\left[K\left|x_0' - x_0''\right| + L\left|\Lambda' - \Lambda''\right|\right]d\tau +$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T\left[K\left|x_0' - x_0''\right| + L\left|\Lambda' - \Lambda''\right|\right]d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{q}\left|HA_k\right|\left\{\left(1 - \frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}\left[K\left|x_0' - x_0''\right| + L\left|\Lambda' - \Lambda''\right|\right]d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^{T}\left[K\left|x_0'-x_0''\right|+L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\right]d\tau\right\}\le\left(E+R+\alpha_1(t)K+PK\right)\left|x_0'-x_0''\right|+$$

$$+\left(E\alpha_1(t)+P\right)L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\le\left(E+R+Q\right)\left|x_0'-x_0''\right|+\left(\frac{T}{2}E+P\right)L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|.$$

При $m=2$ аналогічно отримаємо

$$\left|x_2(t,z_0',\Lambda')-x_2(t,z_0'',\Lambda'')\right|\le\left(E+R\right)\left|x_0'-x_0''\right|+$$

$$+\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left[K\left|x_1(\tau,z_0',\Lambda')-x_1(\tau,z_0'',\Lambda'')\right|+\right.$$

$$\left.+L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\right]d\tau+\frac{t}{T}\int_t^T\left[K\left|x_1(\tau,z_0',\Lambda')-x_1(\tau,z_0'',\Lambda'')\right|+L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\right]d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{q}\left|HA_k\right|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}\left[K\left|x_1(\tau,z_0',\Lambda')-x_1(\tau,z_0'',\Lambda'')\right|+L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^{T}\left[K\left|x_1(\tau,z_0',\Lambda')-x_1(\tau,z_0'',\Lambda'')\right|+L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|\right]d\tau\right\}\le$$

$$\le\left(E+Q+Q^2\right)\left|x_0'-x_0''\right|+\left(E+Q\right)R\left|x_0'-x_0''\right|+\left(E+Q\right)\left(\frac{T}{2}E+P\right)L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|.$$

За методом математичної індукції одержимо такі оцінки:

$$\left|x_m(t,z_0',\Lambda')-x_m(t,z_0'',\Lambda'')\right|\le\left[\sum_{i=0}^{m}Q^i\right]\left|x_0'-x_0''\right|+\left[\sum_{i=0}^{m-1}Q^i\right]R\left|x_0'-x_0''\right|+$$

$$+\left[\sum_{i=0}^{m-1}Q^i\right]\left(\frac{T}{2}E+P\right)L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $m\to\infty$ і беручи до уваги (5), маємо

$$\left|x^*(t,z_0',\Lambda')-x^*(t,z_0'',\Lambda'')\right|\le$$

$$\le\left(E-Q\right)^{-1}\left(E+R\right)\left|x_0'-x_0''\right|+\left(E-Q\right)^{-1}\left(\frac{T}{2}E+P\right)L\left|\Lambda'-\Lambda''\right|. \qquad (11)$$

З означення (9) збурюючої функції, враховуючи (11) та лему 2.1 [1], маємо, що при $\forall(z_0',\Lambda'),(z_0'',\Lambda'')\in D_0\times I$ справедливі оцінки

$$\left|\Delta(z_0',\Lambda')-\Delta(z_0'',\Lambda'')\right|\le$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \left| f\left(s, x^*(s, z_0', \Lambda'), \Lambda'\right) - f\left(s, x^*(s, z_0'', \Lambda''), \Lambda''\right)\right| ds + \frac{1}{T} R\left|x_0' - x_0''\right| +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{q}\left|HA_k\right|\left[\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k}\left| f\left(\tau, x^*(\tau, z_0', \Lambda'), \Lambda'\right) - f\left(\tau, x^*(\tau, z_0'', \Lambda''), \Lambda''\right)\right| d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{t_k}{T}\int_{t_k}^{T}\left| f\left(\tau, x^*(\tau, z_0', \Lambda'), \Lambda'\right) - f\left(\tau, x^*(\tau, z_0'', \Lambda''), \Lambda''\right)\right| d\tau\right] \leq$$

$$\leq \left(E + \frac{1}{T}P\right)K\left|x^*(t, z_0', \Lambda') - x^*(t, z_0'', \Lambda'')\right| + (E + \frac{1}{T}P)L\left|\Lambda' - \Lambda''\right| + \frac{1}{T}R\left|x_0' - x_0''\right| \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|x_0' - x_0''\right| +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\Lambda' - \Lambda''\right|.$$

Теорему доведено.

Наступна теорема встановлює необхідні умови розв'язуваності крайової задачі, тобто умови, необхідні для того, щоб існувала пара $\left(z_0^*, \Lambda^*\right)$, яка визначає при $t = 0$ початкове значення $x^*(0) = \left(x_{01}, \ldots, x_{0s}, z_0^*\right)$ точного розв'язку задачі (1)–(3).

Теорема 5. Нехай крайова задача (1)–(3) задовольняє умови 1–4. Тоді для того, щоб деяка область $V'' = D_0'' \times I''$ містила точку $\left(z_0^*, \Lambda^*\right)$, яка зводить при $\Lambda = \Lambda^*$ крайову задачу (1)–(3) до задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f\left(t, x, \Lambda^*\right), \\ x(0) = x_0^* = \left(x_{01}, \ldots, x_{0s}, z_0^*\right), \end{cases}$$

необхідно, щоб $\forall m \in \mathrm{N}$ і для $\forall \left(\bar{z}_0, \overline{\Lambda}\right) \in V''$ виконувалася нерівність

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z}_0, \overline{\Lambda}\right)\right| \leq \sup_{(z_0, \Lambda)\in V''}\left\{\left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|\bar{x}_0 - x_0\right| +\right.$$

$$\left.+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\overline{\Lambda} - \Lambda\right|\right\} +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(\bar{z}_0). \tag{12}$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 пара $\left(z_0^*, \Lambda^*\right)$ є розв'язком визначального рівняння

$$\Delta\left(z_0^*, \Lambda^*\right) = 0\,. \tag{13}$$

Застосуємо теорему 4 у випадку, коли $(z_0', \Lambda') = (\bar{z}_0, \overline{\Lambda})$, $(z_0'', \Lambda'') = (z_0^*, \Lambda^*)$, де $(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})$ — довільна точка області V''. Тоді, з урахуванням (13) маємо

$$\left|\Delta(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})\right| \le \left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|\bar{x}_0 - x_0^*\right| +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\overline{\Lambda} - \Lambda^*\right|. \qquad (14)$$

З нерівності (10) слідує, що

$$\left|\Delta(\bar{z}_0, \overline{\Lambda}) - \Delta_m(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})\right| \le \left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(\bar{z}_0),$$

тобто

$$\left|\Delta_m(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})\right| \le \left|\Delta(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})\right| + \left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(\bar{z}_0). \qquad (15)$$

Об'єднуючи нерівності (14) та (15), отримаємо співвідношення (12).

$$\left|\Delta_m(\bar{z}_0, \overline{\Lambda})\right| \le \left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|\bar{x}_0 - x_0^*\right| +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\overline{\Lambda} - \Lambda^*\right| +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(\bar{z}_0) \le$$

$$\le \sup_{(z_0,\Lambda)\in V''}\left\{\left[\frac{1}{T}R + \left(E + \frac{1}{T}P\right)K(E-Q)^{-1}(E+R)\right]\left|\bar{x}_0 - x_0\right| +\right.$$

$$\left.+\left(E + \frac{1}{T}P\right)\left[E + K(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}E + P\right)\right]L\left|\overline{\Lambda} - \Lambda\right|\right\} +$$

$$+\left(E + \frac{1}{T}P\right)KQ^m(E-Q)^{-1}\beta(\bar{z}_0).$$

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

Розглянуто застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень до дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь з параметрами, підпорядкованих нерозділеним багатоточковим крайовим умовам. Обгрунтовано алгоритм побудови наближених розв'язків. Встановлено конструктивні необхідні та достатні умови їх існування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
2. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 7. — С. 960–971.
3. *Король І.І.* Застосування чисельно-аналітичного методу до дослідження триточкових крайових задач з параметрами // Наук. вісн. УжДУ. Сер. Математика. — Вип. 3. — 1998. — С. 124–127.
4. *Ронто М., Мейсарош Й.* Некоторые замечания о сходимости численно-аналитического метода последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 1. —С. 90–95.
5. *Ронто Н.И., Король И.И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 8. — С. 1031–1042.

Надійшла 14.07.2008