УДК 517.983.27

О.А. Жуковська, А.О. Титаренко

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНУ ДИСТРИБУТИВНОСТІ В КЛАСИЧНІЙ ІНТЕРВАЛЬНІЙ АРИФМЕТИЦІ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИПАДКУ

The aim of the article is to study the law of distributivity in classical interval arithmetic. We conduct the research for interval in the center-radius form. A set of intervals is represented as a combination of three subsets defined by values relations of centers and the radii. We prove the lemma about conditions under which the sum of two intervals will belong to the same subset of added intervals. The necessary and sufficient conditions for the distributive law hold for the intervals belonging to one of the subsets are offered. We generalize the distributive law in case of voluntary number of intervals. We proved the lemma about the conditions under which the sum of many intervals will own to same subset of the intervals are added. The theorem about necessary and sufficient conditions of generalizing the distributive law for intervals belonging to one subset. These results allow to conduct research to improve the algebraic structure of a set of intervals.

Вступ

У багатьох практичних задачах є природним наявність неповної інформації про необхідні для розв'язку задачі величини, коли відома тільки їх належність до деякого інтервалу. Отримання розв'язку в явному вигляді задач з інтервальною невизначеністю та неоднозначністю в даних, що виникають при постановці задачі або на проміжних стадіях процесу розв'язання, привело до створення інтервального аналізу.

У той самий час практичне застосування інтервальних методів для знаходження розв'язку в явному вигляді вимагає перегляду всіх розроблених на цей момент числових методів [1–2]. Така ситуація склалася внаслідок алгебричної неповноти класичної інтервальної арифметики, що призвело до детального вивчення алгебричних властивостей інтервалів, зокрема, дистрибутивного закону [3–5]. Дослідження виконання дистрибутивного закону було проведено в [9], де наведено множину всіх трійок інтервалів $A, B, C \in I(R)$, для яких має місце рівність $A(B+C) = AB + AC$. Доведення ґрунтувалось на переборі випадків операцій над кінцями інтервалів та виявилось настільки громіздким, що навіть не наведене повністю. Тому в [4] запропоновано інший спосіб класифікації випадків дистрибутивності. Однак за такого способу класифікації виникають труднощі при практичному застосуванні методів інтервального аналізу, так як неможливо заздалегідь передбачити, чи буде виконуватись закон дистрибутивності на кожному етапі обчислень. Також необхідно зауважити, що чималу роль відіграють знання про умови виконання узагальненого дистрибутивного закону, які дають змогу при розв'язанні задач з інтервальними даними отримувати більш вузький інтервал.

Таким чином, виникає необхідність дослідження виконання закону дистрибутивності та його узагальнення в класичній інтервальній арифметиці.

Постановка задачі

Метою статті є дослідження виконання закону дистрибутивності для довільного числа інтервальних величин, представлених у формі центр–радіус.

Інтервальні арифметичні операції в класичному інтервальному просторі

Множина дійсних чисел $X = \{\xi\}$, яка задовольняє умову $\underline{x} \le \xi \le \overline{x}$, $\forall \underline{x}, \overline{x} \in \mathrm{R}$, називається замкненим інтервалом та позначається $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\underline{x}$ і $\overline{x}$ – нижня та верхня границі інтервалу X відповідно. Множина всіх замкнених дійсних інтервалів позначається як $I(\mathrm{R})$. Арифметичні операції для $X, Y \in I(\mathrm{R})$ визначаються так:

$$X + Y = \{\xi + \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\};$$

$$X - Y = \{\xi - \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\};$$

$$XY = \{\xi\eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\};$$

$$\frac{X}{Y} = \left\{\frac{\xi}{\eta} \mid \xi \in X, \eta \in Y\right\}.$$

В явному вигляді результат операцій додавання, віднімання, множення та ділення дійсних інтервалів отримуємо за допомогою формул

$$X+Y=[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}], \quad (1)$$

$$X-Y=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}], \quad (2)$$

$$XY=[\min\{\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}\},\max\{\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}\}], \quad (3)$$

$$\frac{X}{Y}=X\left[\frac{1}{\overline{y}},\frac{1}{\underline{y}}\right]. \quad (4)$$

З формули (3) випливає, що коли числа $\underline{x}$, $\overline{x}$, $\underline{y}$, $\overline{y}$ одного знаку, обчислення добутку XY не викликає труднощів. Наприклад, коли $\underline{x}>0$ та $\underline{y}>0$, то

$$XY=[\underline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}],$$

а коли $\overline{x}<0$ та $\overline{y}<0$, то

$$XY=[\overline{x}\overline{y},\underline{x}\underline{y}].$$

У загальному ж випадку, коли границі $\underline{x}$, $\overline{x}$, $\underline{y}$, $\overline{y}$ інтервалів різного знаку, обчислення добутку XY ускладнюється: необхідно визначити, який із добутків $\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}$ та в яких випадках буде мати найменше та найбільше значення. Тому для явного опису та подальшого застосування інтервальних операцій застосовується [2] подання інтервалів у формі центр–радіус:

$$X=\langle x,r_x\rangle, Y=\langle y,r_y\rangle, \quad (5)$$

де

$$x=\frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}; \qquad r_x=\frac{\overline{x}-\underline{x}}{2};$$
$$y=\frac{\underline{y}+\overline{y}}{2}; \qquad r_y=\frac{\overline{y}-\underline{y}}{2} \quad (6)$$

центри та радіуси відповідних інтервалів. Арифметичні операції над інтервалами у формі центр–радіус визначаються співвідношеннями

$$\langle x,r_x\rangle+\langle y,r_y\rangle=\langle x+y,r_x+r_y\rangle, \quad (7)$$

$$\langle x,r_x\rangle-\langle y,r_y\rangle=\langle x-y,r_x+r_y\rangle, \quad (8)$$

$$\langle x,r_x\rangle\langle y,r_y\rangle=\langle xy+r_xr_y,yr_x+xr_y\rangle,$$

$$x\ge r_x\ge 0,\ y\ge r_y\ge 0,$$

$$\frac{\langle x,r_x\rangle}{\langle y,r_y\rangle}=\left\langle\frac{xy+r_xr_y}{y^2-r_y^2},\frac{yr_x+xr_y}{y^2-r_y^2}\right\rangle,$$

$$x\ge r_x\ge 0,\ y\ge r_y\ge 0.$$

Зауважимо, що наведені формули множення та ділення можуть застосовуватись лише для додатних інтервалів, а для загального випадку в [5] запропоновано таку формулу:

$$\langle x,r_x\rangle\langle y,r_y\rangle=\langle xy,yr_x+xr_y+r_xr_y\rangle.$$

Однак остання формула не узгоджена з визначенням множення інтервалів (3) та при збільшенні радіуса дає ширший інтервал, ніж (3).

У [6] нами запропоновано таку класифікацію інтервалів (рисунок):

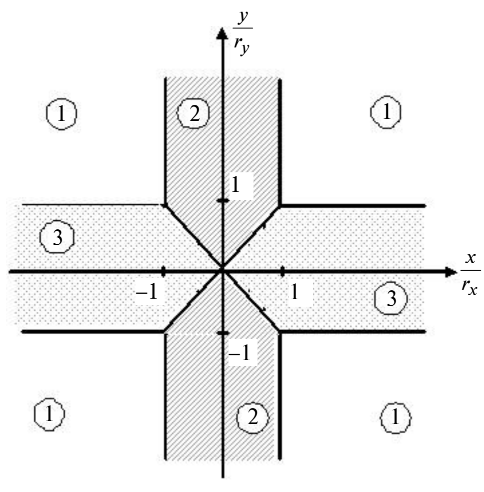
$$I_1^{(X,Y)}(\mathrm{R})=\left\{\langle x,r_x\rangle,\langle y,r_y\rangle \mid \frac{|x|}{r_x}\ge 1,\frac{|y|}{r_y}\ge 1,\ r_x,r_y>0,\ \ x,r_x,y,r_y\in\mathbf{R}\right\}, \quad (9)$$

$$I_2^{(X,Y)}(\mathrm{R})=\left\{\langle x,r_x\rangle,\langle y,r_y\rangle \mid \frac{|x|}{r_x}<1,\frac{|x|}{r_x}<\frac{|y|}{r_y},\ \ r_x,r_y>0,\ \ x,r_x,y,r_y\in\mathbf{R}\right\}, \quad (10)$$

$$I_3^{(X,Y)}(\mathrm{R})=\left\{\langle x,r_x\rangle,\langle y,r_y\rangle \mid \frac{|y|}{r_y}<1,\frac{|x|}{r_x}\ge\frac{|y|}{r_y}\ \ r_x,r_y>0,\ \ x,r_x,y,r_y\in\mathbf{R}\right\}, \quad (11)$$

$$I(\mathrm{R})\times I(\mathrm{R})=I_1^{(X,Y)}(\mathrm{R})\cup I_2^{(X,Y)}(\mathrm{R})\cup I_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}),$$

("×" – знак прямого добутку),



Області 1–3, що відповідають множинам (9)–(11)

яка дала можливість отримати формули добутку інтервалів у формі центр–радіус при всіх можливих значеннях центра та радіуса:

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(xy) r_x r_y, \ |x| r_y + |y| r_x \rangle,$$
$$X, Y \in I_1^{(X,Y)}(\mathrm{R}), \qquad (12)$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(y) x r_y, \ |y| r_x + r_x r_y \rangle,$$
$$X, Y \in I_2^{(X,Y)}(\mathrm{R}), \qquad (13)$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(x) y r_x, \ |x| r_y + r_x r_y \rangle,$$
$$X, Y \in I_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}). \qquad (14)$$

Дослідження виконання закону дистрибутивності

Для подальшого дослідження введемо такі позначення:

$$I_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \ge 1, \frac{|b|}{r_b} \ge 1, \right.$$
$$\left. r_a, r_b > 0, \ a, r_a, b, r_b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_1^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \ge 1, \frac{|c|}{r_c} \ge 1, \right.$$
$$\left. r_a, r_c > 0, \ a, r_a, c, r_c \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \ge 1, \frac{|b+c|}{r_b + r_c} \ge 1, \right.$$
$$\left. r_a, (r_b + r_c) > 0, \ a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_2^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \le \frac{|b|}{r_b}, \right.$$
$$\left. r_a, r_b > 0, \ a, r_a, b, r_b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_2^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \le \frac{|c|}{r_c}, \right.$$
$$\left. r_a, r_c > 0, \ a, r_a, c, r_c \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \le \right.$$
$$\left. \le \frac{|b+c|}{r_b + r_c}, \ r_a, (r_b + r_c) > 0, \ a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_3^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|b|}{r_b}, \right.$$
$$\left. r_a, r_b > 0, \ a, r_a, b, r_b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_3^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|c|}{r_c} < 1, \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|c|}{r_c}, \right.$$
$$\left. r_a, r_c > 0, \ a, r_a, c, r_c \in \mathbf{R} \right\},$$

$$I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|b+c|}{r_b + r_c} < 1, \frac{|a|}{r_a} \ge \right.$$
$$\left. \ge \frac{|b+c|}{r_b + r_c}, \ r_a, (r_b + r_c) > 0, \ a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо, за яких умов пара інтервалів $A, B + C$ буде належати до підмножини $I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$, з тим самим значенням n, що і пари інтервалів $A, B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$. З цією метою доведемо таку лему.

Лема 1. Нехай $A, B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$, тоді $A, B + C \in I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$, якщо $bc \ge 0$, де b, c – центри інтервалів B, C відповідно.

Доведення. Нехай $A, B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$. Доведемо, що $A, B + C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \ge 0$. Використовуючи формулу (7), визначимо суму $B + C$:

$$B + C = \langle b, r_b \rangle + \langle c, r_c \rangle = \langle b + c, r_b + r_c \rangle.$$

Так як $A, B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|a|}{r_a} \ge 1, \ \frac{|b|}{r_b} \ge 1,$$
$$\frac{|a|}{r_a} \ge 1, \ \frac{|c|}{r_c} \ge 1.$$

Запишемо нерівності $\frac{|b|}{r_b} \ge 1$, $\frac{|c|}{r_c} \ge 1$ у вигляді $|b| \ge r_b$, $|c| \ge r_c$ та просумуємо їх:

$$|b| + |c| \ge r_b + r_c$$

або

$$\frac{|b|+|c|}{r_b+r_c} \geq 1. \qquad (15)$$

Якщо $A,\ B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|a|}{r_a} \geq 1,\ \frac{|b+c|}{r_b+r_c} \geq 1. \qquad (16)$$

Порівнюючи умови (15) і (16), можна зробити висновок, що інтервали $A,\ B+C$ належать до підмножини $I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, що й інтервали $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A,\ C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$ за умови однакових знаків центрів інтервалів B, C, тобто $bc \geq 0$.

Доведення інших випадків проводиться аналогічно.

Лема доведена.

Теорема 1. Нехай $A,\ B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A,\ C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$, тоді для виконання закону дистрибутивності $A(B+C) = AB + AC$ необхідно та достатньо, щоб $A,\ B+C \in I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$.

Доведення. *Необхідність.* Розглянемо такі випадки:

1. $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A,\ C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A,\ B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

2. $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A,\ C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A,\ B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

***Випадок* 1.** Нехай $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A,\ C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A,\ B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (13) маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$

$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(ac)\, r_a r_c,\ |a| r_c + |c| r_a \rangle.$$

Суму $AB + AC$ визначимо згідно з (7):

$$AB + AC = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c)) \times$$

$$\times\, r_a(r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + (|b| + |c|)\, r_a \rangle. \qquad (17)$$

Так як $A, B+C \in I_3^{(A,(B+C))}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (14):

$$A(B+C) = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a) \times$$

$$\times\, (b+c) r_a,\ |a|(r_b + r_c) + r_a(r_b + r_c) \rangle. \qquad (18)$$

Згідно з означенням рівності двох інтервалів, інтервали $AB + AC$ і $A(B+C)$ дорівнюють один одному, якщо збігаються їх центри та радіуси.

Розглянемо центри інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ та визначимо, за яких умов можлива їх рівність. З (17) та (18) випливає, що рівність

$$a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a(r_b + r_c) =$$

$$= a(b+c) + \operatorname{sgn}(a)(b+c) r_a$$

центрів інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність $\frac{|b+c|}{r_b + r_c} = 1$, яка суперечить умові $A,\ B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

***Випадок* 2.** Нехай $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (12) для $A,\ B \in I_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$ маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle.$$

Добуток для інтервалів $A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$ обчислюємо за формулою (14):

$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(a) c r_a,\ |a| r_c + r_a r_c \rangle.$$

Суму $AB + AC$ визначимо згідно з (7):

$$AB + AC = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a) r_a \times$$

$$\times\, (r_b \operatorname{sgn} b + c), |a|(r_b + r_c) + (|b| + r_c) r_a. \qquad (19)$$

Так як $A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (12):

$$A(B+C) = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a \times$$

$$\times\, (r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + |b+c| r_a \rangle. \qquad (20)$$

З (19) та (20) випливає, що рівність

$$a(b+c) + \operatorname{sgn}(a)\, r_a(r_b \operatorname{sgn} b + c) =$$

$$= a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a(r_b + r_c)$$

центрів інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність $\frac{|c|}{r_c} = 1$, яка суперечить умові $A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Інші можливі випадки доводяться аналогічно.

Достатність. Нехай $A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, $A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (12) маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$
$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(ac)\, r_a r_c,\ |a| r_c + |c| r_a \rangle,$$
$$A(B+C) = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a \times$$
$$\times (r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + |b+c| r_a \rangle. \quad (21)$$

Згідно з (7) визначимо суму $AB + AC$:

$$AB + AC = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a \times$$
$$\times (r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + (|b| + |c|) r_a \rangle. \quad (22)$$

Так як, згідно з лемою 1, A, $B + C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \ge 0$, то $|b| + |c| = |b + c|$, тому вираз (22) набуває вигляду

$$AB + AC = \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c)) r_a \times$$
$$\times (r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + (|b+c|) r_a \rangle. \quad (23)$$

З порівняння виразів (21) та (23) випливає, що має місце рівність

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Аналогічним чином проводиться доведення в інших випадках:

- $A, B \in I_2^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C \in I_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B + C \in I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$;
- $A, B \in I_3^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B + C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Теорема доведена.

Приклад. Нехай $A = \langle 1,5 \rangle$, $B = \langle 1,2 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$. Знайдемо суму інтервалів $B = \langle 1,2 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$: $B + C = \langle 1+2, 2+3 \rangle = \langle 3,5 \rangle$. Визначимо, до якої з підмножин $I_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$, належить кожна пара інтервалів. Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $B = \langle 1,2 \rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1,\ \frac{|b|}{|r_b|} = \frac{1}{2},\ \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|b|}{|r_b|},$$

тобто $A, B \in I_2^{(A,B)}(\mathrm{R})$.

Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1,\ \frac{|c|}{|r_c|} = \frac{2}{3},\ \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|c|}{|r_c|},$$

тобто $A, C \in I_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $B + C = \langle 3,5 \rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1,\ \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} = \frac{3}{5},\ \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|},$$

тобто A, $B + C \in I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Оскільки всі пари інтервалів належать до підмножини з номером 2, то згідно з теоремою виконується закон дистрибутивності. Перевіримо це. Множення інтервалів виконуємо за формулою (13):

$$AB = \langle 1 \cdot 1 + \operatorname{sgn}(1 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \rangle = \langle 3, 15 \rangle,$$

$$AC = \langle 1 \cdot 2 + \operatorname{sgn}(2 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 3,\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \rangle = \langle 5, 25 \rangle,$$

$$A(B+C) =$$
$$= \langle 1 \cdot 3 + \operatorname{sgn}(3 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 5,\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \rangle = \langle 8, 40 \rangle, \quad (24)$$

$$AB + AC = \langle 3, 15 \rangle + \langle 5, 25 \rangle = \langle 8, 40 \rangle. \quad (25)$$

З порівняння виразів (24) та (25) випливає, що виконується закон дистрибутивності.

Узагальнення закону дистрибутивності

Лема 2. Нехай $A_i, C \in I_n^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$, $n = 1,2,3$, тоді $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_n^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$, якщо центри a_i інтервалів A_i одного знаку.

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок $n = 1$: $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$. Доведемо, що $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_1^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$ при $\sum_{i=1}^{k} |a_i| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$.

Згідно з формулою (7) визначимо $\sum_{i=1}^{k} A_i$:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \langle a_1, r_{a_1} \rangle + \langle a_2, r_{a_2} \rangle + \ldots + \langle a_k, r_{a_k} \rangle =$$
$$= \langle a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_k} \rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle.$$

Так як $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_1^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|c|}{r_c} \ge 1,\ \frac{\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|}{\sum_{i=1}^{k} r_{a_i}} \ge 1. \quad (26)$$

Запишемо нерівності $\frac{|a_i|}{r_{a_i}} \ge 1$ у вигляді $|a_i| \ge r_{a_i}$ та підсумуємо їх:

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i| \ge \sum_{i=1}^{k} r_{a_i}$$

або

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|}{\sum_{i=1}^{k} r_{a_i}} \ge 1. \qquad (27)$$

З порівняння умов (26) і (27) випливає, що $\sum_{i=1}^{k} A_i\ C \in I_1^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$, $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$ за умови однакових знаків центрів a_i інтервалів A_i, $i=\overline{1,k}$.

Доведення випадків для $n=2$ і $n=3$ проводиться аналогічно.

Лема доведена.

Теорема 2. Нехай для $A_i, C \in I_n^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i=\overline{1,k}$, $n=1,2,3$, тоді для виконання узагальненого закону дистрибутивності

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) C = \sum_{i=1}^{n} A_i C$$

необхідно та достатньо, щоб $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_n^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$.

Необхідність. Розглянемо випадок, коли $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i=\overline{1,k}$, а $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_3^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$. Тоді за формулою (15) маємо

$$A_i C = \langle a_i c + \mathrm{sgn}(a_i c)\, r_{a_i} r_c,\ |a_i| r_c + |c| r_{a_i}\rangle,$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i C = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) c + r_c \,\mathrm{sgn}\, c \left(\sum_{i=1}^{n} r_{a_i} \,\mathrm{sgn}\, a_i\right), \right.$$
$$\left. r_c \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{n} r_{a_i} \right\rangle. \qquad (28)$$

Так як $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_3^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (17):

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C = (|c| + r_c) \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \mathrm{sgn}\, c, \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle. \qquad (29)$$

Згідно з означенням рівності двох інтервалів, інтервали $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ дорівнюють один одному, якщо збігаються їх центри та радіуси.

Розглянемо радіуси інтервалів $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ та визначимо, за яких умов можлива їх рівність. З (28) та (29) випливає, що рівність $r_c \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} = (|c| + r_c) \sum_{i=1}^{k} r_{a_i}$ радіусів інтервалів $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність $\frac{\sum_{i=1}^{k} |a_i|}{\sum_{i=1}^{k} r_{a_i}} = 1$, що суперечить умові $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_3^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$.

Доведення інших можливих випадків проводиться аналогічно.

Достатність. Нехай $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i=\overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k} A_i$, $C \in I_1^{\left(\sum_{i=1}^{k} A_i, C\right)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (15) маємо

$$A_i C = \langle a_i c + \mathrm{sgn}(a_i c)\, r_{a_i} r_c,\ |a_i| r_c + |c| r_{a_i}\rangle,$$
$$i=\overline{1,k},$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i C = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) c + r_c \,\mathrm{sgn}\, c \left(\sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \,\mathrm{sgn}\, a_i\right), \right.$$
$$\left. r_c \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle, \qquad (30)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) c + r_c \operatorname{sgn} c \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right), \right.$$

$$\left. \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| r_c + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle. \quad (31)$$

Оскільки, згідно з лемою 2, $A_i, C \in$ $\in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$ при всіх $a_i \geq 0$ або $a_i < 0$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C = \sum_{i=1}^{k} A_i C.$$

Інші можливі випадки розглядаються аналогічно. Теорема доведена.

Висновки

У статті проведено дослідження виконання закону дистрибутивності та його узагальнення в класичній інтервальній арифметиці. Наведено необхідні та достатні умови (теорема 1) виконання закону дистрибутивності для трійки інтервалів, які належать до однієї підмножини $I_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$, що визначаються співвідношеннями (9)–(11). Наведено також узагальнення закону дистрибутивності для довільної кількості інтервалів (теорема 2).

Отримані результати дають можливість провести дослідження із вдосконалення алгебричної структури множини інтервалів.

1. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. – М. – Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2005. – 468 с.
2. *A. Neumaier,* Introduction to Numerical Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 358 p.
3. *H. Ratschek,* "Die Subdistributivität der Intervallarithmetik", Zamm-zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik, vol. 51, no. 3, pp. 189–192, 1971.
4. *Шарая И.А.* О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычисл. технол. – 1997. – **2**, № 1. – С. 71–83.
5. *A. Neumaier,* "A Distributive Interval Arithmetic", Freiburger Intervall-Berichte, no. 10, pp. 31–38, 1982.
6. *Жуковська О.А., Новицький В.В.* Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр–радіус // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2003. – № 1. – С. 138–144.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
1 листопада 2012 року