

## EVOLUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL: UM ESTUDO NO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Raquel Teixeira e Margarida Rodrigues

*Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa*

### Resumo

A presente comunicação irá incidir numa investigação realizada ao longo do ano letivo de 2013/2014, no âmbito da unidade curricular “Prática de Ensino Supervisionada II”, do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, que teve como objetivo a compreensão das estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, nas diversas operações, envolvendo números naturais, e o modo como estas se desenvolvem, contemplando as seguintes questões: i) Qual a importância da implementação de uma rotina de cálculo mental?; ii) Que estratégias de cálculo mental usam os alunos?; iii) De que modo podem evoluir essas estratégias?; iv) Qual a importância da discussão oral das estratégias utilizadas? A metodologia seguiu o paradigma interpretativo, assumindo uma natureza qualitativa. Optou-se pela combinação de várias técnicas de recolha de dados: observação, entrevista e análise documental. Foram analisadas as tiras de cálculo mental de duas alunas do 3.º ano ao longo de toda a intervenção e, recorrendo às notas de campo efetuadas durante a partilha de estratégias, foram ainda analisadas as estratégias utilizadas pela turma no início, meio e fim da implementação. Por último, foi aplicada uma entrevista a essas duas alunas, a qual permitiu a identificação das estratégias utilizadas, na mesma tira, por cada uma das estudantes.

Os resultados demonstram que a discussão coletiva das estratégias contribuiu para que os alunos se apropriem de novas estratégias, evoluindo assim de estratégias mais elementares para estratégias mais complexas. As estratégias revelaram-se fundamentais para o desenvolvimento do cálculo mental.

**Palavras-chave:** Sentido de número; cálculo mental; estratégias de cálculo mental

### Introdução

O cálculo mental é fundamental ao desenvolvimento do sentido de número, através do qual os alunos se podem distanciar do algoritmo, quando usado como um treino sucessivo de uma habilidade onde, muitas vezes, os estudantes efetuam cálculos mecanizados, sem realmente atribuírem um sentido numérico a esses cálculos nem compreenderem as várias relações que podem ser estabelecidas.

O presente artigo incide numa investigação integrada na prática de intervenção, que surgiu do diagnóstico de uma turma de 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, onde foi detetada uma heterogeneidade elevada ao nível do cálculo mental, e que teve como objetivo geral a compreensão das estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, nas diversas operações, envolvendo números naturais, e o modo como estas se desenvolvem. No âmbito deste objetivo, foram colocadas as seguintes questões: i) Qual a importância da implementação de uma rotina de cálculo mental?; ii) Que estratégias de cálculo mental usam os alunos?; iii) De que modo podem evoluir essas estratégias?; iv) Qual a importância da discussão oral das estratégias utilizadas? O estudo adotou uma metodologia de natureza qualitativa sob o paradigma interpretativo. Foi feita a triangulação dos dados, através do uso de múltiplas técnicas de recolha de dados. Embora a recolha de dados tivesse envolvido toda a turma, algumas das técnicas de dados foram aplicadas apenas a duas alunas, de modo a permitir uma análise mais aprofundada.

### **O cálculo mental**

O cálculo mental é valorizado pela comunidade de educação matemática, a nível nacional e internacional, tendo uma presença marcadamente distinta nos últimos dois Programas de Matemática recentemente homologados em Portugal. No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), é enfatizada a importância de um cálculo mental sistemático, o qual deve ser desenvolvido desde o início do 1.º ciclo (ME, 2007) devendo, por isso, o professor ter a responsabilidade de “proporcionar aos alunos situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental” (ME, 2007, p. 14), uma vez que este proporciona o desenvolvimento do sentido de número e de operação. Se neste documento orientador o cálculo mental aparece, constantemente, como um objetivo a ser valorizado na aprendizagem da matemática, no mais recente programa de matemática (MEC, 2013), o mesmo já não acontece. Inicialmente é apresentada, como nota introdutória, a importância do cálculo mental no auxílio da aplicação dos algoritmos das quatro operações, sendo que o cálculo mental surge apenas “ao serviço do cálculo algorítmico (...) e não como ferramenta de desenvolvimento de sentido operatório, nem como um processo de cálculo com raciocínio” (Velo, Brunheira & Rodrigues, 2013, p. 5). Assim, neste programa, é o cálculo algorítmico que ganha força, sugerindo um regresso ao ensino mecanizado de procedimentos, os quais têm de ser aplicados, na perfeição, pelos alunos. Especificamente, para o 3º ano de escolaridade, no domínio de Números e Operações, nos conteúdos respetivos à adição e subtração de números naturais, nada é referido sobre as estratégias de cálculo mental, valorizando-se, uma vez mais, os algoritmos destas operações. No que diz respeito à multiplicação e à divisão, também muito ficou por dizer, uma vez que apenas valorizam a aprendizagem de produtos pelos fatores 10,

100 e 1000, não fazendo sequer referência à determinação de dobros, metades, etc. Desta forma, podemos concluir que este documento avilta o “papel formativo do cálculo mental” (Veloso et al., 2013, p. 5), desprezando, por isso, também, o sentido de número e o sentido operatório.

De acordo com ME (2007, p. 13), o sentido do número é entendido como a “capacidade para decompor números, usar como referências números particulares (...).usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados e reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números”. Diversos autores apontam a dificuldade em encontrar uma definição para o sentido do número alegando, porém, que conseguimos instantaneamente perceber em que situações existe falta de sentido de número (Castro & Rodrigues, 2008). Consequentemente, conseguimos também perceber que quando existe uma compreensão geral dos números e das relações entre os mesmos, geralmente existe, também, perícia e habilidade para utilizar os números em variados contextos, de forma flexível. Esta competência pressupõe que se trabalhe com números e não com dígitos, reconhecendo os vários significados dos números, usando-os em variados contextos, e estabelecendo novas e diferentes relações numéricas.

Podemos então concluir que o importante para o desenvolvimento do sentido do número é a compreensão e construção de relações entre números e não propriamente a memorização dos factos matemáticos. O essencial passa por compreender essas relações, para que as crianças consigam estabelecê-las, mesmo quando surgem num contexto completamente diferente. Assim, os factos memorizados podem ser usados no estabelecimento de relações numéricas.

É neste sentido que o cálculo mental deve ser desenvolvido, incitando ao desenvolvimento de estratégias que, por sua vez, favorecem o desenvolvimento do sentido do número. Esta competência deve ser essencialmente inculcada e desenvolvida nos alunos na era totalmente dominada pela tecnologia em que nos encontramos.

O cálculo mental é caracterizado, segundo Buys (2008), por: i) operar com os números e não com os dígitos; ii) usar propriedades das operações, relações numéricas e combinações entre elas; iii) implicar um bom desenvolvimento do número e um conhecimento dos factos numéricos elementares; e iv) permitir o recurso a registos intermédios em suporte de papel (em algumas situações). O cálculo mental apresenta, segundo Abrantes et al. (citado em Cavalheiro, 2012) várias características, tais como: i) é variável, uma vez que as crianças podem utilizar várias estratégias para o mesmo cálculo; ii) é flexível, permitindo a adaptação dos números de forma a facilitar a operação; iii) é ativo, pois o indivíduo pode escolher a estratégia a adotar; iv) é

holístico, ou global, pois os números são considerados como um todo e não separadamente pelos seus algarismos; v) é construtivo, pois começa-se a calcular, geralmente, pelo primeiro número apresentado; vi) solicita sempre a compreensão; e vii) fornece uma aproximação inicial da resposta, pois o cálculo é iniciado com o dígito da maior ordem de grandeza.

Neste sentido, o cálculo mental deve ser visto como um complemento ao cálculo escrito pois, uma vez que o mesmo se caracteriza por ser um cálculo pensado, e não mecanizado, pressupõe o domínio das propriedades das operações, dos números e das relações que podem ser estabelecidas entre os mesmos, podendo realizar-se alguns registos escritos (Brocardo & Serrazina, 2008). O cálculo mental nem sempre foi interpretado desta forma pois, na década de 80, Sowder (citado em Mendes, 2012, p. 101) afirmou que esta competência era caracterizada pelo “processo de efetuar cálculos aritméticos sem a ajuda de meios externos”. Atualmente, o cálculo mental é entendido para além dessa designação, como “o cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números” (Buys, 2008, p. 121), sendo que o sucesso desta competência depende, em grande parte, do sentido de número da pessoa que a desenvolve.

De facto, as definições mais recentes de cálculo mental tornam cada vez mais difícil a distinção entre cálculo mental e escrito. Se realizar o algoritmo mentalmente, posso considerar que estou a desenvolver a competência de cálculo mental? Segundo Verschaffel, Greer e De Corte (2007, p. 566) “não é a presença ou ausência de papel e lápis, mas sim a natureza das entidades matemáticas e as ações que são cruciais na distinção entre cálculo mental e algoritmos (escritos)”.

Não obstante, o cálculo algorítmico deve ser trabalhado a par do desenvolvimento do cálculo mental, pois em alguns algoritmos é possível trabalhar com os algarismos e “fazer o cálculo sem ter a mínima noção da ordem de grandeza” (ME, 2007, p. 14) do número. É importante evidenciar que este é exatamente o tipo de trabalho que não se pretende quando as crianças estão a desenvolver o cálculo mental. O facto de as crianças dominarem a execução de um algoritmo não significa, de todo, que tenham compreendido o sentido da operação ou que a saibam aplicar corretamente noutra situação completamente diferente. Além disso, alguns autores (Clarke, 2005; Usiskin, 1998; Brocardo et al., 2003), destacam algumas consequências do uso exagerado dos algoritmos, quando usados apenas como um conjunto de passos a serem seguidos. Estes autores afirmam que leva as crianças a não pensarem corretamente no número, além de não ser o método mais eficaz pois estimula as crianças apenas a seguirem aqueles passos sem arranjam os seus próprios procedimentos. Assim, a solução passa por encontrar um equilíbrio entre estas duas formas de cálculo, mental e algorítmico, pois “quando

trabalhados de modo adequado eles constituem uma parcela importante da capacidade de calcular fluentemente” (Brocardo & Serrazina, 2008, p. 105), uma vez que o cálculo algorítmico também é considerado um aspeto bastante importante da Matemática.

No cálculo mental está sempre subjacente a ideia de seleção de uma estratégia a usar, a qual varia de acordo com os números e as operações envolvidas nos cálculos. As estratégias podem ser definidas como “aplicações de factos numéricos conhecidos ou rapidamente calculados em combinação com propriedades específicas do sistema numérico para encontrar a solução para um cálculo cuja resposta não é conhecida” (Thompson, 1999, p. 2).

Neste sentido, um cálculo mental mais competente exige sempre a seleção das estratégias mais eficazes, as quais acabam por emergir naturalmente perante o contexto apresentado. O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007, p. 14) refere que deverão ser criados momentos que permitam o desenvolvimento de “diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição, decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações”. Assim, as propriedades são consideradas como fundamentais na aplicação e desenvolvimento da capacidade de cálculo mental, uma vez que “quando conhecidas, compreendidas e aplicadas permitem a realização eficaz e rápida do cálculo” (Ribeiro, Valério & Gomes, 2009, p. 33).

Para que o desenvolvimento de várias estratégias ocorra é fundamental que o professor crie situações propícias a tal e que promova, também, momentos de discussão em grande grupo, onde os alunos podem explicar as estratégias utilizadas. Este momento ajuda-os a apropriarem-se de outras estratégias utilizadas pelos colegas e ensina-os a escolherem quais são as mais convenientes para cada situação. Nesta linha de pensamento, Carvalho e Ponte (2013) referem que as tarefas que promovem o desenvolvimento desta competência devem não só ser realizadas de forma constante e refletida, como também deve ser promovido um momento de discussão e partilha dos argumentos e justificações.

Além deste reportório que as crianças vão gradualmente construindo, também lhes deve ser dada a oportunidade de inventarem as suas próprias estratégias pois, “deste modo, têm uma melhor compreensão sobre os efeitos das operações e as características do sistema de numeração decimal, tais como aspetos associados ao valor de posição” (Heirdsfield et al., citado em Mendes, 2012, p. 122). Desta forma, as aprendizagens tornam-se bastante mais significativas, até porque as estratégias de cálculo mental não devem ser ensinadas, no sentido de serem reproduzidas.

A decomposição é uma estratégia bastante eficaz, tanto para a adição como para a subtração. Porém é necessário algum cuidado na sua abordagem, uma vez que “esta estratégia pode levar a alguns erros ao nível da subtração quando o número representado pelo algarismo das unidades do aditivo é menos que o do subtrativo” (Ferreira, 2008, p. 140). Assim, a operação 253-164 pode suscitar problemas, uma vez que, neste caso, alguns algarismos que compõem o número no aditivo são menores do que os que compõem o número subtrativo.

Também na estratégia da compensação, bastante utilizada pelos alunos em operações que envolvem a adição e a subtração, são necessárias algumas precauções já que, esta, não pode ser utilizada do mesmo modo na adição e na subtração. O objetivo desta estratégia é que, ao retirarem a uma parcela um número e ao adicioná-lo à outra parcela, os alunos consigam transformar num número mais cómodo, com o qual consigam trabalhar, sendo que por vezes os alunos optam apenas por alterar uma das parcelas, deixando intacta a outra, compensando depois na soma. Contudo, se na adição esse número é retirado de uma parcela e adicionado na outra, na subtração tem, obrigatoriamente, de se realizar apenas uma operação: se retirarmos de um lado, teremos de retirar também do outro e se adicionarmos de um lado temos também de adicionar do outro o mesmo número, como é exemplificado na figura 1. Este procedimento tem por base a propriedade da invariância do resto.

127-33	133-36
127 <b>(+3)</b> – 33 <b>(+3)</b>	133 <b>(-3)</b> - 36 <b>(-3)</b>
130-36 = <b>94</b>	130 – 33 = <b>97</b>

Figura 1: Estratégia de compensação baseada na propriedade da invariância do resto

Também na subtração, a compensação pode fazer-se atuando apenas num dos números e depois no resultado, ou seja, na diferença: o número que for adicionado ao aditivo tem de ser subtraído à diferença e vice-versa (fig. 2), e o número que for adicionado ao subtrativo tem de ser adicionado à diferença e o que for subtraído ao subtrativo tem de ser também subtraído à diferença (fig. 3). O facto deste tipo de compensação ser diferente consoante se altere o aditivo ou o subtrativo faz com que a compensação na subtração seja mais complexa do que na adição.

$\underline{137}-43$	$\underline{137} - 43$
$137 (+3) - 43$	$137 (-7) - 43$
$140-43 = 97$	$130 - 43 = 87$
$97 - 3 = 94$	$87 + 7 = 94$

Figura 2: Estratégia de compensação (alteração realizada ao aditivo)

$137-\underline{43}$	$137 - \underline{43}$
$137-43 (+7)$	$137 - 43 (-3)$
$137-50 = 87$	$137 - 40 = 97$
$87 + 7 = 94$	$97 - 3 = 94$

Figura 3: Estratégia de compensação (alteração realizada ao subtrativo)

Existem ainda outras estratégias bastante úteis nos cálculos envolvendo a adição e subtração, tal como o uso da propriedade comutativa, associativa e inversa. A utilização de dobros, metades e o trabalho com a estrutura do 5 também são estratégias importantes que podem facilitar a descoberta da resposta (Ferreira, 2008).

Também na multiplicação, os alunos começam por utilizar estratégias mais simples, evoluindo depois para as mais complexas, de acordo com o conhecimento que têm sobre os números e relações numéricas. Segundo Mendes et al. (citado em Cavalheiro, 2012), os alunos começam por apoiar-se na contagem por grupos (cálculo por contagem), onde utilizam, essencialmente, adições repetidas, evoluindo depois para um recurso a produtos conhecidos e a relações de dobro e de metade. Outro procedimento bastante útil, diz respeito à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, onde os alunos podem multiplicar por um número mais cómodo e depois subtrair ou adicionar o fator que está a mais ou a menos, decompondo assim um dos fatores (figura 4).

$35 \times 11 = 35 \times 10 + 35$
$=350 + 35$
$=385$

Figura 4: Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

Além destes processos, os alunos podem ainda utilizar a propriedade comutativa e a multiplicação sucessiva a partir de um número de referência, estando subjacente a este último “o uso de múltiplos de 10 ou de produtos conhecidos” (Cavalheiro, 2012, p. 20).

No que diz respeito à divisão, é importante que os professores desenvolvam algum trabalho com os alunos no sentido de lhes mostrarem que a divisão é a operação inversa da multiplicação pois, desta forma, os alunos podem ter acesso a uma “maior variedade de processos de cálculo ... muitas vezes mais eficazes do que o uso do algoritmo tradicional” (Mendes, 2012, p. 22). Desta forma, as estratégias utilizadas na divisão dependem, em grande parte, da relação que os alunos estabelecerem entre multiplicação e divisão, a qual irá, por sua vez, permitir o estabelecimento “de conexões que potenciam o cálculo associado a estas operações, [contribuindo] para o desenvolvimento do sentido do número” (Mendes, 2012, p. 22). Os alunos podem ainda recorrer a estratégias de fatoração, quer seja aplicada ao divisor ou ao dividendo, decomposição do dividendo, substituição ou a subtrações sucessivas. Segundo Rocha e Menino (2008, p. 193) “é também esta capacidade de cálculo mental na divisão, à qual se deve aliar um forte domínio da multiplicação, que vai auxiliar o desenvolvimento e a aprendizagem de algoritmos da divisão”.

Apesar de ser importante a aquisição e compreensão de variadas estratégias pelos alunos, também é importante que sejam eles próprios a construírem-nas e, para isso, o professor deve criar um ambiente de aprendizagem que incite os alunos à descoberta de várias estratégias informais, uma vez que “este tipo de estratégias baseadas na utilização de regularidades descobertas pelos alunos e reconhecidas como úteis podem e devem constituir-se como ferramenta de cálculo por excelência” (Rocha & Menino, 2008, p. 193).

## **Metodologia**

O contexto educativo onde foi realizado o presente estudo de investigação situa-se no concelho da Amadora, o qual pertence ao distrito de Lisboa. A turma em questão pertencia ao 3.º ano de escolaridade e era constituída por 23 alunos, 14 do género feminino e nove do género masculino. As idades dos alunos estavam compreendidas entre os 8 e os 9 anos.

O estudo desenvolvido seguiu o paradigma interpretativo, assumindo uma natureza qualitativa. A investigação qualitativa caracteriza-se por se centrar “na compreensão dos problemas, analisando os comportamentos, as atitudes ou os valores” (Sousa & Baptista, 2011, p. 56), onde o investigador assume um papel fulcral na recolha de dados. De acordo com o problema em investigação, foi adotada a metodologia de investigação-ação.

Segundo Sousa e Baptista (2001, p. 53), a metodologia de investigação “consiste num processo de seleção da estratégia de investigação, que condiciona, por si só, a escolha das técnicas de

recolha de dados, que devem ser adequadas aos objetivos que se pretendem atingir”. Mais especificamente, a metodologia de investigação-ação promove uma reflexão contínua sobre a prática educativa, visando assim uma mudança e melhoria sobre a mesma, pois como refere Elliott (citado em Esteves, 2008, p.18) “podemos definir a investigação-ação como o estudo de uma situação social no sentido de melhorar a qualidade da ação que nela decorre”. Neste sentido, McKernan (citado em Esteves, 2008, p.20) acrescenta que “a investigação-ação é uma investigação científica levada a cabo por práticos, para melhorar a prática.” Para além das características apontadas, esta metodologia de investigação caracteriza-se ainda pelo facto de a sua implementação implicar uma participação e colaboração direta de todos os intervenientes do processo (Sousa & Baptista, 2011), promovendo assim, em todos os seus aspetos, uma melhoria da educação. No geral, pode-se afirmar que esta é uma

metodologia dinâmica, que funciona como uma espiral de planeamento, ação e procura de factos sobre os resultados das ações tomadas, um ciclo de análise e reconceptualização do problema, planeando a intervenção, implementando o plano e avaliando a eficácia da intervenção (Sousa & Baptista, 2011, p. 66)

A recolha de dados incidiu na rotina de cálculo mental implementada diariamente em todo o período de intervenção. Era distribuída uma tira com cálculos, individualmente a cada aluno que dispunha de cinco minutos para a resolver. Seguidamente, a tira era corrigida e pontuada pelo colega, à medida que as estratégias usadas eram apresentadas pelos alunos, discutidas e registadas no quadro.

Optou-se pela combinação de várias técnicas de recolha de dados (triangulação de dados), de forma a tornar-se o processo mais fidedigno. No presente estudo, foram usadas as técnicas de observação participante, de entrevista e de análise documental, tendo sido usados como documentos as produções dos alunos, decorrentes da realização individual, e por escrito, das tiras de cálculo mental. Também foram usadas notas de campo, já que durante o período de tempo dedicado à partilha de estratégias, a estagiária, que não se encontrava a dinamizar a atividade, realizava registos escritos sobre as estratégias que os alunos iam partilhando.

A observação caracteriza-se, segundo Sousa e Baptista (2011, p. 88) por ser “uma técnica de recolha de dados que se baseia na presença do investigador no local”. Assim, optou-se pela realização de uma observação participante, onde o investigador “integra o meio a “investigar”, podendo, assim, ter acesso às perspetivas das pessoas com quem interage” (Sousa & Baptista, 2011, p. 88).

A entrevista foi aplicada, individualmente, no final da intervenção, a dois alunos da turma em questão, sendo que os mesmos foram escolhidos tendo em conta a observação participante

realizada durante a rotina de cálculo mental. Assim, foi escolhido um aluno que tivesse mostrado, constantemente, bons resultados ao nível do cálculo mental, recorrendo, para tal, a várias estratégias, e um aluno mais mediano, ou seja, que não dominasse tão facilmente as estratégias mas que também não apresentasse demasiadas dificuldades. Assim, na análise dos resultados chamar-se-á A1 à aluna que apresentou o melhor desempenho e B1 à aluna mediana. Apesar de a entrevista só ter sido aplicada a raparigas, não se considerou a questão do género na seleção dos entrevistados.

A entrevista visa a obtenção de informações sobre as ideias ou formas de interpretação dos entrevistados (Estrela & Ferreira, 1997; Sousa & Baptista, 2011). A entrevista consistiu na aplicação de uma tira de cálculo mental, sendo pedido às alunas que resolvessem cada um dos cálculos propostos, recorrendo a uma estratégia e realizando o registo escrito. Após este registo, pedi a cada uma das alunas para explicar o seu raciocínio, para cada uma das operações efetuadas. A entrevista foi gravada numa dimensão sonora.

Posteriormente, depois da fase de recolha estar concluída, torna-se fundamental realizar a análise e interpretação dos dados. Nesta fase, em que se realizou a compilação, seleção e tratamento das informações, permitindo assim uma aproximação às conclusões da investigação, foi tida em conta a observação participante realizada ao longo deste processo e os registos de campo decorrentes da mesma, através dos quais foi possível realizar uma análise à evolução das estratégias utilizadas por toda a turma, no início, meio e fim da intervenção. Conjuntamente, foram analisadas as tiras de cálculo mental das alunas A1 e B1, permitindo assim a realização de uma análise mais particular, no que diz respeito à evolução das estratégias utilizadas por cada uma delas. Por último, foram também analisadas as entrevistas realizadas, permitindo assim a identificação das estratégias utilizadas por cada uma das alunas.

A análise de conteúdo, feita às transcrições das entrevistas, é, segundo Krippendorff (citado em Guerra, 2006) “uma técnica de investigação que permite fazer inferências válidas e replicáveis dos dados do contexto”. Assim, a análise de conteúdo apresenta, segundo Guerra (2006) uma dimensão descritiva, onde se descreve aquilo que foi relatado, e uma dimensão interpretativa, onde o investigador interpreta os dados, recorrendo a um quadro conceptual teórico.

## **Resultados**

De forma a perceber-se a evolução das estratégias ao longo de todo o processo de intervenção, foram analisadas as tiras das duas alunas que participaram nas entrevistas (A1 e B1).

A aluna A1 mobilizou várias e diferentes estratégias ao longo do período de intervenção. No que diz respeito à adição/subtração, conseguimos verificar que, inicialmente, a aluna utilizava

preferencialmente as adições sucessivas e aplicava estratégias de decomposição (decimal e não decimal) do subtrativo, tais como:

$76 - 23 = 76 - 20 - 3 =$ $= 56 - 3 =$ $= 53$	$195 - 37 = 195 - 35 - 2 =$ $\overset{\uparrow}{(35+2)} = 160 - 2 =$ $= 158$
---	--

Figura 5: Decomposição decimal do subtrativo      Figura 6: Decomposição não decimal do subtrativo

Não obstante, a aluna usou também a compensação baseada na propriedade da invariância do resto durante a 1ª tira, recorrendo novamente a esta estratégia nas últimas tiras:

$$\overset{-5}{185} - \overset{-5}{35} = 180 - 30 =$$

$$= 150$$

Figura 7: Compensação baseada na propriedade da invariância do resto

Gradualmente, verifica-se que a aluna incorporou no seu repertório de estratégias a decomposição decimal das parcelas (fig. 8) bem como a decomposição não decimal do aditivo. Ainda neste campo, foram esporadicamente utilizadas estratégias que se basearam no uso da propriedade associativa, como se pode observar nas figuras 10 e 11. Todas as estratégias foram usadas de um modo flexível, de modo a facilitar o cálculo, manipulando os números para obter múltiplos de 10 ou números de referência.

$$155 + 22 + 12 = 175 + 22$$

$$+ 12 = 177 + 12 = 189$$

Figura 8: Uso da estratégia da decomposição decimal da(s) parcela(s)

$$185 - 65 = 165 - 65 +$$

$$\overset{\uparrow}{65+20} \quad + 20 = 100 +$$

$$+ 20 = 120$$

Figura 9: Decomposição não decimal do aditivo, de forma a obter o 100

$$110 + 62 + 8 = 110 + 70 = 180$$

Figura 10: Estratégia baseada na propriedade associativa para obter múltiplos de 10

$$75 + 15 + 10 = 75 + 25 = 100$$

25

Figura 11. Estratégia baseada na propriedade associativa para encontrar números de referência relativamente à composição do 100

Respetivamente à multiplicação/divisão, verifica-se que nas primeiras tiras não é mobilizado qualquer tipo de estratégia para estas operações. Tal ocorrência está relacionada com o facto de as operações de multiplicação/divisão presentes nas primeiras tiras se resolverem facilmente, recorrendo a factos básicos. Contudo, progressivamente, a aluna adota algumas estratégias, tais como a decomposição decimal ou não decimal de um dos fatores (ex.  $4 \times 12 = 4 \times 10 + 4 \times 2$  e  $6 \times 8 = 5 \times 8 + 1 \times 8$ ), a decomposição decimal do dividendo (ex.  $44 : 4 = 40 : 4 + 4 : 4$ ) e as relações de dobros e de metades (ex.  $68 : 4 = 68 : 2 : 2$ ). A aluna utilizou ainda a decomposição não decimal do dividendo, como está ilustrado no seguinte exemplo:

$$68 : 4 = 40 : 4 + 28 : 4 =$$

$$= 10 + 7 =$$

$$= 17$$

Figura 12: Estratégia de decomposição não decimal do dividendo

O exemplo apresentado mostra que a decomposição efetuada pela aluna não foi aleatória, uma vez que a aluna decompôs o 68 procurando múltiplos do divisor que entrem na tabuada do 4. Neste caso, a aluna também poderia ter optado por uma decomposição decimal, como regularmente fez, realizando  $68 : 4 = 60 : 4 + 8 : 4$ . Porém, uma vez que o 60 não aparece na tabuada do 4, poderia ser mais difícil para a aluna indicar o resultado de  $60 : 4$ , recorrendo por isso a uma decomposição não decimal do dividendo.

Ainda nas últimas tiras, a aluna opta por recorrer a uma decomposição decimal de um fator com uso da relação de metade, no cálculo de  $150 \times 32$ :

$$100 \times 32 + 100 \times 32 =$$

$$3200 + 3200 = 6400$$

$$3200 + 1600 = 4800$$

Figura 13: Decomposição decimal de um fator com uso da relação de metade

Nesta operação, a aluna recorreu ao 100 e realizou a operação duas vezes, multiplicando assim o 32 duas vezes por 100. Depois, como tinha multiplicado 50 vezes mais do que era pedido, a aluna teve de mobilizar a relação de dobros e de metades, chegando assim à conclusão de que

teria de dividir por 2 um dos produtos parciais, uma vez que 50 é metade de 100. O seu raciocínio pode ser expresso na forma de  $32 \times (100 + 100:2)$ . Assim sendo, conclui-se que todas as decomposições efetuadas se basearam na propriedade distributiva da multiplicação/divisão em relação à adição.

No que diz respeito à aluna B1, nas operações de adição/subtração, verifica-se uma evolução no sentido de parar de usar as adições/subtrações sucessivas e começar a aplicar estratégias de decomposição decimal das parcelas, do subtrativo e do aditivo. Relativamente à decomposição não decimal do subtrativo, atente-se no seguinte exemplo:

$$115 - 35 = \quad \left| \quad \begin{array}{l} 115 - 15 - 20 = \\ = 100 - 20 = 80 \end{array} \right.$$

Figura 14: Decomposição não decimal do subtrativo

Neste caso particular, a aluna decompôs o subtrativo (35) em 15+20, de forma a trabalhar diretamente com o 100, que é um número muito mais cómodo.

Na multiplicação, ao contrário do que a aluna A1 fez, a aluna B1 aplicou logo desde o início estratégias, apesar de se tratar de operações que apenas requerem o uso de factos básicos. Assim, a aluna começou por utilizar a decomposição não decimal dos fatores, a qual foi regularmente usada ao longo de todas as tiras. Repare-se que o leque de estratégias desta aluna foi aumentando de uma forma muito notável, uma vez que, tal como sucedeu na adição/subtração, a aluna deixou de recorrer às adições sucessivas na multiplicação, começando a apropriar-se de novas estratégias, embora não as tendo usado regularmente, e nem sempre de forma correta, como aconteceu com alguns casos que passamos a apresentar.

$$32 \times 50 = \quad \left| \quad \begin{array}{l} 32 \times 100 - 2 \times 32 \\ 3200 - 2 \times 32 = \end{array} \right.$$

Figura 15. Uso incorreto das relações de dobros e metades

Neste caso, a aluna mobilizou a relação de metade, no sentido de perceber que 50 é metade de 100. Contudo, depois deste raciocínio, e uma vez que duplicou um dos fatores, deveria ter dividido o produto por dois, de forma a obter a metade do mesmo. Desta forma, o cálculo correto deveria ser  $32 \times 100 : 2$ , pois o cálculo efetuado corresponde a  $32 \times 98$ .

$7 \times 8 =$	$10 \times 8 = 80 - 2 \times 8 =$ $= 80 - 16 =$ $= 64$
----------------	--

Figura 16: Uso incorreto da compensação para obter uma dezena num dos fatores

Nesta operação, a aluna recorreu ao número 10, por ser um número muito mais cómodo. Assim, a aluna deveria ter compensado aquilo que multiplicou a mais, que neste caso foi o  $3 \times 8$ , uma vez que o 7 é  $10-3$ ; contudo, a aluna apenas retirou  $2 \times 8$ , obtendo assim o resultado igual a  $8 \times 8$ . A compensação efetuada baseia-se na propriedade distributiva, e foi aplicada incorretamente pois equivale a  $(10-2) \times 8$ , quando deveria ser  $(10-3) \times 8$ .

Especificamente na divisão, a aluna começou a aplicar estratégias de decomposição decimal do dividendo:

$68 : 4 =$	$60 : 4 + 8 : 4 =$ $15 + 2 = 17$
------------	-------------------------------------

Figura 17: Decomposição decimal do dividendo

Apesar de ambas as alunas terem mobilizado várias estratégias, a aluna A1 apresentou um reportório mais completo do que a aluna B1, tendo, inclusive, aplicado as mesmas sempre de forma correta.

Nas entrevistas, as estratégias utilizadas pelas alunas A1 e B1 estão em conformidade com as utilizadas pelas mesmas alunas durante as tiras de cálculo mental. Assim, de acordo com o reportório que foi aumentando durante a rotina de cálculo mental, as alunas mobilizaram as estratégias que acharam mais corretas para cada uma das operações.

Na terceira operação,  $176-49$ , a aluna A1 aplicou incorretamente a compensação baseada na propriedade da invariância do resto, uma vez que a aplicou como se, se tratasse de uma adição (fig. 18).

$176 - 49 =$	$176 - 49 = 175 - 50 =$ $= 125$
--------------	------------------------------------

Figura 18: Uso incorreto da estratégia da compensação baseada na propriedade da invariância do resto

Na última operação,  $255+123-85$ , a aluna A1 optou por decompor o 85 em  $70+15$ , de acordo com o resultado da adição (378). A aluna salientou este facto durante a entrevista, afirmando que tinha dividido “o 80 em  $70 + 15$ ”.

As estratégias usadas pela globalidade da turma são apresentadas na tabela 1.

No geral, podemos observar que a turma mobilizava poucas estratégias no início, começando gradualmente a apropriar-se de mais. Para tal, considera-se que o momento de partilha de estratégias foi extremamente valioso. Através deste momento, os alunos apropriaram-se de novas estratégias que eram referidas pelos colegas ou abordadas pelas estagiárias. Pode-se constatar ainda que, também de uma forma global, os alunos deixaram de recorrer às adições sucessivas, começando a utilizar preferencialmente a decomposição das parcelas. Também na multiplicação, os alunos deixaram de aplicar adições sucessivas, passando a utilizar a decomposição decimal de um dos fatores e a compensação para obter dezena(s) num dos fatores. No que respeita à divisão, os alunos começaram a utilizar essencialmente a decomposição decimal do dividendo.

Tabela 1: Estratégias utilizadas pela turma no início, meio e fim da rotina de cálculo mental

Tira de cálculo		Estratégias utilizadas pela turma no início, meio e fim da rotina de cálculo mental			
		Início		Meio	
		1ª	2ª	7ª	8ª
Adição/Subtração	Estratégias				
	Decomposição decimal das parcelas	X	X		
	Decomposição decimal do subtrativo	X		X	
	Decomposição não decimal do subtrativo			X	
	Compensação baseada na propriedade da invariância do resto				
	Uso da propriedade comutativa para obter múltiplos de 10				
	Adição sucessiva	X	X		
Multiplicação/Divisão	Decomposição decimal do dividendo		X		
	Decomposição não decimal do dividendo			X	
	Relações de dobros e de metades			X	
	Decomposição não decimal de um dos fatores	X	X	X	
	Decomposição decimal de um dos fatores			X	
	Compensação para obter dezena(s) num dos fatores			X	
	Adição sucessiva		X	X	

Nota: Tabela construída pela autora, através das notas de campo efetuadas ao longo da intervenção

## **Considerações finais**

De acordo com os dados obtidos, verifica-se que os alunos podem apropriar-se de novas estratégias, evoluindo assim, gradualmente, de estratégias elementares para estratégias mais complexas. Contudo, o importante a ser salientado é que os alunos conseguiram, através dos procedimentos utilizados, aumentar o seu repertório de estratégias, o que lhes confere um maior domínio sobre qualquer operação que tenham de resolver, uma vez que ao dominarem variadas estratégias, os alunos têm a oportunidade de as mobilizarem para as situações mais adequadas. Nesta linha de pensamento, ME (2007) refere que “progressivamente, os alunos devem ser capazes de utilizar as suas estratégias de modo flexível e de selecionar as mais eficazes para cada situação” (p.14). Os alunos evidenciaram desenvolver o seu cálculo mental, estabelecendo relações numéricas e usando as propriedades das operações (Buys, 2008).

Para tal, considera-se que os procedimentos utilizados foram essenciais, nomeadamente a implementação da rotina de cálculo mental e os momentos de partilha de estratégias. Importa ressaltar que a primeira pouco contribuirá para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental se não for acompanhada da segunda, uma vez que é esta partilha que ajudará os alunos a construir um repertório de estratégias, ajudando assim a decidir os registos mais adequados para cada situação (ME, 2007). Assim, não se considera apenas importante o facto de os alunos melhorarem as suas estratégias, mas também o facto de se poderem apropriar de outras e, para tal, o momento de partilha de estratégias é crucial. Por outro lado, a evolução das estratégias dos alunos parece ter sido marcada pelo facto de se ter abordado o cálculo mental de forma contínua e sistemática. Concluindo, é fulcral que os alunos desenvolvam a destreza de cálculo, pois esta é considerada “essencial para a manutenção de uma forte relação com os números, para que os alunos sejam capazes de olhar para eles criticamente e interpretá-los a de modo apropriado” (ME, 2007, p. 10). Assim sendo, esta destreza possibilitará aos alunos um domínio sobre o cálculo, permitindo, simultaneamente, um domínio sobre os números e as suas relações o qual, por sua vez, será fundamental e imprescindível na realização de qualquer atividade matemática.

## **Referências bibliográficas**

- Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J. M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.
- Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-133). Lisboa: Escolar Editora.

- Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido de número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.
- Buys, K. (2008). Mental arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Carvalho, R., & Ponte, J. (2014). O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 31-54). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Cavalheiro, A. R. (2012). *O contributo das TIC para a aprendizagem da multiplicação* (Dissertação de mestrado não publicada). Escola Superior de Educação, Setúbal.
- Clarke, D. M. (2005). Written algorithms in the primary years: Undoing the 'good work'? In M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer (Ed.), *Making Mathematics Vital, Proceedings of the 20th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, (pp. 93-98). Sydney.
- Esteves, L. M. (2008). *Visão panorâmica da Investigação-Ação*. Porto: Porto Editora.
- Estrela, A., & Ferreira, J. (1996). *Métodos e técnicas de investigação científica em Educação*. Lisboa: Faculdade de Psicologia e de Ciência da Educação.
- Ferreira, E. (2008). A adição e a subtração no contexto do sentido de número. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. (pp. 135-157). Lisboa: Escolar Editora.
- Guerra, I. (2006). *Pesquisa Qualitativa e Análise de Conteúdo – sentidos e forma de uso*. Cascais: Príncipia Editora.
- Mendes, F., & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido do número. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 159-182). Lisboa: Escolar Editora.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Mendes, M. F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo* (Dissertação de doutoramento não publicada). Instituto de Educação, Lisboa.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas curriculares. Matemática – Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Ribeiro, D., Valério, N., & Gomes, T. (2009). *Cálculo Mental*. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Rocha, I., & Menino, H. (2008). A aprendizagem da divisão nos primeiros anos, perspetivas metodológicas e curriculares. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 183-199). Lisboa: Escolar Editora.
- Sousa, M. J., & Baptista, C. S. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios – segundo bolonha*. Lisboa: Lidel.

- Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*. Maidenhead: Open University Press.
- Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Veloso, G., Brunheira, L. & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: Um recuo de décadas. *Educação e Matemática*, 123, 3-8.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.