

УДК 539.3

Ярмолюк В.В. студ., Трубачев С.І. к.т.н, доц.  
НТУУ "Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

## ЗГИНАННЯ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З ЖОРСТКИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Jarmoljuk V.V., Trubachev S.I.  
The National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine ([chubio@i.ua](mailto:chubio@i.ua))

### BENDING OF THREE-LAYER PLATES WITH A RIGID FILLER ON ELASTIC BASE

*Розглянуто згин пружної тришарової пластин з жорстким заповнювачем, яка покоїться на пружній основі. Для опису кінематики несучих шарів прийняті гіпотези Кірхгофа. Реакція основи описується моделлю Вінклера. На контурі пластини передбачається наявність жорсткої діафрагми, що перешкоджає відносному зсуву шарів. Проведено чисельний розрахунок тришарової пластини МСЕ пакетом Femap-NASTRAN. Була визначена залежність прогину від коефіцієнта жорсткості основи. Були наведені рекомендації про вибір коефіцієнта жорсткості на основі прогину.*

*Ключові слова:* згин, тришарова пластина, жорсткий заповнювач, пружна основа

#### Вступ

На сьогоднішній час є багато досліджень пластин з композиційних матеріалів, але мала частина припадає на дослідження з використанням гіпотези ламаної лінії. Раніше цим питанням займалися Горшков А.В., Старовойтов Э.И., Плєскачевский, Ю. М., детальна інформація викладена в їх роботах [1-4].

Сучасна техніка, насамперед аерокосмічна, постійно висуває завдання створення нових високоміцних пластин з композиційних матеріалів, які дозволяють вирішувати проблеми по значному зниженню ваги літальних апаратів, та підвищенню надійності. Важливим досягненням у галузі матеріалознавства стало створення композитних тришарових пластин, які по механічним властивостям значно перевершують пластини з традиційних матеріалів, причому ця перевага збільшується при роботі у підвищених температурах та інших екстремальних умовах. Тому постановка проблеми є розробка аналітичної та чисельної методики розрахунку та аналіз напруженого деформованого стану тришарової пластини.

Використання композитних пластин у навантажених конструкціях є одним із способів покращення вагових характеристик ракетно-космічної техніки. Також шаруваті елементи конструкцій широко використовуються в транспортному машинобудуванні, застосовуються в будівельній практиці. Тришарові пластини в умовах деформації згинання виявляються найбільш раціональними з точки зору міцності і жорсткості. Таким чином, розрахунок тришарових конструкцій під дією статичних навантажень є актуальною задачею.

**Мета роботи** є побудова аналітичного рішення та чисельного алгоритму аналізу деформації тришарової пластини на пружній основі.

#### 1. Постановка і вирішення задачі

Пружна тришарова пластина з жорстким заповнювачем знаходиться на пружній основі. Для опису кінематики пакету прийняті гіпотези ламаної лінії: в несучих шарах справедливі гіпотези Кірхгофа, в нестисливому по товщині заповнювачі нормаль залишається прямолінійною, не змінює своєї довжини, але повертається на деякий додатковий кут, що становить з координатними осями величини  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$ . Деформації вважаємо малими. На пластину діють зовнішні розподілені поверхневі навантаження  $q(x, y)$ ,  $p_x(x, y)$ ,  $p_y(x, y)$  і реакція основи (рис.1). Реакція основи  $q_r$  відповідає моделі Вінклера

$$q_r = -kw; \quad (1)$$

де  $k$  - коефіцієнт жорсткості основи,  $w$  - прогин пластини; знак мінус вказує на те, що реакція спрямована в бік, протилежний прогину

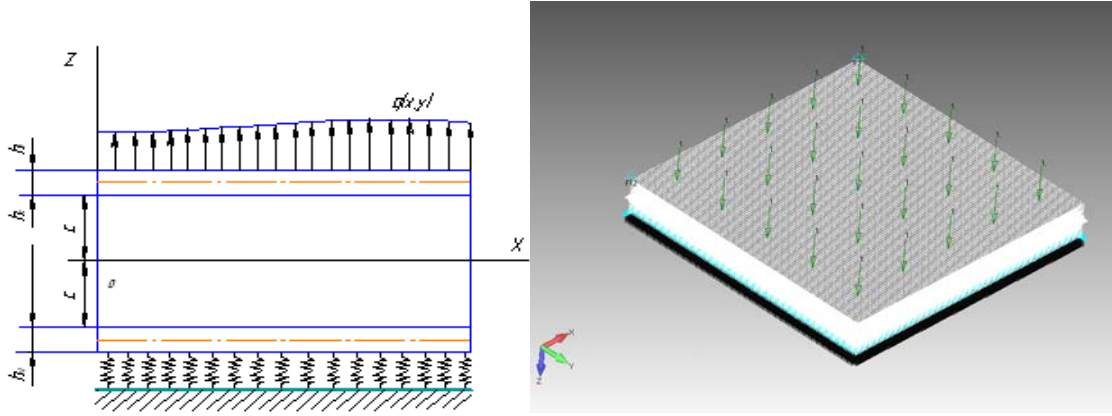


Рис. 1. Розрахункова схема тришарової пластини на пружній основі

Система координат  $x, y, z$  зв'язується з серединною площиною заповнювача. Через  $w(x, y)$ ,  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  позначені прогин і осеві поздовжні переміщення серединної поверхні заповнювача. На контурі пластини передбачається наявність жорсткої діафрагми, що перешкоджає відносному зсуву шарів. Позначимо через  $h_k$  товщину  $k$ -го шару, при цьому  $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Використовуючи введені геометричні гіпотези, поздовжні переміщення в слоях  $u^{(k)}$  можна виразити через шукані п'ять функцій  $u_x, u_y, \psi_x, \psi_y, w$ .

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}, & u_y^{(1)} &= u_y + c\psi_y - zw_{,y} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_x^{(3)} &= u_x + z\psi_x - zw_{,x}, & u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}, & u_y^{(2)} &= u_y - c\psi_y - zw_{,y} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c) \end{aligned} \quad (2)$$

де  $z$  - відстань від розглянутого волокна до серединної площини заповнювача,  $u + c\psi$  - величина зміщення зовнішнього несучого шару за рахунок деформації заповнювача, для другого несучого шару це зміщення буде відповідно  $(u - c\psi)$

Компоненти тензора деформацій виражаються через п'ять шуканих функцій за допомогою співвідношень Коші і виразів (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(1)} &= u_{x,x} + c\psi_{x,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{yy}^{(1)} &= u_{y,y} + c\psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (c \leq z \leq c + h_1) \\ \varepsilon_{xx}^{(3)} &= u_{x,x} + z\psi_{x,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{yy}^{(3)} &= u_{y,y} + z\psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (-c \leq z \leq c) \\ \varepsilon_{xx}^{(2)} &= u_{x,x} - c\psi_{x,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{yy}^{(2)} &= u_{y,y} - c\psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + c\psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} + c\psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) + c\psi_{x,y} - zw_{,xy} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} - c\psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} - c\psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) - c\psi_{x,y} - zw_{,xy} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + z\psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} + z\psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) + z\psi_{x,y} - zw_{,xy} \\ \varepsilon_{xz}^{(1)} &= \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0, & \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi_x, & \varepsilon_{yz}^{(1)} &= \varepsilon_{yz}^{(2)} = 0, & \varepsilon_{yz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi_y, & \varepsilon_{yx}^{(k)} &= \varepsilon_{xy}^{(k)} \end{aligned} \quad (3)$$

Шарова і девіаторна частини тензора деформацій в розглянутому випадку будуть наступними ( $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}; i, j = x, y, z$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx}^{(k)} + \varepsilon_{yy}^{(k)}), & \gamma_{xx}^{(k)} &= \frac{2}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{yy}^{(k)}, & \gamma_{yy}^{(k)} &= \frac{2}{3}\varepsilon_{yy}^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)}, \\ \gamma_{xz}^{(3)} &= \varepsilon_{xz}^{(3)}, & \gamma_{yz}^{(3)} &= \varepsilon_{yz}^{(3)}, & \gamma_{xy}^{(k)} &= \varepsilon_{xy}^{(k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо внутрішні зусилля і моменти наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^{(k)} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad N_{yy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} dz, \\
 Q_x &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad Q_y = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} dz, \quad Q_{xy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} dz, \\
 M_{xx}^{(k)} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad M_{yy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} z dz, \quad M_{xy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} z dz,
 \end{aligned} \tag{5}$$

де  $\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_x, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_y$  - компоненти тензора напружень в шарах пластини; інтеграли беруться за товщиною  $k$ -го шару.

Рівняння рівноваги знаходимо з принципу можливих переміщень:

$$\delta A + \delta W = 0 \tag{6}$$

Тут варіація роботи зовнішніх поверхневих сил:

$$\delta A = \iint_S (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + (q + q_r) \delta w) dS \tag{7}$$

Варіація роботи внутрішніх сил враховує роботу заповнювача в тангенціальному напрямку:

$$\delta W = \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)}) dz \right\} + 2 \int_{h_3} (\sigma_{xx}^{(3)} \delta \varepsilon_{xx}^{(3)} + \sigma_{yy}^{(3)} \delta \varepsilon_{yy}^{(3)}) dz \} dx dy \tag{8}$$

Варіації переміщень у шарах:

$$\begin{aligned}
 \delta u_x^{(1)} &= \delta u_x + c \delta \psi_x - z \delta w_{,x}, \quad \delta u_y^{(1)} = \delta u_y + c \delta \psi_y - z \delta w_{,y} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\
 \delta u_x^{(3)} &= \delta u_x + z \delta \psi_x - z \delta w_{,x}, \quad \delta u_y^{(3)} = \delta u_y + z \delta \psi_y - z \delta w_{,y} \quad (-c \leq z \leq c), \\
 \delta u_x^{(2)} &= \delta u_x - c \delta \psi_x - z \delta w_{,x}, \quad \delta u_y^{(2)} = \delta u_y - c \delta \psi_y - z \delta w_{,y} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Підставивши вирази для інтегралів по товщині шарів у формулу (8), і прирівняти нулю, коефіцієнти при незалежних варіаціях, отримаємо систему диференціальних рівнянь рівноваги прямокутної тришарової пластини на пружній основі в зусиллях:

$$\begin{aligned}
 N_{xx,x} + Q_{xy,y} &= -p_x, \quad N_{yy,y} + Q_{xy,x} = -p_y, \quad H_{xx,x} + H_{xy,y} - Q_x = 0 \\
 H_{yy,y} + H_{xy,x} - Q_y &= 0, \quad M_{xx,xx} + 2H_{xy,xy} + M_{yy,yy} = -(q + q_r),
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для зв'язку напружень і деформацій в шарах використовуємо співвідношення закону Гука в девіаторно-кульовий формі:

$$S_{ij}^{(k)} = 2G_k \gamma_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \tag{11}$$

де  $G_k, K_k$  - модулі зсуву та об'ємної деформації,  $S_{ij}^{(k)}, \sigma^{(k)}$  - девіаторна і кульова частини тензора напружень,  $\gamma_{ij}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  - девіаторна і шарова частини тензора деформацій.

Компоненти тензора напружень у шарах з урахуванням виразів (5) та (11) будуть:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(k)} &= S_x^{(k)} + \sigma^{(k)} = \frac{4}{3} G \varepsilon_{xx}^{(k)} + K \varepsilon_{xx}^{(k)} - \frac{2}{3} G \varepsilon_{yy}^{(k)} + K \varepsilon_{yy}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^- \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\
 \sigma_{yy}^{(k)} &= K_k^- \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^+ \varepsilon_{yy}^{(k)}; \quad \sigma_{xy}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xy}^{(k)}; \\
 \sigma_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{yz};
 \end{aligned} \tag{12}$$

де  $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k$ ;  $K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k$ ;

Підставляючи у (8) вираження деформацій через шукані переміщення (3), та використовуючи інтегрування по товщині кожного з шарів, і враховуючи вирази (7), (6) і (1) отримаємо з (10) систему п'яти лінійних диференціальних рівнянь рівноваги щодо шуканих переміщень:

$$\begin{aligned}
 a_1(u_{x,xx} + u_{y,yx}) + a_2(\psi_{x,xx} + \psi_{y,yx}) - a_3(w_{,xxx} + w_{,yyx}) + a_8 u_{x,yy} + a_9 \psi_{x,yy} &= -p_x, \\
 a_1(u_{y,yy} + u_{x,xy}) + a_2(\psi_{y,yy} + \psi_{x,xy}) - a_3(w_{,yyy} + w_{,xxy}) + a_8 u_{y,xx} + a_9 \psi_{y,xx} &= -p_y, \\
 a_2(u_{x,xx} + u_{y,yx}) + a_4(\psi_{x,xx} + \psi_{y,yx}) - a_5(w_{,xxx} + w_{,yyx}) + a_9 u_{x,yy} + a_{10} \psi_{x,yy} - a_7 \psi_x &= 0, \\
 a_2(u_{y,yy} + u_{x,xy}) + a_4(\psi_{y,yy} + \psi_{x,xy}) - a_5(w_{,yyy} + w_{,xxy}) + a_9 u_{y,xx} + a_{10} \psi_{y,xx} - a_7 \psi_y &= 0,
 \end{aligned}$$

$$a_3(u_{x^2,xxx} + u_{y^2,yxx} + u_{x^2,xyy} + u_{y^2,yyx}) + a_5(\psi_{x^2,xxx} + \psi_{y^2,yxx} + \psi_{x^2,xyy} + \psi_{y^2,yyx}) - a_6(w_{,xxxx} + w_{,yyyy} + 2w_{,yyxx}) + kw = -q, \quad (13)$$

де  $a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+$ ,  $a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)$ ;

$$a_3 = h_1(c + \frac{h_1}{2})K_1^+ - h_2(c + \frac{h_2}{2})K_2^+; \quad a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+;$$

$$a_5 = c[h_1(c + \frac{h_1}{2})K_1^+ + h_2(c + \frac{h_2}{2})K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+];$$

$$a_6 = h_1[c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}]K_1^+ + h_2[c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}]K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+; \quad a_7 = 2G_3 c;$$

$$a_8 = \sum_{k=1}^3 h_k G_k; \quad a_9 = G_1 c(h_1 - h_2); \quad a_{10} = c^2(G_1 h_1 - G_2 h_2) + \frac{2}{3}c^3 G_3.$$

Приймаються граничні умови, що відповідають вільному опираю пластини по кромках. Тоді для шуканих переміщень повинні виконуватися при  $x = 0; 1$  наступні вимоги [1]:

$$u_x = u_y = \psi_x = \psi_y = w = 0 \quad (14)$$

Для відповідності умов (14) рішення системи диференціальних рівнянь (13) приймається у вигляді розкладання в подвійні тригонометричні ряди [2,3]

$$w = \sum_{n,m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi mx}{b}, \quad u_x = \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{1mn} \cos \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi mx}{b}, \quad u_y = \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{2mn} \sin \frac{\pi nx}{a} \cos \frac{\pi mx}{b}$$

$$\psi_x = \sum_{n,m=1}^{\infty} \psi_{1mn} \cos \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi mx}{b}, \quad \psi_y = \sum_{n,m=1}^{\infty} \psi_{2mn} \sin \frac{\pi nx}{a} \cos \frac{\pi mx}{b}, \quad (15)$$

де  $U_{1mn}, U_{2mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn}, W_{mn}$  - невідомі амплітуди переміщень.

Нехай поздовжнє навантаження  $p_x = 0, p_y = 0$ . Поперечне навантаження  $q$  представимо у вигляді розкладання в подвійний тригонометричний ряд:

$$q = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi mx}{b}, \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi mx}{b} dx dy, \quad (16)$$

Після підстановки переміщень (15) і навантаження (16) в рівняння (13) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих амплітуд переміщень:

$$b_6 U_{1mn} + b_7 U_{2mn} + b_8 \psi_{1mn} + b_9 \psi_{2mn} + b_1 W_{mn} = 0,$$

$$b_7 U_{1mn} + b_{11} U_{2mn} + b_9 \psi_{1mn} + b_{12} \psi_{2mn} + b_2 W_{mn} = 0,$$

$$b_8 U_{1mn} + b_9 U_{2mn} + b_{13} \psi_{1mn} + b_{14} \psi_{2mn} + b_3 W_{mn} = 0, \quad (17)$$

$$b_9 U_{1mn} + b_{12} U_{2mn} + b_{14} \psi_{1mn} + b_{10} \psi_{2mn} + b_4 W_{mn} = 0,$$

$$b_1 U_{1mn} + b_2 U_{2mn} + b_3 \psi_{1mn} + b_4 \psi_{2mn} + b_5 W_{mn} = q_{mn},$$

де коефіцієнти  $b_j$  виражаються через величини  $a_i$  і залежать від параметра  $m$  і  $n$ .

Рішення системи (17) можна отримати чисельно за допомогою оберненої матриці. Після визначення амплітуд  $U_{1mn}, U_{2mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn}, W_{mn}$  шукані функції обчислюються за формулами (15).

Переміщення в несучих шарах і заповнювачі знаходяться з співвідношень (2).

## 2. Рішення крайової задачі

У разі малої або великої жорсткості основи рішення для прогину тришарової пластини, можна прийняти у вигляді [2]:

$$w(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) + C_4 e^{\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + C_5 e^{-\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) - C_6 e^{-\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + w_p(x) \quad (18)$$

Відповідні відносний зсув і поздовжнє переміщення в заповнювачі виражаються через прогин з рівняння (19):

$$w_{,xxxxx} + \alpha_1 w_{,xxx} + \alpha_2 w_{,xx} + \alpha_3 w = f(x) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \gamma C e^{\lambda_1 x} - \gamma C e^{-\lambda_1 x} + C e^{\lambda_2 x} (\gamma \cos(\beta_2 x) + \gamma \sin(\beta_2 x)) + \\
 &+ C e^{-\lambda_2 x} (\gamma \sin(\beta_2 x) - \gamma \cos(\beta_2 x)) + C e^{\lambda_3 x} (-\gamma \cos(\beta_2 x) + \gamma \sin(\beta_2 x)) + \\
 &+ C e^{-\lambda_3 x} (\gamma \sin(\beta_2 x) - \gamma \cos(\beta_2 x)) + b_1 w_p + b_2 w_{dx} + b_3 q_{dx} + b_4 p + C_7 \\
 u(x) &= \gamma_4 C_1 e^{\lambda_1 x} - \gamma_4 C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\beta_1 x} (\gamma_5 \cos(\beta_2 x) + \gamma_6 \sin(\beta_2 x)) + \\
 &+ C_4 e^{\beta_1 x} (\gamma_5 \sin(\beta_2 x) - \gamma_6 \cos(\beta_2 x)) + C_5 e^{-\beta_1 x} (-\gamma_5 \cos(\beta_2 x) + \gamma_6 \sin(\beta_2 x)) + \\
 &+ C_6 e^{-\beta_1 x} (\gamma_5 \sin(\beta_2 x) - \gamma_6 \cos(\beta_2 x)) + b_5 (b_1 w_{p,xxx} + b_2 \int w_p dx + \\
 &+ b_3 \int q dx + b_4 p + C_7) + b_1 w_{p,x} + b_7 \iint p dx dx + C_8 x + C_9
 \end{aligned} \tag{20}$$

де  $C_1, \dots, C_9$  - константи інтегрування, які впливають з умов закріплення пластини;  $w_p$  - частинне рішення рівняння (21), яке визначається для кожного виду зовнішнього навантаження, наприклад, при  $q(x) = q_0, w_p = q_0 / k$ .

$$\xi^3 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 = 0 \tag{21}$$

Крайова задача з визначення переміщень  $u(x), \psi(x), w(x)$  замикається приєднанням граничних умов. При шарнірному закріпленні обох торців пластини  $x = 0, l$ :

$$u(x) = \psi(x) = w(x) = M(x) = 0 \tag{22}$$

Для затисненої по двох кромках пластини:

$$u(x) = \psi(x) = w(x) = H(x) = 0 \tag{23}$$

### 3. Чисельні результати.

Розрахунок здійснювався для тришарової пластини, матеріал несучих шарів якої Д16Т, а для заповнювача - фторопласт. Відносні товщини шарів приймалися  $h_1 = 0.02, h_2 = 0.04, c = 0.09$ ; співвідношення сторін пластини  $a = 1, b = 1$ . Інтенсивність поверхневого навантаження  $q = 1 \text{ МПа}$ . Розрахунки проводилися двома способами: за розглянутою вище методикою та методом скінченних елементів (МСЕ) пакетом Femap - NASTRAN. Результати розрахунку приведені в таблиці та в графічному вигляді на рис. 2,3. Максимальна похибка не перевищувала 2,8 %

Таблиця

Зміна прогину  $w$  вздовж осі  $x$  посередині пластини:  $k = 100 \text{ МПа / м}, k = 5000 \text{ МПа / м}$

ось $x$ ( $y = 0,5$ )	прогин $w$ при $k = 100 \text{ МПа / м}$	прогин $w$ при $k = 5000 \text{ МПа / м}$
0	0	0
0,25	-0,0012	-0,0019
0,5	-0,0018	-0,0028
0,75	-0,0012	-0,0019
1	0	0

Екстремум прогинів спостерігається в центрі пластини.

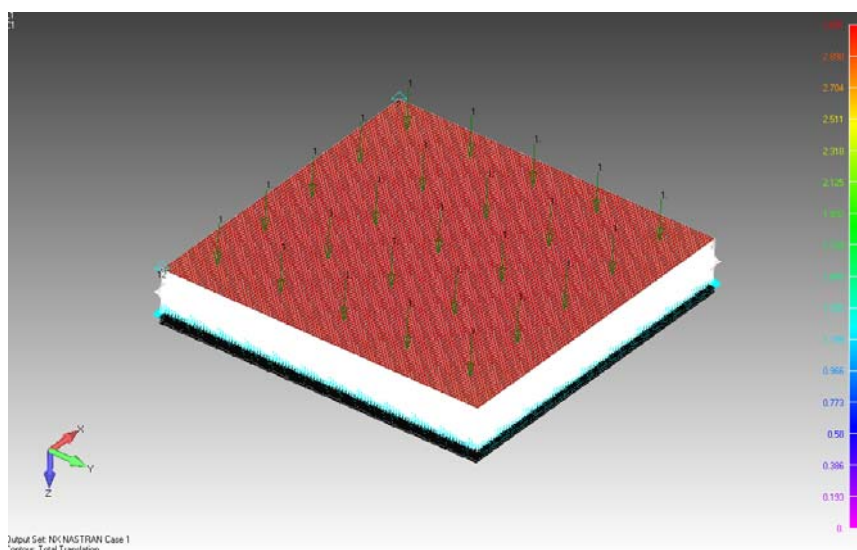


Рис. 2. Зміна прогину  $w$  вздовж осі  $x$  посередині пластини:  $k = 100 \text{ МПа / м}$

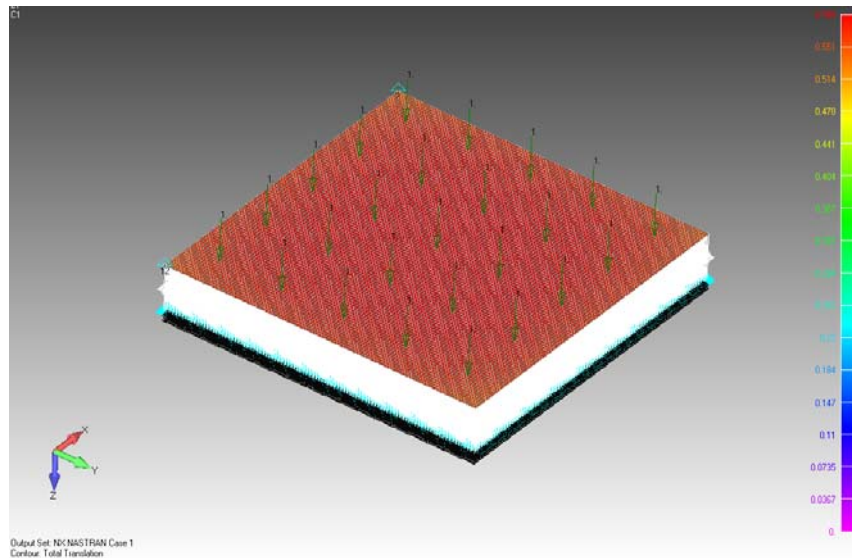


Рис. 3. Зміна прогину  $w$  вздовж осі  $x$  посередині пластини:  $k = 5000 \text{ МПа / м}$

### Висновок

Приведено аналітичне та чисельне рішення задачі згинання тришарової пластини з жорстким заповнювачем на пружній основі. Урахування жорсткості пружної основи призводить до істотного уточнення напруженого стану, що виникає в тришаровій пластині при зовнішній силі дії.

**Аннотация.** Рассмотрен изгиб упругой трехслойной пластины с жестким заполнителем, покоящейся на упругом основании. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Реакция основания описывается моделью Винклера. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительноному сдвигу слоев. Проведен численный расчет трехслойной пластины МКЕ пакетом Femap-NASTRAN. Была определена зависимость прогиба от коэффициента жесткости основания. Были приведены рекомендации о выборе коэффициента жесткости на основе прогиба.

**Ключевые слова:** изгиб, трехслойная пластина, жесткий заполнитель, упругое основание

**Abstract.** Sandwich plates are widely used in various branches of industry. Thus, the calculation of sandwich structures under static loads is an actual task. Elastic rectangular sandwich plate with incompressible filler lying on elastic foundation is considered. Kirchhoff's hypotheses are accepted for description of base layers kinematics. The foundation reaction is described by Winkler's model. The presence of rigid diaphragm impeding the relative shift of layers is presumed on the contour of the plate. The variational Lagrange's principle is used for receiving differential system of equilibrium equations. The numerical calculation of the sandwich plate finite element package Femap-NASTRAN. Was determined by the dependence of bending stiffness of the base. Were given advice on the choice of stiffness on the deflection. The analytical solutions of the problem have been found and their numerical analysis has been conducted.

**Keywords:** bending, three-layer plate, the rigid filler, the elastic base

1. Горшков А.Г. Механика слоистых вязко-упругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.
4. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем [Текст] / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. Наука, 2004. – 386 с.

### REFERENCE

1. Gorshkov A.G., Starovojtov Je. I., Jarovaja. A.V., Mehanika slojstyx vjazko-uprugoplasticheskih jelementov konstrukcij. (The mechanics of layered visco-elastic structural elements). Moscow: Fizmatlit, 2005, 576 p.
2. Starovojtov, Je. I. Vjazkouprugoplasticheskie slojstye plastiny i obolochki. (Viscoelastoplastic laminated plates and shells). Gomal: BelGUT, 2002, 344 p.
3. Starovojtov Je.I., Jarovaja A.V., Leonenko D.V., Deformirovanie trehslojnyh jelementov konstrukcij na uprugom osnovanii. (Deformation of sandwich structural elements on elastic foundation). Moscow: FIZMATLIT, 2006, 379 p.
4. Pleskachevskij Ju. M., Starovojtov Je. I., Jarovaja A. V. Deformirovanie metallopolimernyh sistem. (Deformation of Metal-Polymer Systems). Minsk: Bel. Navuka, 2004, 386 p.