УДК 519.95

О.В. Овчаренко

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ ТЕОРІЇ ДРОБОВОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ІЗ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

The aim of paper is to study the properties of the integral operators with generalized hypergeometric functions in the kernels, in particular, to study the conditions of existence and their boundedness, the study of compositional relations with fractional integrals. In the study of common methods used by the theory of special functions, the theory of integral transforms and operators of fractional integro-differentiation. We introduce integral operators with (τ,β)-generalized hypergeometric functions in the kernels. For these operators the functional relationship and the conditions of existence and boundedness in Lebesgue space are obtained. Also obtained compositional relations for new introduced integral operators with left-sided fractional Riemann–Liouville integral. Applied apparatus of the theory of fractional calculus to generalized hypergeometric functions, namely: obtained functional relations that showing action of left-sided Riemann–Liouville fractional integral and derivative on a (τ,β)-generalized (according to Wright) hypergeometric Gauss function and (τ,β)-generalized confluent hypergeometric function. The results can be used for further development of the theory of special functions such of their widespread use.

Вступ

Значний інтерес до теорії гіпергеометричних функцій пов'язаний із потребами застосування диференціальних й інтегральних рівнянь при розв'язанні задач практики та розвитком обчислювальної математики. Зокрема, за останні роки посилився інтерес до узагальнення гіпергеометричних функцій за Райтом, які мають різноманітні теоретичні і практичні застосування.

З теорією спеціальних функцій пов'язана значна кількість різних математичних задач. Так, спеціальні функції широко використовуються при побудові різноманітних інтегральних перетворень (наприклад, операторів Сайго, Ердеї, Кобера, Саксени тощо [1, 2]), теорія яких (з ядрами у вигляді спеціальних функцій) розвивалася в працях А.О. Кілбаса, Н. Князюк, С. Кали, А. Масаі, М. Сайго, Р. Саксени та інших і які дають можливість отримати розв'язки в аналітичному вигляді багатьох важливих класів диференціальних й інтегральних рівнянь [3–6].

Аналіз літератури з теорії узагальнень гіпергеометричних функцій свідчить про важливість і актуальність теорії узагальнень гіпергеометричних функцій та їх застосувань, оскільки запровадження різноманітних узагальнень уже відомих спеціальних функцій, їх всебічне вивчення і дослідження дають змогу істотно розширити клас задач, розв'язки яких можна побудувати в замкненому вигляді [7]. Таким чином, для розширення кола математичних задач, що розв'язуються за допомогою методів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь і теорії інтегральних перетворень, доцільним і актуальним є запровадження нових узагальнень функцій гіпергеометричного типу, узагальнених інтегральних операторів з такими функціями в ядрі тощо.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження властивостей інтегральних операторів з узагальненими гіпергеометричними функціями в ядрі, зокрема вивчення умов існування та їх обмеженості в просторі Лебега, дослідження композиційних співвідношень з лівостороннім дробовим інтегралом Рімана–Ліувілля.

Інтегральні оператори з узагальненими гіпергеометричними функціями в ядрі

Розглянемо інтегральне зображення (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса [8]:

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1^{\tau,\beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times $$

$$ \times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\, {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,1);(c,\tau);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| zt^{\tau}\right] dt, \qquad (1) $$

де параметри задовольняють такі умови:

$$ \{a,b,c\} \in C,\ \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, $$

$$ \{\tau,\beta\} \subset R,\ \tau > 0,\ \beta > 0,\ \beta - \tau > 0. $$

Якщо покласти $\beta = \tau$ у формулі (1), то отримаємо τ-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса [9]:

$$_2F_1^{\tau}(a,b;c;z)=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-x)^{c-b-1}\,x^{b-1}\,(1-zx^{\tau})^{-a}\,dx\,.$$

При $\beta=\tau=1$ матимемо класичну гіпергеометричну функцію Гаусса $_2F_1(a,b;c;z)$ [10].

Також подамо зображення (τ,β)-узагальненої конфлюентної (виродженої) гіпергеометричної функції [11]:

$$_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)={}_1F_1^{\tau,\beta}(z)\equiv\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\times$$

$$\times\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau);\\(c;\beta);\end{matrix}\middle|\,zt^{\tau}\right]dt\,. \qquad (2)$$

За умов існування функцій (1) і (2) запровадимо інтегральні оператори з гіпергеометричними функціями в ядрі у вигляді

$$({}_{\tau,\beta}F_{\alpha+;\omega}^{a,b,c}\varphi)(x)=\int_\alpha^x (t-x)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-x)^{\beta})\varphi(t)\,dt\,,\ x>\alpha, \qquad (3)$$

$$({}_{\tau,\beta}\Phi_{\alpha+;\omega}^{a,c}\varphi)(x)=\int_\alpha^x (t-x)^{c-1}\times$$

$$_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;\omega(t-x)^{\beta})\,\varphi(t)dt\,,\ x>\alpha\,. \qquad (4)$$

Подамо означення лівостороннього та правостороннього дробових інтегральних операторів Рімана–Ліувілля [12]:

$$(I_{\alpha+}^{\mu}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_\alpha^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}}dt\,,\ x>\alpha\,,$$

$$\mu\in C,\ \mathrm{Re}(\mu)>0\,, \qquad (5)$$

$$(I_{\gamma-}^{\mu}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^{\gamma}\frac{f(t)}{(t-x)^{1-\mu}}dt\,,\ x<\gamma\,. \qquad (6)$$

Лівосторонній та правосторонній дробові диференціальні оператори Рімана–Ліувілля, відповідно, мають вигляд [12]:

$$(D_{\alpha+}^{\mu}a)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I_{\alpha+}^{n-\mu}f)(x)\,, \qquad (7)$$

$$(D_{\alpha-}^{\mu}a)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^n(I_{\alpha-}^{n-\mu}f)(x)\,. \qquad (8)$$

Отримаємо функціональні співвідношення для запроваджених операторів (3) і (4).

Теорема 1. Нехай $\alpha\in C$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\{a,b,c,\omega\}\in C$, $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\beta>0$, $\beta-\tau>0$. Тоді при $x>\alpha$ та за умови $|\omega(x-\alpha)^{\beta}|<1$ справедлива формула

$$({}_{\tau,\beta}F_{\alpha+;\omega}^{a,b,c}(t-\alpha)^{\mu-1})(x)=\frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\,\Gamma(c)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(c+\mu)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;\omega(x-\alpha)^{\beta}). \qquad (9)$$

Д о в е д е н н я. За означенням (3) маємо

$$({}_{\tau,\beta}F_{\alpha+;\omega}^{a,b,c}(t-\alpha)^{\mu-1})(x)=\int_\alpha^x (t-x)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-x)^{\beta})(t-\alpha)^{\mu-1}dt=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}\,\omega^n\int_\alpha^x (t-\alpha)^{\mu-1}(x-t)^{\beta n+c-1}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}\,\omega^n\times$$

$$(x-\alpha)^{c+\beta n+\mu-1}\mathrm{B}(c+\beta n,\mu)=(x-\alpha)^{c+\mu-1}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(c+\mu)}\,\frac{\Gamma(c+\mu)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\mu+\beta n)n!}\times$$

$$\times\frac{(\omega(x-\alpha)^{\beta})^n}{n!}=({}_{\tau,\beta}F_{\alpha+;\omega}^{a,b,c}(t-\alpha)^{\mu-1})(x)=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\,\Gamma(c)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;\omega(x-\alpha)^{\beta})\,.$$

Отже, теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $\alpha\in C$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\{a,c,\omega\}\in\in C$, $\mathrm{Re}\,c>0$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\beta>0$, $\beta-\tau>0$, $0<\mu<1$; $0\le\nu\le1$, то виконується рівність

$$({}_{\tau,\beta}\Phi_{\alpha+;\omega}^{a,c}(t-\alpha)^{\mu-1})(x)=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\,\Gamma(c)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+\mu;\omega(x-\alpha)^{\beta}). \qquad (10)$$

Доведення формули (10) аналогічне доведенню теореми 1.

Теорема 3. Нехай $\alpha\in C$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\{a,b,c,\omega\}\in\in C$, $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\beta>0$, $\beta-\tau>>0$. Тоді інтегральні оператори $({}_{\tau,\beta}F_{\alpha+;\omega}^{a,b,c}\varphi)(x)$

та $({}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}\varphi)(x)$ обмежені в просторі Лебега $L(\alpha,\gamma)=\left\{\varphi:\|\varphi\|_1\equiv\int_\alpha^\gamma|\varphi(t)|\,dt<\infty\right\}$ і мають місце співвідношення

$$\|({}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}\varphi)\|_1\le A_1\|\varphi\|_1, \qquad (11)$$

$$\|({}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}\varphi)\|_1\le A_2\|\varphi\|_1, \qquad (12)$$

де $A_1=(\gamma-\alpha)^{\mathrm{Re}\,c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|(a)_n||(b)_{n\tau}|}{|(c)_{\beta n}||\beta n+\mathrm{Re}\,c|}\frac{|\omega(\gamma-\alpha)^\beta|^n}{n!}$,

$$A_2=(\gamma-\alpha)^{\mathrm{Re}\,c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|(a)_n|}{|(c)_{\beta n}||\beta n+\mathrm{Re}\,c|}\frac{|\omega(\gamma-\alpha)^\beta|^n}{n!}.$$

Доведення теореми випливає з означення простору $L(\alpha,\gamma)$ та формул (3), (4).

Доведемо композиційні співвідношення для інтегральних операторів (3), (4) з лівостороннім дробовим інтегралом Рімана–Ліувілля (5).

Теорема 4. Нехай $\alpha\in C$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\{a,b,c,\omega\}\in\in C$, $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0,\beta>0$, $\beta-\tau>0$. Тоді мають місце такі композиційні співвідношення:

$$I^{\mu}_{\alpha+}\,{}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}={}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}\,I^{\mu}_{\alpha+}, \qquad (13)$$

$$I^{\mu}_{\alpha+}\,{}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}={}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}\,I^{\mu}_{\alpha+}. \qquad (14)$$

Доведення. Спочатку доведемо ліву частину рівності (13). З формул (3) і (5) маємо

$$I^{\mu}_{\alpha+}({}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_\alpha^x\frac{({}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}f)}{(x-t)^{1-\mu}}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_\alpha^x(x-t)^{\mu-1}\times$$

$$\times\left(\int_\alpha^t(t-u)^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-u)^\beta)f(u)\right)dt=$$

$$=\int_\alpha^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_u^x(x-t)^{\mu-1}(t-u)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-u)^\beta)\;dtf(u)du.$$

Виконаємо заміну змінних $(t-u)=\rho$:

$$\int_\alpha^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_u^x(x-t)^{\mu-1}(t-u)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-u)^\beta)dtf(u)du=$$

$$=\int_\alpha^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_u^x(x-u-\rho)^{\mu-1}(\rho)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(\rho)^\beta)\;d\rho f(u)du=$$

$$=\int_\alpha^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{x-u}\frac{\rho^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega\rho^\beta)}{((x-u)-\rho)^{1-\mu}}d\rho f(u)du.$$

Тепер використаємо означення лівостороннього дробового інтегрального оператора Рімана–Ліувілля (5):

$$\int_\alpha^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{x-u}\frac{\rho^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega\rho^\beta)}{((x-u)-\rho)^{1-\mu}}d\rho f(u)du=$$

$$=\int_\alpha^x I^{\mu}_{0+}((x-u)^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-u)^\beta))f(u)\,du=$$

$$=\int_\alpha^x\frac{((x-u)-0)^{\mu+c-1}}{\Gamma^{-1}(c)\,\Gamma(c+\mu)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;\omega((x-u)-0)^\beta)f(u)du=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)}=\int_\alpha^x(x-u)^{\mu+c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;\omega(x-u)^\beta)f(u)\,du=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}f(x).$$

Для доведення правої частини рівності (13) використаємо означення оператора ${}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}$ (3):

$$({}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}[I^{\mu}_{\alpha+}f])(x)=\int_\alpha^x(t-x)^{c-1}\times$$

$$\times\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-x)^\beta)\;(I^{\mu}_{\alpha+}f)(t)dt=$$

$$=\int_\alpha^x(x-t)^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-t)^\beta)\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_\alpha^t\frac{f(u)}{(t-u)^{1-\mu}}du\right)dt=\int_{u=\alpha}^x\frac{1}{\Gamma(\mu)}\times$$

$$\times \int_{t=u}^{x} (x-t)^{c-1}(t-u)^{\mu-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-t)^{\beta})dt f(u)du.$$

Після заміни $(x-u)=\rho$ отримаємо

$$\int_{u=\alpha}^{x} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t=u}^{x} (x-t)^{c-1}(t-u)^{\mu-1} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-t)^{\beta})dt f(u)du =$$

$$= \int_{u=\alpha}^{x} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\lambda=x-u}^{0} (\rho)^{c-1}(x-\rho-u)^{\mu-1} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(\rho)^{\beta})(-d\rho) f(u)du =$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{0}^{x-u} (x-u-\rho)^{\mu-1}(\rho)^{c-1} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(\rho)^{\beta})d\rho f(u)du.$$

Отримана рівність повторює доведення для правої частини формули (13). Отже, співвідношення (13) доведено. Аналогічним чином доводиться формула (14).

Дія дробових операторів Рімана–Ліувіля на (τ,β)-узагальнені гіпергеометричні функції

Доведемо низку лем, що демонструють дію дробових операторів Рімана–Ліувіля на функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$.

Лема 1. Нехай $\alpha \in R_+ = [0;+\infty)$, $\{a,b,c,\omega,\mu\} \in \in C$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\beta - \tau > 0$. Тоді для $x > \alpha$ за умови $|\omega(x-\alpha)^{\beta}| < 1$ має місце формула

$$I_{\alpha+}^{\mu}[(x-\alpha)^{c-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})] =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;(x-\alpha)^{\beta}). \quad (15)$$

Доведення. Для доведення леми використаємо формули (1), (5). Запишемо ліву частину рівності (15):

$$I_{\alpha+}^{\mu}[(x-\alpha)^{c-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\alpha}^{x} \frac{(t-\alpha)^{c-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(t-\alpha)^{\beta})}{(x-t)^{1-\mu}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \times$$

$$\times \omega^{n} \left(\int_{\alpha}^{x} \frac{(t-\alpha)^{c-1}}{(x-t)^{1-\mu}} (t-\alpha)^{\beta n} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \times$$

$$\times \omega^{n} \left(\int_{\alpha}^{x} \frac{(t-\alpha)^{c+\beta n-1}}{(x-t)^{1-\mu}} dt \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \omega^{n} I_{\alpha+}^{\mu}[(x-\alpha)^{c+\beta n-1}].$$

Для перетворень отриманого виразу використаємо формулу [12]

$$I_{\alpha+}^{\mu}(x-\alpha)^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+\lambda)}(x-\alpha)^{\mu+\lambda-1}.$$

Отже, маємо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \omega^{n} I_{\alpha+}^{\mu}[(x-\alpha)^{c+\beta n-1}] =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \omega^{n} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(c+\beta n)}{\Gamma(c+\mu+\beta n)} (x-\alpha)^{\mu+c+\beta n-1} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)} \frac{\Gamma(c+\mu)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\mu+\beta n)n!} \frac{(\omega(x-\alpha)^{\beta})^{n}}{n!} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\mu;(x-\alpha)^{\beta}),$$

що доводить рівність (15).

Лема 2. Нехай $\alpha \in R_+ = [0;+\infty)$, $\{a,b,c,\omega,\mu\} \in \in C$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\beta - \tau > 0$. Тоді для $x > \alpha$ за умови $|\omega(x-\alpha)^{\beta}| < 1$ має місце формула:

$$D_{\alpha+}^{\mu}[(x-\alpha)^{c-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})] =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta}). \quad (16)$$

Доведення. Для доведення леми використаємо означення лівосторонньої дробової похідної (7). Запишемо

$$D^{\mu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I^{n-\mu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta}]).$$

Використовуючи лему 1, маємо

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c+n-\mu)}\times\right.$$

$$\left.\times{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+n-\mu;\omega(x-\alpha)^{\beta})]\right].$$

Застосуємо співвідношення

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m[z^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega z^{\beta})]=$$

$$=z^{c-m-1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-m)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega z^{\beta})$$

і отримаємо

$$\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-\mu;\omega(x-\alpha)^{\beta}),$$

що і треба було довести.

Лема 3. Нехай $\alpha\in R_+=[0;+\infty)$, $\{a,b,c,\omega,\mu\}\in C$, $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\mathrm{Re}\,\mu>0$, $\beta-\tau>0$. Тоді для $x>\alpha$ за умови $|\omega(x-\alpha)^{\beta}|<1$ має місце формула:

$$D^{\mu,\nu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta}),\quad(17)$$

де

$$(D^{\mu,\nu}_{\alpha+}f)(x)=(I^{\nu(1-\mu)}_{\alpha+}\frac{d}{dx}(I^{(1-\nu)(1-\mu)}_{\alpha+}f))(x),\quad(18)$$

$$0<\mu<1;\ 0\le\nu\le1.$$

Доведення. У формулу (18) замість функції f підставляємо вираз $[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]$ і виконуємо перетворення:

$$D^{\mu,\nu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=D^{\mu,\nu}_{\alpha+}\left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}\omega^n(t-\alpha)^{c+\beta n-1}\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}\omega^n D^{\mu,\nu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c+\beta n-1}].$$

Далі використаємо властивість дробової похідної

$$(D^{\mu,\nu}_{\alpha+}f)(x)=\left(I^{\nu(1-\mu)}_{\alpha+}\frac{d}{dx}(I^{(1-\nu)(1-\mu)}_{\alpha+}f)\right)(x).$$

Маємо:

$$D^{\mu,\nu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}\omega^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c+\beta n)}{\Gamma(c+\beta n-\mu)}(x-\alpha)^{c+\beta n-\mu-1}=\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c-\mu)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c-\mu+\beta n)n!}(\omega(x-\alpha)^{\beta})^n=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta}).$$

Отже, лему доведено.

Наслідок. Якщо $\alpha\in C$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\{a,c,\omega\}\in C$, $\mathrm{Re}\,c>0$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0,\beta>0$, $\beta-\tau>0$, $0<\mu<1;\ 0\le\nu\le1$, то виконуються рівності

$$I^{\mu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{\mu+c-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu)}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+\mu;(x-\alpha)^{\beta});\quad(19)$$

$$D^{\mu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta});\quad(20)$$

$$D^{\mu,\nu}_{\alpha+}[(x-\alpha)^{c-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})]=$$

$$=\frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta}).\quad(21)$$

Доведення формул (19)–(21) випливає з доведень відповідних співвідношень лем 1–3.

Висновки

З використанням властивостей (τ,β)-узагальнених гіпергеометричних функцій у статті запроваджено $({}_{\tau,\beta}F^{a,b,c}_{\alpha+;\omega}\varphi)(x)$ та $({}_{\tau,\beta}\Phi^{a,c}_{\alpha+;\omega}\varphi)(x)$ інтегральні оператори з (τ,β)-узагальненою за Райтом гіпергеометричною функцією Гаусса та (τ,β)-узагальненою конфлюентною гіпергеометричною функцією в ядрі. Для запроваджених операторів одержано функціональні співвідношення, досліджено умови існування та обмеженості в просторі Лебега, досліджено композиційні співвідношення з лівостороннім дробовим інтегралом Рімана—Ліувілля $I^{\mu}_{\alpha+}$. Отримано функціональні співвідношення, що демонструють дію лівосторонніх дробових інтеграла та похідної Рімана—Ліувілля на (τ,β)-узагальнені гіпергеометричні функції.

Одержані результати можна використати для подальшого більш глибокого застосування апарату теорії дробового числення в теорії спеціальних функцій, що дасть можливість розв’язувати нові класи диференціальних та інтегральних рівнянь.

1. *A.A. Kilbas and M. Saigo,* H-Transforms. London: Charman and Hall/CRC., 2004, 390 p.
2. *A.M. Mathai and R.K. Saxena,* The *H*-Function with Applications in Statistics and Other Disciplines. New Delhi: Willey Eastern Ltd, 1978, 192 p.
3. *A.M. Mathai and R.K. Saxena,* Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1973, 314 p.
4. *Килбас А.А., Князюк Н.В.* Свойства интегральных операторов с обобщенной функцией Миттаг–Леффлера в ядре // Вестник БГУ. Сер. 1. — 2007. — № 2. — С. 60—64.
5. *S.L. Kalla and R.K. Saxena,* “Integral operators involving hypergeometric functions”, Math. Z., vol. 108, no. 2, pp. 231—234, 1986.
6. *H.M. Srivastava,* “Eulerian integrals of multivariable generalized hypergeometric functions”, Vijnana Parishad Anusandhan Patrica, vol. 41, no. 4, pp. 233—251, 1998.
7. *Трантер К.Дж.* Інтегральні перетворення в математичній фізиці. — М.: ГТТИ, 1956. — 204 с.
8. *N.O. Virchenko and O.V. Ovcharenko,* “On some new integral transforms with the generalized hypergeometric function”, Integral Transforms and Special Functions, vol. 22, no. 9, pp. 647—653, 2011.
9. *N. Virchenko,* “On some generalizations of the functions of hypergeometric type”, Fractional Calculus and Appl. Analysis, vol. 2, no. 3, pp. 233—244, 1999.
10. *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965. — 296с.
11. *Овчаренко О.В.* Дослідження властивостей інтегральних операторів з узагальненою гіпергеометричною функцією в ядрі // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2010. — № 4. — С. 91—94.
12. *Вірченко Н.О., Рибак В.Я.* Основи дробового інтегродиференціювання: Навч. посібник. — К.: ТОВ “Задруга”, 2007. — 364с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
5 квітня 2013 року