

УДК 629.7.021

О. П. Мариношенко, О. І. Сидоренко

ОПТИМІЗАЦІЯ ЖОРСТКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИЛА ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ

Вступ

Існуючі методи оптимізації конструкцій можна розділити на три рівні в порядку зростання їх складності: перший рівень – варіантне проектування, полягає в розгляді певного числа варіантів без явно вираженої моделі задачі вибору. Другий рівень – автоматизоване проектування. Тут використовується статичний розрахунок, що реалізований на комп'ютері, з додаванням блоків конструювання та варіювання параметрами. Алгоритми і програми розрахунку базуються на класичних методах механіки. Застосування комп'ютерної техніки дозволяє в значній мірі відмовитись від спрощень, що характерні для ручного розрахунку. Третій рівень заснований на теоретичному аналізі функції цілі. Задача вибору найкращих параметрів розв'язується аналітично з врахуванням діючих навантажень, теорії розрахунку, умов міцності матеріалу, жорсткісних і конструктивних вимог. Такий підхід є найбільш ідеальним, так як в деякій мірі наближається до розв'язання задачі синтезу найкращого варіанта конструкції [1].

Постановка задачі

Розглядається задача оптимізації внутрішньої структури крила з метою покращення його жорсткісних характеристик при незмінній масі самої конструкції. При цьому ставиться задача щодо розробки методики оптимізації характеристик напружено-деформованого стану крила літака, що знаходиться під дією довільних зовнішніх та внутрішніх навантажень.

Опис механічного об'єкту досліджень

В роботі пропонується жорсткість конструкції трактувати як змінну величину, що безпосередньо залежить від конфігурації силових елементів, варіюючи розміщенням яких можна досягти максимізації жорсткості.

Розглянемо поперечний переріз крила літака. В центрі мас кореневого перерізу будуємо прямокутну систему координат $Sxuz$, яку будемо називати кореневою, вісь Ox напрямимо паралельно повітряному потоку про нульовому куті атаки, вісь Oy – перпендикулярно вгору, а вісь

Oz – по розмаху крила. Цю систему вважаємо інерціальною і початковою для розрахунку. Орти цієї системи координат будемо позначати як $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Вважаємо, що форма крила утворюється неперервним рухом кореневого перерізу по осі Zz відповідним зменшенням його розмірів, тобто подібним перетворенням, з певним коефіцієнтом подібності, тоді хорда в будь-якій точці буде визначатись за формулою:

$$b_i = b_0(1 - z^* k),$$

де b_0 – коренева хорда, b_i – хорда в i -му перерізі, Z – зведений розмах, на якому розташований заданий переріз, k – коефіцієнт зменшення.

Розглядаємо довільний поперечний переріз крила, який знаходиться на відстані z від кореневого перерізу; тут вводимо локальну систему $C_z x_z y_z z_z$, де C_z – центр мас цього перерізу; однойменні осі паралельні осям кореневої системи координат. Орти вказаної системи координат – $\vec{i}_z, \vec{j}_z, \vec{k}_z$.

Надалі величини, які відносяться до деформованого стану, будемо позначати “*”. Тоді локальну систему відліку в точці C_z^* позначаємо через $C_z^* x_z^* y_z^* z_z^*$, а орти її базису відповідно $\vec{i}_z^*, \vec{j}_z^*, \vec{k}_z^*$.

Виведення рівнянь руху крила

Виділимо елемент крила двома площинами $z, z + dz$, які перпендикулярні лінії центрів ваги крила. Позначаємо через q масу одиниці довжини крила; через \vec{P}_z, \vec{m}_z розподілені по поверхні крила зовнішні сили і моментні навантаження.

Для виведення рівняння, що описує рух центра мас виділеного елемента, застосуємо теорему про зміну кількості руху. Маємо:

$$q \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}^z}{\partial z} + \vec{P}_z,$$

де \vec{T}^z – вектор зусиль від дії напружень в конкретному поперечному перерізі крила,

\vec{u}_0 – вектор переміщення точок крила,

\vec{P}_z – вектор зовнішніх зусиль.

Застосовуючи теорему про зміну кінетичного моменту, одержуємо друге векторне рівняння, що описує обертальний рух елемента навколо центра мас:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{K}_{C_z} = \frac{\partial \vec{M}_{C_z}}{\partial z} + \vec{k}_z^* \times \vec{T}^z + \vec{m}_z.$$

Тут \vec{K} – вектор кінетичного моменту, \vec{M} – внутрішні моментні зусилля в перерізі, \vec{k}_z^* – орт осі $C_z x_z$ локальної системи координат, \vec{m}_z – вектор аеродинамічного моменту.

Розглянемо взаємозв'язок між зусиллями в деформованому та недеформованому станах крила. Нехай вони пов'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\vec{T}^z &= N^* \vec{k}_z^* + Q_2^* \vec{j}_z^* + Q_1^* \vec{i}_z^* = N \vec{k}_z + Q_2 \vec{j}_z + Q_1 \vec{i}_z, \\ \vec{p}_z &= p_{z,z}^* \vec{k}_z^* + p_{z,y}^* \vec{j}_z^* + p_{z,x}^* \vec{i}_z^* = p_{z,z} \vec{k}_z + p_{z,y} \vec{j}_z + p_{z,x} \vec{i}_z, \\ \vec{M}_{C_z} &= M_k^* \vec{k}_z^* + M_1^* \vec{i}_z^* + M_2^* \vec{j}_z^* = M_k \vec{k}_z + M_1 \vec{i}_z + M_2 \vec{j}_z, \\ \vec{m}_z &= m_{z,z}^* \vec{k}_z^* + m_{z,x}^* \vec{i}_z^* + m_{z,y}^* \vec{j}_z^* = m_{z,z} \vec{k}_z + m_{z,x} \vec{i}_z + m_{z,y} \vec{j}_z.\end{aligned}$$

Розглянемо переміщення довільної точки під дією прикладених сил. Нехай $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$ – вектор переміщення довільної точки крила. Розкладемо цю величину наступним чином:

$$\vec{U} = U_1(x, y, z, t) \vec{i} + U_2(x, y, z, t) \vec{j} + U_3(x, y, z, t) \vec{k},$$

де $U_1 = v_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N c_{ij}(z) x^i y^j$, $U_2 = w_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N b_{ij}(z) x^i y^j$, $U_3 = u_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N a_{ij}(z) x^i y^j$,

та $v_0(z), w_0(z), u_0(z)$ – переміщення центра мас, $\sum_{i+j \geq 1}^N c_{ij}(z) x^i y^j$,

$\sum_{i+j \geq 1}^N b_{ij}(z) x^i y^j$, $\sum_{i+j \geq 1}^N a_{ij}(z) x^i y^j$ – невідомі функції, що описують переміщення відносно центра мас. Для спрощення обмежимося випадком, коли у формулах $N = 1$.

Покладемо у виразах, що характеризують незмінність площі поперечного перерізу крила $i = j = 0$ і підставимо в них отримані співвідношення для відносних деформацій. Одержуємо такі співвідношення:

$$c_2 = -b_1; a_1 = -\frac{\partial v_0}{\partial z}; a_2 = -\frac{\partial w_0}{\partial z}.$$

Для визначення напрямних косинусів в недеформованому і деформованому станах крила необхідно визначити насамперед вектори локального одиничного базису $\vec{i}_z^*, \vec{j}_z^*, \vec{k}_z^*$. Для цього обчислимо наступні величини $\frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x}, \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial y}, \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial z}$, де $\vec{R}^* = \vec{R} + \vec{U} = (U_1 + x) \vec{i} + (U_2 + y) \vec{j} + (U_3 + z) \vec{k}$ – радіус-вектор переміщення точок крила.

Диференціюючи дані вирази та поділивши відповідні співвідношення на $\left| \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial z} \right|$, покладаючи $x = y = 0$ і нехтуючи квадратами кутів повороту порівняно з одиницею, отримуємо:

$$\begin{aligned}\vec{i}_z^* &\approx \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} = (1 + c_1) \vec{i} + b_1 \vec{j} - \frac{\partial v_0}{\partial z} \vec{k}, \\ \vec{j}_z^* &\approx \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial y} \Big|_{x=0, y=0} = -b_1 \vec{i} + (1 + b_2) \vec{j} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \vec{k}, \\ \vec{k}_z^* &\approx \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial z} \Big|_{x=0, y=0} = \frac{\partial v_0}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \vec{j} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + 1 \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

В системі відліку S_{xyz} вводимо в розгляд компоненти тензора деформацій, компоненти якого визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial U_j}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Підставляючи в (1) функції апроксимації, отримаємо:

$$\varepsilon_{xy} = b_1, \varepsilon_{yz} = -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_1}{\partial z} x + \frac{\partial b_2}{\partial z} y \right), \varepsilon_{zx} = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_1}{\partial z} y + \frac{\partial c_1}{\partial z} x \right).$$

Після врахування особливостей деформування крила в польоті формули для апроксимації переміщень приймають вигляд:

$$\begin{aligned}U_1 &= v_0(z, t) + b_1 y; U_2 = w_0(z, t) - b_1 x + \left(-\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) z; \\ U_3 &= u_0(z, t) + \left(-\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) y.\end{aligned}$$

Ці вирази у спрощеному вигляді з врахуванням деяких припущень можна записати у наступним чином:

$$U_1 \approx 0, U_2 = w_0 + b_1 x, U_3 = u_0 - \frac{\partial w_0}{\partial z} y. \quad (2)$$

Приймаючи до уваги таблицю напрямних косинусів, отримуємо залежності між силовими факторами в деформованому і недеформованому станах:

$$\begin{aligned}
N &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) N^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} Q_2^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} Q_1^*, & M_k &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) M_k^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} M_2^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} M_1^*, \\
Q_2 &= \frac{\partial w_0}{\partial z} N^* + (1 + b_2) Q_2^* + b_1 Q_1^*, & M_2 &= \frac{\partial w_0}{\partial z} M_k^* + (1 + b_2) M_2^* + b_1 M_1^*, \\
Q_1 &= \frac{\partial v_0}{\partial z} N^* - b_1 Q_2^* + (1 + c_1) Q_1^*, & M_1 &= \frac{\partial v_0}{\partial z} M_k^* - b_1 M_2^* + (1 + c_1) M_1^*, \\
p_{z,z} &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,x}^*, & m_{z,z} &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) m_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,x}^*, \\
p_{z,y} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1 + b_2) p_{z,y}^* + b_1 p_{z,x}^*, & m_{z,y} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,z}^* + (1 + b_2) m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^*, \\
p_{z,x} &= \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,z}^* - b_1 p_{z,y}^* + (1 + c_1) p_{z,x}^*, & m_{z,x} &= \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* - b_1 m_{z,y}^* + (1 + c_1) m_{z,x}^*.
\end{aligned}$$

Після підстановки в векторні рівняння розкладів силових та кінематичних характеристик одержуємо систему нелінійних скалярних взаємозв'язаних рівнянь руху відносно силових і кінематичних характеристик [2].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} N + p_{z,z} &= q \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial z} Q_2 + p_{z,y} &= q \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial z} Q_1 + p_{z,x} &= q \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial z} M_k + m_{z,z} + Q_2 \frac{\partial v_0}{\partial z} - Q_1 \frac{\partial w_0}{\partial z} &= \frac{\partial K_z}{\partial t}; \\
\frac{\partial}{\partial z} M_2 + m_{z,y} + Q_1 \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - N \frac{\partial v_0}{\partial z} &= \frac{\partial K_y}{\partial t}; \\
\frac{\partial}{\partial z} M_1 + m_{z,x} + N \frac{\partial w_0}{\partial z} - Q_2 \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) &= \frac{\partial K_x}{\partial t}.
\end{aligned}$$

В результаті підстановки виразів для деформованого стану та нехтуючи величинами порядку малості більше одиниці, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N^*}{\partial z} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} Q_2^* - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} Q_1^* + \left[\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,x}^* \right] &= q \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial Q_2^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} N^* + \frac{\partial b_1}{\partial z} Q_1^* + \left[\frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1 + b_2) p_{z,y}^* + b_1 p_{z,x}^* \right] &= q \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_k^*}{\partial z} - M_2^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - M_1^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + m_{z,z}^* = \frac{\partial K_z}{\partial t}.$$

$$\text{де } K_z = I_z \frac{\partial b_1}{\partial t} + I_{zx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial z}.$$

Для отримання внутрішніх силових зусиль скористаємось узагальненим законом Гука:

$$\sigma_{xx}^* = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{xx},$$

$$\sigma_{yy}^* = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{yy},$$

$$\sigma_{zz}^* = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{zx}^* = 2\mu \varepsilon_{zx}, \quad \sigma_{zy}^* = 2\mu \varepsilon_{zy}, \quad \sigma_{xy}^* = 2\mu \varepsilon_{xy}.$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Підставимо в ці формули (1) та (2) отримуємо:

$$\sigma_{xx}^* = \lambda \frac{\partial u_0}{\partial z} + \lambda b_2 + \lambda \frac{\partial a_2}{\partial z} y + c_1 (\lambda + 2\mu) + \lambda \frac{\partial a_1}{\partial z} x,$$

$$\sigma_{yy}^* = \lambda \frac{\partial u_0}{\partial z} + (\lambda + 2\mu) b_2 + \lambda \frac{\partial a_2}{\partial z} y + c_1 \lambda + \lambda \frac{\partial a_1}{\partial z} x,$$

$$\sigma_{zz}^* = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_0}{\partial z} + \lambda b_2 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial a_2}{\partial z} y + c_1 \lambda + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial a_1}{\partial z},$$

$$\sigma_{xy}^* = \mu (c_2 + b_1), \quad \sigma_{zx}^* = \mu \frac{\partial v_0}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial c_2}{\partial z} y + a_1 + \frac{\partial c_1}{\partial z} x \right),$$

$$\sigma_{zy}^* = \mu \frac{\partial w_0}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial b_2}{\partial z} y + a_2 + \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right).$$

Для випадку деформування конструкції під дією згинаючих та крутильних моментів, а також припускаючи, що $\varepsilon_{xx}^*, \varepsilon_{yy}^* \ll \varepsilon_{zz}^*$, співвідношення спрощуємо до наступного вигляду:

$$\sigma_{zz} = E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} y \right), \quad \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} y, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} x.$$

Для того щоб визначити безпосередньо сили, застосуємо теорію Сен-Венана[3]:

$$Q_1^* = \iiint_{\Omega_z} \sigma_{xz} d\Omega = \iiint_{\Omega_z} \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} y d\Omega_z = \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} W_x;$$

$$Q_2^* = \iiint_{\Omega_z} \sigma_{yz} d\Omega = \iiint_{\Omega_z} \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} x d\Omega_z = \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} W_y;$$

$$\begin{aligned}
N^* &= \iint \sigma_{zz} d\Omega = \iint_{\Omega_z} E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} y \right) d\Omega_z = \\
&= E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \Omega_z - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} W_y - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} W_x \right); \\
M_1^* &= \iint_{\Omega} E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} y - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} xy - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} y^2 \right) d\Omega_z = E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} W_x - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} I_{xy} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} I_y \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2^* &= -\iint x \sigma_{zz} d\Omega = -\iint_{\Omega_z} E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} x - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} x^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} yx \right) d\Omega_z = \\
&= E^* \left(-\frac{\partial u_0}{\partial z} W_y + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} I_{xx} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} I_{xy} \right);
\end{aligned}$$

$$M_k^* = \iint (\sigma_{yz} x - \sigma_{xz} y) d\Omega = \iint_{\Omega_z} \left(\mu \frac{\partial b_1}{\partial z} x^2 - \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} y^2 \right) d\Omega_z = \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} I_{xx} - \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} I_{yy},$$

де $\Omega_z, W_x, W_y, I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$ – площа, статичні моменти та моменти інерції розглядуваного поперечного перерізу крила, $E^* = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$.

Для визначення аеродинамічних зусиль, що діють на крило при його деформуванні, скористаємось формулами, отриманими Теодорсеном [4]:

$$\begin{aligned}
p_{z,y}^* &= -\rho b^2 (U \pi \dot{b}_1 + \pi \ddot{w} - \pi b a \ddot{b}_1) - 2\pi \rho U b C (U \alpha + \dot{w} + b \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{b}_1) \\
m_{z,z}^* &= -\rho b^2 (U^2 \left(\frac{1}{2} - a\right) b \dot{b}_1 + \pi b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \ddot{b}_1 - \pi b \ddot{w}) + \\
&\quad + 2\rho U b^2 \pi \left(a + \frac{1}{2}\right) C (U \alpha + \dot{w} + b \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{b}_1).
\end{aligned}$$

Згрупуємо доданки біля кута атаки, прогинів та їх похідних:

$$\begin{aligned}
p_{z,y}^* &= \dot{b}_1 A_1 + \ddot{b}_1 A_2 + \dot{w} A_3 + A_4 \ddot{w} + A_5; \\
m_{z,z}^* &= \dot{b}_1^* M_1 + \ddot{b}_1^* M_2 + \dot{w}^* M_3 + \ddot{w}^* M_4 + M_5.
\end{aligned}$$

Враховуючи всі отримані результати, кінцеві рівняння будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} W_y + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} E^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \Omega_z - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} W_x \right) + \mu \frac{\partial b_1}{\partial z} \frac{\partial b_1}{\partial z} W_x + p_{z,y}^* &= q \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ E^* \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \Omega_z - \frac{\partial^3 w_0}{\partial z^3} W_x \right) - \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \frac{\partial b_1}{\partial z} W_y - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* &= q \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\ \mu \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} I_{xx} - \mu \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} I_{yy} - E^* \left(-\frac{\partial u_0}{\partial z} W_y + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} I_{xy} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + m_{z,z}^* &= \frac{\partial K_z}{\partial t}, \end{aligned}$$

В рівняннях покладаємо функції $\omega_0 = \omega(z, t) = y(z) * C_1(t)$, $u_0 = u(z, t) = e(z) * C_2(t)$, $b_1 = b_1(z, t) = \Theta(z) * C_3(t)$.

В цих рівняннях $y(z), e(z), \Theta(z)$ – функції прогину балки та кручення крила. Функції прогинів та кутів закручування для консольної балки є загальновідомими і являють собою:

$$y(z) = \frac{p_{z,y}^* z^2}{24EI} (6l^2 - 4lz + z^2), \quad e(z) = z(1 - e^{-\frac{\alpha z}{l}}), \quad \Theta(z) = \sin \frac{\pi z}{2l}.$$

Після усіх підстановок та математичних перетворень остаточно отримуємо систему диференційних рівнянь, що описують коливання крила:

$$\begin{aligned} D_1 * \ddot{C}_1(t) + D_2 * C_1(t) * C_2(t) - D_3 * C_1^2(t) + D_4 * C_3(t) &= \\ = -(\dot{C}_3(t) * A_6 + \ddot{C}_3(t) * A_7 + \dot{C}_1(t) * A_8 + \ddot{C}_1(t) * A_9 + A_5); \\ D_5 * \ddot{C}_2(t) + D_6 * C_2(t) - D_7 * C_1(t) - D_8 * C_1(t) * C_3(t) &= \\ = \dot{y}(z) * C_1(t) * (\dot{C}_3(t) * A_6 + \ddot{C}_3(t) * A_7 + \dot{C}_1(t) * A_8 + \ddot{C}_1(t) * A_9 + A_5); \\ D_9 * \ddot{C}_3(t) + D_{10} * C_3(t) - D_{11} * \ddot{C}_1(t) + D_{12} * C_2(t) * C_1(t) - D_{13} * C_1^2(t) &= \\ = -(\dot{C}_3(t) * M_6 + \ddot{C}_3(t) * M_7 + \dot{C}_1(t) * M_8 + \ddot{C}_1(t) * M_9 + M_5). \end{aligned}$$

Оптимізація

Визначимо математичні функції маси і жорсткості в залежності від внутрішньої конфігурації силових елементів (обшивка, стрингери, лонжерони).

В першому наближенні будемо вважати, що елементи розміщені симетрично (рис.1), тоді розміщення кожного з елементів всередині конструкції (стрингерів та лонжеронів) можна визначити за формулою (3) [5]:

$$\varphi_j(x) = x_i + \frac{j}{n+1} \left((x_{i+1} - x_i) - \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{2} - C \right| \right), \quad (3)$$

де $\varphi_j(x)$ – абсциса j –го силового елемента,

x_i – координата початку розміщення силових елементів,

x_{i+1} – координата закінчення розміщення силових елементів,

n – кількість силових елементів на заданій поверхні,

C – центр, відносно якого будуть розміщені силові елементи.

Крило має такі силові елементи, розміщення яких будемо варіювати: силова обшивка, два лонжерони та по чотири стрингери на нижній та верхній панелях.

Ординату центра мас відповідного силового елемента можна визначити, знаючи аналітичну функцію $f(x)$, що описує контур аеродинамічного профілю.

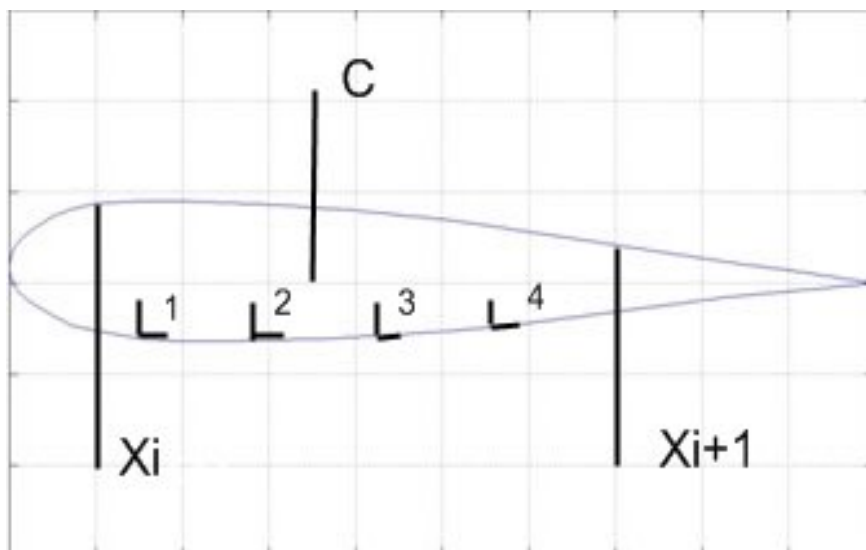


Рис. 1. Схема розміщення силових елементів

Для наочності наведемо залежності моментів інерції крила від функції

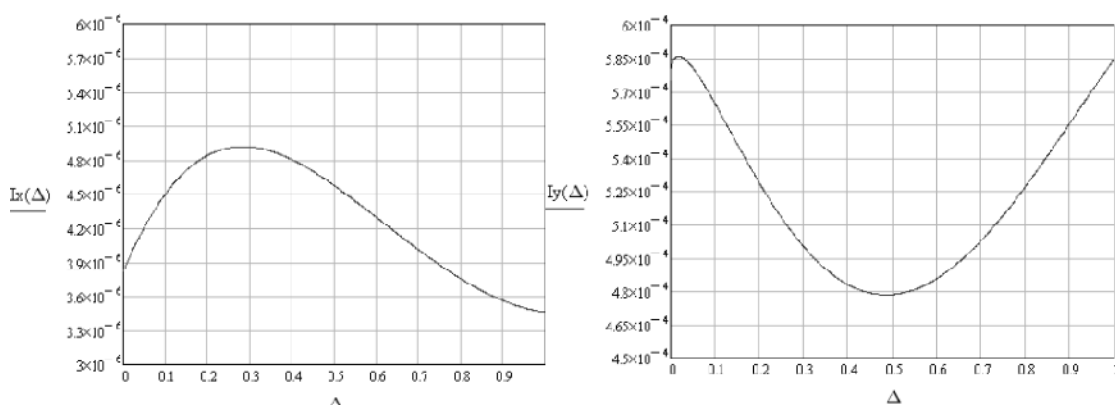


Рис. 2. Залежність сумарних моментів інерції від функції розміщення

Розглянемо тільки картину згинних коливань без впливу інших функцій, ці коливання будуть описуватись рівнянням:

$$D_1 * \ddot{C}_1(t) - D_3 * C_1(t) = -(\dot{C}_1(t) * A_8 + \ddot{C}_1(t) * A_9 + A_5). \quad (4)$$

Згинні коливання крила до і після оптимізації будуть мати вигляд, який показано на рис. 3, що ілюструє формулу (4). Як видно в результаті оптимізації вдалося зменшити амплітуду і частоту коливань, що приведе до зменшення напружень, які діють в елементах силового набору крила.

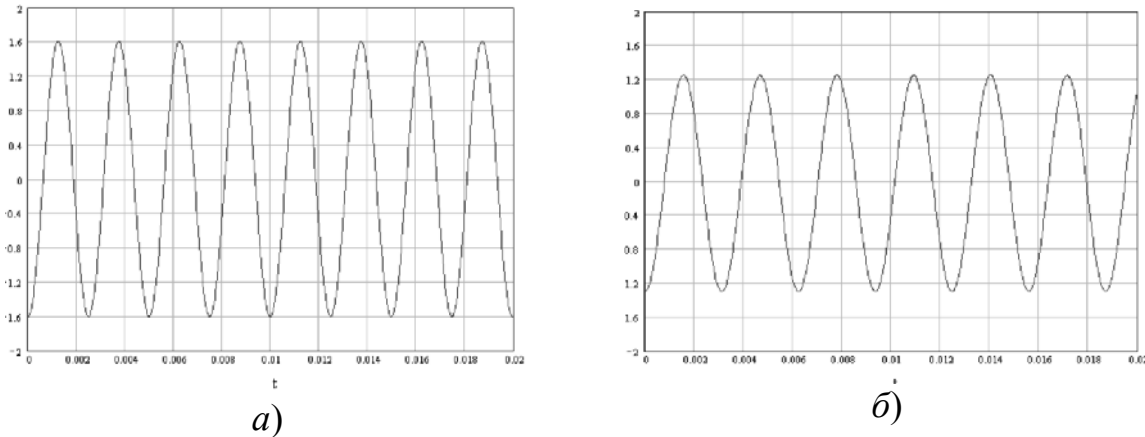


Рис. 3. Коливання крила: *a)* до оптимізації, *б)* після оптимізації

Висновки

В результаті роботи на основі положень просторової теорії пружності були отримані рівняння, що характеризують згинні, крутильні та поздовжні коливання крила, і запропонована математична модель визначення оптимальної жорсткості крила шляхом варіювання функціональної залежності для розміщення силових елементів і варіювання параметрами такої функції.

Отримані результати дали змогу провести оптимізацію внутрішньої структури з точки зору мінімальних деформацій при сталих значеннях маси конструкції досліджуваного крила, а саме зменшити прогини, кути закручення та розтяг силових елементів.

Список використаної літератури

1. Трофимович, В. В. Оптимальное проектирование металлических конструкций [Текст] / В. В. Трофимович // Будівельник 1981. –136 с.
2. Каюк, Я. Ф. Метод побудови характеристик напруженого і деформованого стану крил літаків [Текст] / Я. Ф. Каюк, О. П. Мариношенко //Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – №.3 – С. 83–89.
3. Новожилов, В. В. Теория упру гости [Текст] / В. В. Новожилов//– Ленинград «Судпромгиз», 1948. – 371 с.
4. Theodorsen T. Nasa report №496.

5. *Мариношенко, О. П.* Оптимізація параметрів крила літального апарату [Текст]/О. П. Мариношенко, О. Д. Молодчик, О. І. Сидоренко // Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно–космічної техніки. Збірник доповідей, Ч 3. / НТУУ "КПІ". – 2011.– С. 93–97.