

УДК 621.372.061

І.О. Сушко, О.І. Рибін

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ІМПЕДАНСНОЇ ТОМОГРАФІЇ МЕТОДОМ ЗОН ПРОВІДНОСТІ

The features of regularization method of ill-conditioned derivatives matrices from transfer resistances (nodal voltages) on surface zones conductivities solving the Electrical Impedance Tomography (EIT) reconstruction problems are considered. Using the proposed method allows significantly (hundreds of times) reduce the derivatives matrices orders in comparison to the classical phantom model using finite element method that noticeably simplifies the images reconstruction. The calculation examples show that for separate inhomogeneity visualization (geometric localization, size and character definition) it is sufficient to use the no iteration regularization by A. Tikhonov. The iteration regularization should be applied in cases when it is necessary to determine the absolute values of inhomogeneity conductivities with some precision; it requires a large number of iterations. The alternative method (for the last one) is the modification method for matrix inversion. The examples of inhomogeneity (in the center and in the edge of phantom) visualization are shown.

Вступ

Як відомо, розв'язання оберненої задачі імпедансної томографії за використання ітераційних [1–3] процедур стикається зі значними обчислювальними труднощами, зумовленими як великими порядками розв'язуваних систем рівнянь, так і поганою обумовленістю матриці похідних від вузлових напруг (передаточних опорів) по обводу контуру фантома по поверхневих провідностях скінченних елементів. Зменшити порядок матриць похідних, які обертають в ітераційній процедурі, можна використанням зон провідностей [4]. При цьому матриці похідних мають порядки 6–30 (залежно від кількості вузлових напруг 8–32, що вимірюються по обводу контуру). Але і матриці похідних малих порядків є погано обумовленими [5, 6]. Для обертання погано обумовлених матриць використовують методи регуляризації [7].

Постановка задачі

Різноманітні методи регуляризації вводять певну додаткову похибку при розв'язанні задачі реконструкції образу (неітераційні методи) або вимагають значних витрат часу (ітераційні методи). Завданням роботи є розгляд властивостей відомих методів регуляризації при їх застосуванні до запропонованого авторами методу реконструкції томографічного образу на базі методу зон провідностей.

Обертання погано обумовленої матриці з регуляризацією за А.М. Тихоновим

Класичне рівняння, що розв'язується в ітераційній процедурі, для обчислення картини

розподілення поверхневих провідностей (опорів) має вигляд

$$-\left(\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k}\right) \cdot \Delta \bar{\sigma}_k = \Delta \bar{Z}_j \quad (1a)$$

або

$$-\left[\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \sigma_k}\right] \cdot \Delta \bar{\sigma}_k = \Delta \bar{U}_j, \quad (1b)$$

де $\Delta \bar{\sigma}_k$ – стовпець коригуючих значень поверхневих провідностей, які зменшують норму нев'язки [6]; $\Delta \bar{Z}_j$ – різниця між стовпцями вимірених та обчислених значень передаточних опорів; σ_k – поверхнева провідність k -ї зони;

$\left(\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k}\right)$ – квадратна матриця похідних від пере-

даточних опорів по поверхневих провідностях зон; \bar{U}_j – стовпець напруг по обводу контуру, який з точністю до сталого множника збігається з передаточними опорами.

Матриця $\left(\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k}\right)$, або $\left[\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \sigma_k}\right]$, в ітераційній

процедурі є погано обумовленою. Тому пряме розв'язання (1a) або (1b)

$$\Delta \bar{\sigma}_k = -\left(\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k}\right)^{-1} \cdot \Delta \bar{Z}_j, \quad (2a)$$

$$\Delta \bar{\sigma}_k = -\left[\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \sigma_k}\right]^{-1} \cdot \Delta \bar{U}_j, \quad (2b)$$

як правило, не приводить до шуканого результату.

Для розв'язання поставленої задачі слід скористатися таким алгоритмом.

1. Побудувати матрицю $\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T$.

2. Знайти добуток $\bar{\Psi} = \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right] \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T$, при-

чому матриця $\bar{\Psi}$ є симетричною (при дійсній матриці $\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]$).

3. Виділити діагональ матриці $\bar{\Psi}$ і на її основі створити діагональну матрицю \bar{D}_Ψ або як діагональну використати одиничну матрицю \bar{E} .

4. Скласти нове рівняння за рівнянням (1), вибравши $0 < \alpha < 1$,

$$(\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{D}_\Psi) \cdot [\Delta \sigma_k] = - \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T \cdot [\Delta Z_i], \quad (3)$$

яке тотожне (1а) при $\alpha = 1$.

5. Знайти розв'язок рівняння (3):

$$[\Delta \sigma_k] = -(\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{D}_\Psi)^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T \cdot [\Delta Z_i] \quad (4a)$$

або

$$[\Delta \sigma_k] = -(\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{E})^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T \cdot [\Delta Z_i]. \quad (4б)$$

При зменшенні α отримане прирощення провідностей буде наближатися до істинного

(якщо визначник матриць $\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]$ або $\bar{\Psi}$ не то-

тожний нулю). Квадратична форма $\bar{\Psi}$ має кращу збіжність [7], ніж матриця $\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]$. Але, з

урахуванням обмеженої розрядності обчислень,

визначник матриці $\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]$ може виявитися в

межах коректних чисел розрядної сітки ПЕОМ, а його квадрат (визначник матриці $\bar{\Psi}$) – за межами цих чисел (або взагалі за межами розрядної сітки). Тому наведена вище процедура обчислень потребує додаткової корекції в плані як вибору коефіцієнта α , так і врахування зменшення значення визначника при переході до квадратичної форми $\bar{\Psi}$.

Ясно, що вибір “дуже маленького” α не зробить задачі (1)–(4) краще обумовленими. Введення “великих” регулюючих коефіцієнтів α призведе до збільшення відхилення отриманого результату від істинного.

Для забезпечення доброї обумовленості матриці $(\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{D}_\Psi)$ або $(\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{E})$ слід вибрати $\alpha < 1$ “великим” і використовувати ітеративне обернення матриці в (4). При цьому (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{E}) \cdot [\Delta \sigma_k^{(n)}] &= \\ &= - \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T \cdot [\Delta Z_i] + \alpha \cdot [\Delta \sigma_k^{(n-1)}], \end{aligned} \quad (5)$$

де n – номер ітерації процедури обернення.

Для спрощення пояснення алгоритму введемо такі позначення:

$$\bar{D} = \left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T; (\bar{\Psi} + \alpha \cdot \bar{E}) = \bar{B}; \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{Z}_j}{\partial \sigma_k} \right]^T \cdot [\Delta Z_i] = \bar{S}; [\Delta \sigma_k^{(n)}] = \bar{\Delta}^{(n)}.$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^{(1)} &= -\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{S} - \alpha \cdot \bar{\Delta}^{(0)}); \\ \bar{\Delta}^{(2)} &= -\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{S} - \alpha \cdot \bar{\Delta}^{(1)}) = \\ &= -((\bar{B}^{-1}) + \alpha \cdot (\bar{B}^{-1})^2) \cdot \bar{S} + \alpha^2 \cdot (\bar{B}^{-1})^2 \cdot \bar{\Delta}^{(0)}; \\ \bar{\Delta}^{(3)} &= -\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{S} - \alpha \cdot \bar{\Delta}^{(2)}) = -((\bar{B}^{-1}) + \alpha \cdot (\bar{B}^{-1})^2 + \\ &+ \alpha^2 \cdot (\bar{B}^{-1})^2 + \alpha^3 \cdot (\bar{B}^{-1})^3) \cdot \bar{S} + \alpha^3 \cdot (\bar{B}^{-1})^3 \cdot \bar{\Delta}^{(0)}; \\ \bar{\Delta}^{(n)} &= -\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{S} - \alpha \cdot \bar{\Delta}^{(n-1)}) = \\ &= -((\bar{B}^{-1}) + \alpha \cdot (\bar{B}^{-1})^2 + \alpha^2 \cdot (\bar{B}^{-1})^2 + \dots + \\ &+ \alpha^n \cdot (\bar{B}^{-1})^n) \cdot \bar{S} + \alpha^n \cdot (\bar{B}^{-1})^n \cdot \bar{\Delta}^{(0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Значення $\bar{\Delta}^{(0)}$ можна зобразити у вигляді стовпця нулів або (у випадку уточнення розв'язку (4)) у вигляді $[\Delta\sigma_k]$ в (4). Як видно з (7), значення $\bar{\Delta}^{(n)}$ наближається до істинного при $n \rightarrow \infty$, якщо матрична геометрична прогресія є спадною. Останнє залежить також від значення α .

Особливості обчислювальних процедур, пов'язаних із регуляризацією, розглянемо на прикладах, вибраних із міркувань наочності та простоти перевірки результатів.

Приклад 1. Нехай погано обумовлена матриця похідних має вигляд

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1,00002 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

а її визначник $\Delta_A = 0,00002$. Розрядність обчислень дорівнює 10. Тоді обернена матриця похідних має вигляд

$$\bar{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 50001 & 50000 \\ 50000 & 50000 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Нехай тепер нев'язка передаточних опорів – $\Delta\bar{Z} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix}$. Тоді прирошення поверхневих провідностей зон є таким:

$$\begin{aligned} -\bar{A}^{-1} \cdot \Delta\bar{Z} &= -\begin{bmatrix} 50001 & 50000 \\ 50000 & 50000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -15000,9 \\ -15000,0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Квадратична форма має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = \bar{A}^T \cdot \bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1,00002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1,00002 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2,00002 \\ -2,00002 & 2,00004 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а її визначник $\Delta_\Psi = 0,0000000004$.

Причому остання значуща цифра визначника виходить за межі розрядної сітки, тобто $\Delta_\Psi = 0$.

Таким чином, матриця $\bar{\Psi}$ є не погано обумовленою, а виродженою. Тому будь-яка її регуляризація не має сенсу, оскільки рівняння (3) при $\alpha = 0$ не має жодного розв'язку.

Приклад 2. Розглянемо рівняння (8) як рівняння для регуляризації з коефіцієнтом регуляризації $\alpha = 0,001$. У цьому випадку обернена матриця похідних (8) має вигляд (9). Прирошення поверхневих провідностей обчислені точно:

$$\Delta\bar{\sigma} = -\begin{bmatrix} 50001 & 50000 \\ 50000 & 50000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15000,9 \\ -15000,0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для матриці (8) виконаємо регуляризацію відповідно до виразу $\bar{\Phi}_A^{(\alpha)} = (\bar{A} + \alpha \cdot \bar{E}) =$

$$= \begin{bmatrix} 1,001 & -1 \\ -1 & 1,00102 \end{bmatrix}, \text{ звідки}$$

$$(\bar{\Phi}_A^{(\alpha)})^{-1} = \begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix}.$$

Для цієї регуляризованої матриці прирошення провідностей становлять

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}^{(1)} = \Delta^{(1)} &= -(\bar{\Phi}_A^{(\alpha)})^{-1} \cdot \Delta\bar{Z} = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -148,8941228 \\ -148,1430169 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

тобто значно відрізняються від істинних (10). Це зумовлено внесенням "великої" регуляризуючої поправки при $\alpha = 0,001$. Але це забезпечує кращу обумовленість матриці $\bar{\Phi}_A^{(\alpha)}$. Тому слід використовувати ітераційну процедуру (5)–(7) обернення матриці \bar{A} , для якої отримання точного розв'язку вигляду (10) не залежить від значення α :

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} &= -\bar{\Phi}_A^{-1} \cdot (\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(1)}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,048894123 \\ -0,451856983 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -295,9431436 \\ -295,1901926 \end{bmatrix}; \\ \Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix} - 0,001 \cdot \begin{bmatrix} -295,9431436 \\ -295,1901926 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,195943144 \\ -0,304809807 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)} &= -\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} \cdot (\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(2)}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,195943144 \\ -0,304809807 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -441,5360556 \\ -440,7816484 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Значення $\Delta^{(2)}$ значно відрізняється від істинного. Внаслідок великої кількості кроків ітераційної процедури наведемо лише деякі вибіркові ітерації:

$$\begin{aligned}\Delta^{(10)} &= -\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} \cdot (\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(9)}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,320732384 \\ 0,819968185 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1555,188824 \\ -1553,603312 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(20)} &= -\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} \cdot (\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(19)}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,727810440 \\ 2,227031680 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2948,335240 \\ -2947,555765 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(99)} &= \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,6 \end{bmatrix} - 0,001 \cdot \begin{bmatrix} -15000,9 \\ -15000,0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 15,90090000 \\ 14,40000000 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(100)} &= -\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} \cdot (\Delta\bar{Z} - 0,001 \cdot \Delta^{(99)}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15,90090000 \\ 14,40000000 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -15000,90000 \\ -15000,00000 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Таким чином, внаслідок ітераційної процедури (дуже довгої) отримано істинні значення прирощень поверхневих провідностей, хоча результати без ітераційного обернення регуляризованої матриці були досить далекими від істинних. Аналогічні результати можна отримати і при $\alpha = 0,5$, але за значно більшої кількості

ітерацій. Кількість ітерацій можна значно зменшити, якщо зменшити α . Але оскільки вибір α проводять “наосліп”, то можна його вибрати і таким, що задача обернення залишиться погано обумовленою.

Для підвищення стійкості розв’язку й отримання достатньо доброго наближення до істинного результату (що одночасно дасть змогу скоротити кількість ітерацій обернення матриці) можна вибрати $\alpha = 1$ та скористатися методом модифікацій, вирошуючи в діагоналі оберненої матриці -1 .

Приклад 3. Нехай, як і раніше, для матриці (8) $\alpha = 0,001$. Тоді відповідно до методу модифікацій [8–10] слід вирошувати два діагональні значення $\alpha = -0,001$ для зведення матриці $\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1}$ до $\bar{\bar{A}}^{-1}$. За матрицею

$$\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} = \begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix}$$

знайдемо

$$\xi_{11} = 495,3043513;$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{Z0}^T = [495,3043513 \quad 494,7996556];$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{0Z} = [495,3043513 \quad 494,7996556];$$

$$\bar{\bar{\delta}} = \bar{\bar{\xi}}_{Z0} \cdot \bar{\bar{\xi}}_{0Z} = \begin{bmatrix} 486,0877672 & 485,5924628 \\ 485,592462 & 485,0976631 \end{bmatrix};$$

$$-k_1 = -1/((1/-\alpha) + \xi_{11}) = 0,001981392;$$

$$(\bar{\bar{\Phi}}_A^{-1})^{(1)} = -k_1 \cdot \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Phi}}_A^{-1} =$$

$$+ \begin{bmatrix} 495,3043513 & 494,7996556 \\ 494,7996556 & 495,2944553 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 486,0877672 & 485,5924628 \\ 485,592462 & 485,0976631 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 981,3921185 & 980,3921184 \\ 980,3921184 & 980,3921184 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно,

$$\xi_{22} = 980,3921184;$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{Z0}^T = \bar{\bar{\xi}}_{0Z} = [980,3921184 \quad 980,3921184];$$

$$-k_2 = -1/((1/-\alpha) + \xi_{22}) = 0,050999900;$$

$$(\bar{\Phi}_A^{-1})^{(2)} = \begin{bmatrix} 50000,50788 & 49505,10034 \\ 49505,10039 & 49514,80234 \end{bmatrix}.$$

Прирошення провідності становить

$$\Delta \bar{\sigma} = -(\bar{\Phi}_A^{-1})^{(2)} \cdot \Delta \bar{Z} =$$

$$= [-15297,39689 \quad -14845,70895]^T,$$

що значно ближче до істинного значення $\begin{bmatrix} -15000,9 \\ -15000,0 \end{bmatrix}$, ніж $\Delta \bar{\sigma}^{(1)} = \Delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -148,8941228 \\ -148,1430169 \end{bmatrix}$.

Знайдений методом модифікацій результат можна вважати задовільним і таким, що не потребує подальших уточнень.

Для тієї самої матриці (8) візьмо тепер $\alpha = 1$. Тоді матриця $\bar{\Phi}_A^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2,00002 \end{bmatrix}$, а її визначник $\Delta_A = 3,00004$. Відповідно, обернена матриця має вигляд

$$\bar{\Phi}_A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,666664444 & 0,333328889 \\ 0,333328889 & 0,666657778 \end{bmatrix}.$$

Для вирощування в діагоналі -1 обчислимо

$$\xi_{11} = 0,666664444;$$

$$\bar{\xi}_{Z0}^T = \bar{\xi}_{0Z} = [0,666664444 \quad 0,333328889];$$

$$-k_1 = 2,999979996;$$

$$\bar{\delta} = -k_1 \times \bar{\xi}_{Z0} \times \bar{\xi}_{0Z} = \begin{bmatrix} 1,333315552 & 0,666651110 \\ 0,666651110 & 0,333322222 \end{bmatrix};$$

$$(\bar{\Phi}_A^{-1})^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,9999799996 & 0,999979999 \\ 0,999979999 & 0,999980000 \end{bmatrix}.$$

Для вирощування другого діагонального елемента маємо

$$\xi_{22} = 0,999980000;$$

$$\bar{\xi}_{Z0}^T = \bar{\xi}_{0Z} = [0,999979999 \quad 0,999980000];$$

$$-k_2 = -1/((1/\alpha) + \xi_{22}) = 50000;$$

$$(\bar{\Phi}_A^{-1})^{(2)} = \begin{bmatrix} 49999,99990 & 49998,99995 \\ 49998,99995 & 49999,00000 \end{bmatrix}.$$

Прирошення провідностей становить

$$\Delta \bar{\sigma} = -(\bar{\Phi}_A^{-1})^{(2)} \cdot \Delta \bar{Z} =$$

$$= [-15000,59994 \quad -14999,69996]^T,$$

що достатньо близько до істинного значення, до того ж значно ближче, ніж при $\alpha = 0,001$.

Обчислення розподілу поверхневих провідностей із використанням зонного фантома

Як модель (фантом) при розв'язанні прямої та оберненої задач імпедансної томографії будемо використовувати круг, розбитий на скінченні елементи квадратної форми (рис. 1, а).

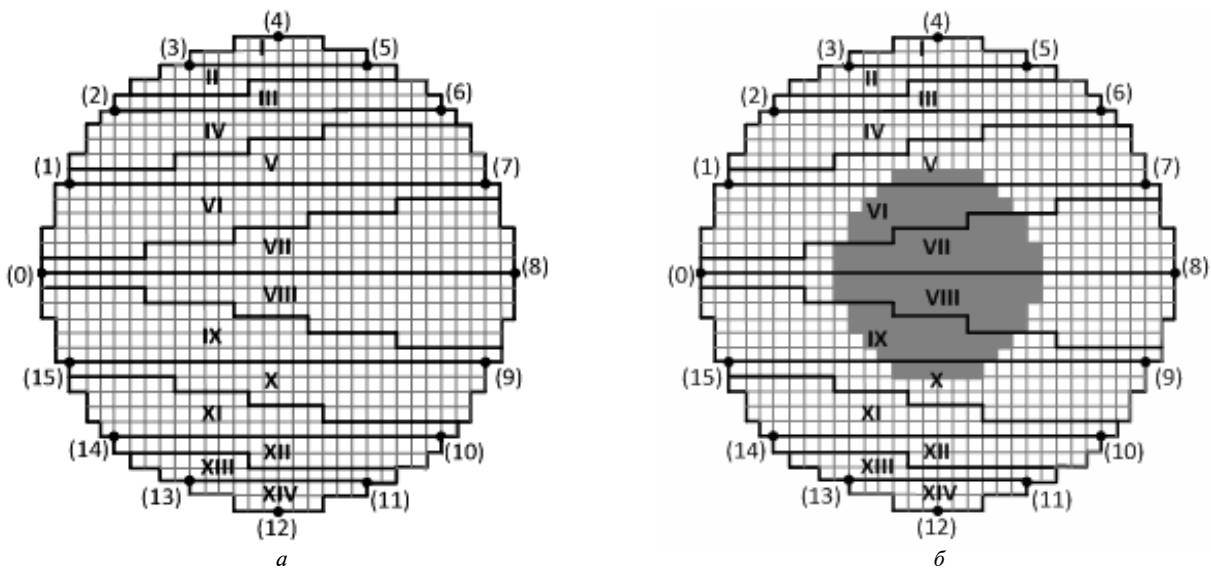


Рис. 1. Фантом для розв'язання задач імпедансної томографії: а – фантом, розбитий на квадратні скінченні елементи і 14 зон провідностей; б – фантом з неоднорідністю по центру

Відповідно до методу зон провідності [4] фантом на рис. 1 розбито на 14 зон із постійною поверхневою провідністю кожної зони. Вихідне значення (для ітераційної процедури) провідності кожної зони становить $\sigma = 1$. Фантом досліджуваного об'єкта (рис. 1, б) містить неоднорідну область із провідністю, відмінною від $\sigma = 1$. У розглядуваному випадку це $\sigma = 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$.

У наведених прикладах використовується регуляризація (3), (4) для реконструкції картини розподілення поверхневих провідностей (опорів) за “великою” неоднорідністю у вигляді круга, який міститься в центрі фантома та біля його нижнього краю.

При використанні зонного фантома результати реконструкції (велика неоднорідність у центрі фантома) мають вигляд, як на рис. 2–4.

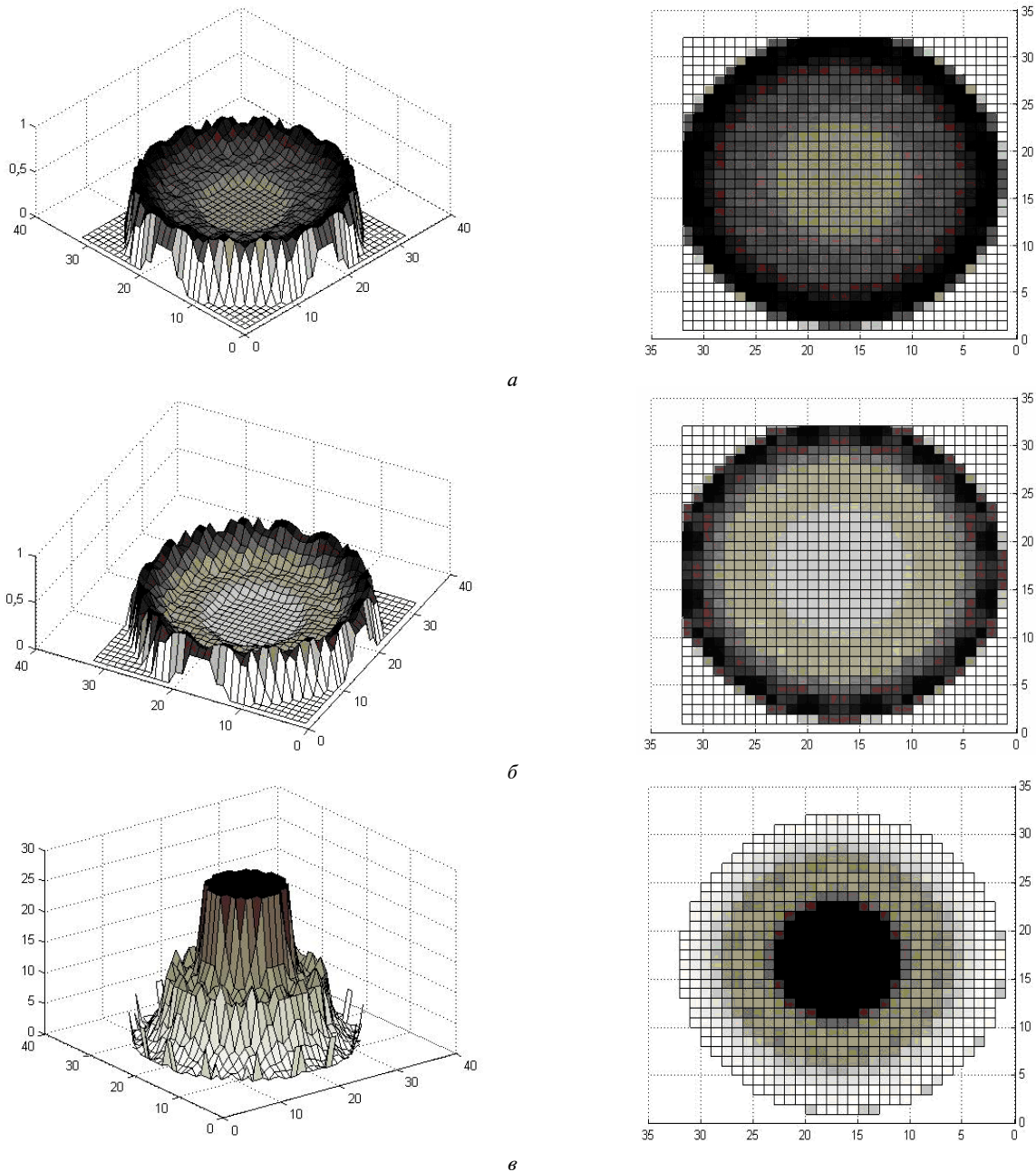


Рис. 2. Результати реконструкції образу з великою неоднорідністю по центру фантома за використання зонного фантома: а – розподілення поверхневої провідності для одної ітерації; б – розподілення поверхневої провідності для двох ітерацій; в – розподілення поверхневого опору для трьох ітерацій

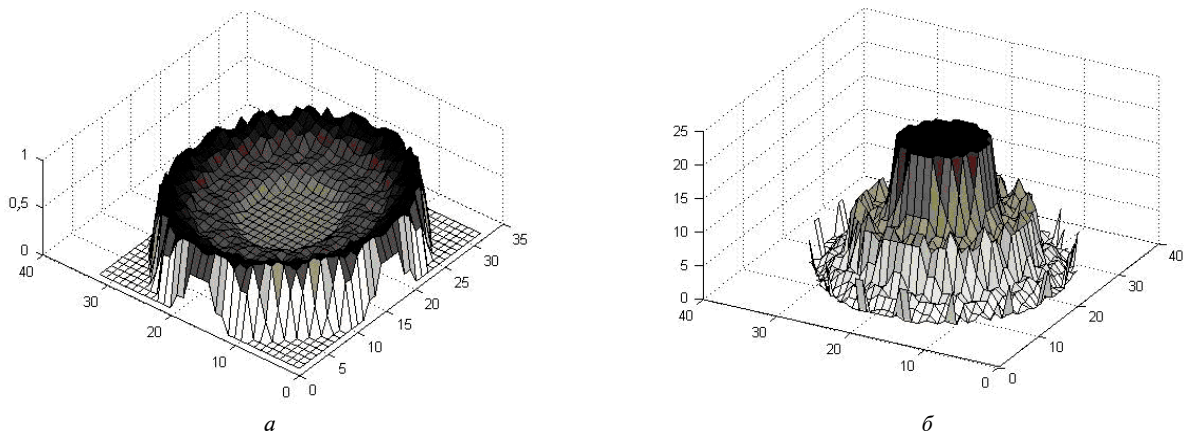


Рис. 3. Результати реконструкції образу з великою неоднорідністю по центру фантома при провідності нерівномірності $\sigma = 0,1$: *a* – реконструйована картина розподілення поверхневих провідностей; *б* – реконструйована картина розподілення поверхневих опорів

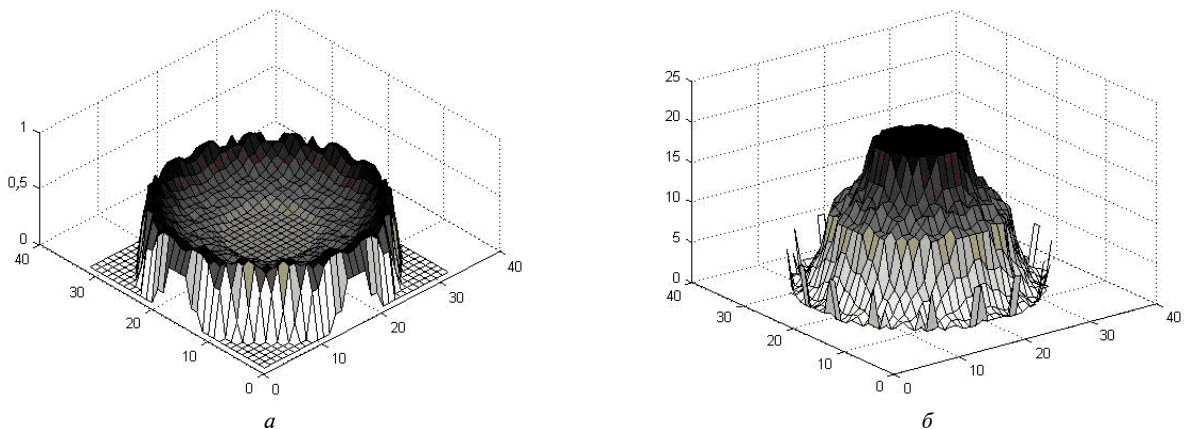


Рис. 4. Результати реконструкції образу з великою неоднорідністю по центру фантома при провідності нерівномірності $\sigma = 0,9$: *a* – реконструйована картина розподілення поверхневих провідностей; *б* – реконструйована картина розподілення поверхневих опорів

Так, на рис. 2 зображено результати реконструкції внутрішнього розподілення поверхневої провідності (рис. 2, *a, б* для одної та двох ітерацій) та опір (рис. 2, *в* для трьох ітерацій) при неоднорідності у вигляді круга у центрі фантома $\sigma = 0,01$ (фон у всіх прикладах утворює поверхнева провідність $\sigma = 1$). Світлішим є круг неоднорідності. На рис. 3 наведено реконструйовану картину розподілення поверхневих провідностей (рис. 3, *a*) та опорів (рис. 3, *б*) при провідності нерівномірності $\sigma = 0,1$. На рис. 4, *a, б* наведено відповідно розподілення поверхневих провідностей та опорів при неоднорідності $\sigma = 0,9$. Зі збільшенням кількості ітерацій картини розподілення провідностей “розмиваються”. Для подальшого уточнення абсолютних значень поверхневих провідностей на кожній ітерації слід використовувати алгоритм (5)–(7).

За невеликої кількості ітерацій реконструйований образ дає інформацію про наявність неоднорідності, її геометричні розміри та місце розташування на фантомі, що еквівалентно результатам, отримуваним при інших видах томографічних досліджень.

У випадку наявності великої неоднорідності (того ж самого розміру, що й у попередніх випадках) на краю фантома при провідності неоднорідної ділянки $\sigma = 10$ картина розподілення спотворена (рис. 5, *a*), хоча розміщення та наявність неоднорідності визначено задовільно. Спотворення, мабуть, виникли внаслідок певної анізотропії поля образу, яке використовувалася для обчислень фантома, складеного з обмеженої кількості квадратних скінченних елементів (840), а також за рахунок форми самих зон (рис. 1, *a*). Зі збільшенням кількості скінченних елементів (за незмінної кількості

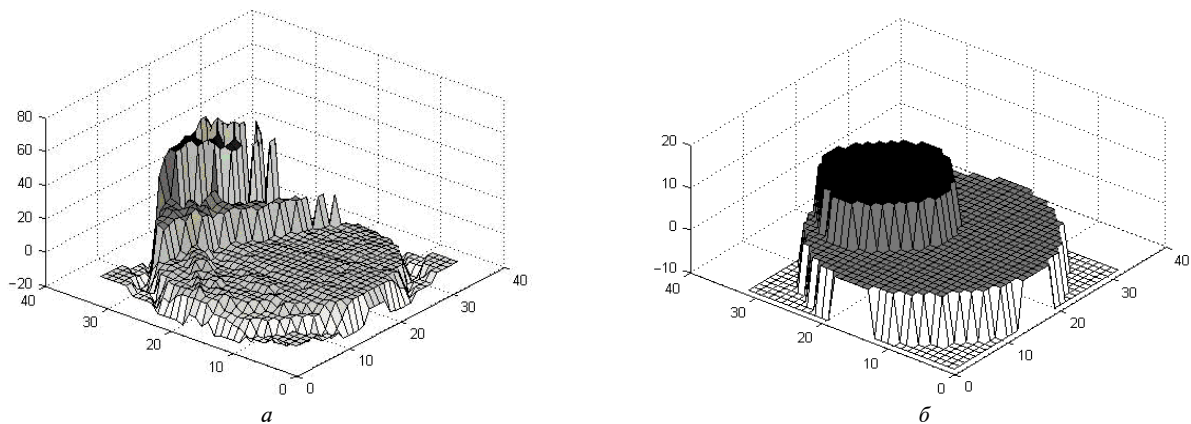


Рис. 5. Результати реконструкції образу з великою неоднорідністю на краю фантома при провідності нерівномірності $\sigma = 10$: *a* – реконструйоване зображення; *б* – вихідне зображення

зон) анізотропія буде зменшуватися. Збільшення кількості скінченних елементів у 4 рази при об'єднанні зон призведе до збільшення кількості вузлів (об'єднаних методом модифікацій [8, 9]) і кількості операцій множення при обчисленні похідних від вузлових напруг по поверхневих провідностях зон удвічі.

Висновки

Розв'язання оберненої задачі імпедансної томографії з використанням методу зон провідності значно спрощується за рахунок радикального зменшення кількості трудомістких операцій внаслідок малих порядків матриць похідних.

Використання регуляризації за А.М. Тихоновим робить матриці похідних добре обумовленими, хоча при виборі коефіцієнта α “наосліп” можливі значні відхилення отриманих результатів від істинних.

Для уникнення відхилення результатів від істинних доцільно використовувати “великі” коефіцієнти α з подальшою ітераційною процедурою обернення матриць похідних. Але це потребує дуже великої кількості ітерацій і призводить до великих витрат часу.

Альтернативним методом регуляризації є використання регуляризації з великими значеннями α та подальшим вирощуванням істинного розв'язку задачі обернення матриці методом модифікацій. Такий прийом слід вважати подальшим розвитком методів регуляризації.

Наведені приклади показали, що навіть за малої кількості ітерацій обернену задачу можна розв'язувати на предмет наявності, характеру (провідність неоднорідності більша або менша провідності фону) розмірів та місця розташування неоднорідності.

1. *V.H. Brown and D.C. Barber*, “Electrical Impedance Tomography”, *Clin. Phys. Physiol. Meas., Suppl. A*, vol.13, p. 207, 1992.
2. *Электроимпедансная томография / Я.С. Пеккер, К.С. Бразовский, В.Ю. Усов и др.* – Томск: ООО “Изд-во науч.-техн. лит-ры”, 2004. – 190 с.
3. *T.J. Yorkey and J.G. Webster*, “A comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms”, *Clin. Phys. Physiol. Meas., Suppl. A*, vol. 8, p. 55, 1987.
4. *Сушко І.А., Рыбин А.И.* Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом “зон” проводимости // *Вісник НТУУ “КПІ” Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.* – 2012. – № 49. – С. 166–177.
5. *Сушко І.О., Гайдаєнко Є.В., Якубенко О.А.* Потенційна чутливість імпедансної томографії // *Там же.* – 2012. – № 50. – С. 92–104.
6. *Sushko I., Rybin O.* Features of solving the Electrical Impedance Tomography inverse problem by zones conductivities method // *Там же.* – 2012. – № 51. – С.106–114.
7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
8. *Рыбин А.И.* Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных // *Изв. вузов. Радиоэлектроника.* – 1978. – № 6. – С. 53–59.
9. *Рыбин А.И.* Численно-символьный анализ электрических цепей обобщенным методом модификации //

- Праці Ін-ту електродинаміки НАНУ. – 2002. – № 1. – С. 28–30.
10. *Рыбин А.И.* Оценка точности решения задачи анализа линейных цепей методом модификации // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2001. – № 5. – С. 48–53.
 11. *Рибіна І.О.* Метод променів провідностей та моделювання фантома в імпедансній томографії // Вісник ЖДТУ. – 2010. – № 2 (53). – С. 160–161.
 12. *Оценка уровня кавитации методами импедансной томографии / И.А. Сушко, Е.В. Гайдаенко, А.В. Мовчанюк, А.И. Рыбин* // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2012. – № 48. – С. 168–178.
 13. *Рибіна І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б.* Розв’язання зворотної задачі імпедансної томографії методами зон провідностей та зворотної проєкції // Там же. – 2011. – № 45. – С. 33–45.
 14. *Сушко І.О.* Алгоритм розв’язання прямої задачі імпедансної томографії методом модифікацій // Там же. – 2011. – № 47. – С. 165–175.
 15. *Рибіна І.О., Гайдаєнко Є.В.* Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії // Там же. – 2010. – № 41. – С. 19–24.

Рекомендована Радою
радіотехнічного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
1 липня 2013 року