
УДК 621.762

Штерн М.Б. д.т.н., проф., Кузьмов А.В. к.т.н.
Институт проблем материаловедения им. И. Н. Францевича НАНУ, г. Киев, Украина

ВЛИЯНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ПОРИСТЫХ ПОВРЕЖДЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИХ ИНДЕНТИРОВАНИЯ

Shtern M., Kuzmov A.
Frantsevich Institute for Problems of Materials Science NASU, Kyiv, Ukraine (kuzmov@ipms.kiev.ua)

INFLUENCE OF RHEOLOGICAL FEATURES OF BEHAVIOUR OF THE POROUS DAMAGED MATERIALS ON THEIR INDENTATION PROCESS

На основе теории пластичности пористого тела с помощью компьютерного моделирования методом конечных элементов исследуется напряженно-деформированное состояние вблизи сферического и конического индентора при различных свойствах индентируемого материала. Анализируется распределение плотности в окрестности индентора в зависимости от свойств пористого тела и условий трения между индентором и пористым телом. Приводятся диаграммы нагружения в зависимости от склонности к дилатансии и внешнего трения. Уделяется внимание возникновению и форме навалов вокруг индентора.

Ключевые слова: индентирование, пластичность сжимаемых сред, сферический индентор, конический индентор, дилатансия.

Академик Анатолий Алексеевич Лебедев неоднократно высказывал мнение о том, что результаты определения механических свойств методом индентирования могут оказаться чувствительными к характеристикам мезоструктуры. В частности, особенности мезоструктуры могут вносить погрешности в определение эффективной реакции композиционных и поврежденных материалов. Проверку данного предположения авторы осуществили в данной статье на примере материалов, содержащих поры и трещиноподобные дефекты, обуславливающие различное сопротивление при растяжении и сжатии.

Введение

При анализе диаграмм нагружения индентора наибольшее распространение получили методики на основе аналитических решений соответствующих задач теории упругости: решения контактной задачи Герца [1] для случая сферического индентора, и решения Лурье [2] и Снедонна [3] для конического индентора. Среди известных работ в этом направлении следует отметить работы Оливера и Фара [4, 5], Филда и Свейна [6, 7], а также работы Галанова, Мильмана и др. [8-10] по интерпретации диаграмм нагружения для пирамидальных инденторов.

Метод Оливера-Фарра и его модификации зачастую дают приемлемые результаты, хотя, в отношении низко модульных металлов такая методика дает значительные погрешности. Предложен целый ряд других методик анализа диаграмм нагружения [11-14]. В последнее время получило распространение использование при анализе диаграмм нагружения моделирования методом конечных элементов [11, 15-17], в частности в работе [11] метод конечных элементов использовался для анализа диаграмм навантажения в случае сферического индентора.

Отличительными особенностями механического поведения пористых и поврежденных материалов являются возможность больших необратимых объёмных деформаций и различная их реакция при растяжении и сжатии. Обычно, последнее из указанных свойств связывается с наличием плоских дефектов и склонностью к дилатансии (влияние касательных напряжений на изменение объёма). Однако, теоретическое рассмотрение процесса индентирования, как правило, ведется для компактных материалов в предположении об отсутствии необратимых изменений объёма. Но, как хорошо известно, в первую очередь из механики грунтов, распределение напряженно-деформированного состояния для случая несжимаемых сред и случая наличия необратимой сжимаемости среды, для большинства задач существенно отличаются. Наличие дилатансии, делает указанное отличие еще более заметным. В то же время учет приведенных выше эффектов может оказаться довольно важным для интерпретации результатов определения механических свойств методом индентирования.

В данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние вблизи сферического и конического инденторов, распределение относительной плотности в его окрестности при различных свойствах

деформируемого материала и различных условиях внешнего трения. Используется одна из концепций контактного взаимодействия и теория пластичности пористого тела, чувствительная к содержанию пор и их изменению, деформационному упрочнению твердой фазы и наличия плоских дефектов. Сам процесс индентирования изучается в рамках приведенной модели с помощью компьютерного моделирования методом конечных элементов. На основе проведенных вычислений выясняется влияние указанных факторов на напряженно-деформированное состояние, эволюцию распределения плотности и кривые нагружения (сила-глубина проникновения). Изучаются качественные особенности процесса индентирования, в частности, возникновение навалов и их связь со склонностью к разрыхлению и деформационным упрочнением пористого материала.

Определяющие соотношения, пластический потенциал и дилатансия

Для моделирования процесса холодного прессования использовались представления о жестко-пластическом поведении пористого тела. Общий прирост деформации записывается при этом в виде суммы прироста упругих (обратимых) $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластических (необратимых) $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ деформаций.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (1)$$

или $e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^{pl}$, где $e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$; - тензор скоростей деформаций

Пластическая составляющая поведения материала описывается определяющими соотношениями модели Сам – Клау, в форме, представленной в работах [18,19]. Согласно этой модели уравнение поверхности нагружения для пористой среды имеет вид:

$$\frac{(p + p_0)^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\phi} = (1 - \theta) \left(\frac{\sigma_0}{1 + m} \right)^2 \quad (2)$$

где $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ – шаровая составляющая тензора напряжений,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)} \quad \text{– интенсивность девиатора}$$

напряжений, θ – пористость, σ_0 – напряжение течения несжимаемой твердой фазы. Остальные переменные и параметры содержащиеся в (2) выражаются с помощью соотношений:

$$\psi = \frac{2(1 - \theta)^3}{3\theta}, \quad \phi = (1 - \theta)^2 \quad (3)$$

$$p_0 = m\sigma_0 \sqrt{(1 - \theta)\psi} \quad (4)$$

$$\sigma_0(\omega) = a + b\omega^\alpha \quad (5)$$

где ω – эквивалентная деформация твердой фазы пористого тела, которая принимается в виде [18-19]

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta}} \sqrt{\psi (e^{pl})^2 + \phi (\gamma^{pl})^2} \quad (6)$$

где $e = e_{11}^{pl} + e_{22}^{pl} + e_{33}^{pl}$ – объёмная составляющая тензора скоростей необратимых деформаций,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(e_{11}^{pl} - e_{22}^{pl} \right)^2 + \left(e_{22}^{pl} - e_{33}^{pl} \right)^2 + \left(e_{33}^{pl} - e_{11}^{pl} \right)^2 + 6 \left(\left(e_{12}^{pl} \right)^2 + \left(e_{23}^{pl} \right)^2 + \left(e_{31}^{pl} \right)^2 \right)} \quad \text{– второй инвариант}$$

девиатора того же тензора, a, b – начальный предел текучести и коэффициент упрочнения материала твердой фазы пористого тела соответственно, m – параметр, характеризующий разнсопротивляемость пористого материала при растяжении и сжатии. Такое поведение может быть вызвано различными особенностями структуры пористого тела: наличием плоских дефектов (трещин) или зарождением новых пор. Предполагается, что $0 \leq m \leq 1$.

В рамках модели, описываемой уравнениями (2) – (5) текущее состояние пористой среды при упруго-пластическом деформировании определяется тремя параметрами: θ, ω, m . Эволюция параметра ω описывается уравнением (6), в то время как эволюционное уравнение для пористости непосредственно следует из закона сохранения массы:

$$\frac{d\theta}{dt} = (1 - \theta)e^{pl} \quad (7)$$

Контуры равных значений пластического потенциала (контуры нагружений) в координатах (p, τ) приведены на рисунках 1 и 2 для различных значений θ и m .

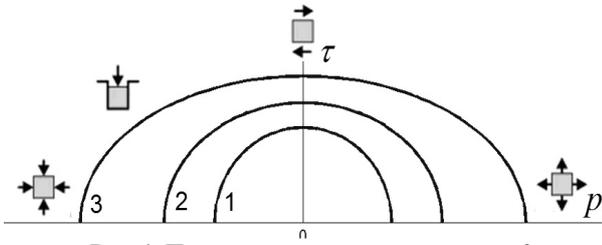


Рис. 1. Поверхность текучести при $m = 0$, для пористостей: 1 - 0.4 ; 2 - 0.3 ; 3 - 0.2

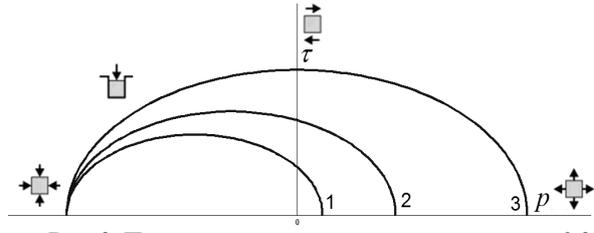


Рис. 2. Поверхность текучести для пористости 0.2 при различных m : 1) $m = 0.8$; 2) $m = 0.4$; 3) $m = 0$

Предполагается, что необратимая составляющая тензора скоростей деформаций связана с напряжениями принципом нормальности

$$e_{ij}^{pl} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \lambda > 0 \quad (8)$$

где Φ - пластический потенциал, определяемый уравнением

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \frac{(p + p_0)^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\phi} - (1 - \theta) \left(\frac{\sigma_0}{1 + m} \right)^2 \quad (9)$$

λ - положительный множитель, подлежащий исключению.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что для $m \neq 0$ контуры поверхностей нагружения или равных значений потенциала Φ несимметричны относительно девиаторной плоскости $p = \theta$. Непосредственно из принципа нормальности следует, что в этом случае наблюдается разрыхление: скорость изменения объёма положительна при отсутствии среднего давления (дилатансия 2-го рода за классификацией [19]). Поэтому в последующем изложении параметр m связывается как с содержанием плоских макродефектов, или возможностью их зарождения вследствие внутренней декогезии, так и в связи со склонностью к дилатансии. В то же время упругая составляющая деформации соответствует закону Гука для изотропной среды

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk}) \delta_{ij} \quad (10)$$

где E та ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона пористого тела соответственно. Отсюда, определяющие соотношения с учетом (1) можна представить в виде, аналогичном уравнению Прандтля – Рейса

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^{pl} = \begin{cases} \frac{1 - \nu}{E} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{d\sigma_{kk}}{dt} \right) \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}; & \Phi(\sigma_{ij}) = 0 \\ \frac{1 - \nu}{E} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{d\sigma_{kk}}{dt} \right) \delta_{ij} & ; \quad \Phi(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Скаляр λ , фигурирующий в принципе нормальности, подлежит исключению, для чего используется дифференцирование равенства $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ по времени (само равенство следует из определения поверхности нагружения (2))

$$\sum_{ij} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (12)$$

С учетом эволюционных уравнений (6), (7) для θ и ω соотношения (10) можно представить в виде

$$\sum_{ij} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (1 - \theta) e^{pl} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{1}{\sqrt{1 - \theta}} \sqrt{\psi (e^{pl})^2 + \phi (\gamma^{pl})^2} = 0 \quad (13)$$

Здесь и в дальнейшем имеется в виду, что θ и ω связаны лишь с необратимым изменением объёма и формы. Вместе с эволюционными уравнениями (6), (7) для ω и θ соотношения (11) и (13) составляют замкнутую систему уравнений упруго-пластического поведения необратимо сжимаемой пористой среды.

Уравнения для скоростей напряжений можно представить в виде

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = g_{ij}(\sigma_{kn}, e_{lm}) \quad (14)$$

что позволяет рассматривать их как инкрементальные соотношения, и будет использовано в дальнейшем при решении начально-краевой задачи об индентировании.

Постановка начально – краевой задачи

Для описанной выше упруго-пластической среды рассматривалась задача о вертикальном вдавливании жесткого сферического индентора. При этом исследовались как случаи наличия трения по закону Кулона между индентором и материалом, так и его отсутствия. Область деформированной среды представляет собой цилиндр с равными между собой высотой и радиусом основания, величина которых в 5 раз больше чем радиус индентора.

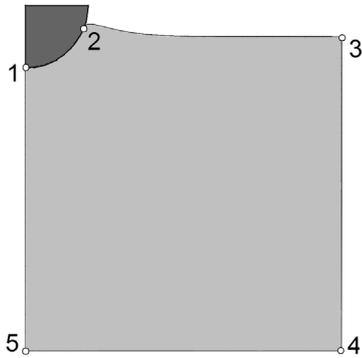


Рис. 3. Область материала, в которую вдавливаются индентор

Поскольку задача является центрально-симметричной, анализ может быть ограничен лишь половиной осевого сечения области.

Граничные условия на различных участках тела, в которое вдавливаются индентор показаны на Рисунке 3 на примере сферического индентора.

Между точками 1 и 2 выполняется условие одностороннего контакта между индентором и поверхностью деформируемого материала. Вдоль этой поверхности нормальная составляющая вектора напряжений $\sigma_n < 0$, а нормальная составляющая вектора скорости равняется нормальной составляющей скорости индентора. Положение точки 2 определяется тем, что в ней вместо неравенства выполняется условие $\sigma_n = 0$.

В то же время, граничное условие для касательной компоненты вектора скорости v_τ связано с выполнением условия трения по Кулону. А именно

$$\begin{cases} v_\tau = 0 & |\sigma_\tau| < f |\sigma_n| \\ \text{sign}(v_\tau) = -\text{sign}(\sigma_\tau) & |\sigma_\tau| = f |\sigma_n| \end{cases} \quad (15)$$

где v_τ и σ_τ - касательные компоненты векторов скорости и напряжений соответственно.

На свободной поверхности (часть верхней стороны не взаимодействующая с пуансоном и правая сторона) (2-3) и (3-4) равняются нулю как нормальная, так и касательная компоненты вектора напряжений

$$P_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (16)$$

На оси симметрии выполняется условие

$$u_r = 0; \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (17)$$

в то время как на нижней стороне (4-5)

$$u_z = 0; \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (18)$$

При решении задачи генерировалась сетка из 3000 четырехугольных конечных элементов, имеющая сгущение вблизи индентора. Для аппроксимации кривой упрочнения (5) использовались следующие параметры: $a = 70$ МПа, $b = 105$ МПа, $\alpha = 0.5$, которые в целом характерны для меди. Диаметр сферического индентора - 1.6 мм (1/16 дюйма). Индентор вдавливается на глубину половины своего радиуса. На такую же глубину вдавливался и конический индентор, при этом угол конуса равен 55° .

Анализ результатов вычислений сосредоточен на поле относительной плотности в окрестности индентора, которое находится для различных значений начальной плотности и параметра m . Отдельно исследуется влияние внешнего трения и параметра m на кривые нагружения.

Влияние дилатансии и начальной относительной плотности на уплотнение и разрыхление пористоготела в окрестности индентора

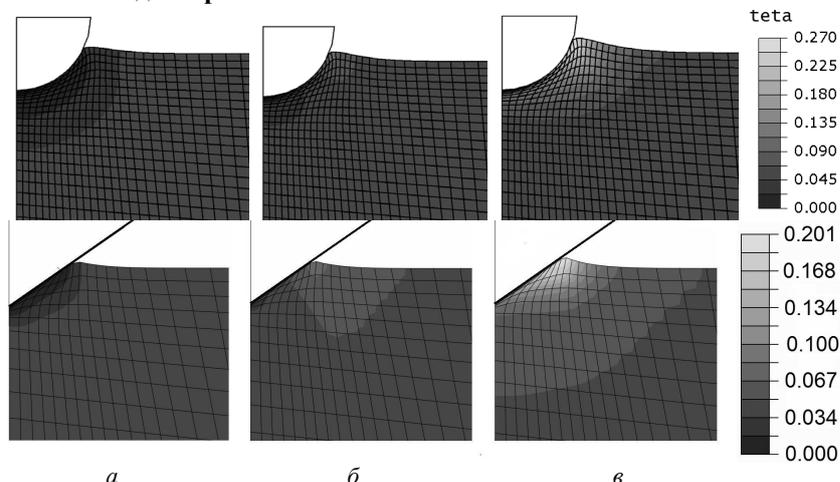


Рис. 4. Распределение пористости при начальной пористости 0.05 при отсутствии трения а $m = 0$; б $m = 0.4$; в $m = 0.8$

Как будет видно из нижеприведенных рисунков характер распределения плотности вблизи как конического, так и сферического индентора. для одних и тех же материалов качественно схожи. Поэтому рисунки для обоих случаев сгруппированы вместе и ниже следующие комментарии касаются обоих инденторов. При относительно небольшой начальной пористости величина параметра m существенно влияет как на распределение пористости, так и на характер искривления поверхности в окрестности индентора. С ростом m тенденция к разрыхлению материала в окрестности индентора вследствие дилатансии проявляется более заметно. В частности, при больших значениях этого параметра ($m=0.8$) вообще не наблюдается уплотнение в окрестности индентора. В то же время при отсутствии дилатансии ($m=0$) наблюдается только уплотнение. С ростом m наблюдается увеличение высоты навала вокруг индентора. Следует отметить, что наибольшее разрыхление происходит в вершине навала, где ожидаются наибольшие растягивающие деформации (Рис. 4).

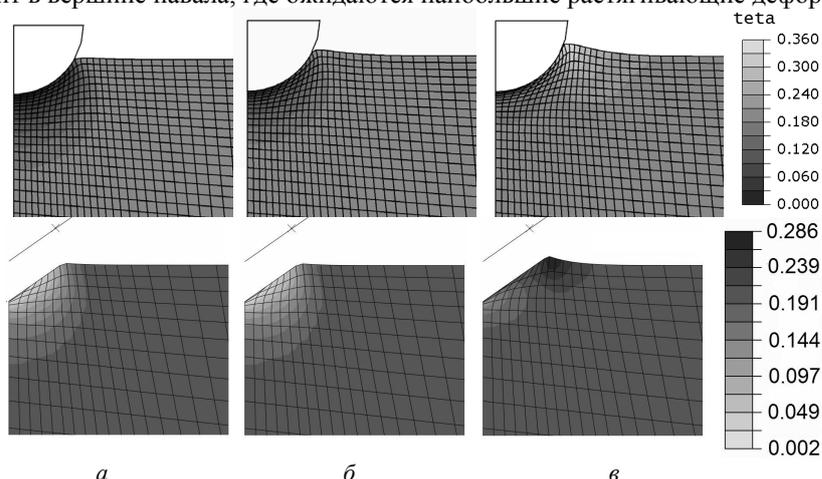


Рис. 5. Распределение пористости при начальной пористости 0.2 при отсутствии трения $a m = 0$; $b m = 0.4$; $c m = 0.8$

В то же время, как свидетельствуют данные на Рис. 5, 6 увеличение начальной пористости ($\theta_0=0.2$) сопровождается уменьшением высоты навалов вокруг индентора. При $m = 0.4$, высота навала значительно меньше, чем в аналогичном случае при начальной пористости 0.05. В случае $m = 0.8$ наблюдается наибольшая высота навала в окрестности индентора. Влияние параметра m на распределение пористости в целом остается тем же, что и в $\theta_0 = 0.05$

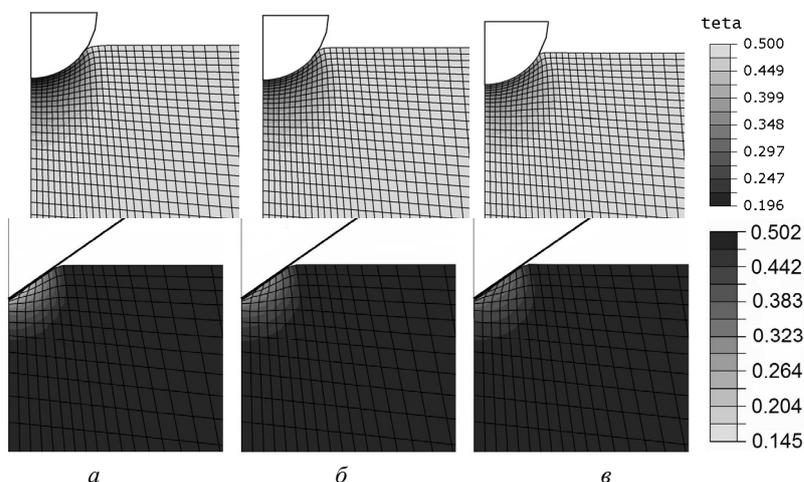


Рис. 6. Распределение пористости при начальной пористости 0.5 при отсутствии трения $a m = 0$; $b m = 0.4$; $c m = 0.8$

Даже при условии $m = 0.8$, разрыхление практически отсутствует, когда $\theta_0 = 0.5$. В то же время склонность к дилатансии существенно влияет на степень уплотнения материала под индентором: чем больше m тем менее заметно уплотнение. Навалов возле индентора не наблюдается. Наоборот, наблюдается прогиб материала вокруг индентора, хотя величина прогиба незначительна (Рис.6).

Влияние внешнего трения на диаграммы нагружения

Наличие трения (Рис.7) между индентором и материалом также существенно влияет как на распределение пористости в окрестности индентора так и на искривление поверхности материала. Можно сказать, что увеличение коэффициента трения некоторым образом нивелирует влияние m . То есть, при наличии контактного трения увеличивается уплотнение под индентором и уменьшается величина навала вокруг него. Менее заметным становится и разрыхление в его вершине.

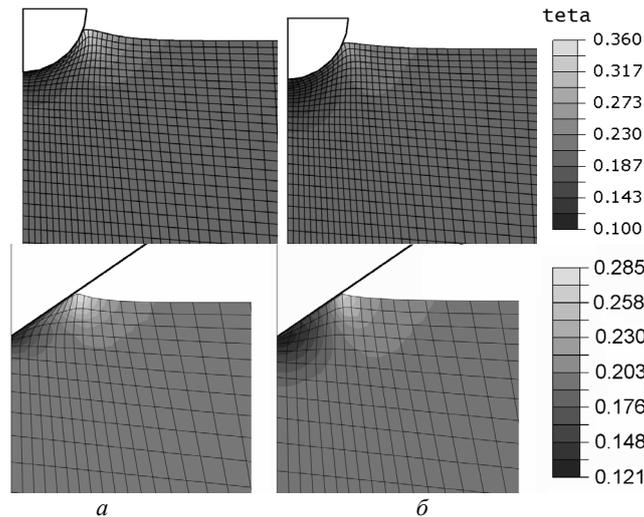


Рис. 7. Распределение пористости при начальной пористости 0.2 и $m=0.8$
 а-отсутствии трения; б-коэффициент трения-0.2

Рассчитанные в ходе анализа диаграммы нагружения (Рис.8) свидетельствуют о том, что как внешнее трение между индентором и материалом, так и наличие в материале дефектов и повреждений, определяемых параметром m , влияют на твердость. Из сравнения Рис.8.а) и Рис.8.б) можно сделать вывод о том, что величина твердости более чувствительна к наличию плоских макродефектов, чем к внешнему трению. Следует отметить,

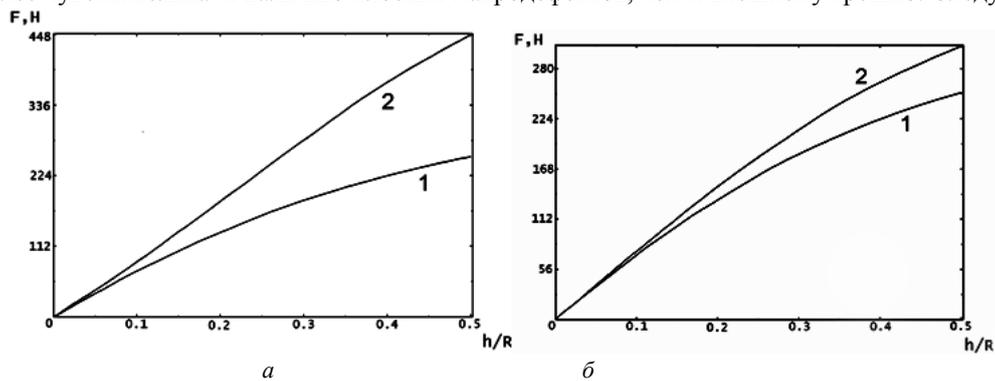


Рис. 8. Диаграммы нагружения для сферического индентора при начальной пористости 0.2 (по оси абсцисс отложено отношение перемещения индентора к его радиусу, а по оси ординат усилие на инденторе)
 а - трение отсутствует, 1) $m = 0.8$; 2) $m = 0$; б - $m = 0.8$, 1) отсутствии трения; 2) коэффициент трения - 0.2

что величина коэффициенттрения 0.2 соответствующая рис.8.б) существенно выше, чем обычно при индентировании. В то же время дефектный или слабосвязанный материал вполне может характеризоваться m большим чем 0.8. В то же время на рис.8. б) изображены диаграммы нагружения для одного материала, отличающиеся вследствие различных условий испытания

Из Рис.9 видно, что несмотря на качественно сходный характер распределения плотности для сферического и

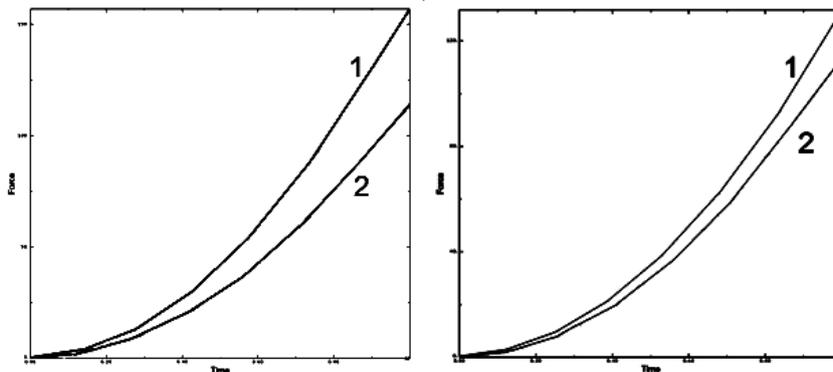


Рис. 9. Диаграммы нагружения для конического индентора при начальной пористости 0.2 (по оси абсцисс отложено отношение перемещения индентора к его радиусу, а по оси ординат усилие на инденторе) а-трение отсутствует, 1) $m=0$; 2) $m = 0.8$; б- $m = 0.8$, 1)) коэффициент трения - 0.2; 2) отсутствии трения

конического инденторов, соответствующие диаграммы нагружения существенно различны. Как и ожидалось, характер вогнутости диаграмм нагружения в случае конического и сферического инденторов противоположен.

Очевидно также, что влияние внешнего трения между индентором и материалом, а также параметра m (дефектности материала) является более существенным в случае сферического индентора. Следует заметить, что если расхождение между кривыми для конического индентора не меняется Рис.9 (что обусловлено автоматодельностью задачи), то для сферического индентора оно зависит от глубины вдавливания Рис.8.

Выводы

Для пористого материала содержащего плоские дефекты, характер деформации при индентировании сферическим индентором существенно зависит как от начальной пористости, так и от степени дефектности материала и трения между индентором и материалом. Даже при относительно небольшой начальной пористости величина параметра дефектности m существенно влияет как на распределение пористости, так и на характер искривления поверхности в окрестности индентора. С ростом m становится заметней тенденция к разрыхлению материала в окрестности индентора вследствие дилатансии. Увеличение коэффициента трения частично нивелирует влияние m на напряженно-деформированное состояние. Несмотря на качественно сходный характер распределения плотности для сферического и конического инденторов, их диаграммы нагружения ведут себя существенно по-разному: они являются вогнутыми или выпуклыми в зависимости от внешнего трения и повреждаемости.

Вышеприведенное дает основания использовать метод индентирования как фундамент для экспериментального определения параметра m , который может рассматриваться как одна из возможных количественных характеристик дефектности.

Как видно из расчетов даже при небольшой начальной пористости за счет дилатансии в процессе индентирования возникают зоны локального разрыхления, что наводит на мысль о возможности разрушения в этих зонах. Впрочем, этот вопрос требует отдельного изучения и рассматривается авторами как отдельное направление для дальнейших исследований.

Авторы выражают благодарность академику А.А. Лебедеву за идею исследования и плодотворное обсуждение результатов.

***Анотація** На основі теорії пластичності пористого тіла за допомогою комп'ютерного моделювання методом скінчених елементів досліджується напружено-деформований стан поблизу сферичного і конічного індентора при різних властивостях індентованого матеріалу. Аналізується розподіл густини в околі індентора в залежності від властивостей пористого тіла та умов тертя між індентором та пористим тілом. Наводяться діаграми навантаження в залежності від схильності до дилатансії та зовнішнього тертя. Прیدілено увагу виникненню та формі навалів навколо індентора.*

***Ключові слова:** індентування, пластичність стисливих середовищ, сферичний індентор, конічний індентор, дилатансія.*

***Abstract.** The purpose of this work was research of the main features of behavior of the porous and damaged powder based materials at indentation process. The mechanical behavior of such materials is characterized by a loosening at purely shift tension and asymmetry of a response to stretching and compression.*

The rheological model of plasticity of porous materials with imperfect interpartial contacts which was earlier proposed one of authors is considered. Based on such theory of plasticity for porous media with distributed damages using finite element computer simulation the deformed state near spherical and conical indenter for different mechanical properties of indented material and different friction conditions between indenter and porous body has been studied.

Porosity distribution near indenter depending on properties of porous body and friction conditions between indenter and porous body has been analyzed. Load profiles as a function of dilatancy tendency and contact friction has been shown. Development of bulk around indenter and its shape has been investigated.

***Keywords:** indentation, plasticity of compressible continuum, spherical indenter, dilatancy*

1. Hertz H. Gesammelte Werke, т. 1, стр. 179-195, 1895.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТИ, 1955. 408 с.
3. Sneddon I.N. The relationship between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile // Int. J. Engin. Sci. 1965. V. 3. № 1. P. 47-57
4. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // J. Mater. Res. 1992. V. 7. № 6. P. 1564-1583
5. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. 2004. V. 19. № 1. P. 3-20
6. Field J.S., Swain M.W. A Simple Predictive Model for Spherical Indentation // J. Mater. Res. 1993. V. 8. P. 297-306
7. Field J.S., Swain M.W. Determining the mechanical properties of small volumes of material from submicrometer spherical indentations // J. Mater. Res. 1995. V. 10. № 1. P. 101-112
8. Галанов Б.А., Григорьев О.Н., Мильман Ю.В., Рагозин И.П. Определение твердости и модуля Юнга по глубине внедрения пирамидального индентора // Проблемы прочности. 1983. № 11. С. 93-96.
9. Milman Yu.V., Galanov B.A., Chugunova S.I. Plasticity characteristic obtained through hardness measurement. Overview 107 // Acta Metall. Mater. 1993. V. 41. № 9. P. 2523-2532
10. Галанов Б.А., Мильман Ю.В., Чугунова С.И., Гончарова И.В. Исследование механических свойств высокотвердых материалов методом индентирования // Сверхтвердые материалы. 1999. № 3. С. 25-38.

11. *Kogut L., Komvopoulos R.* Analysis of the spherifl indentation cycle for elastic-perfectly plastic solid // *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. № 12. P. 3641-3653
12. *Dub S., Novikov N., Milman Y.* The transition from elastic to plastic behavior in an Al-Cu-Fe quasicrystal studied by cyclic nanoindentation // *Phil. Mag.* 2002. V. 82. P. 2161-2172
13. *Antunes J.M., Fernandes J.V., Menezes L.F.* A new approach for reverse analyses in depth-sensing indentation using numerical simulation // *Acta Mater.* 2007. V. 55. P. 69-81
14. *Ma D., Ong C.V., Wong S.F., He J.J.* New method for determining Young's modulus by non-ideally sharp indentation // *J. Mater. Res.* 2005. V. 20. P. 1498-1506
15. *Venckatesh T.A., Van Vliet K.J., Giannocopoulos A.E., Suresh S.* Determination of elasto-plastic properties by instrumented sharp indentation: guidelines for property extraction // *Scripta Mater.* 2000. V. 42. № 9. P. 833-839
16. *Li M., Chen W.M., Liang N.-G., Wang L.D.* A numerical study of indentation using indenters of different geometry // *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. № 1. P. 73-78
17. *Sreeranganathan A., Golhale A., Tamirisakandala S.* Determination of local constitutive properties of titanium alloy matrix in boron-modified titanium alloy using spherical indentations // *Scripta Mater.* 2008. V. 58. № 1. P. 114-117
18. *В.В. Скороход,* Реологические основы теории спекания. –Киев, Наук. Думка, 1972. – 151 с.
19. *Штерн М.Б.* Развитие теории прессования порошков и теории пластичности пористых тел // *Порошковая металлургия* №9 – 1992

REFERENCES

1. *Hertz H.* Gesammelte Werke, т. 1, стр. 179-195, 1895.
2. *Lur'e A.I.* Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti. Moscow: GTTI, 1955. 408 p.
3. *Sneddon I.N.* The relationship between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *Int. J. Engin. Sci.* 1965. V. 3. No 1. P. 47-57
4. *Oliver W.C., Pharr G.M.* An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *J. Mater. Res.* 1992. V. 7. No 6. P. 1564-1583
5. *Oliver W.C., Pharr G.M.* Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. No 1. P. 3-20
6. *Field J.S., Swain M.W.* A Simple Predictive Model for Spherical Indentation. *J. Mater. Res.* 1993. V. 8. P. 297-306
7. *Field J.S., Swain M.W.* Determining the mechanical properties of small volumes of material from submicrometer spherical indentations. *J. Mater. Res.* 1995. V. 10. No 1. P. 101-112
8. *Galanov B.A., Grigor'ev O.N., Mil'man Ju.V., Ragozin I.P.* Opredelenie tverdosti i modulja Junga po glubine vnedrenija piramidalnogo indentora. *Problemy prochnosti.* 1983. No 11. S. 93-96.
9. *Milman Yu.V., Galanov B.A., Chugunova S.I.* Plasticity characteristic obtained through hardness measurement. Overview 107. *Acta Metall. Mater.* 1993. V. 41. No 9. P. 2523-2532
10. *Galanov B.A., Mil'man Ju.V., Chugunova S.I., Goncharova I.V.* Issledovanie mehanicheskikh svojstv vysokotverdyh materialov metodom indentirovaniya. *Sverhtverdye materialy.* 1999. No 3. P. 25-38.
11. *Kogut L., Komvopoulos R.* Analysis of the spherifl indentation cycle for elastic-perfectly plastic solid. *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. No 12. P. 3641-3653
12. *Dub S., Novikov N., Milman Y.* The transition from elastic to plastic behavior in an Al-Cu-Fe quasicrystal studied by cyclic nanoindentation. *Phil. Mag.* 2002. V. 82. P. 2161-2172
13. *Antunes J.M., Fernandes J.V., Menezes L.F.* A new approach for reverse analyses in depth-sensing indentation using numerical simulation. *Acta Mater.* 2007. V. 55. P. 69-81
14. *Ma D., Ong C.V., Wong S.F., He J.J.* New method for determining Young's modulus by non-ideally sharp indentation. *J. Mater. Res.* 2005. V. 20. P. 1498-1506
15. *Venckatesh T.A., Van Vliet K.J., Giannocopoulos A.E., Suresh S.* Determination of elasto-plastic properties by instrumented sharp indentation: guidelines for property extraction. *Scripta Mater.* 2000. V. 42. No 9. P. 833-839
16. *Li M., Chen W.M., Liang N.-G., Wang L.D.* A numerical study of indentation using indenters of different geometry. *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. No 1. P. 73-78
17. *Sreeranganathan A., Golhale A., Tamirisakandala S.* Determination of local constitutive properties of titanium alloy matrix in boron-modified titanium alloy using spherical indentations. *Scripta Mater.* 2008. V. 58. No 1. P. 114-117
18. *Skorohod V.V.,* Reologicheskie osnovy teorii spekanija. Kyiv, Nauk. Dumka, 1972. 151 p.
19. *Shtern M.B.* Razvitie teorii pressovaniya poroshkov i teorii plastichnosti poristyh tel. *Poroshkovaja metallurgija* No9. 1992