УДК 519.8

РОЗПОДІЛ РЕСУРСІВ У РОЗПОДІЛЬЧИХ СИСТЕМАХ З ОПТИМАЛЬНИМ ПЕРЕРОЗПОДІЛОМ НАВАНТАЖЕННЯ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ПРОДУКТУ

О.Є. КІРІК

Побудовано та досліджено математичні моделі розподілу потоків обмежених ресурсів у енергетичних системах. Розроблено методи розв'язання задач розподілу потоків, що базуються на поєднанні екстремального підходу до розрахунку мереж та спільного розв'язку двох основних систем Кірхгофа. Запропоновано ефективний алгоритм ув'язки мережі для знаходження початкового наближення до розв'язку більш складної нелінійної транспортної задачі. Проаналізовано проблему оптимального перерозподілу навантаження постачальників продукту. Як приклад розглянуто задачу поставки споживачам суміші речовини у певних пропорціях або з певними кількісними обмеженнями. Завдяки загальній постановці задачі запропоновані моделі, методи та алгоритми можуть використовуватися для розрахунку різнотипних розподільчих мереж та трубопроводів.

ВСТУП

Забезпечення оптимального розподілу ресурсів за рахунок найкращого управління потоками у розподільчій мережі — одне з найважливіших завдань експлуатації енергетичних систем. Основними інструментами моделювання та практичних розрахунків є мережеві потокові моделі та методи математичного програмування, реалізовані в сучасних інформаційних системах. Для конкретності будемо використовувати термінологію, прийняту при розрахунках газових мереж, хоча загальний характер закономірностей дозволяє застосовувати запропоновані обчислювальні процедури для розрахунків довільних розподільчих мереж.

Потокорозподілення в мережі визначається двома системами умов або, що те ж саме, двома законами Кірхгофа [1]: загальна витрата продукту, що надходить до будь-якого вузла, дорівнює загальній витраті, що залишає його; загальна зміна тиску вздовж будь-якого замкнутого контуру мережі дорівнює нулю.

Існують два основні прийоми для розрахунку потокорозподілу. Перший виходить із того, що потоки завжди задовольняють умові рівності нулю їх загального балансу в кожному вузлі й послідовно коригуються з тим, щоб задовольнити умові рівності нулю загальну зміну тиску вздовж кожного контуру. Другий базується на тому, що загальна зміна тиску уздовж кожного контуру завжди дорівнює нулю, а потоки на ділянках контуру послідовно підбираються так, щоб загальний їх баланс у кожному вузлі, врешті-решт, став рівним нулю. Перший метод називають методом балансування тисків, а другий — методом балансування потоків. З огляду на фізичний зміст цих методів вони отримали назву методів ув'язки [1].

Поряд із цим існує інший підхід до таких задач, який можна назвати екстремальним, коли йдеться про мінімізацію (або максимізацію) деякої спеціальної функції, що відповідає тому чи іншому оптимізаційному принципу, з урахуванням зв'язків, що накладаються рівняннями лише першого або другого законів Кірхгофа [2].

Таким чином, серед різних ідей розрахунку потокорозподілу з математичної точки зору можна виділити дві основних — спільний розв'язок двох основних систем рівнянь або перехід до задач нелінійного програмування, зокрема, до нелінійної мережевої транспортної задачі.

Мета роботи полягає у розробці ефективних методів розподілу ресурсів у великих розподільчих мережах та їх застосуванні до розв'язання практичних задач поставки споживачам суміші продуктів у певних пропорціях або певної якості.

Буде розглянуто обчислювальні можливості екстремального методу у поєднанні з методом ув'язки мережі, коли спільний розв'язок двох основних систем Кірхгофа використовується як початкове наближення для розв'язання більш складної та великої задачі нелінійного програмування.

Частину результатів, викладених у статті було отримано, в тій чи іншій формі, у роботах [3]–[5]. З метою замкненості викладу нижче з доведеннями наведено ті результати, що дають основу для розв'язання великої кількості проблем, пов'язаних із пошуком допустимих потоків у мережах та їх оптимізацією.

ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

Розподільчу мережу представляємо у вигляді зв'язного орієнтовного графа $G=(N,V)$, де N та V — пара скінчених множин. Елементи i множини N називаються вершинами графу G, елементи v множини V — дугами, причому кожному $v \in V$ співставлено упорядковану пару вершин (i,j), $i,j \in N$, що є відповідно початком і кінцем дуги $v=(i,j)$.

Нехай x_{ij} — це величина потоку від вершини i у вершину j вздовж дуги $(i,j)\in V$. Кожній дузі графа $v=(i,j)$ ставиться у відповідність пара чисел r_{ij}^{-}, r_{ij}^{+}, що характеризують її верхню та нижню пропускну спроможність. Крім того, за допомогою двосторонніх обмежень можна зафіксувати певний напрям протікання потоків.

У вузлах графа задаються функції споживання (замовлення споживачів та план постачання продукту), причому подача продукту з різних джерел може бути або константами (детерміновані джерела) або змінними (недетерміновані джерела). Потрібно визначити такий план розподілу потоків вздовж мережі, що за рахунок можливого перерозподілу навантаження недетермінованих джерел задовольнить споживачів із найменшими загальними витратами.

Основна система, що є обмеженнями для змінних в оптимізаційних задачах розподілу потоків — є система рівнянь, заданих у вершинах графа:

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i, \quad i \in N. \tag{1}$$

Величина d_i означає кількість речовини, що споживається ($d_i < 0$) або подається у мережу ($d_i \geq 0$) у вершині i.

Необхідною умовою сумісності рівнянь (1) є виконання співвідношення

$$\sum_{i \in N} d_i = 0\,, \tag{2}$$

що забезпечує збалансованість системи (1)

$$\sum_{i \in N} \sum_{j:(i,j) \in V} x_{ij} = \sum_{i \in N} \sum_{j:(j,i) \in V} x_{ji}\,.$$

Система (1) — це аналог відомої системи Кірхгофа, що відображає закон збереження речовини та гарантує задоволення всіх споживачів, розташованих у вершинах графу.

Випишемо тепер функцію, яка характеризує приналежність довільної дуги певному шляху на графі:

$$\omega_{ij,J} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } \exists k : i = j_k,\ j = j_{k+1}, \left(j_k, j_{k+1}\right) \in V,\ k = 1,\dots,m-1, \\ -1, & \text{якщо } \exists k : i = j_k,\ j = j_{k+1}, \left(j_{k+1}, j_k\right) \in V,\ k = 1,\dots,m-1, \\ \ \ 0 & \text{у всіх інших випадках}, \end{cases}$$

де $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ — шлях, що з'єднує вершини j_1 та j_m графа G.

Друга важлива система рівнянь для енергетичних систем виникає із другого закону Кирхгофа, який вимагає, щоб падіння тиску вздовж довільного замкненого контуру дорівнювало нулю:

$$\sum_{(i,j) \in V} \omega_{ij,Z_s} h_{ij} = 0,\ \ s = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

де h_{ij} — це падіння тиску на ділянці $(i, j) \in V$, а Z_s — перенумеровані замкнені контури мережі. Тут ω_{ij,Z_s} характеризує приналежність дуги (i, j) до контуру Z_s.

Падіння тиску h_{ij} вздовж дуги (i, j) — є функція від потоку x_{ij}, тобто

$$h_{ij} = f_{ij}(x_{ij}). \tag{4}$$

Нижче буде показано, що за умови виконання (2) спільний розв'язок рівнянь (1), (3), (4) існує, є єдиним і дає розподіл потоків, що реалізує мінімум функції

$$F = \sum_{(i,j) \in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt$$

на множині, що задається системою (1).

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ ІЗ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ ПОСТАВКАМИ ПРОДУКТУ

Для графа $G = (N, V)$ поставимо оптимізаційну задачу.

Потрібно мінімізувати функцію

$$F = \sum_{(i,j) \in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt \tag{5}$$

за обмежень

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i,\ i \in N, \tag{6}$$

$$r_{ij}^{-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{+},\ (i,j) \in V. \tag{7}$$

Якщо задати функцію $f_{ij}(x_{ij})$ таким чином, що вона буде відображати умовну вартість проходження потоку вздовж дуги (i,j), то розв'язання задачі (5)–(7) дасть найвигідніший розподіл потоків уздовж мережі.

Надалі будемо вважати, що для кожного ребра (i,j) функція $f_{ij}(x_{ij})$ є неперервною, строго монотонно зростаючою та існує таке $\bar{x}_{ij}$, що $f_{ij}(\bar{x}_{ij}) = 0$. Не обмежуючи загальності можемо покласти $f_{ij}(0) = 0$ при $t = 0$. У [4] показано, що такі цілком природні припущення гарантують існування мінімуму поставленої задачі.

Випишемо для сформульованої задачі (5)–(7) функцію Лагранжа, врахувавши обмеження–рівності й поставивши у відповідність кожному i-му співвідношенню (6) множник Лагранжа u_i, $i \in N$:

$$L = \sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt + \sum_{i\in N} u_i \left(\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j(j,i):\in V} x_{ji} - d_i \right) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in V} \left(\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt - x_{ij}(u_j - u_i) \right) - \sum_{i\in N} u_i d_i .$$

У [4] доведено, що умови, накладені на функції $f_{ij}(x_{ij})$ забезпечують опуклість функцій

$$\varphi_{ij}(x,y) = \int_0^x f_{ij}(t)dt - xy \tag{8}$$

для довільного y.

Для оптимальних потоків $x_{ij} = x_{ij}(u_j - u_i)$, причому точка x_{ij} є розв'язком одновимірної задачі мінімізації

$$\int_0^x f_{ij}(t)dt - x(u_j - u_i) \tag{9}$$

за обмежень $r_{ij}^{-} \le x \le r_{ij}^{+}$.

З огляду на те, що в задачі

$$\min_{r_{ij}^{-} \le x \le r_{ij}^{+}} \varphi_{ij}(x,y) \tag{10}$$

похідна цільової функції $\dfrac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} = f_{ij}(x) - y$ є монотонно зростаючою функцією, то можливі наступні варіанти.

Якщо $f_{ij}(r_{ij}^{\;-}) - y \geq 0,$ то функція φ_{ij} зростає і мінімальне значення досягається на нижній межі допустимого інтервалу $x(y) = r_{ij}^{\;-}.$ Якщо $f_{ij}(r_{ij}^{+}) - y \leq 0,$ то, зважаючи на від'ємність похідної, функція φ_{ij} є спадаючою та $x(y) = r_{ij}^{+}$. У випадку, коли $f_{ij}(r_{ij}^{-}) - y < 0,$ $f_{ij}(r_{ij}^{+}) - y > 0$ існує єдиний корінь всередині інтервалу $x \in (r_{ij}^{-}, r_{ij}^{+})$ і знаходиться з умови $f_{ij}(x) = y.$ Це означає, що точка мінімуму задачі (10) або є постійним значенням, що співпадає з r_{ij}^{-} чи r_{ij}^{+}, або всередині інтервалу допустимості залежить від $y.$ Таким чином, функція φ_{ij} досягає мінімуму в єдиній точці, тобто існує одне певне значення $x(y),$ яке є точкою мінімуму функції (8) при фіксованому $y.$

Тепер можемо виписати необхідні та достатні умови екстремуму для вихідної задачі.

Теорема 1 [4]. Для того, щоб потоки $x_{ij},$ $(i, j) \in V$ були оптимальними, необхідно і достатньо, щоби знайшлися такі u_i, $i \in N,$ для яких виконуються умови:

- якщо $x_{ij} = r_{ij}^{-}$, то похідна функції (8) має бути невід'ємною:

$$f_{ij}(x_{ij}) \geq u_j - u_i; \tag{11}$$

- якщо $x_{ij} = r_{ij}^{+}$, то похідна функції (9) має бути недодатньою:

$$f_{ij}(x_{ij}) \leq u_j - u_i; \tag{12}$$

- якщо $r_{ij}^{\;-} < x_{ij} < r_{ij}^{\;+}$, то похідна має дорівнювати нулю:

$$f_{ij}(x_{ij}) = u_j - u_i. \tag{13}$$

Ці умови є необхідними та достатніми умовами існування розв'язку для задачі розподілу усталеного потоку вздовж ділянок мережі за умови, коли всі функції споживання (як замовлення споживачів, так і подача продукту в місцях розташування джерел) є константами.

РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ ІЗ ОПТИМАЛЬНИМ ПЕРЕРОЗПОДІЛОМ НАВАНТАЖЕННЯ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ПРОДУКТУ

Будемо вважати тепер, що виділено деяку підмножину вершин $\overline{N} \subseteq N,$ в яких величина d_i не є фіксованою.

Таким чином, мінімізація функції (5) відбувається по всіх x_{ij}, $(i, j) \in V,$ d_i, $i \in \overline{N},$ зв'язаних обмеженнями (6), (7), за умови виконання (2). Як і раніше, поставимо у відповідність кожному i-му співвідношенню (6) множник Лагранжа u_i, $i \in N,$ а співвідношенню (2) — u_0.

Функцію Лагранжа представимо у такому вигляді:

$$L=\sum_{(i,j)\in V}\left(\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt - x_{ij}(u_j-u_i)\right)+\sum_{i\in\overline{N}}(u_0-u_i)d_i+\sum_{i\in N\setminus\overline{N}}(u_0-u_i)d_i\,. \quad (14)$$

Для того, щоб величини x_{ij}, $(i,j)\in V$ та d_i, $i\in\overline{N}$, були розв'язком задачі (5)–(7), та виконувалася умова (2), необхідно та достатньо, щоби знайшлися такі числа u_i, $i\in N$ та u_0, що відповідні значення x_{ij} та d_i, $i\in\overline{N}$, доставляли б мінімум функції Лагранжа за обмежень $r_{ij}^{-}\le x_{ij}\le r_{ij}^{+}$, $(i,j)\in V$.

Оскільки d_i, $i\in\overline{N}$, є тепер вільними, то $u_i=u_0$, $i\in\overline{N}$, тобто в тих вершинах, де d_i не зафіксовані всі u_i є однаковими.

Це означає, що є справедливою наступна теорема.

Теорема 2 [4]**.** Необхідною і достатньою умовою оптимальності потоків x_{ij}, $(i,j)\in V$ в задачі з недетермінованими витоками є існування таких множників Лагранжа u_i, $i\in N\setminus\overline{N}$, для яких виконуються умови (11)–(13). Крім того $u_i=u_0$ для $i\in\overline{N}$, причому величину u_0 можна вибрати довільно.

Перейдемо тепер до двоїстої задачі. Враховуючи (8), можемо записати:

$$L=\sum_{(i,j)\in V}\varphi_{ij}(x_{ij,}u_j-u_i)+\sum_{i\in\overline{N}}(u_0-u_i)d_i+\sum_{i\in N\setminus\overline{N}}(u_0-u_i)d_i\,.$$

Знайдемо мінімум функції Лагранжа L по x_{ij}. Якщо позначити мінімальне значення функції $\varphi_{ij}(x,y)$ при $r_{ij}^{-}\le x_{ij}\le r_{ij}^{+}$ через $\overline{\varphi}_{ij}(y)$ і врахувати, що $u_i=u_0$, $i\in\overline{N}$, то отримаємо вираз

$$\Phi=\sum_{(i,j)\in V}\overline{\varphi}_{ij}(u_j-u_i)+\sum_{i\in N\setminus\overline{N}}(u_0-u_i)d_i\,.$$

З теорії двоїстості, двоїста задача полягає в максимізації вгнутої функції Φ по змінних u_i, $i\in N\setminus\overline{N}$.

З огляду на зроблені припущення функція $\overline{\varphi}_{ij}(y)$ є неперервно диференційовною, а згідно теореми про похідну від функції мінімуму [6], її похідна дорівнює значенню похідної від $\varphi_{ij}(x_{ij},y)$ по y, взятій у точці мінімуму $x_{ij}(y)$:

$$\frac{d\overline{\varphi}_{ij}(y)}{dy}=-x_{ij}(y).$$

Звідси

$$\frac{d\overline{\varphi}_{ij}(u_j-u_i)}{du_i}=-x_{ij}(u_j-u_i).$$

Остаточно, похідна цільової функції двоїстої задачі дорівнює

$$\frac{d\Phi}{du_i} = \sum_{i \in N} x_{ij}(u_j - u_i) - \sum_{i \in N} x_{ji}(u_i - u_j) - d_i . \tag{15}$$

Таким чином, ми звели вихідну задачу (5)–(7) до двоїстої задачі, що є задачею безумовної оптимізації

$$\max \Phi . \tag{16}$$

Її цільова функція має неперервні похідні (15), які можна обчислити. Розв'язавши задачу (16) та знайшовши оптимальні значення u_i , $i \in N \setminus \overline{N}$, можемо обчислити оптимальне значення потоків x_{ij}, $(i, j) \in V$ з необхідних умов екстремуму (теорема 1).

Для розв'язання задачі (16) з адитивно-сепарабельною цільовою функцією зручно застосувати метод покоординатного спуску, основна ідея якого полягає в тому, що на кожному кроці варіюється тільки одна змінна за умови фіксації решти. Відмітимо, що число одновимірних задач, що розв'язуються на кожному кроці цього методу, буде визначатися кількістю елементів множини $N \setminus \overline{N}$, тобто дорівнюватиме числу вузлів мережі, за виключенням тих, у яких не задана величина споживання d_i .

Розв'язок одновимірних задач

$$\max_{u_i} \Phi$$

зводиться до обертання на нуль похідної (15) цільової функції. Оскільки функція Φ є вогнутою, то похідні монотонно спадають. Методи знаходження нуля неперервної монотонно спадаючої функції наведено, наприклад, у [3], [5].

МЕТОД УВ'ЯЗКИ МЕРЕЖІ

Покажемо, як побудувати конкретні алгоритми розв'язання задачі (5)–(7) у випадках детермінованих та недетермінованих джерел на прикладі задачі поставки споживачам суміші продуктів із різних джерел. Але спочатку побудуємо зручний алгоритм знаходження розподілу потоків, як розв'язок задачі (5), (6) без обмежень на пропускні здатності дуг. Цей розподіл потоків може служити для знаходження початкового наближення для розв'язання основної задачі.

Кількість замкнених циклів мережі є значно меншою, ніж кількість ділянок мережі. Покажемо, як від задачі, розмірність якої визначається кількістю дуг мережі, перейти до задачі, розмірність якої є зіставною із кількістю замкнених циклів.

Виберемо на зв'язному графі G довільним чином деяку вершину i_0 . У методі розстановки позначок [4] ця вершина служить початковою при виділенні на графі максимального дерева. Як показано в [4], повний розв'язок системи (1) має вигляд

$$x_{ij} = x_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_{ij,Z_k} , \tag{17}$$

$$x_{ij}^0 = \sum_{\substack{k \in \overline{N} \\ k \neq i_0}} \omega_{ij,J_k} d_k + \sum_{\substack{k \in N \setminus \overline{N} \\ k \neq i_0}} \omega_{ij,J_k} d_k \,, \tag{18}$$

де $g = |V| - |N| + 1$, J_k — шляхи, що ведуть із початкової вершини i_0 у інші вершини $k \in N$ максимального дерева графа, а Z_k — це замкнені циклічні шляхи, що обмежують скінчені області, на які граф G розбиває площину.

У формулах (17)–(18) незалежними параметрами є c_k, $k = 1,...,g$ та d_i, $i \in \overline{N}$. Підставимо вираз (17) в функцію (5). Цим задача з обмеженнями (5), (6), (2) зводиться до задачі безумовної мінімізації функції F за параметрами c_k, $k = 1,...,g$ та d_i, $i \in \overline{N}$. Похідні за незалежними параметрами знаходяться за формулами:

$$\frac{dF}{dc_k} = \sum_{(i,j) \in V} \omega_{ij,Z_k} f_{ij}(x_{ij}), \quad k = 1,...,g,$$

$$\frac{dF}{dd_k} = \sum_{(i,j) \in V} \omega_{ij,J_k} f_{ij}(x_{ij}), \quad k \in \overline{N}, \tag{19}$$

де x_{ij} має вигляд (17).

Сформулюємо тепер алгоритм розв'язання задачі (5), (6), (2) без обмежень на пропускні здатності дуг.

1. Задаємо довільні початкові значення c_k, $k = 1,...,g$ та обираємо такі початкові значення d_k, $k \in \overline{N}$, що задовольняють (2).

2. Знаходимо частковий розв'язок системи (1) за формулами

$$x_{ij}^0 = \sum_{\substack{k \in \overline{N} \\ k \neq i_0}} \omega_{ij,J_k} d_k + \sum_{\substack{k \in N \setminus \overline{N} \\ k \neq i_0}} \omega_{ij,J_k} d_k \,.$$

3. Мінімізуємо функцію, яку отримано в результаті підстановки (17) в (5) за незалежними параметрами c_k, $k = 1,...,g$ та d_k, $k \in \overline{N}$. Оскільки функція F є опуклою і виведено формули (19) для обчислення її похідних, то для одновимірної мінімізації на кроці 3 алгоритму може бути застосовано довільний метод опуклого програмування.

Повторюємо кроки 2–3 до отримання оптимальних значень незалежних параметрів. Знаючи оптимальні параметри c_k, $k = 1,...,g$ та d_k, $k \in \overline{N}$, знаходимо розподіл потоків за формулами (17), (18).

Таким чином, у разі розв'язання задачі (5), (6), (2) без обмежень на пропускні здатності дуг із використанням співвідношень (17), (18) ми розв'язуємо лише $g + |\overline{N}|$ задач, що значно менше, ніж $|N \setminus \overline{N}|$.

Алгоритм ув'язки мережі для випадку газотранспортної системи докладно розглянуто в [7]. В цьому підрозділі ми сформулювали метод ув'язки мережі, який може бути застосовано для розрахунку довільних розподільчих систем.

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ СПІЛЬНОМУ РОЗВ'ЯЗАННЮ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ КІРХГОФА ДЛЯ МЕРЕЖ

Покажемо тепер, що розв'язок оптимізаційної задачі (5), (6), (2) є дійсно еквівалентним спільному розв'язанню основних систем рівнянь для мереж.

Теорема 3 [4]. Якщо J — шлях з вершини $a \in N$ у вершину $b \in N$, то

$$\sum_{j:(i,j)\in V} \omega_{ij,J} - \sum_{j:(j,i)\in V} \omega_{ji,J} = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad i = a, \\ -1 & \text{для} \quad i = b, \quad i \in N. \\ 0 & \text{для} \quad i \neq a, b, \end{cases} \tag{20}$$

Доведення. Розглянемо для початку простий шлях $J = (a,b)$, що складається лише з однієї неорієнтованої дуги. Можливі два випадки: $(a,b) \in V$ або $(b,a) \in V$. Якщо $i \neq a,b,$ то всі доданки в лівій частині дорівнюють нулю, і (20) виконується. Якщо $i = a,$ то в лівій частині (20) тільки один доданок $\omega_{ab,J} = 1$ є відмінним від нуля, і тому ліва частина дорівнює одиниці. Якщо ж $(b,a) \in V,$ то $\omega_{ba,J} = -1,$ решта доданків дорівнює нулю, і (20) знову виконується. Аналогічно, для випадку $i = b.$

Для загального шляху $J = (j_1, j_2, ..., j_m),$ $j_1 \neq j_m$, результат отримаємо, якщо врахувати, що крім початкової j_1 та кінцевої j_m вершин, решта вершин j_k входять до двох елементарних шляхів (j_{k-1}, j_k) та (j_k, j_{k+1}) перший раз як кінцева, другий — як початкова. Теорему доведено.

Розглянемо застосування теореми 2 щодо необхідних умов екстремуму за відсутності обмежень (7) на пропускні здатності дуг. За цією теоремою, для того, аби потоки x_{ij}, $(i,j) \in V$ в задачі (5), (6), (2) були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб існували такі числа u_i, $i \in N,$ що

$$u_i = u_0 \quad \text{для} \quad i \in \overline{N},$$

$$f_{ij}(x_{ij}) = u_j - u_i, \quad (i,j) \in V. \tag{21}$$

Візьмемо довільний шлях $J = (j_1, j_2, ..., j_m)$, що з'єднує вершини $a, b \in N$ тобто $j_1 = a$ та $j_m = b.$ Нехай дуга $(i,j) = (j_k, j_{k+1})$ належить цьому шляху. Тоді $\omega_{ij,J} = 1$, $f_{ij}(x_{ij}) = u_j - u_i$. Якщо $(i,j) = (j_{k+1}, j_k),$ то $\omega_{ij,J} = -1,$ $f_{ij}(x_{ij}) = u_i - u_j$. Таким чином, завжди $\omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij}) = u_j - u_i$.

Тому для довільного шляху J

$$\sum_{(i,j)\in J} \omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij}) = u_b - u_a,$$

де a та b — початкова та кінцева вершини шляху J. Зокрема

$$\sum_{(i,j)\in J} \omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij}) = 0, \tag{22}$$

якщо J — цикл або a та b належать множині $\overline{N}$.

Теорема 4 [4]**.** Умови (21) є необхідними та достатніми для оптимальності потоку x_{ij} $(i,j)\in V$ в задачі мінімізації функції $F=\sum\limits_{(i,j)\in V}\int\limits_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt$ без обмежень.

Доведення. Необхідність виконання цих умов доведено вище. Доведемо достатність. Візьмемо довільну вершину $a\in\overline{N}$ та покладемо $u_a=u_0$, де u_0 — довільне. Для решти вершин $b\neq a$ покладемо $u_b=u_a+$ $+\sum\limits_{(i,j)\in J}\omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij})$, де J — шлях, що з'єднує вершини a та b. Покажемо, що величини u_b не залежать від вибору шляху J та виконуються співвідношення (21).

Дійсно, якщо $b\in\overline{N}$, то за припущенням $\sum\limits_{(i,j)\in J}\omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij})=0$ та $u_b=u_0$.

Тепер нехай $b\in N\setminus\overline{N}$ та $J_1=(j_1,j_2,...,j_m)$ — шлях з $j_1=a$ в $j_m=b$. Нехай $J_2=(i_1,i_2,...,i_n)$ — інший шлях з $i_1=a$ в $i_n=b$. Оскільки початкова та кінцева вершини цих шляхів співпадають, то існує принаймні один цикл, що утворюється компонентами цих шляхів. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що не співпадаючі компоненти шляхів J_1 та J_2 утворюють єдиний цикл. Нехай

$$u_b^1=u_a+\sum_{(i,j)\in J_1}\omega_{ij,J_1} f_{ij}(x_{ij}),\quad u_b^2=u_a+\sum_{(i,j)\in J_2}\omega_{ij,J_2} f_{ij}(x_{ij}).$$

Якщо взяти різницю цих величин, то отримаємо

$$u_b^1-u_b^2=\sum_{(i,j)\in J_1}\omega_{ij,J_1} f_{ij}(x_{ij})-\sum_{(i,j)\in J_2}\omega_{ij,J_2} f_{ij}(x_{ij})=\sum_{(i,j)\in Z}\omega_{ij,Z} f_{ij}(x_{ij})=0,$$

де Z — цикл, що складається з неспівпадаючих частин шляхів J_1 та J_2. Таким чином, числа u_b не залежать від вибору шляху.

Нехай є дуга (i,j), що з'єднує вершини i та j. Нехай J — шлях з a в i, а $\overline{J}$ — шлях із a в j, що складається зі шляху J та доданої до нього дуги (i,j). Тоді зрозуміло, що

$$u_i-u_j=u_a+\sum_{(i,j)\in J}\omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij})-u_a-\sum_{(i,j)\in \overline{J}}\omega_{ij,\overline{J}} f_{ij}(x_{ij}).$$

Оскільки за побудовою $\overline{J}=J\cup(i,j)$, то приходимо до співвідношення

$$\sum_{(i,j)\in \overline{J}}\omega_{ij,\overline{J}} f_{ij}(x_{ij})=\sum_{(i,j)\in J}\omega_{ij,J} f_{ij}(x_{ij})+f_{ij}(x_{ij}).$$

Отже, $u_j-u_i=f_{ij}(x_{ij})$, що й потрібно було довести.

Наслідок. Спільний розв'язок систем (1), (2) та (22) існує та реалізує єдиний мінімум функції (5) за зв'язків (6), (2).

ЗАДАЧА ПОСТАВКИ СПОЖИВАЧАМ СУМІШІ ПРОДУКТІВ У ПЕВНИХ ПРОПОРЦІЯХ

Нехай у вершинах $i \in N$ мережі G розташовані споживачі та постачальники продукту (джерела води, родовища газу, перекачувальні станції тощо), причому d_i, $i \in N$ — питома кількість продукту, що споживається або подається в мережу у i-му вузлі.

Припустимо, що у вершинах $i \in \overline{N}$ розташовані витоки, відносно яких висунуто певні умови, наприклад, абсолютні величини подачі продукту з цих джерел заздалегідь невідомі, але потрібно, щоб витримувалися певні пропорції. Ці пропорції можуть визначатися ціновими показниками або показниками якості різних постачальників однорідного продукту.

Для зручності будемо вважати, що при нумерації вузлів мережі недетерміновані вузли перенумеровані першими.

Якщо позначити $y_i = d_i$ $i \in \overline{N}$, причому $y_i = k_i y$, $i = 1,...,|\overline{N}|$, $\sum_{i=1}^{|\overline{N}|} k_i = 1$, то умову матеріального балансу для цієї задачі можна переписати у такому вигляді

$$\sum_{i=1}^{|\overline{N}|} k_i y + \sum_{i \in N \setminus \overline{N}} d_i = 0.$$

Звідси отримуємо

$$y = -\sum_{i \in N \setminus \overline{N}} d_i .$$

Остаточно

$$y_i = -k_i \sum_{i \in N \setminus \overline{N}} d_i , \; i \in \overline{N}. \tag{23}$$

Оскільки всі величини d_i, $i \in N \setminus \overline{N}$ за умовою задачі є константами, співвідношення (23) означає, що у випадку, коли чітко визначені пропорції продукту, що повинен подаватися в мережу із заздалегідь визначених джерел, задача зводиться до повністю детермінованого випадку, тобто до задачі (5)–(7) з фіксованими значеннями функцій споживання d_i.

Сформулюємо покроковий алгоритм розв'язання задачі (16) для випадку детермінованих джерел.

Алгоритм розв'язання двоїстої задачі без обмежень

1. Обираємо довільні початкові значення u_i, $i \in N$. Початкові значення двоїстих змінних u_i, $i \in N$ можуть бути обчислені за формулами $u_j = u_i + f_{ij}(x_{ij})$, $(i, j) \in V$, де потоки $x_{ij}, (i, j) \in V$ знаходяться у процесі розв'язанні задачі (5), (6) без обмежень на пропускні здатності дуг. Алгоритм розв'язання цієї задачі сформульовано вище.

2. Розв'язуємо задачу знаходження оптимальних значень u_i, $i \in N$ максимізуючи функцію Φ методом покоординатного спуску.

3. Знаючи оптимальні значення u_i, $i \in N$ та використовуючи необхідні умови екстремуму, сформульовані у теоремі 1, повертаємося до вихідних змінних x_{ij}, $(i, j) \in V$, що і дає розподіл потоків, який є розв'язком задачі (5)–(7).

ПОСТАВКА СПОЖИВАЧАМ СУМІШІ ПРОДУКТІВ ПЕВНОЇ ЯКОСТІ

Розглянемо випадок, коли важливо, щоб подача продукту з певних джерел не перевищувала деяких наперед заданих меж. Ці умови можуть виникнути, коли продукти з таких джерел відрізняються, наприклад, нижчою якістю або високою ціною, і подачу їх в мережу треба обмежити.

Сформулюємо задачу функціонування мережі за умови мінімізації експлуатаційних витрат та обмеження подачі у мережу продукту з певних джерел.

Потрібно мінімізувати вираз

$$\sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt \tag{24}$$

за обмежень

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i, i \in N \setminus \overline{N}, \tag{25}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = y_i,\ i \in \overline{N}, \tag{26}$$

$$r_{ij}^{-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{+},\ (i,j) \in V, \tag{27}$$

$$d_i^{-} \le y_i \le d_i^{+}\ \ i \in \overline{N}. \tag{28}$$

Сумарний попит споживачів має знаходитися у балансі з подачею продукту в мережу

$$\sum_{i \in N \setminus \overline{N}} d_i + \sum_{i \in \overline{N}} y_i = 0. \tag{29}$$

Випишемо для задачі (24)–(29) функцію Лагранжа, використовуючи введені раніше позначення. Кожному i-му співвідношенню (25, 26) ставиться у відповідність множник Лагранжа u_i, $i \in N$, а співвідношенню (29) — u_0.

$$L = \sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt + \sum_{i\in N\setminus\overline{N}} u_i \left(\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} - d_i \right) +$$

$$+ \sum_{i\in\overline{N}} u_i \left(\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} - y_i \right) + u_0 \sum_{i\in N} (y_i + d_i) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in V} [\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt - x_{ij}(u_j - u_i)] + \sum_{i\in\overline{N}} y_i(u_0 - u_i) + \sum_{i\in N\setminus\overline{N}} (u_0 - u_i)d_i. \tag{30}$$

Як сказано у теоремі 2, для того, щоб величини x_{ij}, $(i, j) \in V$ та y_i, $i \in \overline{N}$, були розв'язком задачі (24)–(29), необхідно та достатньо, щоби знайшлися такі числа u_i, $i \in N$, та u_0, що відповідні значення x_{ij} та y_i, $i \in \overline{N}$, доставляли б мінімум функції Лагранжа за обмежень $r_{ij}^{-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{+}$, $(i,j) \in V$, $d_i^{-} \le y_i \le d_i^{+}$, $i \in \overline{N}$.

Точка x_{ij} є точкою мінімуму функції $\int\limits_0^x f_{ij}(t)dt - x[u_j - u_i]$ за обмежень $r_{ij}^{-} \le x \le r^{+}{}_{ij}$. Ми позначили мінімальне значення цієї функції через $\overline{\varphi}_{ij}(u_j - u_i)$. Точка y_i є точкою мінімуму функції $\sum\limits_{i \in \overline{N}} y(u_0 - u_i)$ за обмежень $d_i^{-} \le y \le d_i^{+}$, $i \in \overline{N}$. Позначимо мінімальне значення цієї функції через $\overline{\gamma}_i(u_0 - u_i)$.

Випишемо вираз для цільової функції двоїстої задачі:

$$\Psi = \sum_{(i,j)\in V} \overline{\varphi}_{ij}(u_j - u_i) + \sum_{i \in \overline{N}} \overline{\gamma}_i(u_0 - u_i) + \sum_{i \in N \setminus \overline{N}} (u_0 - u_i) d_i \,.$$

Сформулюємо для задачі (24)–(29) необхідні умови екстремуму.

Теорема 5. Для того, щоб потоки x_{ij}, $(i,j) \in V$ продукту вздовж мережі за умови обмеження продуктивності певних джерел y_i, $i \in \overline{N}$ були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі u_i, $i \in N$ та u_0, для яких виконуються умови теореми 2 і додаткові умови для вузлів $i \in \overline{N}$: якщо $y_i = d_i^{-}$, то $u_i < u_0$; якщо $y_i = d_i^{+}$, то $u_i > u_0$; якщо $d_i^{-} < y_i < d_i^{+}$, то $u_i = u_0$.

В останньому випадку, якщо для деяких оптимальних значень двоїстих змінних виконується співвідношення $u_i = u_0$, умови теореми 5 не визначають відповідне значення прямих змінних y_i.

Для розв'язання проблеми визначення розв'язку вихідної задачі на основі розв'язку двоїстої задачі [8] можна використати прийом корекції цільової функції (24) шляхом додавання до неї певного «регулюючого» члена:

$$\sum_{i \in \overline{N}} \varepsilon_i ((y_i - (d_i^{+} - d_i^{-})/2)^2,$$

де ε_i — параметри квадратичної корекції, $\varepsilon_i > 0$.

Це забезпечує неперервну диференційованість функції Ψ та однозначність визначення $x_{ij}(u), y_i(u)$ для довільних u.

Алгоритм розподілу потоків із оптимізацією навантаження недетермінованих джерел постачання продукту.

1. Вибираємо довільні початкові значення u_i, $i \in N$ та u_0. Початкові значення u_i можуть бути обрані як розв'язок двоїстої задачі до задачі розподілу потоків із фіксованою продуктивністю джерел (витоків).

2. Розв'язуємо задачу знаходження оптимальних значень u_i, $i \in N$ максимізуючи функцію Ψ.

3. Знаючи оптимальні значення u_i, $i \in N$ та використовуючи необхідні умови екстремуму, повертаємося до вихідних змінних x_{ij}, $(i, j) \in V$, y_i, $i \in \overline{N}$ що дає розподіл потоків та продуктивність недетермінованих джерел, які є розв‘язком задачі (24)–(29).

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу розподілу потоків, причому подача продукту із заздалегідь визначеного переліку джерел підлягає оптимізації за умови додаткових обмежень.

Модель оптимізації функціонування розподільчої системи з обмеженням подачі продукту із наперед визначених витоків є узагальненням моделі розподілу потоків для мережі з нефіксованими вузловими параметрами. Додатково введені обмеження відображають технічні або економічні характеристики цих витоків.

Задача розподілу потоків з подачею продукту з різних витоків у певних пропорціях зводиться до повністю детермінованого випадку.

Перевагою побудованих алгоритмів є перехід до набору задач меншої розмірності в процесі розрахунків допустимих потоків та врахування адитивної сепарабельності цільових функцій мережевих задач, що є важливим з огляду на дуже великі розмірності таких задач.

У розглянутих задачах розподілу потоків додаткові обмеження накладаються на вузлові параметри. У випадку, якщо потрібно витримати збереження пропорцій суміші продукту вздовж ділянок мережі у задачу потрібно вводити додаткові, часом нелінійні, обмеження і це може стати предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985. — 235 с.
2. *Системные* исследования в энергетике / под ред. чл.-кор. РАН Н.И. Воропая. — Новосибирск.: «НАУКА», 2010. — 686 с.
3. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Алгоритмы оптимального распределения потоков в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 4. — С. 29–39.
4. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67–77.
5. *Кирик Е.Е.*, *Пшеничный Б.Н.* Теория и методы расчета сетей. // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1995. — т. 2, вып.1. — С. 49–69.
6. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
7. *Кірік О.Є.* Розподіл потоків в мережах складної кільцевої топології // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 18–26.
8. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1979. — 199 с.

Надійшла 06.03.2013