View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Electronic Archive of Kyiv Polytechnic Institute



УДК 517.581

Н.О. Вірченко, А.М. Ізбаш

# ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З $r$-ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Some new properties of the $r$-hypergeometric functions are investigated, in partial, the differential relations for the function ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ are proved, and also the relation of the Kummer type is proved. The Mellin' integral transform for the $r$-hypergeometric function ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ is received. The connection of the $r$-hypergeometric function ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ with the classic Gauss' hypergeometric function ${}_2F_1(a,b;c;z)$ is established. The formula of the representation of the $r$-hypergeometric function ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ in the kind of the Riemann–Liouville' fractional integral is proved. Applications of the $r$-hypergeometric functions in the theory of an integral equations are given. Volterra' integral equations of the first kind with $r$-hypergeometric function in the kernel are solved. The solutions of these integral equations in closed form by help of apparat of the theory of the fractional integro-differention are received.

## Вступ

При розв'язанні різноманітних задач математичної фізики, аеродинаміки, астрофізики, квантової механіки, астрономії, теорії ймовірностей та математичної статистики, біомедицини тощо виникають спеціальні функції різного типу [1, 2]. Кількість спеціальних функцій за останнє півстоліття різко зросла у зв'язку з широкими потребами практичного застосування теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, розвитком обчислювальної математики тощо.

Останнім часом особлива увага приділяється узагальненим функціям гіпергеометричного типу, оскільки ці функції становлять значний потенціал для застосування при розв'язанні задач теоретичної та прикладної математики, техніки.

Особливо цінними виявилися для практики узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції, узагальнення класичної гіпергеометричної функції Гаусса [1]. Вони вже широко застосовуються в математичній фізиці, атомній фізиці, астрофізиці, теорії ймовірностей, теорії кодування тощо. Крім того, потрібно вказати і на ефективне використання цих функцій для обчислення невласних інтегралів, що відсутні в наявній науковій і довідковій літературі [2].

Підкреслімо, що частинні випадки гіпергеометричних функцій — це функції Бесселя, функції Лежандра, функції Матьє, ортогональні многочлени тощо, які мають вагоме значення при розв'язанні широкого кола задач прикладної математики й техніки. Враховуючи зазначене вище, можна зробити висновок про доцільність подальшого глибшого дослідження узагальнених гіпергеометричних функцій та їх застосувань.

## Постановка задачі

Мета статті — дослідження нових властивостей $r$-узагальнених гіпергеометричних функцій, встановлення зображення $r$-гіпергеометричної функції ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ за допомогою дробового інтеграла Рімана–Ліувілля, застосування апарату дробового інтегро-диференціювання до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду з $r$-гіпергеометричною функцією.

## Основні властивості $r$-гіпергеометричної функції

Розглянемо $r$-гіпергеометричну функцію у вигляді [3]

$$
{}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=
$$
$$
=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\times
$$
$$
\times{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \qquad (1)
$$

де $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$, $\{a,b,c\}\subset\mathbb{C}$, $r>0$; $r=0$, $|r|<1$; $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\tau-\beta<1$, $B(b,c-b)$ — класична бета-функція [4], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)$ — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [1].

При $\tau=\beta$ отримаємо функцію ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$, при $\tau=\beta=1$ матимемо функцію ${}_rF(a,b;c;z)$, а при $r=0$ функція (1) вироджується в гіпергеометричну функцію Гаусса [4].

Справедливе таке зображення функції ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ рядом:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = $$
$$ = \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n B^{\tau,\beta}(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}, \quad (2) $$

де $(a)_n$ — символ Похгаммера, $B^{\tau,\beta}(b+n,c-b;r)$ — $(\tau,\beta)$-узагальнена бета-функція [1]. Ряд (2) збігається абсолютно при $|z|<1$.

**Теорема 1 (диференціальні співвідношення для ${}_rF^{\tau,\beta}(z)$).** За умов існування функції ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ справедливі формули [2]:

$$ \frac{d\,{}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)}{dz} = \frac{ab}{c}\,{}_rF^{\tau,\beta}(a+1,b+1;c+1;z), $$

$$ \frac{d^n}{dz^n}(z^{a+n-1}\,{}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)) = \quad (3) $$
$$ = (a)_n z^{a-1}\,{}_rF^{\tau,\beta}(a+n,b;c;z). $$

**Теорема 2 (співвідношення типу Куммера).** За умов $\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\alpha>0, \{a,b,c\}\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}c>\mathrm{Re}b>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R, \tau>0, \tau-\beta<1, r\in\mathbb{C}, r>0;\ \ r=0, |z|<1$, $z\in\mathbb{C}$ для функції ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ справедливе співвідношення

$$ {}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right). \quad (4) $$

Д о в е д е н н я. Використовуючи (1) і вираз

$$ 1-z(1-\omega) = (1-z)\left(1-\frac{z}{z-1}\omega\right), $$

виконаємо в (1) підстановку $t=1-\omega$, тоді матимемо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\times $$
$$ \times\int_0^1(1-\omega)^{b-1}\omega^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}\omega\right)^{-a}(1-z)^{-a}\times $$
$$ \times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{(1-\omega)\omega}\right)d\omega = $$
$$ = \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)}\int_0^1(1-\omega)^{b-1}\omega^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}\omega\right)^{-a}\times $$
$$ \times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{(1-\omega)\omega}\right)d\omega = $$
$$ = (1-z)^{-a}\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right). $$

**Теорема 3 (про перетворення Мелліна від функції ${}_rF^{\tau}(a,b;c;z)$).** Нехай виконані умови

$$ \tau\in R_+, \{a,b,c\}\subset\mathbb{C}, \mathrm{Re}(c-b)>s, \mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0, $$
$$ \mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\alpha>s\tau, \{r,z\}\subset\mathbb{C}, r\ge 0, |z|<1, $$

тоді для узагальненої гіпергеометричної функції ${}_rF^{\tau}(a,b;c;z)$ справедлива рівність

$$ M\{{}_rF^{\tau}(a,b;c;z),s\} = A\,{}_2F_1(a,b+s;\,c+2s;z), \quad (5) $$

де $A = \dfrac{B(b+s,c-b+s)}{B(b,c-b)}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)}$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи формули (1), (2), виконаємо перетворення

$$ M\{{}_rF^{\tau}(a,b;c;z),s\} = $$
$$ = \int_0^{\infty}r^{s-1}\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n B^{\tau}(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}dr = $$
$$ = \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{z^n}{n!}\int_0^{\infty}r^{s-1}B^{\tau}(b+n,c-b;r)dr = $$
$$ = \frac{B(b+s,c-b+s)}{B(b,c-b)}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)}\times $$
$$ \times\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z) = A\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z). $$

***Наслідок.*** Формула

$$ {}_rF^{\tau}(a,b;c;z) = $$
$$ = \frac{A}{2\pi i B(b,c-b)}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z)\,r^{-s}ds, $$

отримана із формули (5) за допомогою обернення інтегрального перетворення Мелліна, встановлює зв'язок між $r$-гіпергеометричною функцією ${}_rF^{\tau}(z)$ і класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$.

### Зображення *r*-гіпергеометричної функції за допомогою дробового інтеграла

Справедлива така теорема.

**Теорема 4.** За умов існування $r$-гіпергеометричної функції ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ (див. формулу (1)) та за умов $a+n\ge 0, c\pm m>a$ цю $r$-гіпергеометричну функцію можна зобразити через інтеграл дробового порядку:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{\omega}{p}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m-a)}(\omega-p)^{1-c}\times $$

$$ \times\, p^a\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m \mathrm{I}^{\alpha}_{\omega-}(\omega-p)^{c+m-a-1}p^{-a}, $$

де $\mathrm{I}^{\alpha}_{\omega-}$ — правосторонній інтеграл дробового порядку $\alpha$ (дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля).

Д о в е д е н н я. У формулі (1) для ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ покладемо

$$ z=1-\frac{\omega}{p},\ \ t=\frac{u-p}{\omega-p}, $$

отримаємо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{\omega}{p}\right)= $$

$$ =\frac{(\omega-p)^{1-c}p^a}{B(b,c-b)}\int_p^{\omega}(u-p)^{b-1}(\omega-u)^{c-b-1}u^{-a}\times $$

$$ \times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(\omega-p)^2}{(u-p)(\omega-u)}\right)du. \quad (6) $$

Скористаємося далі формулою диференціювання типу (3) для ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ у вигляді

$$ {}_rF^{\tau,\beta}(\alpha,b;\gamma;z)= $$

$$ =\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^{1-\gamma}\left(\frac{d}{dz}\right)^n[z^{\gamma+n+1}{}_rF^{\tau,\beta}(\alpha,b;\gamma+n;z)], \quad (7) $$

де покладемо

$$ z=1-\frac{p}{\omega}; b\sim c-b; \gamma\sim c. $$

Одержимо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,c-b;c;1-\frac{p}{\omega}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}(\omega-p)^{1-c}\left(-\frac{d}{dp}\right)^n\left[(\omega-p)^{c+n-1}\times\right. $$

$$ \left.\times\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a,c-b;c+n;1-\frac{p}{\omega}\right)\right], \quad (8) $$

$$ \left(\frac{d}{dz}=-\omega\frac{d}{dp}\right). $$

Далі застосуємо співвідношення типу Куммера (4) до (8):

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{p}{\omega}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}(\omega-p)^{1-c}p^a\left(-\frac{d}{dp}\right)^n\left[p^{-a}(\omega-p)^{c+n-1}\times\right. $$

$$ \left.\times\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a+n,b;c+n;1-\frac{p}{\omega}\right)\right]. \quad (9) $$

Якщо у формулі диференціювання (7) покласти $z=1-\frac{\omega}{p},\ \alpha=a+n; \gamma=c+n$, то отримаємо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a+n,b;c+n;1-\frac{\omega}{p}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c+n+m)}(p-\omega)^{1-c-n}\left(-\frac{d}{d\omega}\right)^m\left[(p-\omega)^{c+n+m-1}\times\right. $$

$$ \left.\times\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a+n,b;c+n+m;1-\frac{\omega}{p}\right)\right]. \quad (10) $$

Підставивши (6) у (10), врахувавши (9), після перетворень одержимо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{\omega}{p}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+n)\Gamma(c+m-a)}(\omega-p)^{1-c-n}p^a\times $$

$$ \times\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m\left(-\frac{d}{dp}\right)^n\int_p^{\omega}(u-p)^{a+n-1}(\omega-u)^{c+m-a-1}u^{-a}\times $$

$$ \times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(\omega-p)^2}{(u-p)(\omega-u)}\right)du. \quad (11) $$

Візьмемо дробовий інтеграл для функції $f(x)\in C^{(n)}[a_0,a]$ у вигляді [5]

$$ (\mathrm{I}^{\alpha}_{a-}f)(x)=\frac{\left(-\frac{d}{dx}\right)^n}{\Gamma(\alpha+n)}\int_x^a(s-x)^{\alpha+n-1}f(s)ds, \quad (12) $$

де $a_0\le x\le a, \alpha+n>0, f^{(k)}(a)=0, k=0,1,\ldots,n-1$. Тепер (12) можна переписати в такій формі:

$$ (\mathrm{I}^{\alpha}_{a-}f)(x)= $$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_x^a (s-x)^{\alpha+n-1} \left(-\frac{d}{ds}\right)^n [f(s)]ds, \quad (13)$$

тобто $(\mathrm{I}_{a-}^{\alpha} f)(x) = \left[\mathrm{I}_{a-}^{\alpha+n} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n f\right](x).$

Отже, (11) можна записати у такій формі за допомогою дробового інтеграла (13):

$${}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{\omega}{p}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m-a)} (\omega-p)^{1-c} p^a \left(\frac{d}{d\omega}\right)^m \times$$

$$\times \mathrm{I}_{\omega-}^{\alpha} (\omega-p)^{c+m-a-1} p^{-a}, \quad (14)$$

де $a+n \geq 0,\ c \pm m > a$.

**Інтегральні рівняння Вольтерра I-го роду з *r*-гіпергеометричною функцією**

1. Розглянемо інтегральне рівняння

$$\int_p^1 f(\omega)(\omega-p)^{c-1} {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{p}{\omega}\right)d\omega = \psi(p), \quad (15)$$

де $\psi(p) = \varphi(p)p^a\Gamma(c),\ f(\omega) \in C^m[p,1],\ c+m \geq$ $\geq a+n \geq 0; f^{(k)}(1)=0,\ k=0,1,\ldots,m-1.$

Використавши (14), запишемо (15):

$$\psi(p) = \frac{1}{\Gamma(c+m-a)} \times$$

$$\times \int_p^1 f(\omega)\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m [\mathrm{I}_{\omega-}^{\alpha}(\omega-p)^{c+m-a-1}p^{-a}]d\omega. \quad (16)$$

Далі врахуємо цікаву властивість дробових інтегралів [5]:

$$\mathrm{I}_{a-}^{\alpha}\{g(x)\mathrm{I}_{a-}^{\beta} f(x)\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+m)} \int_x^a f(\omega)\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m \mathrm{I}_{\omega-}^{\alpha}[(\omega-x)^{\beta+m-1}g(x)]d\omega,$$

де $\alpha+n \geq 0,\ \beta+m \geq n,\ g(x) \in C^{(n)},\ f(x) \in C^{(m)},$ $f^{(k)}(a)=0, k=0,1,\ldots,m-1,$ та перепишемо (16) у такому вигляді:

$$\mathrm{I}_{1-}^{a}\, p^{-a}[\mathrm{I}_{1-}^{-a} f(p)] = \psi(p). \quad (17)$$

Згідно з правилом композиції для дробових інтегралів [5] отримуємо остаточний вираз для розв'язку інтегрального рівняння (15) в операторній формі:

$$f(p) = \mathrm{I}_{1-}^{c-a} p^a \mathrm{I}_{1-}^{-a} \psi(a). \quad (18)$$

Зауважимо, що формулу (18) легко перевірити. Досить підставити (17) у (18):

$$f(p) = \mathrm{I}_{1-}^{a-c} p^a \mathrm{I}_{1-}^{-a} \mathrm{I}_{1-}^{a}\, p^{-a} \mathrm{I}_{1-}^{c-a} f(p) = f(p).$$

Врахувавши формулу (12), розв'язок інтегрального рівняння (15) в операторній формі (18) легко переписати в інтегральній формі:

$$f(p) = \frac{1}{\Gamma(a-c)} \int_p^1 (u-p)^{a-c-1} u^a \left[\left(-\frac{d}{du}\right)^a \psi(u)\right]du.$$

2. Використовуючи апарат дробового інтегро-диференціювання, зокрема властивості композиції дробових інтегралів, знаходимо розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра I-го роду:

$$\int_0^x f(t)(x-t)^{c-1} {}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{t}{x}\right)dt = \Gamma(c)z(x),$$

$$(0 < x < d,\ 0 < d \leq \infty;\ \mathrm{Re}\,c > 0,\ \mathrm{Re}\,b > 0)$$

у вигляді $f(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}x^a\mathrm{I}^{b-c}z(x)\Gamma(c)$.

**Висновки**

Нові властивості *r*-гіпергеометричної функції дали змогу розв'язати інтегральні рівняння Вольтерра I-го роду, причому вагоме значення мало отримане в статті зображення *r*-гіпергеометричної функції у вигляді дробового інтеграла. Вміле використання апарату теорії дробового інтегро-диференціювання дало можливість отримати шукані розв'язки розглядуваних інтегральних рівнянь у замкненій формі.

Взявши до уваги перспективність одержаних наукових результатів, плануємо в майбутньому значно розширити область практичного застосування *r*-гіпергеометричних функцій.

1. *N. Virchenko,* "On the generalized confluent hypergeometric function and its application", Fract. Calculus and Appl. Anal., vol. 9, no. 2, pp. 101–108, 2006.

2. *Вірченко Н.О., Лисецька О.М., Овчаренко О.В.* До теорії узагальнених функцій гіпергеометричного типу та

їх застосування // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 7–15.

3. *Вірченко Н.О.* Деякі питання теорії узагальнених гіпергеометричних функцій // Матеріали Міжнар. наукової конф. "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", 13–14 грудня 2012 р., Київ. – К., 2012. – С. 46–47.

4. *Бейтман Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
5 квітня 2013 року