

УДК: 629.783+629.7.05

О. М. Мелащенко, Л. М. Рижков, Д. І. Степуренко

АНАЛІЗ ДЕТЕРМІНОВАНИХ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ

Вступ

Двовекторні детерміновані алгоритми орієнтації широко використовуються в системах управління надмалих літальних апаратів (БПЛА, мікросупутників) [1-4]. Їх основна перевага – простота реалізації при достатньо високій точності обчислень.

Ці алгоритми за інформацією про два вектори, що задані в орбітальній та зв'язаній системах координат, обчислюють матрицю напрямних косинусів. За точних значень векторів детерміновані алгоритми є дуже ефективними, але наявність інструментальних похибок вимірювачів суттєво впливає на точність обчислень. Тому актуальною є розробка таких алгоритмів, для яких можна достатньо просто оцінити вплив інструментальних похибок вимірювачів.

Постановка задачі

Розглянемо найбільш поширені детерміновані алгоритми визначення орієнтації рухомих об'єктів, а також модифікацію деяких алгоритмів, з точки зору оцінки впливу інструментальних похибок.

Алгоритм TRIAD та його модифікації

Алгоритм TRIAD є найпростішим для реалізації, але в ньому неоптимально використовуються дані спостережень. Сутність алгоритму полягає у конструюванні двох тріад ортонормованих векторів, використовуючи доступну інформацію про вимірювані вектори. Використовуючи позначення $\mathbf{B}_{mes}, \mathbf{S}_{mes}$ для вимірюваних у зв'язаній системі координат векторів і позначення $\mathbf{B}_{ref}, \mathbf{S}_{ref}$ для опорних векторів, орти кожної тріади запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} t_{1b} &= \mathbf{B}_{mes}, & t_{1r} &= \mathbf{B}_{ref}, \\ t_{2b} &= \frac{\mathbf{B}_{mes} \times \mathbf{S}_{mes}}{|\mathbf{B}_{mes} \times \mathbf{S}_{mes}|}, & t_{2r} &= \frac{\mathbf{B}_{ref} \times \mathbf{S}_{ref}}{|\mathbf{B}_{ref} \times \mathbf{S}_{ref}|}, \\ t_{3b} &= t_{1b} \times t_{2b}, & t_{3r} &= t_{1r} \times t_{2r}. \end{aligned}$$

Матриця напрямних косинусів, якою визначатиметься взаємна орієнтація зв'язаної і орбітальної систем координат, знаходиться таким чином:

$$D_{triad} = [t_{1b} \quad t_{2b} \quad t_{3b}] [t_{1r} \quad t_{2r} \quad t_{3r}]^T = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}.$$

Слід зауважити, що коли даний алгоритм застосувати до двох пар точно відомих векторів, то в результаті отримаємо матрицю повороту, яка описуватиме поворот других векторів (в даному випадку вибраних позначень \mathbf{S}_{ref} до \mathbf{S}_{mes}) з набагато меншою точністю, ніж поворот перших векторів (\mathbf{B}_{ref} до \mathbf{B}_{mes}). Це пояснюється тим, що зміна положення вектора \mathbf{S}_{mes} в площині, в якій знаходяться вектори \mathbf{B}_{mes} та \mathbf{S}_{mes} , не змінює напрямку вектора t_{3b} . В той же час ця обставина є позитивною з тієї точки зору, що така зміна векторів, наприклад, внаслідок інструментальних похибок вимірювачів, не буде впливати на точність визначення напрямних косинусів.

Недолік алгоритму TRIAD полягає в складності обчислення його інструментальних похибок внаслідок використання нормованих векторів.

В зв'язку з цим розглянемо більш прості в реалізації аналогічні алгоритми.

Введемо в розгляд вектори $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}_o = \vec{a}_o \times \vec{b}_o$ і використаємо співвідношення:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{x_o} & a_{y_o} & a_{z_o} \\ b_{x_o} & b_{y_o} & b_{z_o} \\ c_{x_o} & c_{y_o} & c_{z_o} \end{vmatrix} D^T$$

Позначимо:

$$A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \quad V = \begin{vmatrix} a_{x_o} & a_{y_o} & a_{z_o} \\ b_{x_o} & b_{y_o} & b_{z_o} \\ c_{x_o} & c_{y_o} & c_{z_o} \end{vmatrix}.$$

Маємо: $A = VD^T$. Тобто

$$D = (V^{-1}A)^T. \quad (1)$$

За формулою (1) отримаємо співвідношення, які достатньо просто аналізувати з точки зору інструментальних похибок алгоритму:

$$q_{11} = \frac{1}{c_o^2} [a_x(b_{y_o}c_{z_o} - b_{z_o}c_{y_o}) - b_x(a_{y_o}c_{z_o} - a_{z_o}c_{y_o}) + c_x c_{x_o}]; \quad \begin{matrix} (\\ 2 \\) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
q_{12} &= \frac{1}{c_o^2} \left[-a_x (b_{xo} c_{zo} - b_{zo} c_{xo}) + b_x (a_{xo} c_{zo} - a_{zo} c_{xo}) + c_x c_{yo} \right]; \\
q_{13} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_x (b_{xo} c_{yo} - b_{yo} c_{xo}) - b_x (a_{xo} c_{yo} - a_{yo} c_{xo}) + c_x c_{zo} \right]; \\
q_{21} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_y (b_{yo} c_{zo} - b_{zo} c_{yo}) - b_y (a_{yo} c_{zo} - a_{zo} c_{yo}) + c_y c_{xo} \right]; \\
q_{22} &= \frac{1}{c_o^2} \left[-a_y (b_{xo} c_{zo} - b_{zo} c_{xo}) + b_y (a_{xo} c_{zo} - a_{zo} c_{xo}) + c_y c_{yo} \right]; \\
q_{23} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_y (b_{xo} c_{yo} - b_{yo} c_{xo}) - b_y (a_{xo} c_{yo} - a_{yo} c_{xo}) + c_y c_{zo} \right]; \\
q_{31} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_z (b_{yo} c_{zo} - b_{zo} c_{yo}) - b_z (a_{yo} c_{zo} - a_{zo} c_{yo}) + c_z c_{xo} \right]; \\
q_{32} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_z (b_{xo} c_{zo} - b_{zo} c_{xo}) + b_z (a_{xo} c_{zo} - a_{zo} c_{xo}) + c_z c_{yo} \right]; \\
q_{33} &= \frac{1}{c_o^2} \left[a_z (b_{xo} c_{yo} - b_{yo} c_{xo}) - b_z (a_{xo} c_{yo} - a_{yo} c_{xo}) + c_z c_{zo} \right]; \quad c_o^2 = c_{xo}^2 + c_{yo}^2 + c_{zo}^2.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що для визначення кутів Ейлера достатньо обчислити тільки напрямні косинуси $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{33}$. Для їх знаходження можна використати більш простий алгоритм, а саме: з рівнянь

$$\begin{aligned}
q_{11} a_{xo} + q_{12} a_{yo} + q_{13} a_{zo} &= a_x; \\
q_{11} b_{xo} + q_{12} b_{yo} + q_{13} b_{zo} &= b_x; \\
q_{11} c_{xo} + q_{12} c_{yo} + q_{13} c_{zo} &= c_x
\end{aligned}$$

знаходимо напрямні косинуси q_{11}, q_{12}, q_{13} , а з рівнянь

$$\begin{aligned}
q_{13} a_x + q_{23} a_y + q_{33} a_z &= a_{zo}; \\
q_{13} b_x + q_{23} b_y + q_{33} b_z &= b_{zo}; \\
q_{13} c_x + q_{23} c_y + q_{33} c_z &= c_{zo}
\end{aligned}$$

знаходимо напрямні косинуси q_{23}, q_{33} .

Задача Уохби (Wahba's Problem)

В 1965 році Grace Wahba запропоновано визначати орієнтацію космічного апарату як оцінку методом найменших квадратів матриці повороту, якою описується перехід від опорної системи координат до зв'язаної.

Ортогональна матриця D , якою описується перетворення одиничного вектора r_i опорної системи координат в одиничний вектор b_i

зв'язаної системи координат, знаходиться шляхом мінімізації функції втрат $L(D)$:

$$L(D) = 0.5 \sum a_i |\mathbf{b}_i - D\mathbf{r}_i|^2. \quad (3)$$

Додатні числа a_i в даному виразі є ваговими коефіцієнтами, які використовуються для зважування пар векторів. Функція втрат $L(D)$ може бути записана у вигляді:

$$L(D) = \sum a_i - \text{tr}(DB^T),$$

де $B = \sum a_i \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^T$.

В літературі з позицій робастності, точності і потреб в обчислювальних ресурсах описано вісім різних методів мінімізації функції втрат Уохби. Одними з найвідоміших є q-метод Давенпорта (Davenport) і алгоритм QUEST, розроблений Шустером (Shuster).

q-метод Давенпорта. Даний метод розв'язання задачі Уохби полягає у знаходженні матриці повороту D , як кватерніону, через обчислення симетричної матриці K :

$$K = \begin{bmatrix} S - \text{tr}B I & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & \text{tr}B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{pmatrix}, \quad S = B + B^T. \quad (4)$$

Власний вектор матриці K , який відповідає найбільшому власному значенню, в даному випадку дає оптимальне кватерніонне подання повороту:

$$K\mathbf{q}_{opt} = \lambda_{\max} \mathbf{q}_{opt}.$$

Ключова складова даного алгоритму полягає у визначенні власного значення λ_{\max} . У випадку доступності вимірювань двох неколінеарних векторів дане власне значення знаходиться згідно виразу:

$$\lambda_{\max} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 [(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + |\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2| |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|]}. \quad (5)$$

Алгоритм QUEST. Цей алгоритм кватерніонного оцінювача є одним з найшвидших, тому досить часто використовується для розв'язання задачі Уохби. Його основою є задача розв'язання рівняння

$$\det(K - \lambda I) = 0. \quad (6)$$

для визначення власного значення λ . Алгоритм QUEST запишемо у вигляді послідовності операцій, показаній на рис. 1. На цьому рисунку оп

тимальний множник Лагранжа λ_{\max} знаходиться як найбільший корінь полінома четвертого порядку.

Числовий аналіз алгоритму

Дослідимо алгоритм QUEST через обробку на його основі сигналів тривісних магнітометра і акселерометра інерціального блока ADIS16405, оцифрованих з частотою 102 Гц. Тут акселерометр використовується як датчик другого опорного напрямку (є імітатором датчика Сонця).

На рис. 2 показано графіки зміни оцінок кута крену, знайдених згідно алгоритму QUEST для двох випадків – $N=1$ (пунктирна крива) і $N=50$ (суцільна крива).

З рис. 2 видно, що збільшення кількості одночасно оброблюваних пар векторів до $N=50$ дозволило суттєво згладити оцінку кута Ейлера. При цьому внесене запізнення не перевищує 0,4 с.

На рис. 3 показано графіки зміни оцінок кута крену, знайдених згідно алгоритму QUEST із застосуванням попередньої фільтрації сигналів датчиків фільтром Батерворта четвертого порядку із частотою зрізу 1 Гц при $N=1$ (пунктирна крива) і без попередньої фільтрації при $N=50$ (суцільна крива).

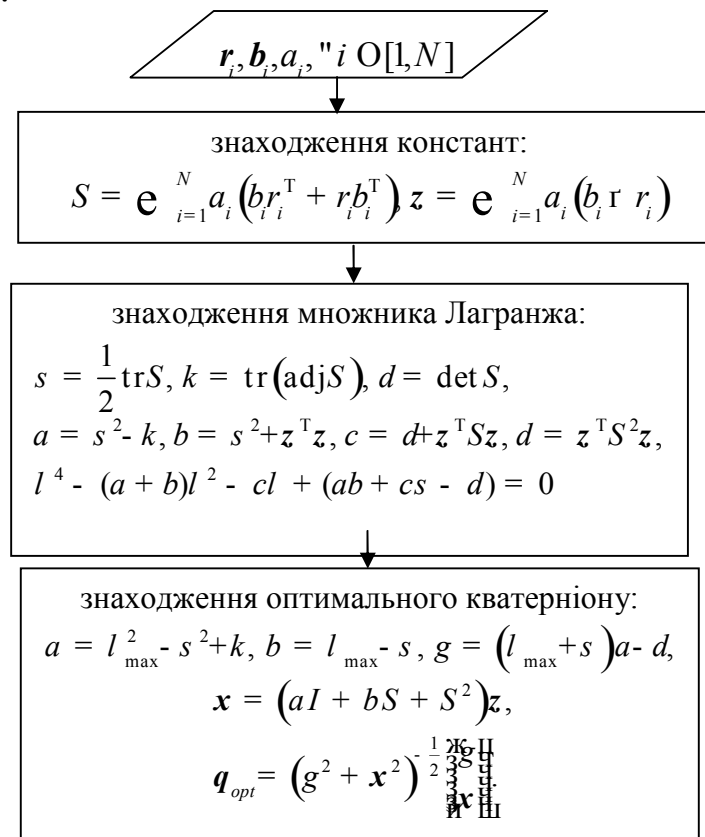


Рис. 1. Структурна схема алгоритму

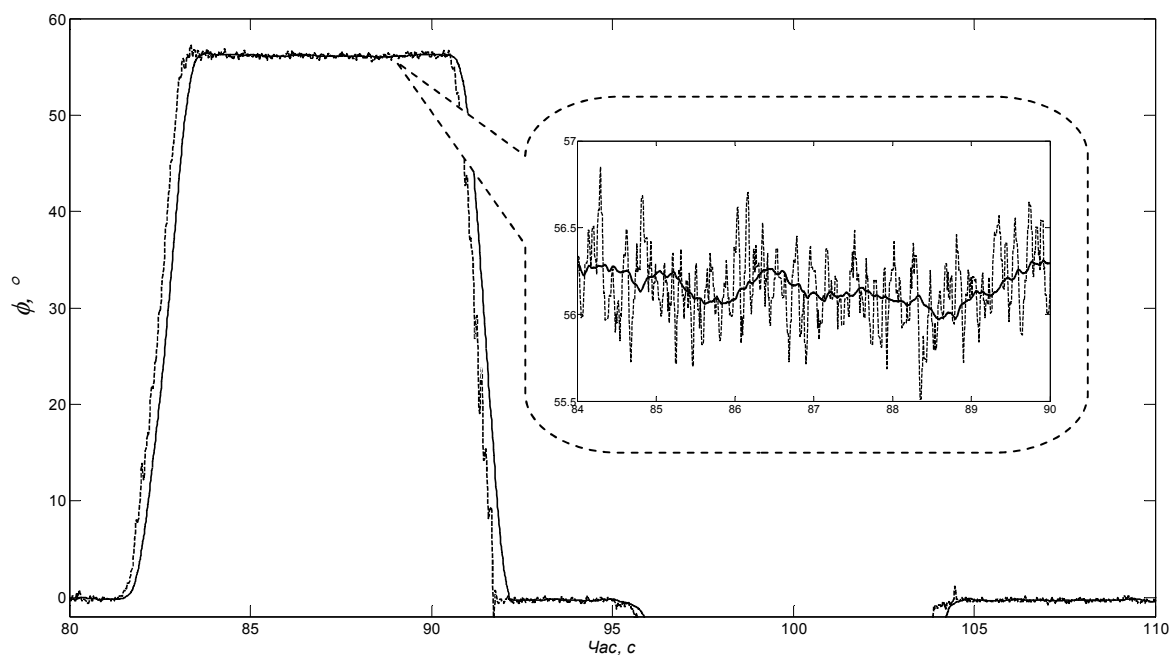


Рис. 2. Оцінки кута крену, отримані на основі алгоритму QUEST

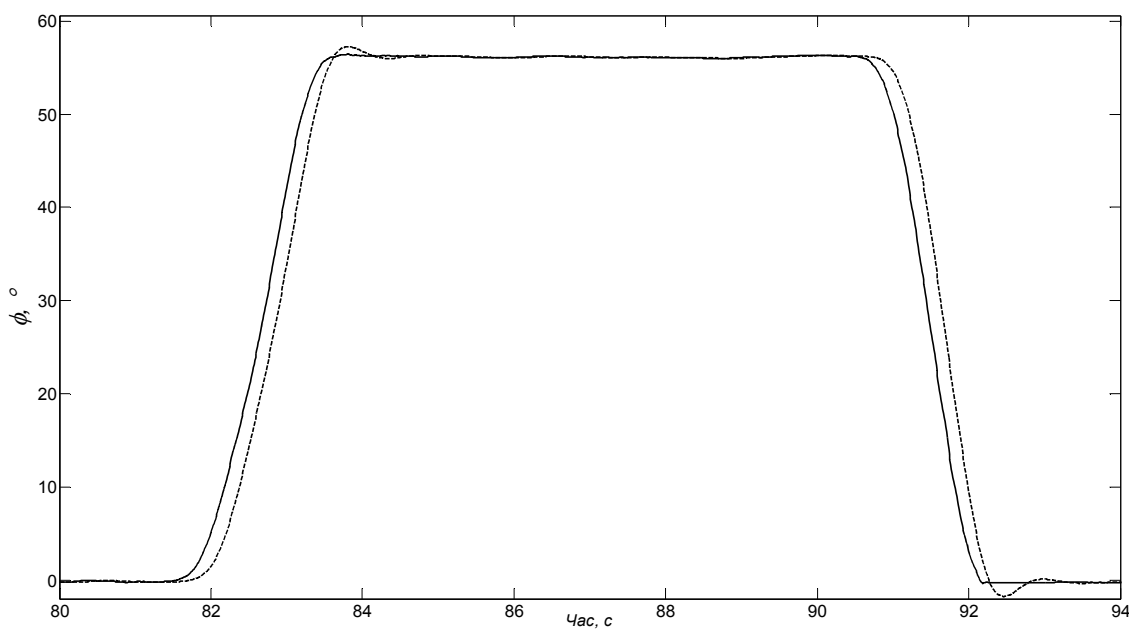


Рис. 3. Оцінки кута крену, отримані на основі алгоритму QUEST із попереднім згладжуванням даних

З рис. 3 видно, що попереднє згладжування сигналів датчиків дозволяє отримати якість оцінки кута Ейлера не гірше, ніж при використанні 50 пар одночасно оброблюваних пар векторів, але при цьому збільшується внесена затримка, а також з'являються викиди на графіку оцінки, зумовлені перехідними процесами у фільтрі.

Виконаємо порівняльний аналіз алгоритму QUEST з модифікацією (1) алгоритму TRIAD. Для цього оцінюватимемо кватерніон орієнтації мікросупутника за сигналами датчика координат Сонця і магнітометра, причому шуми вимірювання моделюватимуться лише для магнітометра. Структуру моделювання візьмемо з [2].

Проаналізуємо вплив кількості (число N в (3)) осереднених векторів на точність оцінок, отримуваних згідно алгоритмів QUEST і TRIAD. На рис.4 наведено сплайнову інтерполяцію СКВ похибок оцінювання кутів орієнтації мікросупутника. На цьому рисунку суцільна крива відповідає похибкам алгоритму QUEST, а пунктирна – алгоритму TRIAD.

З рис. 4 можна зробити важливий висновок про те, що існує деяке значення числа N , за якого подальше збільшення кількості осереднюваних векторів може призвести до зростання похибки оцінювання кутової орієнтації. В даному випадку це число $\gg 6..8$. Також з наведених графіків випливає, що за вибраних умов моделювання точність оцінювання кутової орієнтації мікросупутника, яка досягається згідно алгоритму TRIAD не набагато нижча точності, яка забезпечується згідно алгоритму QUEST, і в нашому випадку відмінність в точності між цими алгоритмами склала $< 0.006^\circ/c$.

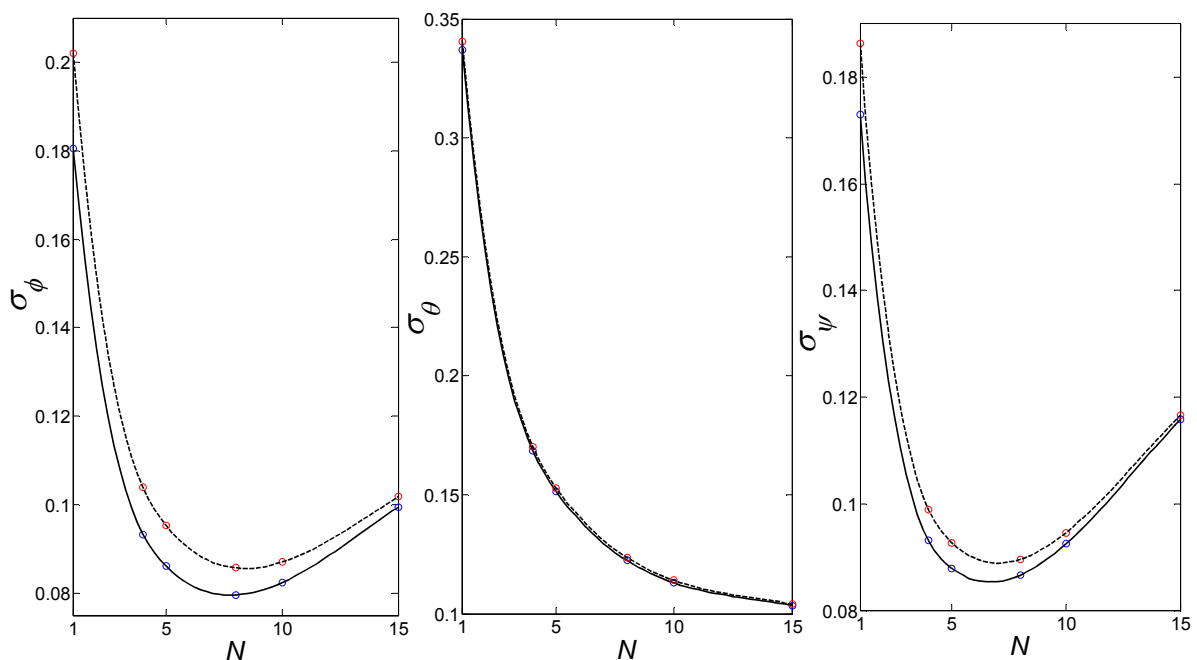


Рис. 4. Залежність СКВ похибки оцінювання кутів Ейлера від кількості вимірювань

Висновки

Проведений аналіз показує, що детерміновані алгоритми визначення кутової орієнтації твердого тіла дозволяють отримати хорошу згладженість оцінок кутів орієнтації без застосування низькочастотної фільтрації сигналів первинних датчиків, що сприятливо позначається на динаміці отримуваної оцінки. Також аналіз показав, що можливі ситуації, коли точність модифікованого алгоритму TRIAD практично співпадає з точністю алгоритму QUEST, що дозволяє рекомендувати його для застосування у випадках, коли необхідною є інформацію про матрицю напрямних косинусів.

Наступним кроком дослідження розглянутих в праці алгоритмів є аналіз їх чутливості до похибок реалізації, зумовлених скінченністю розрядної сітки процесора.

Список використаної літератури

1. *M. D. Shuster and S. D. Oh.* Three-axis attitude determination from vector observations. In *Journal of Guidance and Control* Volume 4 Number 1, 1981.
2. *Рижков Л. М.* Оцінка кутової орієнтації мікросупутника доповняльним фільтром// *Л. М. Рижков, О. М. Мелащенко* Інформаційні системи, механіка та керування. 2009. Випуск 3. – С.121-129.