

УДК 539.375

Тариков Г.П. д.т.н., проф., Бельский А.Т. к.т.н., доц., Комраков В.В. к.т.н., доц., Пархоменко В.Н.  
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

## РЕШЕНИЕ ИЗНОСОКОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Tarikov G., Belskij A., Komrakov V., Parhomenko V.  
The Gomel State Technical University, named by P.O. Sukhoy, Gomel, Belarus (msf\_vdos@mail.ru)

### THE SOLUTION OF WEAR-CONTACT PROBLEMS BY MEANS OF ELECTRICAL SIMULATION

*В статье рассмотрена сущность электростатической аналогии между уравнениями электростатики и теории упругости. На основе этой аналогии предложен способ решения задачи о контакте двух упругих тел с учетом износа с помощью электрического моделирования с использованием квазистационарного электрического поля. Решена износоконтактная задача применительно к зубчатому зацеплению. Получены площадки контакта для различных вариантов контактирования зубьев с первоначально точечным контактом. Исследовано влияние износа контактирующих поверхностей на распределение контактных давлений. Построены эпюры контактных давлений по различным сечениям площадок контакта.*

*Ключевые слова:* электростатическое поле, квазистационарное электрическое поле, электрическое моделирование, электромоделирующее устройство, износ, зубчатое зацепление.

**Введение.** Расчет трибосопряжений на контактную прочность и износостойкость связан с необходимостью решения пространственных контактных задач. Решение износоконтактных задач рассмотрены в работах [1, 2]. В работе [3] получено аналитическое решение задачи о контакте двух упругих тел с учетом износа контактирующих поверхностей для случая эллиптической площадки контакта. Получение решения таких задач для более сложных областей контакта аналитическими и численными методами связано с преодолением значительных сложностей и в ряде случаев невозможно. В связи с этим, другие методы их решения и, в частности, с помощью электрического моделирования представляют как научный, так и практический интерес.

**Цель работы.** Целью работы является решение износоконтактной задачи с помощью электрического моделирования.

#### **Сущность электростатической аналогии.**

Рассмотрим электростатическую аналогию, существующую между уравнениями контактной задачи теории упругости и задачи электростатики [4, 5].

Как известно [5], задача о вдавливании штампа с плоским основанием, имеющим в плане форму  $\Omega$ , в однородное упругое полупространство под действием центрально приложенной силы  $P$  сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = W(x, y) \quad (1)$$

где  $W(x, y) = \frac{\delta \pi E}{1-\nu^2}$ ;

$\delta$  – перемещение штампа;  $p(x, y)$  – контактное давление под штампом;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости 1-го рода.

При этом должно соблюдаться условие:

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Перейдем теперь к задаче электростатики.

Если взять токопроводящую пластину, которая обладает некоторым электрическим зарядом  $Q$  и имеет форму  $\Omega$  основания штампа в плане, то выражение для электростатического потенциала можно записать в виде [6]:

$$\iint_{\Omega} \frac{q(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \Psi(x, y), \quad (3)$$

где  $\Psi(x, y) = \psi(x, y)4\pi k_0 \epsilon$

$\psi$  – электростатический потенциал;  $k_0$  – диэлектрическая постоянная;  $\epsilon$  – диэлектрический коэффициент среды.

Общее количество электричества на пластине будет:

$$Q = \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Таким образом, две рассматриваемые линейные системы описываются математически подобными интегральными уравнениями (1) и (3).

Электрический потенциал, подаваемый на аналог площадки контакта в виде токопроводящей пластины, моделирует перемещение штампа, а плотность электрического заряда в какой-либо точке поверхности токопроводящего элемента моделирует контактное давление в соответствующей точке площадки контакта.

Использование рассмотренной аналогии для решения пространственных контактных задач с помощью электролитической ванны [7] и электростатического поля [8] не позволило получить стабильные и достаточно точные для инженерной практики результаты.

Рассмотрим возможность использования квазистационарного электрического поля для решения задачи электростатики.

Как известно [9, 10], квазистационарными называются токи, для которых с достаточной степенью точности можно принять, что магнитное поле этих токов, силы ponderomotorного (механического) взаимодействия между ними и т. д. в каждый данный момент времени имеют то же значение, какое имели бы эти величины в случае постоянных токов той же силы, как и мгновенная сила переменных токов. Приближенный метод, используемый в теории электричества, основанный на квазистационарности, состоит в том, что расчет полей ведется также, как и при стационарных процессах.

Практически те переменные токи, которые применяются в технике сильных токов (десятки, сотни и тысячи в секунду) с достаточной степенью точности удовлетворяют условиям квазистационарности [11].

Следовательно [11], конфигурации квазистационарного и электростатического полей при аналогичных граничных условиях на границах областей, в которых они существуют, и подобных относительных распределениях значений магнитной проницаемости  $\mu$  и  $\epsilon$  внутри областей практически совпадают. Это позволяет моделировать одно поле посредством другого. Таким образом, задачу о распределении заряда на поверхности токопроводящего элемента можно решать с помощью квазистационарного электрического поля.

На основе использования квазистационарного электрического поля разработан новый способ решения пространственных контактных задач.

Постановка задачи. Рассмотрим контакт бочкообразных зубьев зубчатой передачи, ограниченных поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  и соприкасающихся в точке  $O$  (рис. 1). Принимая эту точку за начало координат, проведем оси  $z_1$  и  $z_2$ , перпендикулярно к общей касательной плоскости  $\Pi$ , внутрь каждого из тел. Полагаем, что зубья находятся в скользящем контакте. На площадке контакта кроме нормальных напряжений возникают и касательные усилия трения.

Как известно [12], касательные усилия, возникающие при трении скольжения, мало влияют на нормальное давление, а также на форму и размеры области контакта. Поэтому, при решении контактной задачи с учетом износа, касательные усилия на площадке контакта пока учитывать не будем.

Известно [5], что задачи о контакте двух упругих тел сводятся к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \frac{u_z^{(1)}(x, y) + u_z^{(2)}(x, y)}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad (5)$$

где  $\Theta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}$ ,  $\Theta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$ ;

$u_z^{(i)}$  – проекции вектора перемещения на ось  $z$  в результате упругих деформаций;  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона,  $E_i$  – модуль Юнга ( $i=1,2$ ).

Условие контакта двух упругих тел с учетом износа можно представить в таком виде [1, 4]:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \frac{\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) - u_{z*}^{(1)} - u_{z*}^{(2)}}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad (6)$$

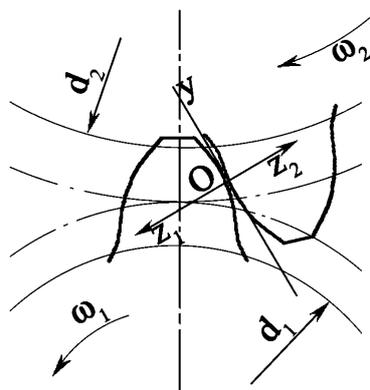


Рис. 1. Контакт двух зубьев зубчатых колес

где  $u_{z*}^{(i)}$  – проекции вектора перемещения на ось  $z$  в результате износа поверхностей  $S_i$  ( $i=1,2$ ).

В соответствии с правой частью уравнений (5) и (6) на разные участки аналога площадки контакта необходимо подавать различные электрические потенциалы. На сплошной токопроводящей пластине это сделать невозможно, поэтому аналог площадки контакта выполняем в виде набора токопроводящих пластин, на каждую из которых подаем значение электрического потенциала, пропорциональное перемещению соответствующего ей участка площадки контакта. Таким образом, непрерывное распределение потенциала на аналоге площадки контакта заменяем ступенчатым [13].

Для определения функций  $u_{z*}^{(i)}$  ( $i=1,2$ ) часто используется следующий закон изнашивания [1]:

$$u_{z*}^{(i)}(x, y, t) = k_w^{(i)} \int_0^t p(x, y, \tau)^\alpha v(x, y, \tau)^\beta d\tau, \quad (7)$$

где  $v$  – скорость скольжения,  $k_w^{(i)}$  – коэффициент изнашивания,  $\alpha, \beta$  – параметры закона изнашивания.

Полагаем, что на промежутке времени  $(0, t)$  область контакта остается без изменений. Обозначив правую часть уравнения (6) через  $W(x, y)$ , получим:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1, \tau) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = W(x, y) \quad (8)$$

Непосредственно к уравнению (8) применить электростатическую аналогию нельзя. Поэтому поступаем следующим образом. Будем рассматривать процесс износа на протяжении времени  $t$ . Интервал времени  $(0, t)$  разделим на  $n$  равных частей  $\tau$  и будем считать, что на каждом  $i$ -м интервале ( $i=1, 2, 3...n$ ) давление на площадке контакта не зависит от времени и область контакта остается постоянной.

В начальный момент времени уравнение (8) можно записать в виде:

$$\iint_{\Omega} \frac{p_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = W_0(x, y), \quad (9)$$

где

$$W_0(x, y) = \frac{\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)}{\Theta_1 + \Theta_2}$$

Для любого последующего промежутка времени уравнение (8) будет иметь вид:

$$\iint_{\Omega} \frac{p_{i-1}(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = W_i(x, y), \quad (10)$$

где  $i=1, 2, 3...n$ .

$$W_i(x, y) = W_{i-1}(x, y) - \frac{k \int_{t_{i-1}}^{t_i} p_{i-1}(x, y, \tau)^\alpha \cdot v_{i-1}(x, y, \tau)^\beta d\tau}{\Theta_1 + \Theta_2}. \quad (11)$$

К уравнениям (9) и (10) уже можно применить электростатическую аналогию и, следовательно, решить рассматриваемую износостатическую задачу с помощью электрического моделирования.

Электромоделирующее устройство. Для решения пространственных контактных задач теории упругости было разработано и создано специальное электромоделирующее устройство [14, 15, 16], блок-схема которого показана на рис. 2.

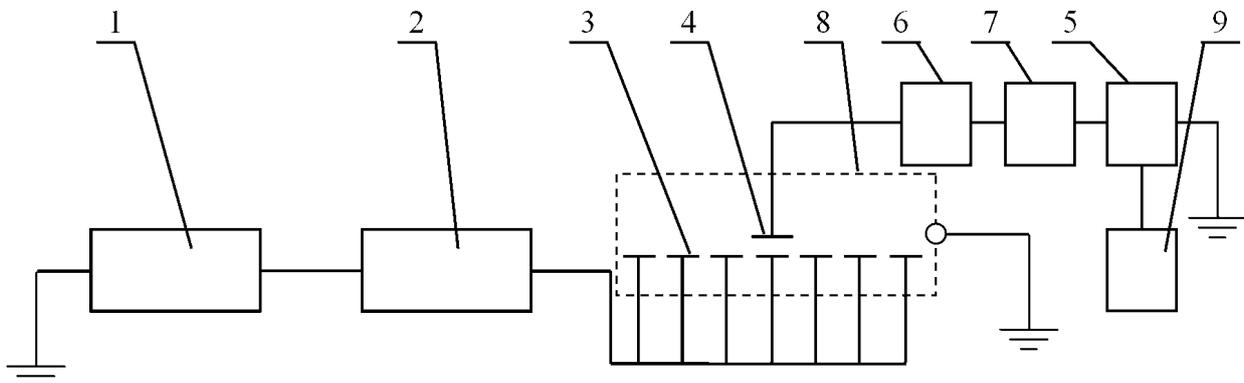


Рис. 2. Блок-схема электромоделирующего устройства для решения пространственных контактных задач

Електромоделирующее устройство содержит источник питания 1, выход которого подключен к распределителю 2. Каждый выход распределителя 2 подключен к отдельной токопроводящей дорожке токопроводящего элемента 3, зонд 4, установлен над токопроводящим элементом 3 и соединен с персональным компьютером 5 посредством усилителя электрического сигнала 6 и аналого–цифрового преобразователя 7. Токопроводящий элемент 3 и зонд 4 защищены экраном 8. Контроллер 9, вход которого подключен к компьютеру 5, а выходы подключены к электродвигателям перемещающим токопроводящий элемент 3.

Токопроводящий элемент, являющийся аналогом площадки контакта, расположен на координатном столике, который обеспечивает его перемещение в горизонтальной плоскости для проведения измерений. Зонд, служащий для измерения плотности заряда, моделирующей контактное давление на площадке контакта, имеет вертикальное перемещение.

Для автоматизации процесса измерения распределения заряда разработан программный комплекс, состоящий из трех самостоятельных программ:

- а) программы управления процессом измерения распределения заряда на поверхности токопроводящего элемента;
- б) программы преобразования значений распределения заряда на поверхности токопроводящего элемента и определения ее суммарного заряда;
- в) программы построения трехмерного графика распределения заряда на поверхности токопроводящего элемента.

Эти программы работают последовательно в порядке их перечисления.

Для оценки погрешности результатов экспериментального решения задач с помощью электромоделирующего устройства были решены задачи, для которых аналитическое решение известно. Сравнение результатов показало, что погрешность экспериментального решения в основном не превышает 5%.

Методика решения задачи:

1. Решаем уравнение (9) и определяем значения  $p_0(x, y)$ .
2. Считая, что на первом промежутке времени  $\tau$ , на площадке контакта действует это давление, подставляем его значение в уравнение (10) и решаем его, т. е. определяем значение  $p_1(x, y)$ .
3. Подставляем значение  $p_1(x, y)$  в такое же уравнение, составленное для следующего промежутка времени  $\tau$  и, решая его, определяем значение  $p_2(x, y)$  и т. д.

Для каждого цикла определяются форма и размеры площадки контакта упругих тел с учетом износа контактирующих поверхностей, а затем, используя геометрическое подобие площадки контакта и аналога, определяются размеры последнего [4].

Результаты решения задачи. В качестве примера на рис. 3, 4 и 5 показаны распределения контактных давлений и их эпюры, построенные по различным сечениям площадок контакта на входе и выходе из зацепления зубьев.

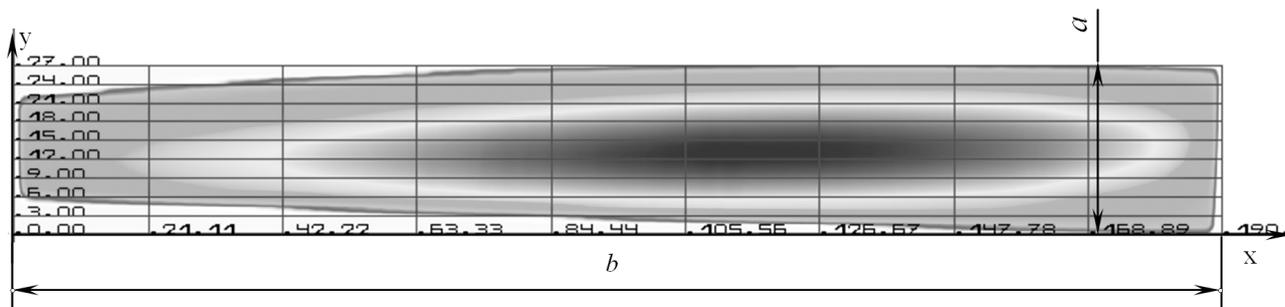


Рис. 3. Площадка контакта и распределения контактных давлений на входе в зацепление зубьев

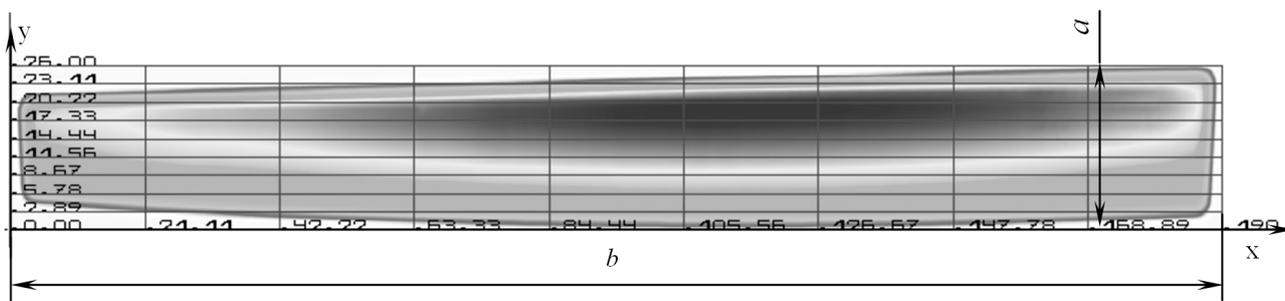


Рис. 4. Площадка контакта и распределения контактных давлений на выходе из зацепления зубьев

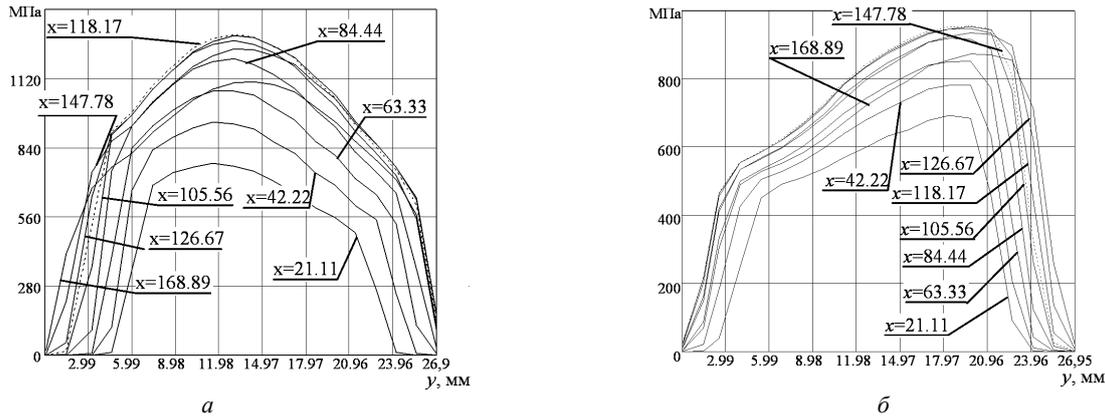


Рис. 5. Эпюры контактных давлений: *a* – на входе в зацепление зубьев, *б* – на выходе из зацепления зубьев

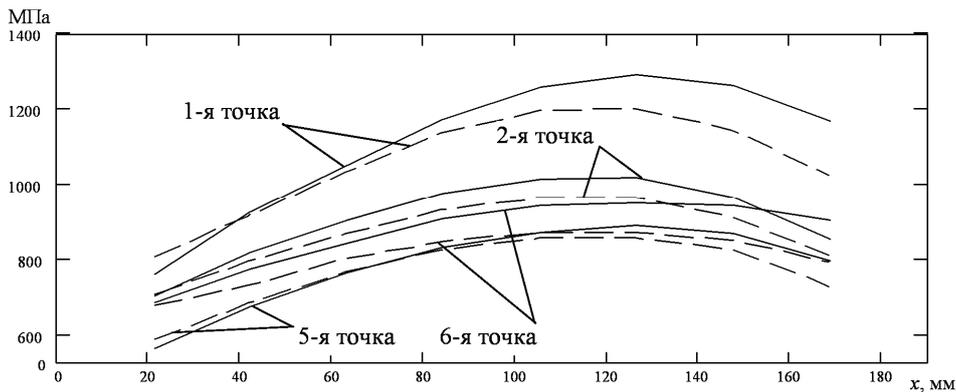


Рис. 6. Изменение контактных давлений в результате износа (сплошные линии — исходные поверхности, штриховые — изношенные)

**Вывод.** Таким образом, метод электрического моделирования может успешно применяться для решения сложных износостойких задач инженерной практики. Это дает возможность еще на стадии проектирования выбрать оптимальную геометрию контактирующих поверхностей элементов высших кинематических пар с целью повышения их долговечности, надежности, нагрузочной способности, снижения материалоемкости, и в результате получить значительный экономический эффект.

**Анотація.** В статті розглянуто сутність електростатичної аналогії між рівняннями електростатики та теорії пружності. На основі цієї аналогії запропоновано спосіб вирішення задачі щодо контакту двох пружних тіл з врахуванням зносу за допомогою електричного моделювання з використанням квазістационарного електричного поля. Вирішена зносостойка задача щодо зубчастого зацеплення. Отримано площадки контакту для різних варіантів контактування зубів з початковим точковим контактом. Досліджено вплив зносу контактуючих поверхонь на розподілення контактного тиску. Побудовані епюри контактного тиску по різним січенням площадок контакту.

**Ключові слова:** електростатичне поле, квазістационарне електричне поле, електричне моделювання, електромоделюючий пристрій, знос, зубчасте зацеплення.

**Abstract. Purpose.** A great number of works in the field of contact interaction mechanics including those with account of the wear of contact surfaces, and the desire to take into consideration the factors even at the stage of designing elements of higher kinematic pairs proves the topicality of the problem under consideration. However, solving such problems by means of analytical and numeric methods is connected with the necessity to overcome considerable difficulties, and in some cases it is impossible. That is why other methods of solving them, and, in particular, with help of electrical simulation are of both scientific and practical interest.

**Design/methodology/approach.** The paper considers the essence of electrostatic analogy. It presents the way of solving 3D contact problems by means of electrical simulation based on the application of quasi-stationary electric field. It also presents the description of a special electrical simulation device made for solving the problems. The device enables to do experimental research and process obtained results automatically. It is shown that the accuracy of the results obtained in the experiments is enough for engineering applications.

**Findings.** The paper also presents the problem about point contact of gear teeth with account of wear. It shows the influence of contact surfaces wear on the distribution of contact pressures. It presents contact areas for different points of gearing. The diagrams of contact pressures on their different sections are given.

**Originality/value.** It is concluded that the solution of wear-contact problems enables to choose the best geometry of contact surfaces of elements of higher kinematic pairs on the designing stage and get a considerable economic effect.

**Keywords:** Electrostatic field, Quasi-Stationary Electric Field, Electrical Simulation, Electrical Simulation Device, Wear, Gearing

1. Горячева И. Г. Контактные задачи в трибологии / И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988.–256 с.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 475 с.
3. Бородачев Н. М. Решение задачи Герца с учетом изнашивания / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков, В. В. Комраков // Трение и износ. – 2003. – Т. 24. – № 6. – С. 16–24.
4. Пат. №16104 Республика Беларусь, МПК<sup>7</sup> Способ определения площадки контакта двух упругих тел / Г. П. Тариков, Н. М. Бородачев, В. В. Комраков; заявитель и патентообладатель Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого. – № u20091239; заявл. 17.08.09; опубл. 30.08.12 Бюл. №4.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости / Л. А. Галин. – М.: ГИТТЛ. – 1953. – 534 с.
6. Парселл Э. Электричество и магнетизм / Э. Парселл. – М.: Наука, 1971. – 447 с.
7. Ницецкий Л. В. Контактные задачи теории упругости / Л. В. Ницецкий // Ученые записки Рижск. политехн. ин-та, – 1965. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 36–40.
8. Файнбурд В.М. Использование электростатической аналогии в решении пространственной контактной задачи теории упругости. / В. М. Файнбурд // Сопrotивление материалов и теория сооружений, 1970. – Вып. 11: КИСИ. – С. 41–43.
9. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров. Ч.1. – 1948.– М., Л.: ГЭИ.–355с.
10. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е.Тамм. – М.: Наука. – 1976. – 616 с.
11. Власов В.А. Макроскопическая электродинамика / В. А. Власов. – М.: Гостехтеориздат. – 1955. – 270 с.
12. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир. – 1989. – 509 с.
13. А. с. 1791829 СССР, МКИ<sup>3</sup> Устройство для решения пространственных контактных задач / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков (СССР). – № 4861341; заявл. 05.06.1990; опубл. 01.10.1992, Бюл. № 32.
14. Пат. №3295 Республика Беларусь, МПК<sup>7</sup> Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач / Г.П. Тариков, В.В. Комраков, Н.В. Акулов, В.А. Барабанцев; заявитель и патентообладатель Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого. – № u20060462; заявл. 07.10.06; опубл. 28.02.07 Бюл. №1 (54).
15. Пат. №7456 Республика Беларусь, МПК<sup>7</sup> Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач / Г. П. Тариков, В. В. Комраков, П. Ф. Станкевич; заявитель и патентообладатель Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого. – № u20101064; заявл. 24.12.10; опубл. 30.08.11 Бюл. №4.
16. Пат. №8399 Республика Беларусь, МПК<sup>7</sup> Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач / Г. П. Тариков, В. В. Комраков, В. Н. Пархоменко, Е. М. Акулова; заявитель и патентообладатель Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого. – № u20111048; заявл. 22.12.11; опубл. 25.05.12 Бюл. №4.

## REFERENCES

1. Gorjacheva I. G., Dobychin M. N. Kontaknyye zadachi v tribologii (Contact problems in tribology). Moscow: Mashinostroenie, 1988, 256 p.
2. Gorjacheva I. G. Mehanika frikcionnogo vzaimodejstvija (Mechanics of frictional interaction). Moscow: Nauka, 2001, 475 p.
3. Borodachev N. M., Tarikov G.P., Komrakov V.V. Reshenie zadachi Gerca s uchetom iznashivaniya (Solution of Hertz' problem with account of wear), Friction and Wear, 2003, V. 24, no 6, pp., 16–24.
4. Tarikov G.P., Borodachev N. M., Komrakov V.V. Sposob opredelenija plowadki kontakta dvuh uprugih tel (Means of determining contact area of two elastic bodies). Patent Republic of Belarus no 16104 A. 30.08.12.
5. Galin L. A. Kontaknyye zadachi teorii uprugosti (Contact problems of elasticity theory). Moscow: GITTL, 1953, 534 p.
6. Parsell J. Jelektrichestvo i magnetizm (Electricity and magnetism). Moscow: Nauka, 1971, 447 p.
7. Niceckij L. V. Kontaknyye zadachi teorii uprugosti (Contact problems of elasticity theory). Uchenye zapiski Rizhsk. politehnicheskogo instituta (Scientific notes of Riga's Polytechnic Institute), 1965, V. 12, Publ. 2, pp. 36–40.
8. Fajnburd V.M. Ispol'zovanie jelektrostaticheskoy analogii v reshenii prostranstvennoj kontaktnoj zadachi teorii uprugosti (Use of electrostatic analogy in solving 3D contact problems of elasticity theory). Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzhenij (Resistance of materials and the structural theory), 1970, Publ. 11: KISI, pp. 41–43.
9. Nejman L. R., Kalantarov P. L. Teoreticheskie osnovy jelektrotehniki (Theoretical grounds of electrical engineering). Part I, 1948, Moscow, Leningrad: ГЭИ. 355 p.
10. Tamm I. E. Osnovy teorii jelektrichestva (Fundamentals of electricity theory). Moscow: Nauka, 1976, 616 p.
11. Vlasov V.A. Makroskopicheskaja jelektrodinamika (Macroscopic electrodynamics). Moscow: Gostehteorizdat, 1955, 270 p.
12. Dzhonson K. Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija (Mechanics of contact interaction). Moscow: Mir, 1989, 509 p.
13. Borodachev N. M., Tarikov G.P. Ustrojstvo dlja reshenija prostranstvennyh kontaktnyh zadach (Device for solving 3D contact problems). Patent USSR no 1791829 A. 01.10.1992.
14. Tarikov G.P., Komrakov V.V., Akulov N.V., Barabancev V.A. Jelektromodelirujuwee ustrojstvo dlja reshenija prostranstvennyh kontaktnyh zadach (Electrical simulation device for solving 3D contact problems). Patent Republic of Belarus no 3295 A. 28.02.07.
15. Tarikov G.P., Komrakov V.V., Stankevich P.F. Jelektromodelirujuwee ustrojstvo dlja reshenija prostranstvennyh kontaktnyh zadach (Electrical simulation device for solving 3D contact problems). Patent Republic of Belarus no. 7456, A. 30.08.11.
16. Tarikov G.P., Komrakov V.V., Parhomenko V.N., Akulova E.M. Jelektromodelirujuwee ustrojstvo dlja reshenija prostranstvennyh kontaktnyh zadach (Electrical simulation device for solving 3D contact problems). Patent Republic of Belarus no 8399 A. 25.05.12.