

УДК 621.372.8

В.І. Найденко

ВЛАСНІ ХВИЛІ КРОС-ХВИЛЕВОДУ

The purpose of the article is to obtain the algorithms for calculating the characteristics of its own waves in the cross-waveguide cross and demonstrate their abilities. We solve the boundary value problem by the mode matching method. By employing the moment method functional equations arising from the boundary conditions are reduced to systems of homogeneous linear equations (SLE), whose order is equal to $2M + 2N + 4$, where M and N are number of terms in schedules of the fields in subfields specified below. Using the specific form of SLE, SLE is reduced to lower order, namely – $2M + 2$. Critical wavelengths of main types of H and E waves in the cross-waveguide are calculated. In addition, we use relatively minor determinant of order – dispersion equation – 4–8. This physical interpretation of the critical wave number changes with the change of boxes size by changing the wave polarization. The obtained results show high convergence of critical wave number with increasing order of the determinant and the number of terms in the sums of its elements. The results can be used in design and synthesis of microwave devices based on cross-waveguide.

Вступ

Крос-хвилевід – хвилевід із двома, розміщеними по діагоналі, металевими вставками – має різноманітне застосування. У дводіапазонних двомодових хвилевідних фільтрах НВЧ [1] він дає можливість удвічі зменшити чутливість параметрів фільтра до похибок розмірів при виготовленні фільтра. В однодіапазонних двомодових хвилевідних фільтрах він дає змогу удвічі зменшити поздовжній розмір фільтра за однакових характеристик [2, 3]. Власні хвилі крос-хвилеводу знаходилися в [1, 2] застосуванням пакета програм MWS STUDIO і μ Wave Wizard. Заснований на використанні крос-хвилеводу обертач [4, 5] має малу довжину – в п'ять разів меншу за довжину хвилі у вхідному і вихідному хвилеводах на центральній частоті. Крос-хвилевід застосовується в перетворювачі поляризації – з лінійної на колову [6]. У [7] досліджено залежності власних значень хвиль типу E і H квадратного симетричного крос-хвилеводу із квадратними вставками від розмірів вставок, наведено розподіли полів у поперечній площині для кількох мод, але алгоритму розрахунку не дано. У [8] досліджено характеристики L -подібного і крос-хвилеводу варіаційним методом. Аналіз поширено на неквадратні хвилеводи і вставки. Точність розрахунку власних значень залежить від типу апроксимаційних функцій і їх числа. Однак зі збільшенням числа апроксимаційних функцій збільшується число обумовленості матриці, що призводить до збільшення нестабільності і неточності розв'язку. Крос-хвилевід може застосовуватися в частотно-селективних поверхнях як пе-

ретворювач поляризації, наприклад лінійної на колову.

Точності розрахунку характеристик власних хвиль пакети програм MWS STUDIO і μ Wave Wizard, які використовувалися в [1, 2], не гарантують. Автоматичні електромагнітні “сольвери” [9], які можуть використовуватися для розв'язання задач такого типу, доступні лише їх авторам. У відомій літературі, що стосується хвилеводів складного перерізу (див., наприклад, [10–12]), такого типу хвилеводи не розглядалися. В той же час комп'ютерне моделювання і конструювання різноманітних НВЧ-пристроїв [1–6, 13] вимагає знання характеристик власних хвиль у такому хвилеводі з високою точністю. Потрібно мати алгоритми, які дали б можливість визначати характеристики таких хвилеводів майже так, як це робиться, скажімо, для прямокутних хвилеводів.

Постановка задачі

Мета статті – отримати алгоритми для розрахунку характеристик власних хвиль у крос-хвилеводі та продемонструвати їх можливості.

Симетрія хвилеводу. Хвилеводи складного перерізу на основі крос-хвилеводу

Переріз крос-хвилеводу наведено на рис. 1, *a*. Крос-хвилевід утворений квадратним хвилеводом розміру a , в якому по діагоналі введені квадратні вставки розміру b . Очевидно, що розмір b має бути меншим половини розміру a .

Крос-хвилевід має дві площини симетрії – діагональні площини (вертикальну і горизонталь-

ну на рис. 1, б, повернутому відносно рис. 1, а за годинниковою стрілкою на 45°). Тому система власних хвиль такого хвилеводу може бути поділена на чотири підсистеми:

- 1) горизонтальна площина симетрії є електричною стінкою, вертикальна – магнітною;
- 2) горизонтальна площина симетрії є електричною стінкою, вертикальна – електричною;
- 3) горизонтальна площина симетрії є магнітною стінкою, вертикальна – магнітною;
- 4) горизонтальна площина симетрії є магнітною стінкою, вертикальна – електричною.

Нехай крос-хвилевід збуджується хвилею H_{10} квадратного хвилеводу з вертикальною поляризацією електричного поля (див. рис. 1, а). Електричне поле падаючої хвилі H_{10} квадратного хвилеводу можна представити сумою двох хвиль: одна поляризована в напрямку від ребра до ребра вставок, друга – в перпендикулярному напрямку (див. рис. 1, а). Можна очікувати, що розподіл поперечного електричного поля хвилі, поляризованої в напрямку ребер вставок, буде таким, як показано на рис. 1, в, а поляризованої в перпендикулярному напрямку – як на рис. 1, г. Для хвилі на рис. 1, в вставки є ємнісними, вони витискують електричне поле з області, де воно максимальне; магнітне поле в цій області мінімальне. Як впливає з теорії збурень, критичне хвильове число цієї хвилі буде зменшуватися зі збільшенням розміру вставки b . Для хвилі на рис. 1, г вставки є індуктивними, бо вони витискують магнітне поле з області, де воно максимальне; електричне

поле в цій області мінімальне. Критичне хвильове число цієї хвилі буде збільшуватися зі збільшенням розміру вставки b . Очевидно, що ці дві хвилі будуть поширюватися в крос-хвилеводі з різними фазовими швидкостями. Саме ці міркування використовувалися при обґрунтуванні застосування крос-хвилеводу у фільтрах.

По проходженні деякого відрізка крос-хвилеводу різниця фаз між полями двох хвиль становитиме 90° . Таким чином, матимемо дві ортогонально поляризовані, зсунуті на 90° хвилі. Якщо амплітуди цих хвиль однакові, то такі дві хвилі утворюють хвилю з коловою поляризацією. Отже, відрізок крос-хвилеводу може бути поляризатором – він перетворює лінійно поляризовану хвилю на хвилю, поляризовану по колу. Зміни напрямку обертання вектора \mathbf{E} хвилі з коловою поляризацією можна досягти перенесенням вставок у незайняті кути квадратного хвилеводу або поворотом відрізка крос-хвилеводу на 90° . Наведені міркування стосуються основних хвиль у крос-хвилеводі, які мають розподіл полів, близький до розподілу хвилі H_{10} (або H_{01}) квадратного хвилеводу (див. рис. 1, в, г).

Очевидно, що наявність площин симетрії дає змогу розділити крос-хвилеводи діагональними площинами на “майже трикутні” хвилеводи. Це можна зробити в тих випадках, коли площини симетрії є електричними стінками. Для основних типів хвиль отримані “майже трикутні” хвилеводи (зі складним перерізом), наведені на рис. 2, а, б.

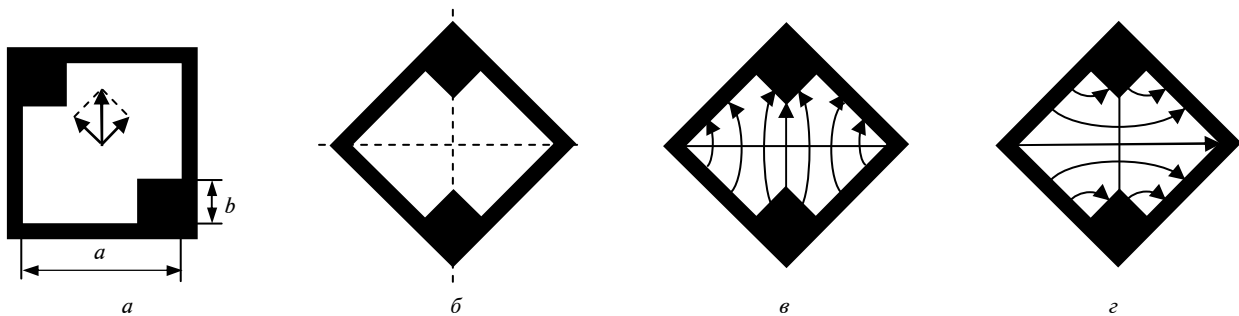


Рис. 1. Геометрія крос-хвилеводу (а); крос-хвилевід, повернутий за годинниковою стрілкою на 45° (б); крос-хвилевід, збуджений хвилею H_{10} квадратного хвилеводу з вертикальною поляризацією (в); крос-хвилевід, збуджений хвилею H_{10} квадратного хвилеводу з горизонтальною поляризацією (г)

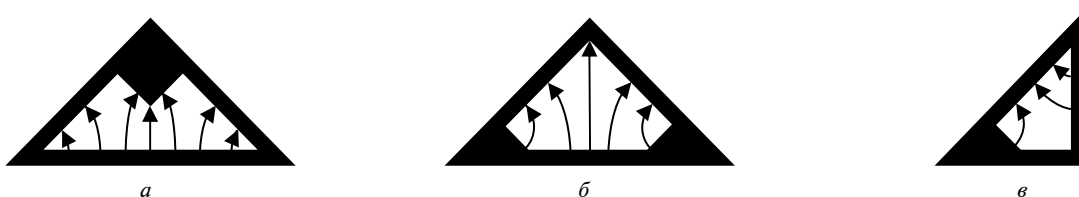


Рис. 2. “Майже трикутні” хвилеводи, отримані діленням крос-хвилеводу електричною стінкою в одній площині симетрії (а, б) і двома електричними стінками в площинах симетрії (в)

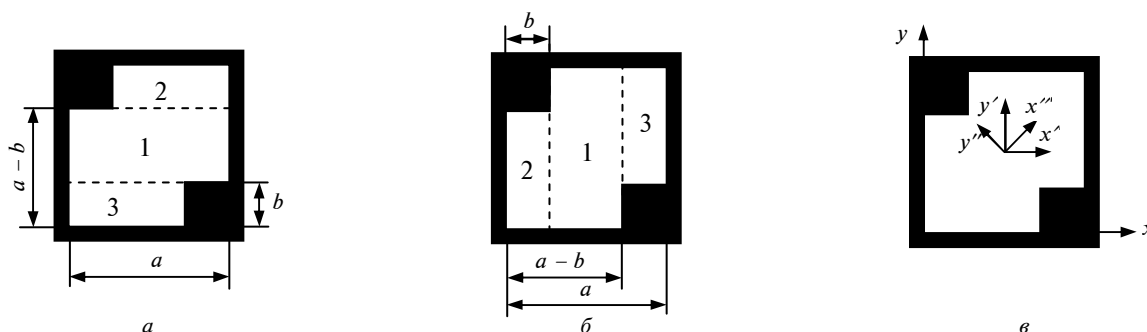


Рис. 3. Ділення крос-хвильоводу на частинні області горизонтальними (а) і вертикальними (б) лініями та введені системи координат (в)

Якщо і горизонтальна площина симетрії, і вертикальна є електричними стінками, то “майже трикутний” хвильовід набуває форми, показаної на рис. 2, в. Очевидно, що критичні частоти хвильоводів на рис. 1, в і рис. 2, а однакові. Однакові також і критичні частоти хвильоводів на рис. 1, г і рис. 2, б. Критична частота основної хвилі хвильоводу на рис. 2, в буде більшою, ніж хвильоводів на рис. 1, б-г.

Поперечний переріз крос-хвильоводу можна поділити на три частинні області двома способами – горизонтальними лініями (рис. 3, а) і вертикальними (рис. 3, б). Взагалі спосіб поділу не впливає на остаточний розв’язок. Він набуває деякого значення при аналізі основних типів хвиль, розподіл електричного поля яких показано на рис. 1, в і г.

Хвилі типу *H*

Поля в частинних областях для хвиль типу *H*.

Поздовжня компонента напруженості магнітного поля задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0, \quad (1)$$

і граничну умову Неймана

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на контурі хвильоводу.} \quad (2)$$

З попереднього розгляду розподілу електричного поля стає зрозумілим, що одним із основних типів хвиль у крос-хвильоводі буде хвиля типу *H* з непарним розподілом поздовжнього магнітного поля по осі x'' і парним по осі y'' (див. рис. 3, в). Запишемо це в такому вигляді:

$$H_z \sim \sin(\alpha x'') \cos(\beta y''). \quad (3)$$

Повернемо систему координат x'', y'' на 45° за годинниковою стрілкою. Як відомо, координати x'', y'' зв’язані з координатами x', y' при куті повороту на 45° співвідношеннями

нати x'', y'' зв’язані з координатами x', y' при куті повороту на 45° співвідношеннями

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y').$$

Підставляючи ці вирази в (3) і здійснюючи елементарні тригонометричні перетворення, знаходимо

$$\begin{aligned} H_z &\sim \sin(\alpha x'') \cos(\beta y'') = \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)\right) \cos\left(\frac{y'}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)\right) \cos\left(\frac{y'}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)\right) \sin\left(\frac{y'}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)\right) \sin\left(\frac{y'}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)\right). \end{aligned}$$

Отриманий вираз свідчить про те, що розглянутий тип хвилі містить як парні по x' розподіли компоненти поздовжнього магнітного поля, так і непарні. Те саме стосується і розподілів компонент по y' . Аналогічний результат можна отримати для хвиль типу *E*.

Розглянемо поділ на частинні області, показаний на рис. 3, б. З урахуванням сказаного компоненту поздовжнього магнітного поля в області 1, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = 0, b < x < a - b$ і $y = a, b < x < a - b$, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} H_z^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m x) + \\ &+ B_m \sin(\gamma_m x)) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (4) \end{aligned}$$

де сталі поширення зв’язані з хвильовим числом співвідношенням

$$k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \gamma_m^2 - \Gamma^2 = 0, \quad (5)$$

де

$$\gamma_m = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2},$$

k_c – невідоме критичне хвильове число.

Компоненту поздовжнього магнітного поля в області 2, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = 0$, $0 < x < b$ і $y = a - b$, $0 < x < b$, можна записати як

$$H_z^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n x) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right) e^{-i\Gamma z}. \quad (6)$$

Тут (5) замінюється на

$$k^2 - \left(\frac{n\pi}{a-b}\right)^2 - \alpha_n^2 - \Gamma^2 = 0, \quad (7)$$

де

$$\alpha_n = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{n\pi}{a-b}\right)^2}.$$

Вираз для компоненти поздовжнього магнітного поля в області 3, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = b$, $a - b < x < a$ і $y = a$, $a - b < x < a$, подібний до (6):

$$H_z^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n(x-a)) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right) e^{-i\Gamma z}. \quad (8)$$

Розв'язання граничної задачі для хвиль типу Н. Поперечні компоненти полів визначаються з рівнянь Максвелла як

$$E_x = \frac{i\omega\mu_0\mu}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_y = \frac{i\Gamma}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = \frac{-i\omega\mu_0\mu}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_x = \frac{i\Gamma}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Розглянемо задачу при критичній частоті, де $\Gamma = 0$. Тоді з поперечних компонент залишаються лише дві – E_x і E_y . Тангенціальною до границь поділу є E_y .

Вважаємо середовище хвильоводу однорідним. Тому однакові множники при E_y можна скоротити. Отже, важливими є

$$\frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m x) + B_m \cos(\gamma_m x)) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z^{(2)}}{\partial x} = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha_n \sin(\alpha_n x) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_z^{(3)}}{\partial x} = -\sum_{n=0}^{\infty} D_n \alpha_n \sin(\alpha_n(x-a)) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right) e^{-i\Gamma z}. \quad (11)$$

Умови на межі між областями 1 і 2 (при $x = b$):

$$E_y^{(1)} = \begin{cases} E_y^{(2)}, & 0 \leq y < a-b, \\ 0, & a-b \leq y \leq a, \end{cases}$$

$$H_z^{(1)} = H_z^{(2)}, \quad 0 \leq y \leq a-b. \quad (12)$$

Умови на межі між областями 1 і 3 (при $x = a - b$):

$$E_y^{(1)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < b, \\ E_y^{(3)}, & b \leq y \leq a, \end{cases}$$

$$H_z^{(1)} = H_z^{(3)}, \quad b \leq y \leq a. \quad (13)$$

Підставляючи (4), (6), (8)–(11) в (12), (13), знаходимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m b) + B_m \cos(\gamma_m b)) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha_n \sin(\alpha_n b) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right), & 0 < y < a-b, \\ 0, & a-b < y < a, \end{cases} \quad (14)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m b) + B_m \sin(\gamma_m b)) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n b) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right), \quad 0 < y < a-b, \quad (15)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m(a-b)) + B_m \cos(\gamma_m(a-b))) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \begin{cases} 0, & 0 < y < b, \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_n \alpha_n \sin(\alpha_n b) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right), & b < y < a, \end{cases} \quad (16)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m(a-b)) + B_m \sin(\gamma_m(a-b))) \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n b) \cos\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right), \quad b < y < a. \quad (17)$$

Рівняння (14), (16) діють на інтервалі $0 \leq y \leq a$. Множимо ці рівняння на функцію $\cos\left(\frac{q\pi}{a}y\right)$, що належить до повної та ортогональної системи функцій на інтервалі $0 \leq y \leq a$, й інтегруємо на цьому інтервалі. Рівняння (15), (17) діють на інтервалах $0 \leq y \leq a-b$ і $b \leq y \leq a$.

Множимо рівняння (15) на функцію $\cos\left(\frac{t\pi}{a-b}y\right)$, що належить до повної та ортогональної системи функцій на інтервалі $0 \leq y \leq a-b$, й інтегруємо на цьому інтервалі. Рівняння (17) множимо на функцію $\cos\left(\frac{t\pi}{a-b}(y-b)\right)$, що належить до повної та ортогональної системи функцій на інтервалі $b \leq y \leq a$, й інтегруємо його на цьому інтервалі. Інтеграли є елементарними. Для скорочення запису позначимо

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 1/2, & m \neq 0, \end{cases}$$

а індекси q і t перейменуємо на m і n . Матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\gamma_m(-A_m \sin(\gamma_m b) + B_m \cos(\gamma_m b)) \delta_m =$$

$$= -(1-\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha_n \sin(\alpha_n b) I_{mn}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m b) + B_m \sin(\gamma_m b)) I_{mn} =$$

$$= C_n \delta_n \cos(\alpha_n b), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

$$\gamma_m(-A_m \sin(\gamma_m(a-b)) + B_m \cos(\gamma_m(a-b))) \delta_m =$$

$$= (1-\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} D_n \alpha_n \sin(\alpha_n b) J_{mn}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m(a-b)) + B_m \sin(\gamma_m(a-b))) J_{mn} =$$

$$= D_n \delta_n \cos(\alpha_n b), \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

де

$$\sigma = b/a,$$

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m\pi(1-\sigma) + n\pi)}{m\pi(1-\sigma) + n\pi} + \frac{\sin(m\pi(1-\sigma) - n\pi)}{m\pi(1-\sigma) - n\pi} \right],$$

$$J_{mn} = -\sin(m\pi\sigma) \frac{m\pi(1-\sigma)}{(m\pi(1-\sigma))^2 - (n\pi)^2}. \quad (22)$$

При $m = 0$ і $n = 0$ необхідно покласти $J_{mn} = 1$.

СЛАР (18)–(21) однорідна. Однорідна СЛАР може мати нетривіальні розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю. Ця умова разом із (5), (7) дає дисперсійне рівняння для власних хвиль типу H крос-хвильоводу. Знайшовши корінь дисперсійного рівняння і вважаючи одну з амплітуд A_m або B_m відомою, перетворимо однорідну СЛАР (18)–(21) на неоднорідну. Розв'язавши її, знайдемо амплітуди A_m , B_m , C_n і D_n (відносні значення), тим самим знайдемо поля в крос-хвильоводі. Далі можна розрахувати будь-яку характеристику крос-хвильоводу.

При проведенні розрахунків число доданків у сумах по m в (4) і число доданків у сумах по n в (6), (8) обмежується деякими числами M і N . Тоді порядок СЛАР (18)–(21) буде дорівнювати $2M + 2N + 4$.

Зменшення порядку СЛАР. СЛАР (18)–(21) має специфічний вигляд: підсистема (19) визначає C_n , підсистема (21) – D_n . Знаходимо з (19), (21) C_n і D_n і підставляємо в (18), (20). Отримуємо СЛАР для A_m і B_m :

$$-A_m \gamma_m \sin(\gamma_m b) \delta_m +$$

$$+ (1-\sigma) \sum_{q=0}^{\infty} A_q \cos(\gamma_q b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} \operatorname{tg}(\alpha_n b) I_{mn} I_{nq} +$$

$$+ B_m \gamma_m \cos(\gamma_m b) \delta_m + (1-\sigma) \sum_{q=0}^{\infty} B_q \sin(\gamma_q b) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} \operatorname{tg}(\alpha_n b) I_{mn} I_{nq}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

$$-A_m \gamma_m \sin(\gamma_m(a-b)) \delta_m -$$

$$- (1-\sigma) \sum_{q=0}^{\infty} A_q \cos(\gamma_q(a-b)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} \operatorname{tg}(\alpha_n b) J_{mn} J_{nq} +$$

$$+ B_m \gamma_m \cos(\gamma_m(a-b)) \delta_m - (1-\sigma) \sum_{q=0}^{\infty} B_q \sin(\gamma_q(a-b)) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} \operatorname{tg}(\alpha_n b) J_{mn} J_{nq}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Перехід від СЛАР (18)–(21) до СЛАР (23), (24) дає змогу зменшити порядок СЛАР від $2M + 2N + 4$ до $2M + 2$. При врахуванні в сумах по n $N + 1$ доданку СЛАР (23), (24) еквівалентна СЛАР (18)–(21) порядку $2M + 2N + 4$. Але в СЛАР (23), (24) можна враховувати довільне число доданків у сумах, у тому числі й необмежене, що можна вважати за перевагу цієї СЛАР. Але у неї є й недолік: вона має полюси в точках, де $\alpha_n b$ дорівнює $\pi/2$, $3\pi/2$ і т.д. Це ускладнює процедуру знаходження нуля детермінанта СЛАР. Детальнішу інформацію щодо цього питання можна отримати в [14], де вивчаються власні хвилі періодичної структури з поперечним електричним полем.

СЛАР (18)–(21), як і СЛАР (23), (24), є однорідною. Однорідна СЛАР може мати нетривіальні розв'язки за умови, що її детермінант дорівнює нулю. Ця умова разом з (5), (7) дає рівняння для визначення критичної частоти власних хвиль у крос-хвильоводі.

Зауважимо тепер, що поділом на частинні області, наведеним на рис. 3, a , отримаємо СЛАР, еквівалентну (23), (24).

Результати розрахунку критичних хвильових чисел основних хвиль крос-хвильоводу. Наведені далі результати розрахунку (обох типів хвиль) не претендують на високу точність. Вони покликані дати загальні уявлення щодо критичних хвильових чисел основних хвиль типу H і типу E в крос-хвильоводі. Питання точності розрахунку є багатофакторним питанням, яке потребує окремого дослідження.

На рис. 4 наведено залежності нормованих на π критичних хвильових чисел двох основних хвиль типу H , помножених на a , від відношення розмірів b до a (параметра σ).

При розрахунках критичних хвильових чисел знаходився нуль детермінанта СЛАР 6-го порядку (тобто враховувалися доданки з $m = 0, 1, 2$). В сумах по n враховувалося 6 доданків (тобто з $n = 0, 1, \dots, 5$). Оцінено точність розрахунку зменшення порядку детермінанта до 4-го. Графічно результати при цьому не змінилися.

Вставки знімають виродження двох взаємно ортогональних мод квадратного хвильоводу, перетворюючи їх на дві невироджені моди — верхню і нижню (по $k_{\text{кр}} a$). Частотне розділення між ними визначається розмірами вставок: чим

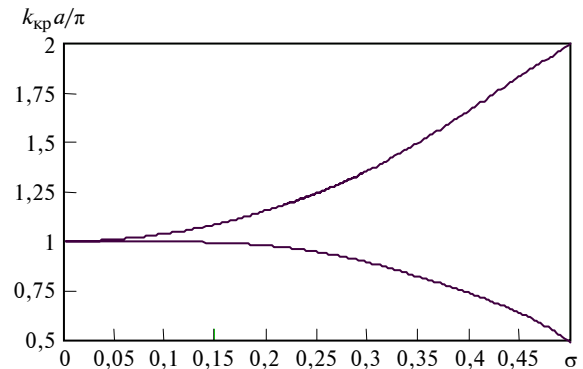


Рис. 4. Безрозмірні критичні хвильові числа $k_{\text{кр}} a$, віднесені до критичного хвильового числа основної H_{10} хвилі прямокутного хвильоводу

вони більші, тим більше розділення. Коли розміри вставок прямують до половини ширини або висоти квадратного хвильоводу, квадратний хвильовід розбивається на два квадратних хвильоводи вдвічі меншого розміру. $k_{\text{кр}} a / \pi$ верхньої моди збільшується рівно вдвічі, $k_{\text{кр}} a / \pi$ нижньої моди зменшується також рівно вдвічі. Верхня мода є сумою двох хвиль — типу H_{10} і H_{01} однакових амплітуд. Нижня мода є хвилею в хвильоводі, зображеному на рис. 3, в якому ребра вставок підходять нескінченно близько одне до одного, але гальванічного контакту між ними немає.

Верхня крива (що відповідає збільшенню критичного хвильового числа при збільшенні σ) стосується хвилі з поляризацією, показаною на рис. 1, z . Нижня крива (що відповідає зменшенню критичного хвильового числа при збільшенні σ) стосується хвилі з поляризацією, показаною на рис. 1, v . Дійсно, вставки на рис. 1, z витискують з кутів електромагнітне поле, де за відсутності вставок магнітне поле максимальне, а електричне — мінімальне. Це має приводити до збільшення критичного хвильового числа. Вставки на рис. 1, v витискують з кутів в основному електричне поле, бо там магнітне поле за відсутності вставок мінімальне. Це має приводити до зменшення критичного хвильового числа. Спостерігаються різні швидкості зміни критичного хвильового числа зі збільшенням σ для цих двох типів хвиль. Швидкість зміни критичного хвильового числа зі збільшенням σ є більшою, коли вставки розміщені відносно поляризації поля як на рис. 1, z . Тому при проектуванні фільтрів з крос-хвильоводами необхідно ставити вимоги на допуск для розмірів вставок, виходячи з кривої для верхньої моди.

Хвилі типу E**Поля в частинних областях для хвиль типу E.**

Поздовжня компонента напруженості електричного поля задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0, \quad (25)$$

і граничну умову Діріхле

$$E_z = 0 \text{ на контурі хвилеводу.} \quad (26)$$

Компоненту поздовжнього електричного поля в області 1, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = 0$, $b < x < a - b$ і $y = a$, $b < x < a - b$, можна записати у вигляді

$$E_z^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m x) + B_m \sin(\gamma_m x)) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (27)$$

де сталі поширення зв'язані з хвильовим числом співвідношенням (5).

Компоненту поздовжнього електричного поля в області 2, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = 0$, $0 < x < b$ і $y = a - b$, $0 < x < b$, можна записати як

$$E_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\alpha_n x) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (28)$$

де сталі поширення зв'язані з хвильовим числом співвідношенням (7).

Вираз для компоненти поздовжнього електричного поля в області 3, яка задовольняє рівняння Гельмгольца і граничні умови при $y = b$, $a - b < x < a$ і $y = a$, $a - b < x < a$, подібний до (28):

$$E_z^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\alpha_n (x - a)) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} (y - b)\right) e^{-i\Gamma z}. \quad (29)$$

Розв'язання граничної задачі для хвиль типу E. Поперечні компоненти полів визначаються з рівнянь Максвела як

$$E_x = \frac{i\Gamma}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$E_y = \frac{i\Gamma}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_x = \frac{-i\omega\epsilon_0\epsilon}{\Gamma^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Як і раніше, розглядаємо задачу при критичній частоті, де $\Gamma = 0$. Тоді з поперечних компонент залишаються лише дві – H_x і H_y . Тангенціальною до границь поділу є H_y .

Для однорідного середовища хвилеводу однакові множники при H_y можна скоротити. Отже, можна записати лише

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m x) + B_m \cos(\gamma_m x)) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha_n \cos(\alpha_n x) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right) e^{-i\Gamma z}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial E_z^{(3)}}{\partial x} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \alpha_n \cos(\alpha_n (x - a)) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} (y - b)\right) e^{-i\Gamma z}. \quad (32)$$

Умови на межі між областями 1 і 2 (при $x = b$):

$$E_z^{(1)} = \begin{cases} E_z^{(2)}, & 0 \leq y < a - b, \\ 0, & a - b \leq y \leq a, \end{cases}$$

$$H_y^{(1)} = H_y^{(2)}, \quad 0 \leq y \leq a - b. \quad (33)$$

Умови на межі між областями 1 і 3 (при $x = a - b$):

$$E_z^{(1)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < b, \\ E_z^{(3)}, & b \leq y \leq a, \end{cases}$$

$$H_y^{(1)} = H_y^{(3)}, \quad b \leq y \leq a. \quad (34)$$

Підставивши (27)–(32) в (33), (34), знаходимо

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m b) + B_m \sin(\gamma_m b)) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \\ & = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\alpha_n b) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right), & 0 < y < a - b, \\ 0, & a - b < y < a, \end{cases} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m b) + B_m \cos(\gamma_m b)) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha_n \cos(\alpha_n b) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b} y\right), \quad 0 < y < a - b, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(\gamma_m(a-b)) + B_m \sin(\gamma_m(a-b))) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \\ & \begin{cases} 0, & 0 < y < b, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\alpha_n b) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right), & b < y < a, \end{cases} \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m(a-b)) + B_m \cos(\gamma_m(a-b))) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} D_n \alpha_n \cos(\alpha_n b) \sin\left(\frac{n\pi}{a-b}(y-b)\right), \quad b < y < a. \quad (38) \end{aligned}$$

Рівняння (35), (37) діють на інтервалі $0 \leq y \leq a$. Множимо ці рівняння на функцію $\sin\left(\frac{q\pi}{a} y\right)$, що належить до повної та ортогональної на інтервалі $0 \leq y \leq a$ системи функцій, і інтегруємо на цьому інтервалі. Рівняння (36), (38) діють на інтервалах $0 \leq y \leq a - b$ і $b \leq y \leq a$. Множимо рівняння (36) на функцію $\sin\left(\frac{t\pi}{a-b} y\right)$, що належить до повної та ортогональної на інтервалі $b \leq y \leq a$ системи функцій, і інтегруємо на цьому інтервалі. Рівняння (38) множимо на функцію $\sin\left(\frac{t\pi}{a-b}(y-b)\right)$, що належить до повної та ортогональної на інтервалі $b \leq y \leq a$ системи функцій, і інтегруємо результат на цьому інтервалі. Інтеграл є елементарними. Перейменуємо індекси q і t на m і n відповідно. Матимемо СЛАР

$$\begin{aligned} & A_m \cos(\gamma_m b) + B_m \sin(\gamma_m b) = \\ & (1 - \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\alpha_n b) (-1)^{m+n} T_{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m b) + B_m \cos(\gamma_m b)) (-1)^{m+n} T_{mn} = \\ & = C_n \alpha_n \cos(\alpha_n b), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_m \cos(\gamma_m(a-b)) + B_m \sin(\gamma_m(a-b)) = \\ & = -(1 - \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\alpha_n b) T_{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (-A_m \sin(\gamma_m(a-b)) + B_m \cos(\gamma_m(a-b))) T_{mn} = \\ & = D_n \alpha_n \cos(\alpha_n b), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (42) \end{aligned}$$

де

$$T_{mn} = \frac{2n}{\pi} \frac{\sin(m\pi\sigma)}{n^2 - m^2(1 - \sigma)^2} \quad \text{при } n \neq m(1 - \sigma)$$

і

$$T_{mn} = (-1)^{m-n} \quad \text{при } n = m(1 - \sigma). \quad (43)$$

СЛАР (39)–(42) однорідна. Однорідна СЛАР може мати нетривіальні розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю. Ця умова разом з (5), (7) дає дисперсійне рівняння для власних хвиль типу E крос-хвильоводу. Знайшовши корінь дисперсійного рівняння і вважаючи одну з амплітуд A_m або B_m відомою, перетворимо однорідну СЛАР (39)–(42) на неоднорідну. Розв'язавши її, знайдемо амплітуди A_m , B_m , C_n і D_n (відносні значення), тим самим знайдемо поля в крос-хвильоводі. Далі можна розрахувати будь-яку характеристику крос-хвильоводу.

При проведенні розрахунків число доданків у сумах по m в (27) і число доданків у сумах по n в (28), (29) обмежується деякими числами M і N . Тоді порядок СЛАР (39)–(42) буде дорівнювати $2M + 2N + 4$.

Зменшення порядку СЛАР. Система лінійних алгебричних рівнянь (39)–(42), як і СЛАР для хвиль типу H , має специфічний вигляд: підсистема (40) визначає C_n , підсистема (42) – D_n . Знаходимо з (40), (42) C_n і D_n та підставляємо в (39), (41). Отримуємо СЛАР для A_m і B_m :

$$\begin{aligned} & A_m \cos(\gamma_m b) + (1 - \sigma) \times \\ & \times \sum_{q=1}^{\infty} A_q (-1)^{m+q} \gamma_q \sin(\gamma_q b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{tg}(\alpha_n b)}{\alpha_n} T_{mn} T_{nq} + \\ & + B_m \sin(\gamma_m b) - (1 - \sigma) \sum_{q=1}^{\infty} B_q (-1)^{m+q} \gamma_q \cos(\gamma_q b) \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_n b)}{\alpha_n} T_{mn} T_{nq}, m = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & A_m \cos(\gamma_m(a-b)) - (1-\sigma) \times \\ & \times \sum_{q=1}^{\infty} A_q \gamma_q \sin(\gamma_q(a-b)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_n b)}{\alpha_n} T_{mn} T_{nq} + \\ & + B_m \sin(\gamma_m(a-b)) + (1-\sigma) \sum_{q=1}^{\infty} B_q \gamma_q \cos(\gamma_q(a-b)) \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_n b)}{\alpha_n} T_{mn} T_{nq}, m = 1, 2, \dots \quad (45) \end{aligned}$$

Перехід від СЛАР (39)–(42) до СЛАР (44), (45) дає змогу зменшити порядок СЛАР від $2M + 2N + 4$ до $2M + 2$. При врахуванні в сумах по n $N + 1$ доданку СЛАР (44), (45) еквівалентна СЛАР (39)–(42) порядку $2M + 2N + 4$. Але в СЛАР (44), (45) можна враховувати довільне число доданків у сумах, в тому числі й необмежене.

Отримані СЛАР є однорідними. Однорідна СЛАР може мати нетривіальні розв'язки за умови, що її детермінант дорівнює нулю. Ця умова разом з (5), (7) дає рівняння для визначення критичної частоти власних хвиль у крос-хвильоводі.

Зауважимо тепер, що поділком на частинні області, наведеним на рис. 3, a , отримаємо СЛАР, еквівалентну (44), (45).

Результати розрахунку. На рис. 5 наведені залежності критичного хвильового числа основної хвилі типу E , помноженого на a , від відношення розмірів b до a (параметра σ).

При розрахунках критичних хвильових чисел знаходився нуль детермінанта СЛАР (44), (45) 2-го (крива 1), 4-го (крива 2), 6-го (крива 3) і 8-го порядку (крива 4). В сумах по n враховували 5 доданків. Як видно, розбіжність

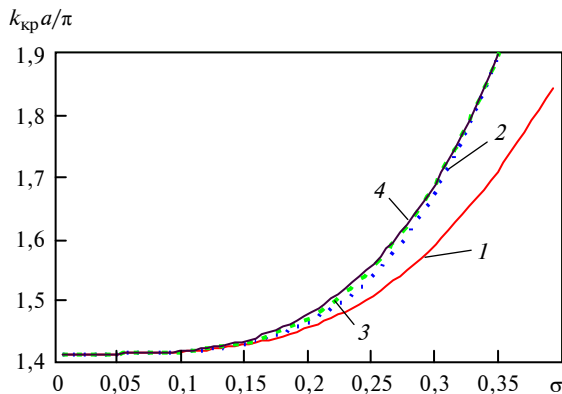


Рис. 5. Безрозмірне критичне хвильове число $k_{кр}a$, віднесене до π основної хвилі типу E як функція σ

між кривими швидко зменшується зі збільшенням порядку детермінанта. При 6–8-му порядку отримуємо досить точні результати для основної хвилі типу E . Проведено розрахунки при різному числі членів у сумах по n від 1 до 10. Графічно результати при цьому не змінювалися.

У кутах квадратного хвильоводу з хвилею E_{11} переважає магнітне поле. Введення в ці області ідеально провідних вставок збудує переважно магнітне поле, що приводить до збільшення критичного хвильового числа. Тому значення $k_{кр}a/\pi$ збільшуються при збільшенні σ .

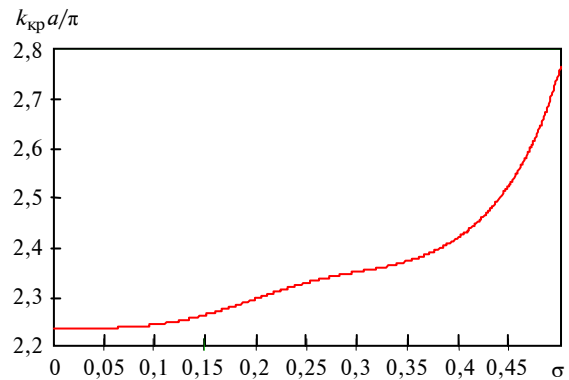


Рис. 6. Безрозмірне критичне хвильове число $k_{кр}a$, віднесене до π другої хвилі типу E як функція σ

На рис. 6 наведені залежності критичного хвильового числа другої хвилі E типу від відношення розмірів b до a (параметра σ). Критичне хвильове число помножене на a і поділене на π . Результат при $\sigma \rightarrow 0$ має бути рівним $\sqrt{5} = 2,236068$, що і спостерігається на рисунку. Розрахунки проведені по СЛАР (44), (45) 4-го порядку, в сумах по n враховувалося 5 доданків.

Висновки

Показано, що основний тип хвилі містить як парні розподіли компоненти поздовжнього магнітного поля по поперечних координатах, так і непарні. Задача поширення власних хвиль у крос-хвильоводі розв'язана методом частинних областей. Методом моментів системи функціональних рівнянь, що впливають з граничних умов, зведені до однорідних СЛАР, порядок яких дорівнює $2M + 2N + 4$, де M і N – число доданків у розкладах полів у підобластях. З використанням специфічного вигляду СЛАР зведена до СЛАР меншого порядку, а саме – $2M + 2$. Наведені результати розрахунку кри-

тичних хвильових чисел основних хвиль типів *H* і *E*. Розрахунки з різними порядками визначника для деяких типів хвиль продемонстрували достатню точність отриманого алгоритму при невеликому числі врахованих доданків у розкладах полів.

Подальші зусилля можуть бути спрямовані на з'ясування умов отримання результатів із заданою точністю, перевірку можливості застосування так званого "правила Мітри", розрахунків пробивної потужності, коефіцієнтів згасання тощо.

1. *S. Amari and Maget Bekheit*, "New Class of Dual-mode Dual-band Waveguide Filters", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 56, no. 8, pp. 1938–1944, 2008.
2. *X.P. Liang et al.*, "Dual-Mode Coupling by Square Corner Cut in Resonators and Filters", *Ibid*, vol. 40, no 12, pp. 2294 – 2302, 1992.
3. *R.R. Mansour et al.*, "Quasi dual-mode resonators", *Ibid*, vol. 48, no. 12, pp. 2476–2482, 2000.
4. *A.A. Kirilenko et al.*, "Compact 90 Twist Formed by a Double-Corner-Cut Square Waveguide Section", *Ibid*, vol. 56, no. 7, pp. 1633–1637, 2008.
5. *Литвинов В.П., Рудь Л.А., Свердленко Е.А.* Компактні 90-градусні скрутки в прямокутних хвильоводах // *Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника.* – 2010. – 53, № 3. – С. 50–57.
6. *L.A. Rud and K.S. Shpachenko*, "Polarizer Based on Waveguide with Complex Cross-Section", in *Proc. Int. Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Kharkiv, 2010, CD-ROM, E-7.*
7. *L.A. Rud and K.S. Shpachenko*, "Eigen Modes of a Square Waveguide With Two Inner Diagonally-Placed Square Ridges", in *Proc. MMET, Ukraine, Kyiv, Sep. 2010, pp. 1–4.*
8. *Найденко В.І., Постульга О.С.* Дослідження характеристик L-подібного і крос-хвильоводу варіаційним методом // *Наукові вісті НТУУ "КПІ".* – № 5. – 2012. – С. 27–33.
9. *A. Kirilenko et al.*, "Automatic Electromagnetic Solvers Based on Mode-matching, Transverse Resonance and S-matrix Techniques", In *Proc. 36th Europ. Microw. Conf., Manchester, 2006, pp. 1185–1188.*
10. *J. van Bladel*, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., NJ: Wiley-IEEE Press, 2007, 1155 p.
11. *Справочник по волноводам / Пер. с англ. под ред. Я.Н. Фельда.* – М.: Сов. Радио, 1952. – 431 с.
12. *Волноводы сложных сечений / Г.Ф. Заргано, В.П. Ляпин, В.С. Михалевский и др.* – М.: Радио и связь. 1986. – 124 с.
13. *G. Macchiarella and S. Tomiazzo*, "Design Techniques for Dual-passband Filters", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 53, no. 11, pp. 3265–3271, 2005.
14. *Найденко В.І.* Періодична структура з поперечним електричним полем // *Наукові вісті НТУУ "КПІ".* – 2012. – № 6. – С. 13–22.

Рекомендована Радою
радіотехнічного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
5 березня 2013 року