УДК 004.75

ЗАЙЧЕНКО Ю.П.,
МАЛИХЕХ ЕСФАНДИЯРФАРД,
ОВИ НАФА АГАИ АГ ГАМИШ

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЧЕТКОГО ПОРТФЕЛЯ

В статье рассмотрены задачи портфельной оптимизации в нечетких условиях. Построена математическая модель данной задачи. Исследована зависимость «оптимальная доходность – риск» для нечеткого портфеля. Определены достаточные условия при которых эта зависимость будет монотонно-убывающей. Приводятся результаты экспериментальных исследований, подтверждающие теоретические результаты.

The fuzzy portfolio optimization problem is considered. The mathematical model is constructed and the dependence "optimal benefits – risk" is investigated. The sufficient conditions for this dependence to be monotonously decreasing are obtained. The results of experimental investigations are presented.

Введение

Задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности в последние годы вызывает значительный интерес. Для решения этой проблемы был предложен аппарат нечетких множеств в работах [1,2], согласно которому доходности акций и в целом доходность инвестиционного портфеля рассматриваются как нечеткие числа с заданной функцией принадлежности, а риск трактуется как возможность (субъективная вероятность) ситуации, когда реальная доходность портфеля оказывается ниже ожидаемой доходности нечеткого портфеля. С целью более обоснованной оценки доходности акций на фондовом рынке по предыстории в задаче портфельной оптимизации был предложен метод прогнозирования, применение которого позволило улучшить результаты [3]. В ходе экспериментальных исследований разработанного метода были построены зависимости «оптимальная доходность-риск» для нечеткого портфеля, которые во многих случаях имели прямо противоположный вид по сравнении с классической моделью Марковица-Тоббина. Целью настоящей работы является получение аналитических условий, при которых зависимость «оптимальная доходность – риск» для нечеткого портфеля будет монотонно убывающей и их экспериментальная проверка.

Задача нечеткой портфельной оптимизации базируется на допущении, что доходность портфеля является нечетким числом (НЧ), описываемым тройкой параметров:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i ; \tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i ; r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}),$$

где $(r_{1i}, \tilde{r}_i, r_{2i})$ – доходность i-*той* ценной бумаги. x_i-доля i-*той бумаги в портфеле.*

Для того, чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \qquad (1)$$

$$\beta = const \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \qquad (3)$$

$$0 < \beta < 1$$

где β- уровень риска.

В работе [1] было показано, что этот случай возможен когда

$$r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$$

либо когда

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} = r_{\max}$$

Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$.

Тогда используя результаты работы [3], задача (1)-(3) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} * \\ * \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) + \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i > r^* \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \ge 0 \quad i = \overline{1, N} \tag{8}$$

Учитывая вид для $r_{\min}$, $\tilde{r}$, и r_{max}, а также формулу (1), данную задачу нахождения интервала доходности для нечеткого портфеля с n ЦБ можно свести к задаче с двумя ЦБ (x_1,x_2) с минимальной и максимальной доходностями.

Пусть первая ЦБ имеет минимальную доходность в портфеле, описываемую НЧ $r_1 = [r_{11}, \tilde{r}_1, r_{12}]$, а вторая ЦБ – максимальную доходность в портфеле $r_2 = [r_{21}, \tilde{r}_2, r_{22}]$. Пусть также критериальное значение описывается НЧ $r^* = [r^*{}_1, r^*, r^*{}_2]$.

При этом допустим $r_{11}<r_{21}$; $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$.

Тогда $\tilde{r} = \tilde{r}_1 x_1 + \tilde{r}_2 x_2; x_1 + x_2 = 1$. Причем $x=x_2$, тогда $x_1=1-x$.

Доходность портфеля описывается в этом случае НЧ вида $r= [r_{min},\tilde{r},r_{max}]$, где:

$$r_{\min} = r_{11}(1-x) + r_{12}x;$$
$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}(1-x) + \tilde{r}_2 x;$$
$$r_{\max} = r_{21}(1-x) + r_{22}x;$$

Требуется найти такое x, что

$$\tilde{r} = \tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2 x \to \max \tag{9}$$

при условиях:

$$\beta(x) \le \beta_{зад} \tag{10}$$

где выражение $\beta(x)$ для случая $0<\beta<1$ и $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$ при подстановке $x_1=1-x$; $x_2=x$; $n=2$ в выражение (5) дает:

$$\beta(x) = \frac{1}{(1-x)(r_{12} - r_{11} + x(r_{22} - r_{21}))} * \\ *\{r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{21}) + ((1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*)* \\ * \ln \frac{\tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2 x - r^*}{x(\tilde{r}_1 - r_{11}) + (1-x)(\tilde{r}_2 - r_{21})} \le \beta$$

Достаточные условия монотонно убывающего характера зависимости $(\tilde{r}_{опт}\beta)$ являются следующие

$$\frac{\partial \tilde{r}_{опт}}{\partial x} \ge 0; \frac{\partial \beta}{\partial x} \ge 0 \tag{11}$$

Рассмотрим сначала $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} > 0$.

Очевидно $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1$ (12) и т.к., по предположению, $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$, то $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} > 0$.

Рассмотрим теперь зависимость $\frac{\partial \beta}{\partial x}$.

Для нахождения сложной производной $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, введем следующие обозначения:

$$A(x) = r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{12});$$
$$B(x) = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^* \tag{13}$$
$$C(x) = (1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) \tag{14}$$
$$D(x) = (1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21}) \tag{15}$$

Тогда

$$\beta(x) = \left[A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] \frac{1}{D(x)} \tag{16}$$

Найдем производную $\frac{\partial \beta}{\partial x}$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \{[A'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + \\ + \frac{B'(x)C(x) - B(x)C'(x)}{C(x)}]D(x) - \\ D'(x)[A(x) + (x \ln \frac{B(x)}{C(x)})]\} \frac{1}{D^2(x)} \tag{17}$$

Выясним условия, при которых $\frac{\partial \beta}{\partial x} < 0$.

Для этого необходимо, чтобы выражения в фигурных скобках {} в (17) было меньше 0.

Очевидно

$$A'(x) = r_{11} - r_{21};\ B'(x) = -\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \\ C'(x) = -(\tilde{r}_1 - r_{11}) + (\tilde{r}_2 - r_{21}) \\ = (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (r_{21} - r_{11}) \\ D'(x) = (r_{22} - r_{21}) - (r_{12} - r_{11}). \tag{18}$$

Подставим (18) в (17) и после несложных преобразований в (17) получим следующее условие

$$C(x)D(x)\left[A'(x)+B'(x)+B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]- \\ DC'(x)B(x)-C(x)D'(x) \\ (A(x)+B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)})<0 \tag{19}$$

Подставляя выражение для $A(x); A'(x); B(x); B'(x); C(x); C'(x); D(x); D'(x)$ в (19), получим

$$\begin{aligned}&[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{11})]*\\&*[(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})]*\\&[(r_{11}-r_{21})+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)*\\&*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}]-\\&-[(1-x)\tilde{r}+x\tilde{r}_2-r^*][(\tilde{r}_2-r_{21})-\\&-(\tilde{r}_1-r_{11})]*\\&*[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{21})]-\\&-[(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})]*\\&*[(r_{22}-r_{21})-(r_{12}-r_{11})]*\\&(r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21}+\\&+[(1-x)\tilde{r}+x\tilde{r}_2-r^*]*\\&\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})})\end{aligned} \tag{20}$$

Пусть функции принадлежности являются треугольными симметричными. Тогда

$$\tilde{r}_1-r_{11}=r_{12}-\tilde{r}_1=\Delta_1;\ \tilde{r}_2-r_{21}=r_{22}-\tilde{r}_2=\Delta_2$$

и, очевидно, $r_{12}-r_{11}=2\Delta_1;\ r_{22}-r_{21}=2\Delta_2$.

Подставляя эти выражения в (20) получим

$$\begin{aligned}&[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2][(1\Delta_1 x)2\Delta_2+x\Delta_2*\\&[(\Delta_2-\Delta_1)+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)*\\&*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}]-\\&-[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*]*[\Delta_2-\Delta_1]*\\&[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2]*[(1\Delta_1 x)2\Delta_2+x\Delta_2]*\\&*[\Delta_2-\Delta_1]*(r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21})+\\&+[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*]*\\&*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}\end{aligned} \tag{21}$$

Преобразуем правую часть выражения (21)

$$\begin{aligned}&-[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*](\Delta_2-\Delta_1)*\\&*\left[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2\right]-\left[(1-x)\Delta_1+x\Delta_2\right]*\\&*(\Delta_2-\Delta_1)\left\{r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21}\right\}=\\&=-2\left[(1-x)\Delta_1+\Delta_2\right](\Delta_2-\Delta_1)*\\&*\left[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*+r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21}\right]=\\&=-2\left[(1-x)\Delta_1+\Delta_2\right](\Delta_2-\Delta_1)\left[(1-x)\Delta_1+x\Delta_2\right]=\\&=2\left[((1-x)\Delta_1+\Delta_2)^2(\Delta_2-\Delta_1)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

Анализируя выражение (22) нетрудно проверить, что

$$C(x)D(x)\left[A'(x)+B'(x)\right]= \\ D(x)C'(x)B(x)+C(x)D'(x)A(x)\text{'}$$

поэтому после сокращения подобных членов в (22) останутся члены

$$C(x)D(x)B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}- \\ C(x)D'(x)B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)} \tag{23}$$

И подставляя выражение для $C(x); D(x); B(x); B'(x)$ в (23) получим

$$\begin{aligned}&[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{21})]*\\&*[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{21})*\\&*(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)-(1-x)\tilde{r}+x\tilde{r}_2-r^**\\&(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)(r_{22}-r_{21})*\\&*\ln\frac{(1-x)(\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*)}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}]\end{aligned} \tag{24}$$

Откуда

$$\begin{aligned}&2[(1-x)\Delta_1+x\Delta_2]*\\&*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}]*\\&*[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)-\\&(\Delta_2-\Delta_1)][(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*]\end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})=\\&=(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-(1-x)r_{11}-\\&xr_{21}=(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r_{\min}\end{aligned}$$

и так как $r^*>(1-x)r_{11}+xr_{21}=r_{\min}$, то

$$\frac{B(x)}{C(x)}=\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}<1,$$

$$\ln\frac{B(x)}{C(x)} < 0 \qquad (26)$$

Следовательно, для того, чтобы выражение (25) было меньше нуля необходимо и достаточно, чтобы

$$(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) -$$
$$(\Delta_2 - \Delta_1)][(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]$$

было больше 0.

Исследуем условия, при которых

$$\{2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2](\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - \\ -(\Delta_2 - \Delta_1)][(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*\} > 0 \qquad (27)$$

а) неравенства

$\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1 > \Delta_2 - \Delta_1 = (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (r_{21} - r_{11})$ выполняются, если $r_{21} > r_{11}$.

б) неравенства

$2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2] > (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*$ выполняется, если

$$\begin{aligned} &2(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + 2x(\tilde{r}_2 - r_{21}) - \\ &-(1-x)\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + r^* = (1-x)* \\ &*(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) + r^* = \\ &= (1-x)(\tilde{r}_1 - x_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) + \\ &+ r^* - [(1-x)x_{11}] + xr_{21} = \\ &= (1-x)\Delta_1 + x\Delta_2 + r^* - r_{\min} > 0 \end{aligned} \qquad (28)$$

и (28) выполняется, если $r^* - r_{\min} > 0$.

Таким образом, мы получили следующие достаточные условия для (см. рис 1)

а) $\tilde{r}_1 < r^* < \tilde{r}_2$;

б) $r_{11} < r_{21}$;

в) $r^* > r_{\min} = (1-x)r_{11} + x_1 r_{21}$;

г) $r^* < \tilde{r} = (1-x)\tilde{r}_1 + x_1\tilde{r}_2$;

При выполнении этих условий, зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь монотонно-убывающий характер.

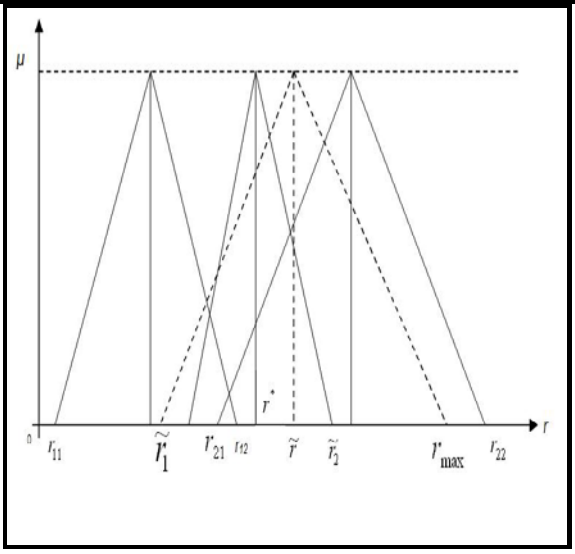

Рис .1. Графическая интерпретация достаточных условий

Экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность - риск»

Проведем экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность-риск» для нечеткого инвестиционного портфеля. При этом рассмотрим случаи двух ЦБ с малой доходностью и высокой доходностью с различными волатильностями.

При этом будем варьировать величину критериального значения.

Исследуем случаи, когда эта зависимость будет иметь монотонно- убывающий характер.

Случай 1. Когда первой ЦБ была задана высокая волатильность и низкая доходность, а другой ЦБ средняя волатильность и высокая доходность, то зависимость доходность-риск носила монотонно – убывающий характер.Это иллюстрируется графиками на рис.2.

Ниже приводятся различные примеры взаимного расположения ФП доходностей акций и критериального значения и соответствующие построенные зависи -мости « оптимальная доходность-риск»
(рис. 2-10).

Пример 1

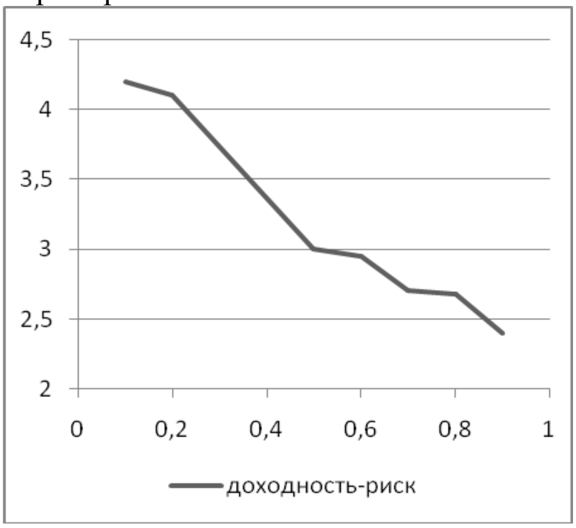

Рис .2. График зависимости доходность- риск нечеткого портфеля

Пример 2.

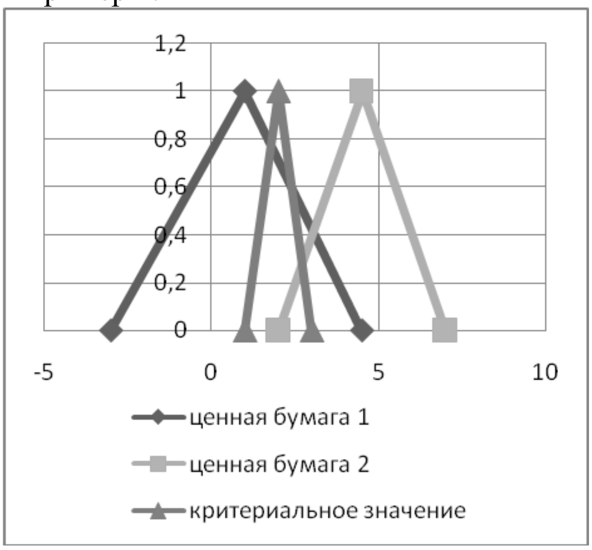

Рис. 3. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП

Пример 3.

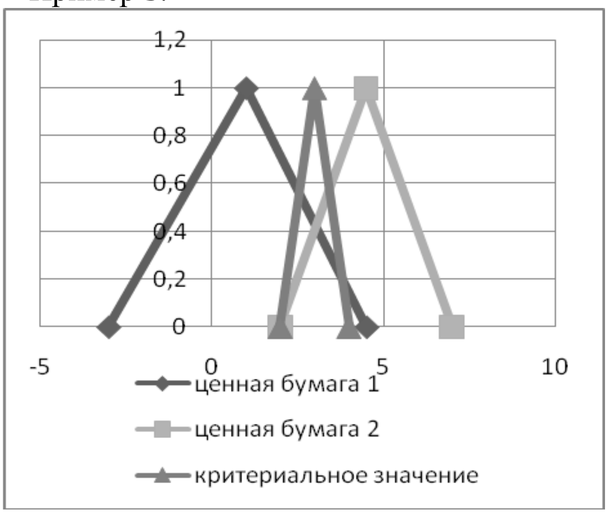

Рис. 4. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения*.*

Пример 4.

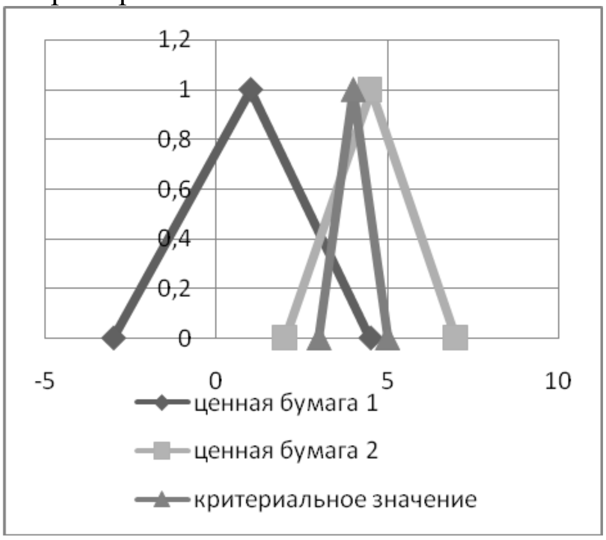

Рис. 5. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.

Пример 5.

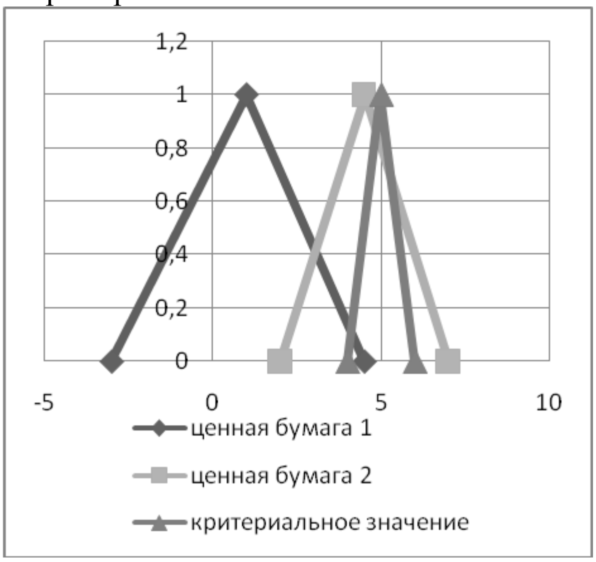

Рис. 6. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.

Пример 6.

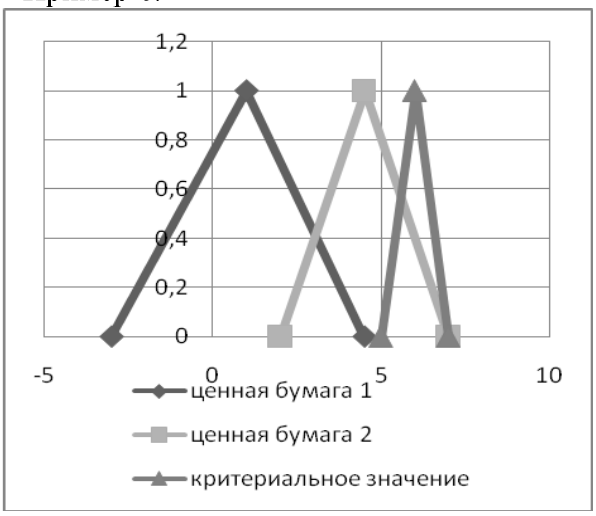

Рис. 7. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП.

2. Случай монотонно- возрастающей зависимости «доходность- риск»

При задании первой ЦБ низкой волатильности и низкой доходности, а второй ЦБ-высокой волатильности и высокой доходности и при задании критериального значения меньше ожидаемой доходности менее доходной ЦБ зависимость «доходность- риск» носит возрастающий характер (см.рис. 8-10, примеры 7,8).

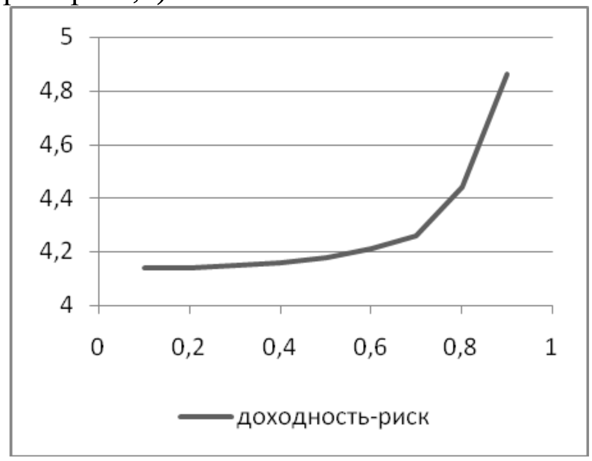

Рис 8. График зависимости «доходность- риск»

Пример 7.

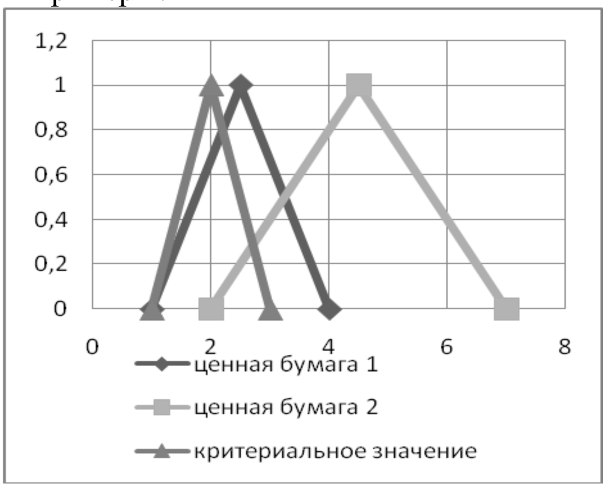

Рис. 9. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Пример 8.

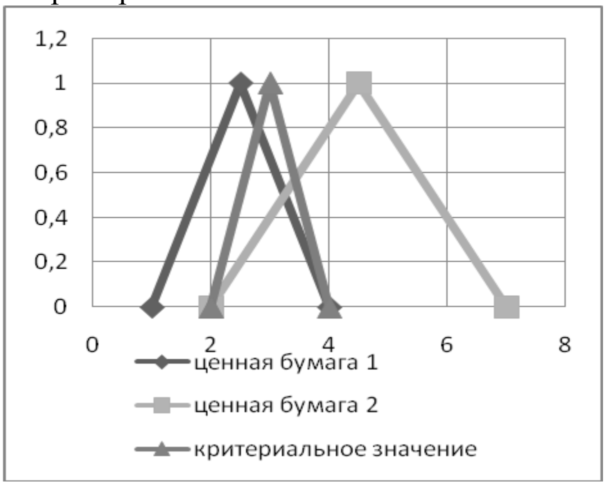

Рис. 10. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Выводы

В работе исследована модель задачи оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля. Установлены достаточные условия, при которых зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь убывающий характер, прямо противоположный зависимости для классической модели Марковица-Тоббина.

Проведены экспериментальные исследования условий и оптимальных решений задачи портфельной оптимизации для убывающей и возрастающей зависимостей «доходность-риск», которые полностью подтвердили теоретические результаты.

Зависимость « доходность- риск » нечеткого портфеля носит преимущественно убывающий характер в случаях, когда менее доходная ЦБ имеет высокую или среднюю волатильность, а более ценная ЦБ имеет высокую доходность при малой и средней волатильности, а при этом критериальное значение находится между доходностями обоих ЦБ.

Зависимость «доходность-риск» носит возрастающий характер, в случаях, когда менее доходная ЦБ имеет малую или среднюю волатильность, а более доходная ЦБ имеет высокую волатильность, а критериальное значение меньше доходности менее ценной ЦБ или расположено между ожидаемыми доходностями обоих ЦБ.

Список литературы

1. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ инвестиционного портфеля для различных видов функций принадлежности // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2008.- №2.- С. 59-76.
2. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Нечеткий метод индуктивного моделирования для прогнозирования курсов акций в задачах портфельной оптимизации // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2008. - № 1.- С. 9-14.
3. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник національного технічного університету України «КПІ». «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: ТОО «ВЕК+», 2007. - № 47. - С. 168-179.
4. Zaychenko Yurii, Esfandiyarfard Maliheh. Optimization of the investment portfolio in the conditions of uncertainty // International Journal "Information Technologies and Knowledge" Volume 2. - 2008. – Vol.2. - Number 3. - P. 225-233.

Поступила в редакцию 16.12.2009