УДК 519.21

О.І. Клесов, О.А. Тимошенко

PRV-УМОВИ НЕОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

We consider the behavior of solutions of stochastic differential equation $d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + \sigma(t,\xi(t))dw(t)$, $t \geq 0$; $\xi(0) \equiv \xi_0$, where w is a standart Wiener process; ξ_0 is a nonrandom positive constant; ξ is a solution of equation, a and σ are continuous functions. The aim of this work is to find conditions on functions a and σ, under which solution ξ tends to infinity. The solutions unboundedness of stochastic differential equations is one of the important research topics of the asymptotic behavior of stochastic differential equations solutions. I.I. Gihman and A.V. Skorohod obtained general results for solutions unboundedness for an autonomous stochastic differential equation. In this paper, we provide some sufficient conditions for the stochastic differential equation with a time-dependent coefficient under which solution tends to infinity for $t \to \infty$. We do the research based on the PRV-theory (the theory of pseudo-regularly varying functions) developed in a series of works by V.V. Buldigin, O.I. Klesov and J.G. Shteinebach.

Вступ

У працях Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода [1], Г. Келлера та ін. [2], В.В. Булдигіна та ін. [3–6] розглядалося питання про асимптотичну поведінку розв'язку автономного стохастичного диференціального рівняння. Пізніше у [7–9] було розглянуто задачу про точний порядок росту для стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтом зсуву та дифузії, які залежать від часу, а саме: $g(t,x) = \varphi(t)g(x)$, $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$. Припускалось, що g та σ – неперервні додатні функції, φ та θ – неперервні функції. Було знайдено умови, при яких точний порядок зростання розв'язку стохастичного диференціального рівняння майже напевно (м.н.) збігається з розв'язком відповідного йому звичайного диференціального рівняння. На основі отриманих результатів у праці [9] було розглянуте питання асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь та асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь. При знаходженні відповідних умов одним з основних припущень праць [7–9] було те, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння η із збільшенням часу м.н. необмежено зростає та прямує до нескінченності. Тому виникла потреба у дослідженні умов необмеженості розв'язку стохастичного диференціального рівняння з [7–9]. Загальні результати, що стосуються питання необмеженості розв'язку для автономного стохастичного рівняння подані, наприклад, в монографії [1]. В [10] знайдено певні достатні умови необмеженості розв'язку двовимірного стохастичного диференціального рівняння в загальному випадку та у випадку рівняння, яке розглядалось у [7–9].

Постановка задачі

До дослідження задач про еквівалентність розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і стохастичних диференціальних рівнянь, еквівалентності детермінованих диференціальних рівнянь використовувалась теорія PRV-функцій, розроблена в [3–5, 9]. Мета цієї роботи полягає в застосуванні PRV-теорії до дослідження необмеженості розв'язків двовимірних стохастичних диференціальних рівнянь.

Означення та попередні відомості

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + \sigma(t,\xi(t))dw(t),$$
$$t \geq 0,\ \xi(0) \equiv \xi_0, \tag{1}$$

де w – стандартний вінерів процес; ξ_0 – невипадкова додатна стала; ξ – розв'язок рівняння (1); a та σ – неперервні функції, визначені при $t \in [0,+\infty)$ та $x \in (-\infty;+\infty)$.

Позначимо

$$\tilde{g}(t,x) = -\int_0^x \frac{\sigma_t'(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)} - \frac{1}{2}\sigma_x'(t,x)$$

і

$$A(T) = \int_0^T \alpha(t)\,dt,$$

де $\alpha(t)=\inf\limits_{x\in R}\tilde g(t,x),$ та припустимо

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,y)}=\infty. \qquad (2)$$

Теорема 1. Нехай a — неперервна функція, σ — неперервна додатна функція така, що стохастичне диференціальне рівняння (1) має неперервний розв'язок ξ. Припустимо, що для функції σ існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x та виконується (2). Тоді розв'язок ξ буде таким, що

$$\lim_{t\to\infty}\xi(t)=\infty \quad \text{м.н.} \qquad (3)$$

за виконання однієї з двох умов:

1) $\varlimsup\limits_{T\to\infty}\dfrac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}}>1$

або

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\int_0^x 2\inf_{t>0}\tilde g(t,z)dz}dx=+\infty$ та $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\int_0^x 2\inf_{t>0}\tilde g(t,z)dz}dx<+\infty.$

Д о в е д е н н я. Покладемо

$$\gamma(t)=f(t,\xi(t)),\ t>0,$$

тоді

$$\xi(t)=f^{-1}(t,\ \gamma(t)),$$

де $f(t,x)=\int\limits_0^x\dfrac{dy}{\sigma(t,y)},$ f^{-1} — функція, обернена по x до функції f.

Застосуємо формулу Іто (див., наприклад, теорему 4, § 3, [1]) для рівняння (1):

$$d\gamma(t)=[f'_t(t,\ \xi(t))+f'_x(t,\ \xi(t))a(t,\xi(t))+$$
$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,\xi(t))\sigma^2(t,\ \xi(t))]dt+$$
$$+f'_x(t,\xi(t))\sigma\left(t,\xi(t)\right)dw(t)=\Big[f'_t(t,\ f^{-1}(t,\gamma(t)))+$$
$$+f'_x(t,\ f^{-1}(t,\gamma(t)))a(t,f^{-1}(t,\gamma(t)))+$$
$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,f^{-1}(t,\gamma(t)))\sigma^2(t,\ f^{-1}(t,\gamma(t)))\Big]dt+$$
$$+f'_x(t,f^{-1}(t,\gamma(t)))\sigma(t,f^{-1}(t,\gamma(t)))dw(t),$$

де

$$f'_x(t,x)=\frac{1}{\sigma(t,x)},\ f''_{xx}(t,x)=-\frac{\sigma'(t,x)}{\sigma^2(t,x)},$$
$$f'_t(t,x)=-\int_0^x\frac{\sigma'_t(t,\ y)}{\sigma(t,\ y)}dy.$$

Таким чином, процес $\gamma(t)$ буде розв'язком рівняння

$$d\gamma(t)=\tilde a(t,\gamma(t))dt+dw(t),\ t\ge 0,$$

де

$$\tilde a(t,x)=-\int_0^x\frac{\sigma'_t(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy+\frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)}-\frac{1}{2}\sigma'_x(t,x).$$

Тепер теорема 3 випливає з теореми 2, § 16 [1].

Зауваження 1 [1]. Відомо, що для рівняння (1) існує єдиний неперервний розв'язок, якщо для неперервних коефіцієнтів a та σ виконуються наступні дві умови:

а) для будь-якого $T\in(0;\infty)$ існує така стала $K=K(T)$, що при $t\in[0;T]$ та $x\in(-\infty;+\infty)$,

$$|a(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2\le K^2(1+|x|^2);$$

б) для будь-яких $C,T\in(0;\infty)$ існує така стала $L=L(C,T)$, що при $t\in[0;T]$ та $(x,y)\in\in(-C;+C)(-C;+C)$,

$$|a(t,x)-a(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le L|x-y|.$$

Зауваження 2. Припустимо, що $a(t,x)==\varphi(t)g(x)$ та $\sigma(t,x)=\theta_0\sigma(x)$, $\theta_0\equiv\text{const}$, до того ж

$$\inf_{x\in R}\sigma'(x)=0 \ \text{ та } \ g(x)=\sigma(x).$$

Нехай функція φ задовольняє наступні умови $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t\varphi(u)du=\infty$ та $\inf\limits_{t>0}\varphi(t)=0.$

Якщо

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{\Phi(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}}>1$$

або

$$\int_{-\infty}^0 e^{\theta_0\sigma(x)}dx=+\infty \ \text{ та } \ \int_0^\infty e^{\theta_0\sigma(x)}dx<+\infty,$$

то виконується (3).

PRV-дослідження поведінки розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння на нескінченності

Розглянемо основні твердження цієї роботи про необмеженість розв'язку рівняння (1). Має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай a — неперервна функція, σ — неперервна додатна функція така, що стохастичне диференціальне рівняння (1) має неперервний розв'язок ξ. Припустимо, що

1) для функції σ існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x;

2) для кожного фіксованого t та для деякого $c_0 > 1$

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{B(t, c_0 x)}{B(t,x)} > 1;$$

3) функція α є RV-функцією з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$.

Тоді має місце (3).

Д о в е д е н н я. Оскільки функція α є RV-функцією з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$, то в силу прямої теореми Карамати (див., наприклад, § 6.2 [10]) при $T \to \infty$, маємо, що

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T\alpha(T)}{A(T)} = \rho + 1.$$

А отже,

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T \ln\ln T}} = \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{T\alpha(T)}{(\rho+1)\sqrt{2T\ln\ln T}} = \infty > 1.$$

За умовою теореми

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{B(t, c_0 x)}{B(t,x)} > 1, \text{ для деякого } c_0 > 1,$$

тому в силу леми 3.7.1 [10]

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x) = \infty.$$

Отже, виконуються всі умови теореми 1, тому

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \infty \quad \text{м.н.}$$

Наслідок. Нехай $a(t,x) = g(x)\varphi(t)$, де g — неперервна додатна функція, φ — RV-функція з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, де σ-неперервна додатна функція, для якої $\sigma'(x) \le 0$. До того ж $\inf_{x\in R} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \infty \quad \text{м.н.}$$

Приклад. Покладемо

$$a(t,x) = \sqrt{t}\, \ln(x^2+1) \text{ та } \sigma(t,x) = \ln(x^2+1),$$

тоді

$$\tilde{g}(t,x) = \sqrt{t} - \frac{x}{x^2+1},$$

та за таких припущень на коефіцієнти маємо, що

$$\alpha(t) = \inf_{x\in R} \tilde{g}(t,x) = \sqrt{t} - \frac{1}{2},$$

тобто функція α є RV-функцією з індексом $\rho = \frac{1}{2}$, та

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = \infty,$$

а отже, виконується (3).

Висновки

Результати статті доповнюють результати праць [7—11]. Отримані достатні умови необмеженості розв'язку дають можливість побудови конкретних прикладів стохастичних диференціальних рівнянь, розв'язки яких є еквівалентними розв'язкам відповідних їм звичайних диференціальних рівнянь на нескінченності. PRV-умови є зручними для побудови стохастичних диференціальних рівнянь, розв'язки яких прямують до нескінченності.

У подальших дослідженнях планується продовжити вивчення асимптотичної поведінки двовимірного стохастичного диференціального рівняння на нескінченності, використовуючи PRV-теорію, розроблену в [10].

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. *G. Keller et al.,* "On the Asymptotic Behaviour of Solutions of Sochastic Differential Equations", Z. Wahrsch. Geb., no. 68, pp. 163–184, 1984.
3. *Булдигін В.В, Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.* PRV властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Теор. ймовір. та мат. стат. – 2004. – № 72. – С. 63–78.
4. *Булдигін В.В, Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I // Теорія ймовір. та мат. стат. – 2004. – № 70. – С. 9–25.
5. *Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. II // Теорія ймовір. та мат. стат. – 2004. – № 71. – С. 63–78.
6. *V.V. Buldygin et al.,* "On the φ-Asymptotic Behaviour of Solutions of Stochastic Differential Equations", Theory Stoch. Process, no. 1, pp. 11–30, 2008.
7. *Булдигін В.В., Тимошенко О.А.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 127–132.
8. *Тимошенко О.А.* Точний порядок зростання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із знакозмінним коефіцієнтом зсуву // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 5. – С. 145–151.
9. *V.V. Buldygin and O.A. Tymoshenko,* "On the Exact Order of Growth of Solutions of Stochastic Differential Equastions with Time-Dependent Coefficients", Theory Stoch. Process, no. 2, pp. 12–22, 2010.
10. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 442 с.
11. *O.I. Klesov and O.A. Tymoshenko,* Unbounded Solutions of Stochastic Differential Equations with Time-Dependent Coefficients // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., vol. 40, 2013.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
5 червня 2013 року