УДК 539.3

К.М. Рудаков, А.І. Яковлєв

МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 4. ЗАГАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ ЛОГАРИФМІЧНОЇ МІРИ ДЕФОРМАЦІЇ ГЕНКІ

The paper considers the general relation of the theory of thermo-plasticity and creep. We apply multiplicative decomposition and Hencky's logarithmic strain for modeling the process of deformation with simultaneous presence of deformations of different type: temperature, elastic, plastic and creep. To this end, we use the second law of thermodynamics, multiplicative decomposition of a gradient of deformations, the exact branch of a temperature component of deformations gradient, experimentally established fact of incompressible metal at irreversible deformations, parity between components of Piola–Kirchhoff's second tensor with Euler–Cauchy's tensor components, asymmetrical Mandel stress tensor. In addition, we consider the specific capacity of internal forces and collect Lagrange's functional. Finally, we determine that associated laws of incremental plasticity and creep theories operate in the main axes of elastic deformations. They are analogous to those applied at infinitesimal deformations. However, we can represent the laws concerning the proposed speeds of plastic deformations and creep deformations by using Noll's stress.

Вступ

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу, є складною та ще не вирішеною проблемою.

У повідомленні 1 [1] розглянуто, яким чином ідею мультиплікативного розкладу Лі градієнта пружно-пластичних деформацій Коші–Гріна можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформації: температурних, пружних, пластичних і повзучості. Отримано вирази (52) і (61), в яких виявляється адитивність швидкостей просторових градієнтів вказаних чотирьох типів деформацій.

У повідомленні 2 [2] наведені теоретичні основи відокремлення температурних деформацій від повних деформацій та визначення напружень при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями різного типу при застосуванні міри деформацій Гріна–Лагранжа.

У повідомленні 3 [3] подані теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі для моделювання процесу деформування з великими деформаціями різного типу.

Постановка задачі

Мета роботи – встановити загальні співвідношення теорії термопластичності та повзучості при застосуванні мультиплікативного розкладу і логарифмічної міри деформації Генкі для моделювання процесу деформування з одночасною наявністю деформацій різного типу: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Застосовували декартову систему координат. Матеріал – ізотропний метал.

Відокремлення температурного градієнта деформацій

Відповідно до статті [2], після відокремлення температурних деформацій маємо

$$[X^{epc}] = \frac{[X]}{\vartheta(\theta)};$$

$$J^{epc} = \det[X^e]\det[X^p]\det[X^c] = \frac{J}{J^\theta}, \qquad (1)$$

де якобіан $J = \det[X] > 0$;

$$\vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0);\ J^\theta = \det[X^\theta] = \vartheta^3(\theta);$$

$$[X^\theta] = \vartheta(\theta)\,[I]; \qquad (2)$$

матриця $[X]$ містить компоненти градієнта руху; верхні індекси ^{e}, ^{p}, ^{c}, $^\theta$ позначають типи деформацій: пружні, пластичні, повзучості та температурні відповідно; $\bar{\alpha}_\theta = \bar{\alpha}_\theta(\theta)$ є “січним” коефіцієнтом температурного подовження (SCTE, див. формулу (47) з [2]).

Градієнти необоротних деформацій. Врахування нестисливості при необоротному деформуванні

Будемо вважати, що компоненти матриць $[X^p]$ і $[X^c]$ є відомими (прогнозними, які уточнюються). Тоді відомими (теж прогнозними) є компоненти

$$[X^e] = [X^{epc}]\,[X^p]^{-1}[X^c]^{-1}, \tag{3}$$

де матриця $[X^{epc}]$ відповідає (1).

У теоріях пластичності та повзучості зазвичай враховується експериментально підтверджений факт, що при не дуже великих величинах всебічного тиску об'єм елемента матеріалу (металічного) від непружного деформування практично не змінюється [4, 5], тому, як правило, приймають, що $J^p = \det[X^p] = 1;$ $J^c = \det[X^c] = 1,$ тоді з (2) $J^e = \det[X^e] = \dfrac{J}{J^\theta}$.

Оскільки для металів $\vartheta(\theta) > 0$, то, відповідно до (1) та (2), завжди виконуються умови

$$J^{epc} > 0; J^e > 0. \tag{4}$$

Пружні деформації

Оскільки $J^e > 0$, то до пружної частини градієнта деформації $[X^e]$, отриманої в (3), можна застосувати полярний розклад Коші [6]:

$$[X^e] = [R^e]\,[\upsilon^e_R]. \tag{5}$$

При цьому, після знаходження матриці $[C^e] = [X^e]^T[X^e] = [\upsilon^e_R]^T[\upsilon^e_R]$, з системи $[C^e]\,[W^e_R] = [\lambda^e]\,[W^e_R]$ можна знайти діагональну матрицю її власних значень $[\lambda^e]$ і матрицю власних векторів $[W^e_R]$, визначити головні компоненти градієнта пружних переміщень $[\underline{\upsilon}^e] = [\lambda^e]^{1/2}$, а потім – матрицю $[\upsilon^e_R] = [W^e_R]\,[\underline{\upsilon}^e]\,[W^e_R]^T$, а також компоненти правих тензорів пружних деформацій Гріна–Лагранжа та Генкі (див. формули (11) з [2] та (1) з [3]):

$$[\in^e] = 0,5([\upsilon^e_R]^T[\upsilon^e_R] - [I]);$$

$$[\in^e]_H = [W^e_R]\,[\underline{\Lambda}^e]_H[W^e_R]^T, \tag{6}$$

де матриця $[\underline{\Lambda}^e]_H$ містить тільки діагональні компоненти зі значеннями головних компонент пружних логарифмічних деформацій Генкі $(\underline{\Lambda}^e_{ii})_H = \ln\sqrt{\lambda^e_{ii}};$ $i = 1, 2, 3$ (див. вираз (2) з [3]); $[I]$ – одинична матриця.

Енергія внутрішніх сил. Тензор напружень Менделя

Для встановлення загальних співвідношень деформівного матеріалу зазвичай застосовують закони термодинаміки, зокрема, другий закон у вигляді нерівності Клаузіуса–Дюгема. Розглянемо потужність питомої внутрішньої енергії $\dot{e} = \dfrac{\sigma^{mn}d_{mn}}{\bar{\rho}};$ $m, n = 1, 2, 3,$ для нерівності Клаузіуса–Дюгема (15) з [2]. Відповідно до (7) з [3] маємо (у матричному позначенні)

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma] : [d]) = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 : [\dot{\in}], \tag{7}$$

де $\bar{\rho}$ та $\bar{\rho}_0$ є, відповідно, поточною та початковою густиною матеріалу; $J = \dfrac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}}$; знак ":" між матрицями вказує на операцію згортання (подвійного скалярного перемноження), результат якої – число, тобто $[\sigma] : [d] = \sigma^{mn}d_{mn}$. Відзначимо, що

$$[\sigma] : [d] = [d] : [\sigma];\; [\underset{\sim}{\sigma}]_0 : [\dot{\in}] = [\dot{\in}] : [\underset{\sim}{\sigma}]_0. \tag{8}$$

Згідно з формулою (3) із [3] матриця з компонентами другого тензора Піола–Кірхгофа $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ пов'язана з матрицею $[\sigma]$ з компонентами тензора Ейлера–Коші співвідношенням

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}[\sigma]\,[X]^{-T}. \tag{9}$$

Із використанням виразу (17) із [2], а саме $[\dot{\in}] = [X]^T[d]\,[X]$, а також формули (9), запишемо, що

$$[\dot{\in}] : [\underset{\sim}{\sigma}]_0 = ([X]^T[d]\,[X]) : (J[X]^{-1}[\sigma]\,[X]^{-T}). \tag{10}$$

Є така властивість згортання двох матриць, яка зазвичай використовується у схожій ситуації [7]:

$$[A] : [B] = ([B]^T[A]) : [I] = \mathrm{tr}([B]^T[A]), \tag{11}$$

де $\mathrm{tr}([\bullet]) = \bullet_{11} + \bullet_{22} + \bullet_{33}$. Тому (10) запишемо як

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = [\dot{\epsilon}]:[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = (J[X]^{-1}[\sigma]^T[X]^{-T})\times$$
$$\times\,([X]^T[d]\,[X]):[I] =$$
$$= J\,([X]^{-1}[\sigma]\,[d]\,[X]):[I]. \qquad (12)$$

Враховано: друга формула з (8) і симетричність матриці $[\sigma]$.

Оскільки згідно з (7) $\bar{\rho}_0\dot{e} = J([d]:[\sigma]) = J([\sigma][d]):[I]$, то порівняння правих частин цього виразу та формули (12) дає рівність $([X]^{-1}[\sigma][d][X]):[I] = ([\sigma][d]):[I]$. Це дає можливість зробити висновок, що для будь-яких симетричних матриць $[A]$ і $[B]$ та несиметричної матриці $[Z]$ виконуються тотожні рівності:

$$([Z]^{-1}[B]\,[A]\,[Z]):[I] \equiv$$
$$\equiv ([B]\,[A]):[I] \equiv [A]:[B]. \qquad (13a)$$

Можна показати, що є ще наступні (потрібні нижче) властивості матриць (матриці $[A]$ і $[B]$ – симетричні):

$$([B]^T[A]):[I] \equiv ([Z]\,[B]^T[A]\,[Z]^{-1}):[I];$$

$$([A]\,[B])^T \equiv [B]^T[A]^T; \qquad (13б)$$

$$([A]\,[B]\,[Z]):[I] \equiv ([A]\,[Z]^T[B]):[I]; \qquad (13в)$$

$$[A]:[B]\,[Z] \equiv [B]\,[A]:[Z]. \qquad (13г)$$

Зазначимо, що з першого рівняння (24) з [1], а саме з $[\epsilon^e] = 0,5([X^e]^T[X^e]-[I]) = 0,5([C^e]-[I])$, маємо

$$[\dot{\epsilon}^e] = \frac{d(0,5([C^e]-[I]))}{dt} = \frac{[\dot{C}^e]}{2}. \qquad (14)$$

З другого рівняння (24) з [1], а саме $[\epsilon] = 0,5([X]^T[X]-[I]) = 0,5([C]-[I])$, із врахуванням (19) і (57) з [1], а саме $[X] = [X^e]\,[X^p]\,[X^c]\,[X^\theta]$ і $[X^e]^T[X^e] = [C^e]$ відповідно, отримаємо, що

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{d(0,5([X]^T[X]-[I]))}{dt} =$$
$$= \frac{0,5d(([X^e][X^p][X^c][X^\theta])^T[X^e][X^p][X^c][X^\theta]-[I])}{dt} =$$
$$= 0,5\,([\dot{X}^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[\dot{X}^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[\dot{X}^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[\dot{C}^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][\dot{X}^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[\dot{X}^p]^T[C^e][X^p][\dot{X}^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][\dot{X}^\theta]). \qquad (15)$$

Наступною формулою вводимо матрицю напружень $[\bar{S}]$:

$$[\bar{S}] = J[X^e]^{-1}[\sigma]\,[X^e]^{-T}, \qquad (16)$$

звідки отримаємо

$$[\sigma] = \frac{[X^e]\,[\bar{S}]\,[X^e]^T}{J}. \qquad (17)$$

Підставимо (17) у (9), при цьому застосуємо (19) з [1]:

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}\left(\frac{[X^e]\,[\bar{S}]\,[X^e]^T}{J}\right)[X]^{-T} =$$
$$= [X^\theta]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}[\bar{S}]\,[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^\theta]^{-T}. \qquad (18)$$

Із використанням (7), (11), (15) та (18) отримаємо:

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = [\dot{\epsilon}]:[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = ([\underset{\sim}{\sigma}]_0[\dot{\epsilon}]):[I] =$$
$$= \left(\frac{[X^\theta]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}[\bar{S}][X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^\theta]^{-T}}{2}\times\right.$$
$$\times([\dot{X}^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[\dot{X}^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[\dot{X}^p]^T[C^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[\dot{C}^e][X^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][\dot{X}^p][X^c][X^\theta] +$$
$$+ [X^\theta]^T[X^c]^T[\dot{X}^p]^T[C^e][X^p][\dot{X}^c][X^\theta] +$$
$$\left.+ [X^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e][X^p][X^c][\dot{X}^\theta])\right):[I]. \qquad (19)$$

Кожну з семи складових частин (19) перепишемо із врахуванням властивостей матриць (13а) і (13б), формул (31), (30), (29) з [1], (14), а потім ще (29), (30) і (31) з [1] відповідно:

$$(\underline{[X^\theta]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}}[\bar{S}]\,[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^\theta]^{-T}\times$$
$$\times[\dot{X}^\theta]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e]\underline{[X^p]\,[X^c]\,[X^\theta]}):[I] =$$
$$= ([\bar{S}]\,[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}([\dot{X}^\theta]\,[X^\theta]^{-1})^T\times$$
$$\times[X^c]^T[X^p]^T[C^e]):[I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[\underset{\sim}{L}^{\theta}]^T[X^c]^T[X^p]^T[C^e]) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}]^T[C^e]) : [I]; \qquad (20)$$

$$(\underline{[X^{\theta}]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}}[\bar{S}]\,[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}\underline{\underline{[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T}}[\dot{X}^c]^T[X^p]^T[C^e]\underline{[X^p]\,[X^c]\,[X^{\theta}]}) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{c}]^T[C^e]) : [I]; \qquad (21)$$

$$(\underline{[X^{\theta}]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}}[\bar{S}]\,[X^p]^{-T}\underline{\underline{[X^c]^{-T}[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T[X^c]^T}}[\dot{X}^p]^T[C^e]\underline{[X^p]\,[X^c]\,[X^{\theta}]}) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{p}]^T[C^e]) : [I]; \qquad (22)$$

$$(\underline{[X^{\theta}]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}}[\bar{S}]\underline{\underline{[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T[X^c]^T[X^p]^T}}[\dot{C}^e]\underline{[X^p]\,[X^c]\,[X^{\theta}]}) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[\dot{C}^e]) : [I] = 2([\bar{S}]\,[\dot{\in}^e]) : [I]; \qquad (23)$$

$$(\underline{[X^{\theta}]^{-1}[X^c]^{-1}}[X^p]^{-1}[\bar{S}]\underline{\underline{[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T[X^c]^T[X^p]^T}}[C^e]\,[\dot{X}^p]\underline{[X^c]\,[X^{\theta}]}) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{p}]) : [I]; \qquad (24)$$

$$(\underline{[X^{\theta}]^{-1}}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}[\bar{S}]\underline{\underline{[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T[X^c]^T[X^p]^T}}[C^e]\,[X^p]\,[\dot{X}^c]\underline{[X^{\theta}]}) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{c}]) : [I]; \qquad (25)$$

$$([X^{\theta}]^{-1}[X^c]^{-1}[X^p]^{-1}[\bar{S}]\underline{\underline{[X^p]^{-T}[X^c]^{-T}[X^{\theta}]^{-T}}} \times$$

$$\times \underline{\underline{[X^{\theta}]^T[X^c]^T[X^p]^T}}[C^e]\,[X^p]\,[X^c]\,[\dot{X}^{\theta}]) : [I] =$$

$$= ([\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}]) : [I]. \qquad (26)$$

Підкреслені частини виразів взаємно скорочуються відповідно до формул (13*а*) і (13*б*).

Підставимо рівняння (20)–(26) у (19); із застосуванням (13*в*), а потім (11). Тоді отримаємо

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = [\dot{\in}] : [\underset{\sim}{\sigma}]_0 = 0,5([\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}]^T[C^e] + [\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{c}]^T[C^e] +$$

$$+ [\bar{S}]\,[\underset{\sim}{L}^{p}]^T[C^e] + 2[\bar{S}]\,[\dot{\in}^e] + [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{p}] +$$

$$+ [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{c}] + [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}]) : [I] = ([\bar{S}]\,[\dot{\in}^e] +$$

$$+ [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{p}] + [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{c}] + [\bar{S}]\,[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}]) : [I] =$$

$$= ([\dot{\in}^e] + [C^e]([\underset{\sim}{L}^{p}] + [\underset{\sim}{L}^{c}] + [\underset{\sim}{L}^{\theta}])) : [\bar{S}] =$$

$$= [\bar{S}] : ([\dot{\in}^e] + [C^e]([\underset{\sim}{L}^{p}] + [\underset{\sim}{L}^{c}] + [\underset{\sim}{L}^{\theta}])). \qquad (27)$$

Відповідно до виразів (56), (58) та (59) з [1] $[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{p}] = [\bar{L}^p]$; $[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{c}] = [\bar{L}^c]$; $[C^e]\,[\underset{\sim}{L}^{\theta}] = [\bar{L}^{\theta}]$, тому вираз (27) можна записати так:

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = [\bar{S}] : ([\dot{\in}^e] + [\bar{L}^p] + [\bar{L}^c] + [\bar{L}^{\theta}]). \qquad (28)$$

З використанням формул (40), (32) та (55) з [1], а саме $[d^e] = \dfrac{([L^e] + [L^e]^T)}{2}$, $[L^e] = [\dot{X}^e]\,[X^e]^{-1}$ та $[\bar{L}^e] = [X^e]^T[\dot{X}^e]$, а також відповідно до (6) з [3], тобто $[\dot{\in}] = [X]^T[d]\,[X]$, можемо отримати, що

$$[\dot{\in}^e] = [X^e]^T[d^e]\,[X^e] = \frac{[X^e]^T([L^e] + [L^e]^T)\,[X^e]}{2} =$$

$$= \frac{([\bar{L}^e] + [\bar{L}^e]^T)}{2} = [\bar{d}^e], \qquad (29)$$

тобто у формулі (28) замість $[\dot{\in}^e]$ можна застосовувати $[\bar{d}^e]$. Використовуємо вираз (60) з [1]:

$$[\bar{d}^e] = [\bar{L}^e] - [\bar{w}^e], \qquad (30)$$

то маємо право вважати, що потужність напружень $[\bar{S}]$ на вихорі “модифікованого швидкісного тензора пружних деформацій” $[\bar{w}^e]$ тотожно дорівнює нулю:

$$[\bar{S}] : [\bar{w}^e] \equiv 0. \qquad (31)$$

Таке твердження можемо знайти в деяких публікаціях, наприклад, у [8, 9], але без доказів.

Із врахуванням (31) запишемо тепер (28) як

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma] : [d]) =$$

$$= [\bar{S}] : ([\bar{L}^e] + [\bar{L}^p] + [\bar{L}^c] + [\bar{L}^{\theta}]). \qquad (32)$$

З огляду на (54) з [1], а саме $[\bar{L}] = [\bar{L}^e] + [\bar{L}^p] + [\bar{L}^c] + [\bar{L}^{\theta}]$, вираз (32) набув вигляду

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma] : [d]) = [\bar{S}] : [\bar{L}]. \qquad (33)$$

Формула (33) дає ще один варіант еквівалентності формулювання потужності внутрішніх сил, що застосовують, наприклад, у [8, 9].

Враховуючи симетричність матриць $[\bar{S}]$ і $[C^e]$, а також (29), з (27) після застосування (13г) знаходимо

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) =$$

$$= [\bar{S}]:[\bar{d}^e] + [C^e][\bar{S}]:([\underset{\sim}{L}^p] + [\underset{\sim}{L}^c] + [\underset{\sim}{L}^\theta]). \qquad (34)$$

Вираз (34) містить симетричні матриці $[C^e]$ та $[\bar{S}]$. Маємо таку матрицю:

$$[\Xi] = [C^e][\bar{S}]. \qquad (35)$$

Вона не обов'язково симетрична, оскільки відомо, що в загальному випадку операція перемноження симетричних матриць не дає симетричну матрицю. Компоненти матриці $[\Xi]$ є компонентами несиметричного тензора напружень Менделя $\{\Xi\}$ [10].

Підставимо (16) у (35). Із врахуванням, що $[C^e] = [X^e]^T[X^e]$, отримуємо зв'язок між напруженнями Менделя $[\Xi]$ та Ейлера–Коші $[\sigma]$:

$$[\Xi] = [X^e]^T[X^e][\bar{S}] = J[X^e]^T[\sigma][X^e]^{-T}. \qquad (36)$$

Вираз (34) змінимо на

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) =$$

$$= [\bar{S}]:[\bar{d}^e] + [\Xi]:([\underset{\sim}{L}^p] + [\underset{\sim}{L}^c] + [\underset{\sim}{L}^\theta]). \qquad (37)$$

Представимо матриці $[\underset{\sim}{L}^p]$, $[\underset{\sim}{L}^c]$ і $[\underset{\sim}{L}^\theta]$ як суми їх симетричних і несиметричних частин (див. (37)–(39), (44)–(46) з [1]): $[\underset{\sim}{L}^p] = [\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{w}^p]$; $[\underset{\sim}{L}^c] = [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{w}^c]$; $[\underset{\sim}{L}^\theta] = [\underset{\sim}{d}^\theta] + [\underset{\sim}{w}^\theta]$.

Тепер запишемо (37) як

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) = [\bar{S}]:[\bar{d}^e] +$$

$$+ [\Xi]:([\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{w}^p] + [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{w}^c] + [\bar{d}^\theta] + [\bar{w}^\theta]). \qquad (38)$$

Матрицю $[\Xi]$ можна завжди записати у вигляді $[\Xi] = [\Xi]_s + [\Xi]_w$, тут матриця $[\Xi]_s$ – симетрична, а матриця $[\Xi]_w$ – несиметрична. Складові частини матриці $[\Xi]_s$: $[\Xi]_s = \dfrac{[\Xi] + [\Xi]^T}{2} = \dfrac{[C^e][\bar{S}] + [\bar{S}][C^e]}{2}$; $[\Xi]_w = \dfrac{[\Xi] - [\Xi]^T}{2} = \dfrac{[C^e][\bar{S}] - [\bar{S}][C^e]}{2}$.

Примітка. Вираз типу $[[A],[B]] = [A][B] - [B][A]$ називають "дужками Якобі". Якщо $[[A],[B]] = [0]$, то це вказує на симетричність матриці $[Y] = [A][B]$ і на комутативність матриць $[A]$ і $[B]$.

Вважається, що симетричний тензор Менделя створює потужність на модифікованому швидкісному тензорі пластичних деформацій [8], повзучості та температурних, а несиметричний – на їх вихорі (про це йшлось в [1] після формули (52)). Для ізотропного матеріалу $[\underset{\sim}{w}^\theta] = [0]$. Отже, для ізотропного матеріалу $[\Xi]_s:([\underset{\sim}{w}^p] + [\underset{\sim}{w}^c]) = [\Xi]_w:([\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{d}^\theta]) = 0$.

Потужність на вихорі є наслідком кінематичного зміцнення матеріалу при непружному деформуванні, коли осі пружної анізотропії змінюють своє положення [8]. Зазвичай вважається, що при повзучості кінематичного зміцнення матеріалу немає, тобто можна прийняти $[\Xi]_w:[\underset{\sim}{w}^c] = 0$.

Враховуючи ці обставини, вираз (38) змінюється і має вигляд

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) = [\bar{S}]:[\bar{d}^e] +$$

$$+ [\Xi]_s:([\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{d}^\theta]) + [\Xi]_w:[\underset{\sim}{w}^p]. \qquad (39)$$

В індексній формі запису отримуємо

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J\sigma^{mn}d_{mn} = \bar{S}^{mn}\bar{d}^e_{mn} +$$

$$+ (\Xi^{mn})_s(\underset{\sim}{d}^p_{mn} + \underset{\sim}{d}^c_{mn} + \underset{\sim}{d}^\theta_{mn}) + (\Xi^{mn})_w\underset{\sim}{w}^p_{mn}. \qquad (40)$$

Для ізотропних матеріалів при їх зміцненні виконується умова $[\Xi]_w:[\underset{\sim}{w}^p] = 0$. Тоді з (39) знаходимо

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) =$$

$$= [\bar{S}]:[\bar{d}^e] + [\Xi]_s:([\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{d}^\theta]). \qquad (41)$$

Отже, вирази (39)–(41) описують питому потужність внутрішніх сил (7), тобто $\bar{\rho}_0\dot{e} = J([\sigma]:[d]) = [\underset{\sim}{\sigma}]_0:[\dot{\in}]$ для ізотропного матеріалу з ізотропно-кінематичним та ізотропним зміцненням відповідно.

Загальні рівняння інкрементальних теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях

Застосуємо другий закон термодинаміки у вигляді нерівності Клаузіуса–Дюгема (див. вирази (23) з [2]):

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \bar\rho\bar\omega;\ \Phi_2 = -\frac{q_m}{\theta}\nabla_m\theta;$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \ge 0, \qquad (42)$$

де Φ_1 називають власною об'ємною дисипацією; Φ_2 – об'ємною тепловою дисипацією. Згідно з виразом (20) з [2] питома потужність, отримана елементарним об'ємом, має вигляд

$$\bar\omega = \dot\psi + s\dot\theta. \qquad (43)$$

Тут s є ентропією, а $\bar\omega$ можна подати як скалярний добуток двох векторів: $\bar\omega = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \dot\chi_k$. Будемо вважати, що задачі теплопровідності та деформування не є зв'язаними, тому (42) змінюється так:

$$\Phi_2 = 0;\ \Phi = \Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \bar\rho\bar\omega \ge 0. \qquad (44)$$

Застосуємо вираз (25) з [2] для питомої вільної енергії системи, тобто

$$\psi = \psi^e(\theta, \in_{ij}^e) + \psi^{pc}(\theta, \xi_{ij}, \zeta, \varsigma) + \psi^\theta(\theta). \qquad (45)$$

Для (43) з (45) можна отримати, що

$$\dot\psi = \frac{\partial\psi^e}{\partial \in_{mn}^e}\dot\in_{mn}^e + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\xi_{mn}}\dot\xi_{mn} + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\zeta}\dot\zeta + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\varsigma}\dot\varsigma +$$

$$+\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta}\right)\dot\theta. \qquad (46)$$

З використанням (3) з [2], а саме $X_{ni}^\theta = \delta_{ni}\vartheta(\theta)$, маємо, що $\dot X_{ni}^\theta = \delta_{ni}\dfrac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\dot\theta$. Тепер вираз (31) з [1] можна записати у вигляді $(\underset{\sim}{L}_{mn})^\theta = A_{mn}^\theta\dot\theta$, де використана матриця $[A^\theta]$ з компонентами:

$$A_{mn}^\theta = \frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}(X_{mj})^p(X_{ji})^c((X_{si})^\theta)^{-1}((X_{rs})^c)^{-1}((X_{nr})^p)^{-1}.$$

З третього виразу (2) $((X_{si})^\theta)^{-1} = \dfrac{\delta_{is}}{\vartheta(\theta)}$, тому $A_{mn}^\theta = \dfrac{1}{\vartheta(\theta)}\dfrac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\delta_{mn}$. Тепер для (40) отримуємо, що для ізотропного матеріалу

$$\underset{\sim}{d}_{mn}^\theta = 0,5(A_{mn}^\theta + A_{nm}^\theta)\dot\theta =$$

$$= A_{mn}^\theta\dot\theta = \frac{1}{\vartheta(\theta)}\frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\delta_{mn}\dot\theta. \qquad (47)$$

Відповідно до (29) $\dot\in_{mn}^e = \bar d_{mn}^e$. Тепер другий вираз (44) з використанням (40), (46), (47) та із врахуванням $\dfrac{\bar\rho_0}{\bar\rho} = J$ записуємо як

$$J\Phi = \bar S^{mn}\bar d_{mn}^e + (\Xi^{mn})_s(\underset{\sim}{d}_{mn}^p + \underset{\sim}{d}_{mn}^c) + (\Xi^{mn})_w \underset{\sim}{w}_{mn}^p -$$

$$-\bar\rho_0\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial \in_{mn}^e}\bar d_{mn}^e + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\xi_{mn}}\dot\xi_{mn} + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\zeta}\dot\zeta + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\varsigma}\dot\varsigma\right) +$$

$$+\bar\rho_0\left((\Xi^{mn})_s\frac{1}{\vartheta(\theta)}\frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\delta_{mn} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta}\right)\right)\dot\theta \ge 0. \qquad (48)$$

При відсутності необоротних і температурних деформацій знак "$\ge$" має змінитися на знак рівності. Тоді із залишків (48): $\left(\bar S^{mn} - \bar\rho_0\dfrac{\partial\psi^e}{\partial \in_{mn}^e}\right)\bar d_{mn}^e = 0$. Із врахуванням довільності $\bar d_{mn}^e$, отримуємо

$$\bar S^{mn} = \bar\rho_0\frac{\partial\psi^e}{\partial \in_{mn}^e}. \qquad (49)$$

Введемо такі величини:

$$\beta^{mn} = -\bar\rho_0\frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\xi_{mn}};\ k^p = -\bar\rho_0\frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\zeta};$$

$$k^c = -\bar\rho_0\frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\varsigma}, \qquad (50)$$

згідно з (43), позначаємо ентропію s:

$$s = -\left((\Xi^{mn})_s\frac{1}{\vartheta(\theta)}\frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\delta_{mn} + \left(\frac{\partial\psi^e}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi^{pc}}{\partial\theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta}\right)\right). \qquad (51)$$

Із врахуванням (49)–(51) вираз (48) змінюється на такий:

$$J\Phi = (\Xi^{mn})_s(\underset{\sim}{d}_{mn}^p + \underset{\sim}{d}_{mn}^c) + (\Xi^{mn})_w\underset{\sim}{w}_{mn}^p +$$

$$+\beta^{mn}\dot\xi_{mn} + k^p\dot\zeta + k^c\dot\varsigma + \bar\rho_0 s\dot\theta \ge 0. \qquad (52)$$

Для подальшого аналізу в подібних ситуаціях зазвичай збирають функціонал Лагранжа з невідомими множниками ($\dot\lambda^p$ та $\dot\lambda^c$):

$$\mathcal{L} = J\Phi - \dot\lambda^p g - \dot\lambda^c f. \qquad (53)$$

У функціоналі для кожного i-го параметра має виконуватися умова

$$\nabla_i \mathcal{L} = 0. \quad (54)$$

Функція g обмежує опуклу область значень напружень, які матеріал може отримати при пластичному деформуванні; параметрами має величини $(\Xi^{mn})_s$, $(\Xi^{mn})_w$, β^{mn} та k^p, тобто

$$g = g((\Xi^{mn})_s, (\Xi^{mn})_w, \beta^{mn}, k^p). \quad (55)$$

Вводимо опуклу функцію f, яка контролює швидкість процесів повзучості; параметрами має величини $(\Xi^{mn})_s$ та k^c, тобто

$$f = f((\Xi^{mn})_s, k^c). \quad (56)$$

Після підставлення (52) в (53) спочатку запишемо загальний вираз для $\nabla\mathcal{L}$:

$$\nabla\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\Xi^{mn})_s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\Xi^{mn})_w} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta_{mn}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k^p} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k^c} -$$

$$-\dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_s} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_w} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial\beta^{mn}} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial k^p} -$$

$$-\dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_s} - \dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial k^c} =$$

$$= \underset{\sim}{d}^p_{mn} + \underset{\sim}{d}^c_{mn} + \underset{\sim}{w}^p_{mn} + \dot{\xi}_{mn} + \dot{\zeta} + \dot{\varsigma} -$$

$$-\dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_s} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_w} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial\beta^{mn}} - \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial k^p} -$$

$$-\dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_s} - \dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial k^c}. \quad (57)$$

Виконуючи умову (54) для кожного з параметрів, з (57) із врахуванням (55) і (56) отримуємо

$$\underset{\sim}{d}^p_{mn} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_s};\; \underset{\sim}{w}^p_{mn} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_w};$$

$$\dot{\xi}_{mn} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial\beta^{mn}};\; \dot{\zeta} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial k^p};\; m,n = 1,2,3, \quad (58)$$

$$\underset{\sim}{d}^c_{mn} = \dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_s};\; \dot{\varsigma} = \dot{\lambda}^c \frac{\partial f}{\partial k^c};$$

$$m,n = 1,2,3. \quad (59)$$

Вирази (58) і (59) – рівняння інкрементальних асоційованих теорій термопластичності та повзучості відповідно при великих деформаціях.

Отримано характерний для асоційованих теорій пластичності та повзучості загальний вигляд записів законів, що застосовуються для нескінченно малих деформацій. Винятком є тільки другий вираз у (58), оскільки при нескінченно малих деформаціях і жорстких поворотах поворотом головних осей напружень нехтують. Але в металах з ізотропною орієнтацією зерен, як правило, вважається, що всі компоненти $\underset{\sim}{w}^p_{mn} = 0$, внаслідок чого $\underset{\sim}{d}^p_{mn} = \underset{\sim}{L}^p_{mn}$ та відсутності потреби у застосуванні другого виразу (58).

Компоненти β^{mn} відповідають компонентам тензора "мікронапружень", що визначають "кінематичне" зміцнення, а параметр k^p характеризує ізотропне зміцнення матеріалу, що відбувається внаслідок накопичення пластичних деформацій; параметр k^c визначає ізотропне зміцнення матеріалу, що відбувається внаслідок накопичення деформацій повзучості (зазвичай припускається, що "кінематичне" зміцнення при накопиченні деформацій повзучості не виникає). Тому компоненти $\dot{\xi}_{mn}$ визначають швидкість процесу "кінематичного" зміцнення матеріалу, а $\dot{\zeta}$ та $\dot{\varsigma}$ – ізотропного.

Загальні рівняння інкрементальних теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях та застосуванні логарифмічних деформацій Генкі

Відповідно до (41) з [3] пружна частина потужності внутрішніх сил $\bar{\rho}_0\dot{e}^e = J\sigma^{mn}d^e_{mn} = J\underline{\Sigma}^i(\dot{\underline{\epsilon}}^e_i)_H = \underline{T}^i(\dot{\underline{\epsilon}}^e_i)_H$; $i,m,n = 1,2,3$. В індексній формі запису вирази (40) і (41) можна переписати із застосуванням головних компонент тензора напружень, зокрема, й напружень Нолла $\underline{T}^i$, у вигляді

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = \underline{T}^i(\dot{\underline{\epsilon}}^e_i)_H + (\underline{\Xi}^i)_s(\underset{\sim}{\underline{d}}^p_i + \underset{\sim}{\underline{d}}^c_i + \underset{\sim}{\underline{d}}^\theta_i) + (\underline{\Xi}^i)_w \underset{\sim}{\underline{w}}^p_i,$$
$$i = 1,2,3; \quad (60)$$

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = \underline{T}^i(\dot{\underline{\epsilon}}^e_i)_H + (\underline{\Xi}^i)_s(\underset{\sim}{\underline{d}}^p_i + \underset{\sim}{\underline{d}}^c_i + \underset{\sim}{\underline{d}}^\theta_i),$$
$$i = 1,2,3. \quad (61)$$

Останній вираз відповідає матеріалу з пружною ізотропією, коли всі компоненти $(\underline{\Xi}^i)_w = 0$.

Визначимося зі зв’язком між компонентами тензора напружень Нолла $\underline{T}^i$ і симетричної частини тензора напружень Менделя $(\underline{\Xi}^i)_s$. Із врахуванням (36) спочатку запишемо, що

$$[\Xi]_s = \frac{[\Xi]+[\Xi]^T}{2} =$$

$$= J\,\frac{[X^e]^T[\sigma][X^e]^{-T} + [X^e]^{-1}[\sigma][X^e]}{2}. \qquad (62)$$

Виразом (4) з [3] були введені напруження Нолла $[T] = J[R]^T[\sigma][R]$. Оскільки тут напруження розглядаються в проміжному просторі, де є тільки пружні переміщення, то приймаємо $[T] = J^e[R^e]^T[\sigma][R^e]$. З використанням цього виразу, полярної декомпозиції $[X^e] = [R^e][\upsilon_R^e]$ і властивості матриці повороту $[R^e]^{-T} = [R^e]$, з (62) можемо записати, що симетрична частина напружень Менделя дорівнює

$$[\Xi]_s = \frac{J^e}{2}([\upsilon_R^e]^T[R^e]^T[\sigma][R^e]^{-T}[\upsilon_R^e]^{-T} +$$

$$+ [\upsilon_R^e]^{-1}[R^e]^{-1}[\sigma][R^e][\upsilon_R^e]) =$$

$$= \frac{[\upsilon_R^e]^T[T^e][\upsilon_R^e]^{-T} + [\upsilon_R^e]^{-1}[T^e][\upsilon_R^e]}{2}. \qquad (63)$$

У головних осях пружних деформацій вираз (63) спрощується і має вигляд

$$(\underline{\Xi}^i)_s = \underline{T}^i. \qquad (64)$$

Отже, формули (60) і (61) можемо відповідно переписати із застосуванням (64) так:

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = \underline{T}^i((\dot{\underline{\in}}_i^e)_H + \underset{\sim}{d}_i^p + \underset{\sim}{d}_i^c + \underset{\sim}{d}_i^\theta) + (\underline{\Xi}^i)_w \underset{\sim}{w}_i^p,$$
$$i = 1,2,3, \qquad (65)$$

$$\bar{\rho}_0\dot{e} = \underline{T}^i((\dot{\underline{\in}}_i^e)_H + \underset{\sim}{d}_i^p + \underset{\sim}{d}_i^c + \underset{\sim}{d}_i^\theta),$$
$$i = 1,2,3. \qquad (66)$$

Якщо матеріал має пружну ізотропію, то не тільки всі компоненти $(\Xi^{mn})_w = 0$, а й власні вектори матриць $[C^e]$, $[\dot{\underline{\in}}^e]_H$, $[\in^e]$, $[T]$ та $[\bar{S}]$ збігаються.

Аналогічно з виразом $[T] = J^e[R^e]^T[\sigma][R^e]$, введемо тензор “мікронапружень” з видаленим поворотом:

$$[\bar{\beta}] = J^e[R^e]^T[\beta][R^e]. \qquad (67)$$

Тепер із врахуванням (64)–(67) замість (58) та (59) можемо аналогічно отримати, що

$$\underset{\sim}{d}_i^p = \dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial \underline{T}^i};\; \underset{\sim}{w}_{mn}^p = \dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_w};\; \xi_i = \dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial \underline{\bar{\beta}}^i};$$

$$\dot{\zeta} = \dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial k^p},\; i,m,n = 1,2,3, \qquad (68)$$

$$\underset{\sim}{d}_i^c = \dot{\lambda}^c\frac{\partial f}{\partial \underline{T}^i};\; \dot{\varsigma} = \dot{\lambda}^c\frac{\partial f}{\partial k^c},\; i = 1,2,3. \qquad (69)$$

Виразом (35) з [3] встановлено, що для ізотропного матеріалу (металу) компоненти напружень Нолла $\underline{T}^i$ визначаються через пружні логарифмічні деформації Генкі звичайним лінійно-пружним законом Гука: $\underline{T}^i = J\,\underline{\Sigma}^i = 3k(\in_V^e)_H + 2G(\underline{\in}_i^e)_H^d,\; i = 1,2,3,$ що дає можливість застосовувати ці деформації при моделюванні напружено-деформованого стану тіл при великих деформаціях.

Описаний підхід з невеликими змінами можна розповсюдити на випадок наявності пружної анізотропії. Про це свідчить, наприклад, публікація [11], в якій розглядався випадок наявності тільки двох типів деформацій: пружних і пластичності.

Висновки

З наведених результатів випливає таке:

- із застосуванням другого закону термодинаміки та мультиплікативних розкладів градієнтів деформацій вдається обґрунтувати основні рівняння інкрементальних асоційованих теорій термопластичності та повзучості на випадок великих деформацій;
- вказані рівняння, записані відносно напружень Нолла й логарифмічних деформацій Генкі, мають майже такий самий вигляд, що й відповідні рівняння при нескінченно малих деформаціях і жорстких поворотах.
- наявний граничний перехід, оскільки напруження Нолла й логарифмічні деформації Генкі при зменшенні деформацій та жорстких поворотів до нескінченно малих безперервно наближуються до напружень Ейлера–Коші та деформацій Гріна–Лагранжа відповідно.

Повний алгоритм визначення напружено-деформованого стану при наявності великих деформацій та чотирьох типів деформацій буде наведено в наступному повідомленні.

1. *Рудаков К.М., Добронравов О.А.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 1. Мультиплікативний розклад при наявності чотирьох типів деформацій // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Машинобудування, 2012. – № 64. – С. 6–12.
2. *Рудаков К.М., Яковлєв А.І.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 2. Відокремлення температурних деформацій // Там само. – № 65. – С. 10–18.
3. *Рудаков К.М., Добронравов О.А.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 3. Теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2012. – № 6. – С. 86–93.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. – М.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.
5. *R. Hill,* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Oxford University Press, 1998, 355 p.
6. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 400 с.
7. *A. Lion et al.*, “On the phenomenological representation of curing phenomena in continuum mechanics”, Arch. Mech., vol. 59, pp. 59–89, 2007.
8. *F.J. Montáns et al.*, “Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin”, Int. J. Num. Meth. Enging, vol. 63, pp. 159–196, 2005.
9. *A.L. Eterović et al.*, “A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures”, Int. J. Num. Meth. Enging, vol. 30, pp. 1099–1114, 1990.
10. *J. Mandel,* “Thermodynamics and plasticity”, In Foundations of Continuum Thermodynamics. J.J. Delgado, N.R. Nina, J.H. Whitelaw, Eds. London: Macmillan, pp. 283–304, 1974.
11. *Do-Nyum Kim et al.,* “Insight into a model for large strain anisotropic elasto-plasticity”, Comput. Mech., vol. 44, pp. 651–668, 2009.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
16 жовтня 2012 року