

A EMERGÊNCIA DO NÚMERO FRACIONÁRIO NO CONTEXTO DA DIVISÃO DE INTEIROS: UM CONTRIBUTO PARA O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESSORES DOS 1.º E 2.º CICLOS DO ENSINO BÁSICO

Graciosa Veloso | graciosav@esexl.ipl.pt
Escola Superior de Educação de Lisboa

Resumo

Este texto tem como propósito contribuir para a valorização, no seio da Educação Matemática, do desenvolvimento do conhecimento matemático dos futuros professores dos 1.º e 2.º ciclos, no contexto da formação inicial.

Foco-me na emergência do número fracionário no contexto da divisão de números inteiros com a preocupação de aprofundar o sentido de número racional e a compreensão da divisão, conceitos estruturantes do programa de Matemática do Ensino Básico. O tópico programático “Números racionais”, além de ter fundamental importância no desenvolvimento matemático dos alunos do Ensino Básico, representa para muitos estudantes, futuros professores, uma grande dificuldade conceptual e didática. Justifica-se, portanto, que continue a ser-lhe dada muita atenção na formação inicial, além do desenvolvimento de estudos a ele inerentes.

Com um exemplo de medida de uma grandeza, contextualizo a necessidade de criar o número fracionário e identifico o problema aritmético a ela associado. Assim, partindo de situações de partilha equitativa e de medida que envolvem variáveis discretas para enquadrar a operação divisão como modelo matemático, apresento a evolução do conceito de número ligada à superação da impossibilidade de, no universo dos números inteiros, determinar o quociente de um dividendo que não é múltiplo do divisor. O conceito de número fracionário aparece como instrumento da superação e ligado ao significado de fração enquanto quociente.

Se este artigo contribuir para uma adequada articulação entre o desenvolvimento dos conhecimentos matemático e didático tão necessário ao ensino da Matemática satisfará o principal objetivo que me propus atingir.

Palavras-chave: conhecimento matemático do professor, formação de professores, divisão de números inteiros, número racional.

Introdução

A formação inicial de professores dos 1.º e 2.º ciclos, em particular a relativa à componente matemática, tem um papel relevante dada a importância que o ensino tem na qualidade das aprendizagens das crianças. Um bom ensino requer do professor diversos tipos de conhecimento, nomeadamente, o relativo à disciplina – conhecimento matemático, o didático e o curricular.

As recomendações quanto à formação matemática destes futuros profissionais expressas por Albuquerque *et al.* (2008) enfatizam a importância do desenvolvimento da compreensão aprofundada da matemática que se vai ensinar, o conhecimento da natureza desta ciência e a capacidade de continuar a aprender.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) preconiza que, à semelhança do que acontece noutros países, o desenvolvimento do sentido de número racional se inicie no 1.º ano de escolaridade e prossiga ao longo de toda a escolaridade básica. O sentido deste tipo de número envolve conceitos e relações matemáticas estruturantes que importa trabalhar no processo de ensino aprendizagem, tais como os conceitos de divisão e de número fracionário. Estudantes, futuros professores, revelam grandes dificuldades e concepções erróneas em aspetos essenciais inerentes a estes conceitos como ilustra, por exemplo, Serrazina *et al.* (no prelo).

O principal objetivo deste artigo é o de contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático necessário ao ensino do tópico programático “Números Racionais” dos 1.º e 2.º ciclos, através da discussão do problema da divisão de um número inteiro qualquer por outro número inteiro não nulo. A expressão número inteiro designa qualquer número natural e o zero.

O corpo do artigo desenvolve-se em duas secções: Enquadramento teórico e Construção de número fracionário no contexto da divisão de inteiros. Na primeira secção, apresento a fundamentação do conteúdo da segunda, no âmbito do conhecimento matemático, e seguidamente destaco os princípios da evolução da Matemática presentes no processo de construção do Campo Racional. A outra secção inicia-se com o desenvolvimento matemático da divisão de um número inteiro por um dos seus divisores; de seguida, apresento a divisão inteira entre dois números inteiros em que o dividendo é maior e não múltiplo do divisor e mostro que a divisão definida anteriormente é um caso particular desta. Finalmente, discuto como é que a criação de número fracionário vem ajudar a ultrapassar barreiras críticas existentes nas duas definições anteriores, mantendo, embora, as propriedades da divisão e da divisão inteiras.

Enquadramento teórico

A minha experiência de docência em Escolas Superiores de Educação tem-se desenvolvido na lecionação de unidades curriculares com conteúdos matemáticos,

didáticos (da Matemática) e em supervisão de práticas de ensino. Esta diversidade tem constituído um desafio sistemático à desejável articulação entre as componentes de conhecimento matemático e de conhecimento didático, traduzido na organização de propostas e de materiais que contribuam para uma boa articulação entre a experiência matemática e respetiva reflexão constituintes essenciais da formação matemática dos estudantes. Na procura de respostas a este desafio tenho-me deparado com a dificuldade sistemática de localizar textos matemáticos acessíveis aos estudantes. Os textos relativos ao tema “Números e Operações”, de matemáticos portugueses de referência, concretamente excertos de Caraça (2002), têm-se revelado de compreensão difícil para a generalidade dos estudantes que tenho orientado. Nas outras áreas de formação existem materiais de apoio, contrariamente ao que acontece, ainda, na área do conhecimento matemático orientado para o ensino. Relativamente ao desenvolvimento de sentido de número racional, existe já, na área da educação matemática, literatura de referência, especificamente a referida em Monteiro e Pinto (2005). O mesmo não acontece relativamente ao aprofundamento matemático, persistindo a necessidade de organização e produção quer de textos de estudo desses tópicos matemáticos quer sobre a matemática.

Conhecimento matemático para ensinar

Na área científica da Educação Matemática há a evidência de que o conhecimento para o ensino da disciplina requer uma conexão consistente e profunda entre componentes diversas, a área científica da disciplina, a didática e a curricular, conforme passo a expor.

Segundo Shulman (1986), o conhecimento necessário a um professor para ensinar abrange três dimensões: o conteúdo matemático propriamente dito, que contempla o conhecimento de e sobre a Matemática; o didático, relativo à aprendizagem e ao ensino (no sentido de saber como aprendem os alunos e em conhecer aspetos necessários à orientação das aprendizagens); e o curricular referente aos programas de ensino, nomeadamente ao processo de articulação horizontal e vertical dos conteúdos, dos materiais de apoio, entre os quais os manuais escolares. Ball (1990), Ball, Hill, & Bass (2005) desenvolveram a caracterização feita pelo autor anterior apresentando o conceito de conhecimento especializado para o ensino da Matemática, sustentando esta designação na articulação entre os conhecimentos matemático e pedagógico.

Ma (1999) evidencia a distinção entre conhecimento procedimental e compreensão em profundidade da matemática que se ensina. Apresenta e discute quatro componentes fundamentais do conhecimento matemático que um professor deve dominar de modo a que compreenda e oriente os seus alunos: a compreensão das ideias matemáticas básicas; a conexão entre elas, seja relativamente a conceitos ou a procedimentos; as representações múltiplas para um mesmo conceito ou processo; e a coerência longitudinal.

Mais recentemente têm vindo a ganhar expressão perspectivas que associam o aprofundamento matemático de conceitos à reflexão sobre a prática letiva dos docentes enquanto participantes de grupos colaborativos, como se depreende da seguinte afirmação de Davis & Renert :

“(...) In combining the mathematical emphases of concept analysis with the interactive dynamics of lesson study, our concept studies are occasions for excavating extant meanings of concepts as well as opportunities for shared critiques and extensions of interpretative possibilities for pedagogical purposes.” (2009, p. 38)

Davis (2012) argumenta, no sentido de perspetivar o conhecimento matemático como uma aptidão para aprender continuamente e não como o domínio de um corpo mais ou menos rígido de conhecimento, quando afirma

“(...) I suggest that this knowledge is better understood as a learnable disposition within a participatory frame than a body of knowledge within a mastery frame.” (2012, abcde)

Uma vez enquadrado o desenvolvimento do conhecimento matemático no complexo que contém ainda a vertente didática e a curricular passo de seguida a apresentar aspetos importantes relativos ao conhecimento sobre a Matemática.

Princípios orientadores da evolução da matemática, presentes no processo de construção do campo racional

As conceções relativas à natureza da Matemática influenciam o modo de ensinar esta disciplina e, portanto, interferem na aprendizagem das crianças. Segundo Shulman (1986), é importante valorizar explicitamente o desenvolvimento do conhecimento sobre a Matemática. É de acordo com esta linha de pensamento que apresento as principais ideias relativas à construção do número fracionário.

Como Caraça (2002) documenta, a criação dos números naturais e a dos números fracionários estão associadas a necessidades sociais práticas. Os dois tipos de números vêm resolver problemas de quantidade, ou seja, abreviadamente, os naturais permitem efetuar e registrar contagens e os fracionários exprimem a medida de uma grandeza em função de uma unidade considerada. Ao problema social da contagem (de objetos) a Matemática responde com a criação do conjunto dos números naturais; ao problema da medida de uma grandeza responde com a construção do campo racional, através da criação do número fracionário. Este autor destaca a importância da resolução de problemas na evolução da Matemática.

Enuncia princípios organizadores desta ciência e aplica-os na criação do campo racional através da discussão e resolução de “O Problema da medida”, como passo a apresentar. Antes, porém, importa explicitar que a medição de qualquer grandeza envolve três aspectos fundamentais e distintos: a escolha da unidade, a comparação com a unidade e a utilização de um número como expressão do resultado da comparação. Analise-se a seguinte situação: são dados dois segmentos de reta AB e CD de comprimentos diferentes, quaisquer. Será possível determinar a medida do segmento de maior comprimento tomando o comprimento do outro como unidade? A resposta a esta questão é afirmativa, embora, historicamente tenha demorado muito tempo a ser dada e envolva números de natureza diferente, os irracionais – problema da incomensurabilidade – e os racionais. É apenas sobre estes últimos que passo a centrar a minha atenção. É muitas vezes impossível usar um número natural para traduzir a medida, dado que o segmento unidade não cabe um número inteiro de vezes no outro segmento, dado que sobeja uma parte inferior à unidade no segmento AB. Em muitos destes casos é necessário usar uma unidade auxiliar obtida por subdivisão de CD num número de partes iguais e em que cada uma destas caiba um número inteiro de vezes em AB. É possível exprimir os comprimentos quer de AB quer de CD por números inteiros mas (ainda) não é possível exprimir a medida de AB na unidade CD. Como resolver esta dificuldade? Caraça (2002) exprime assim o impacto desta situação problemática no panorama da evolução da Matemática:

“Estamos em face de um dilema. Uma de duas:

a) Ou renunciemos a exprimir numericamente a medição de AB com a unidade CD, o que, além de incómodo, levanta novas questões – se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade e não em relação à antiga, será porque aquela terá algum privilégio especial? Qual? Porquê?

b) Ou desejamos poder exprimir sempre a medida por um número – princípio de extensão – e então temos que reconhecer que o instrumento numérico até aqui conhecido - o conjunto dos números inteiros – é insuficiente para tal e há que completá-lo, aperfeiçoá-lo nesse sentido. Como?” (Caraça, 2002, p. 34)

A superação da impossibilidade de traduzir a medida por um número inteiro conseguida pela criação de um novo tipo de número – número fracionário – e que com este permite alargar o conjunto dos números inteiros a um outro conjunto numérico, o campo racional, é orientada segundo Caraça (2002) pelos seguintes princípios:

- O princípio da extensão que sustenta a criação de novos números que representam a medida do comprimento de um segmento nas condições discutidas atrás;
- O estudo da impossibilidade da divisão (exata) de números inteiros quando o dividendo não é múltiplo do divisor;
- O princípio da economia, segundo o qual se mantêm válidas quer as definições quer as propriedades operatórias definidas para os números inteiros.

Graças à criação do número fracionário ganha significado exprimir, por vezes, este número como novo tipo de número. Ele é novo relativamente ao número inteiro.

A situação de medida, ilustrada anteriormente, envolve uma impossibilidade aritmética que passo a discutir e resolver na próxima secção.

Divisão de números inteiros

A impossibilidade de traduzir a medida de certas grandezas por um número inteiro, como se viu anteriormente, e a sua superação vão agora ser estudadas do ponto de vista aritmético. Faço a discussão da divisão de números inteiros, das dificuldades encontradas e apresento a criação do número fracionário, emergindo este como um novo tipo de número relativamente ao número inteiro.

No processo de ensino-aprendizagem a divisão é a operação aritmética conceptualmente mais delicada; a sua complexidade tem sido objeto de muitos estudos sendo reconhecida na História da Matemática, nomeadamente por Pacioli (1494, *apud* Katz, 2010) quando afirma que “se uma pessoa sabe dividir, tudo o mais é fácil”.

Como com qualquer outra operação aritmética é importante saber qual é o universo em que a divisão vai ser definida, pois todas as relações e afirmações estabelecidas são relativas aos elementos desse conjunto. Considera-se como universo de trabalho

o conjunto dos números inteiros não negativos, \mathbb{IN}_0 (ou \mathbb{Z}_0^+), conjunto que é reunião do conjunto dos números naturais com o conjunto singular que contém o número zero, ou seja, $\mathbb{IN}_0 = \mathbb{IN} \cup \{0\}$. Este conjunto é infinito e discreto – entre quaisquer dois números consecutivos a ele pertencentes não há nenhum outro número inteiro –. A operação divisão vai ser apresentada a partir da multiplicação definida no mesmo universo numérico.

Vou contextualizar estas duas operações em situações simples de quotidiano, uma relativa ao sentido de partilha equitativa e a outra relativa ao sentido de medida ou agrupamento da divisão.

Considerem-se as situações A e B:

<p>A. Os 24 alunos de uma turma estão organizados em 8 grupos iguais. Quantos elementos tem cada grupo?</p>	<p>B. Noutra turma, com igual número de alunos (24), também há grupos e cada um destes tem 8 alunos. Quantos grupos existem nesta turma?</p>
---	--

Estas situações podem ser matematicamente interpretadas da seguinte forma:

Tabela 1: Situações de partilha equitativa e de medida

Situação A	Situação B
Partilha equitativa	Medida ou Agrupamento
DADOS	
24 – n.º de alunos da turma 8 – n.º de grupos equicardinais	24 – n.º de alunos da turma 8 – n.º de alunos em cada grupo
PEDIDO	
número de elementos de cada grupo	número de grupos

Notas:

a) O sentido de partilha equitativa provém de situações em que genericamente há D objetos (quantidade de uma grandeza) a serem distribuídos igualmente por d grupos e pretende-se determinar a dimensão de cada grupo, ou seja, o número de objetos (quantidade de grandeza) por 1 grupo.

b) O sentido de medida, ou agrupamento, está presente em situações em que, genericamente, a quantidade de uma grandeza presente no dividendo vai ser medida tendo como unidade de medida o valor (da mesma grandeza) do divisor. O quociente representa a medida referida.

Expressar, em cada situação, o número de alunos da turma como produto de 8 pela incógnita (variável representativa do que se quer saber), é uma ajuda para se determinar o que é pedido em cada uma. Podem expressar-se estas ideias usando uma equação, por exemplo, $24 = 8 \times n$, em que n representa o número que se desconhece em cada caso ($n \in \mathbb{N}$). Este número pode ser obtido determinando o quociente de 24 por 8. Na situação A cada grupo tem 3 ($24:8$) alunos e na situação B existem 3 ($24:8$) grupos. Todos os números envolvidos pertencem ao universo em que decidimos trabalhar.

A divisão aparece aqui como a operação inversa da multiplicação, porque, em cada caso é conhecido o produto (24) e um dos factores (8), faltando conhecer o outro fator. Este fator, 3, foi obtido diretamente através da divisão.

Generalizando, pode afirmar-se que a operação divisão é a operação inversa da multiplicação porque resolve o problema de, conhecido um produto e um dos fatores, determinar o outro fator, ou seja, usando simbologia matemática,

$$D : d = q,$$

em que D representa o produto (conhecido),

$d \neq 0$ é o fator conhecido

e q representa o fator desconhecido obtido através da divisão.

A terminologia específica da divisão é: D – dividendo; d – divisor e q – quociente.

Dividendo múltiplo do divisor: possibilidade da divisão de inteiros

As duas situações abordadas anteriormente envolveram números inteiros, 24, 8 e 3. Elas exemplificam a divisão cujo dividendo, D , é múltiplo do divisor $d \neq 0$ e q é o quociente de D por d . Note-se que a equação $D : d = q$ estabelecida no parágrafo anterior é equivalente à equação $q \times d = D$. Pode, assim, afirmar-se que está definida a divisão de inteiros no caso em que o dividendo é múltiplo do divisor.

Analisem-se dois casos particulares: o caso em que o divisor é unitário e o caso em que o dividendo é nulo.

Se o divisor for 1, que valor terá o quociente? Esta pergunta pode ser traduzida simbolicamente pela equação, $D : 1 = q$ que é equivalente à equação $D = 1 \times q$. A solução é $q = D$, ou seja, o quociente é igual ao dividendo. Pode atribuir-se-lhe significado invocando a propriedade de 1 *ser elemento neutro da multiplicação*. Tendo

presente esta propriedade pode-se analisar já o caso em que dividendo e divisor são iguais e concluir que o quociente é 1.

Considere-se agora que o dividendo é nulo, $D = 0$ e o divisor é um número qualquer não nulo, $d \neq 0$. Que valor tem o quociente q ? Ora a equação $0 : d = q$ é equivalente a $0 = q \times d$. Sendo nulo o dividendo, o produto $q \times d$ também é nulo e nulo tem de ser o quociente pois pela propriedade do anulamento de um produto aplicada ao caso em que um dos fatores é não nulo implica que o outro fator seja nulo. Pode-se afirmar que o quociente de 0 por um número inteiro, não nulo, é 0. Este facto matemático pode ser interpretado assim: se nada há para partilhar nada há a receber ou se nada há para medir, nula é a medida, seja qual for a unidade considerada.

Em síntese, do ponto de vista matemático pode-se formalmente afirmar que foi definida, no conjunto dos números inteiros, a divisão como a operação inversa da multiplicação do seguinte modo:

$D : d = q$, $d \neq 0$, de tal modo que q verifica a equação $D = q \times d$

A esta definição, da divisão como operação inversa da multiplicação de números inteiros, estão associadas restrições ou impasses de natureza diversa que importa analisar. Uma das restrições é a de D ter que ser múltiplo de d , o que significa que, ou D é nulo ou é um número natural da forma $q \times d$ com q e d naturais. É necessária esta restrição para garantir que o conjunto é fechado relativamente à divisão – o resultado da operação tem de pertencer ao universo em que ela está definida. Ficam assim excluídos e, portanto, por responder, os casos em que (i) o dividendo é maior que o divisor não sendo seu múltiplo, ou seja, em que $D > d$, D não é múltiplo de d e (ii) em que o dividendo é menor que o divisor, $D < d$. O facto de o divisor ter de ser não nulo é um impasse de natureza diferente, pois é impossível dividir por zero como vai ser apresentado na parte final desta secção.

Divisão Inteira – conceito para ultrapassar um dos impasses na divisão

A definição de divisão atrás discutida contempla (apenas) o caso em que o dividendo é múltiplo do divisor, não respondendo, contudo, a uma variedade de situações significativas.

Analise-se uma situação em que o dividendo é maior que o divisor e não é seu múltiplo. Ela não pode ser resolvida à custa da divisão definida atrás. Considere-se como exemplo:

Dispomos de 33 objetos que queremos embalar em caixas cuja capacidade é 6. Quantas caixas se encherão, no máximo, e quantos objetos ficarão, eventualmente, por embalar?

A divisão estudada anteriormente não é aqui aplicável, pois não existe nenhum número inteiro que multiplicado por 6 tenha 33 como produto. Não se pode aceitar que $33 : 6 = 5$, porque 6×5 é diferente de 33. A situação tem, contudo, solução e vamos ver como pode ser modelada por uma nova operação - divisão inteira - que alarga a noção de divisão anteriormente definida e mantém a validade das relações nesta verificadas. Observe-se o processo de obtenção da solução do problema: ao encher 1 caixa, ficam 27 objetos por embalar, verificando-se a igualdade, $33 = 1 \times 6 + 27$; continuando identicamente pode encher-se mais 1 caixa ficando 21 objetos por embalar, verificando-se a igualdade $33 = 2 \times 6 + 21$; como 21 é maior que 6 pode-se continuar obtendo $33 = 3 \times 6 + 15$; identicamente se obtém $33 = 4 \times 6 + 9$ e $33 = 5 \times 6 + 3$. Esta igualdade (e não as anteriores) é a que responde ao pedido e traduz a aplicação da identidade fundamental da divisão inteira ao caso em análise. Como 3 é inferior a 6 pode-se responder à questão, afirmando que se encheram 5 caixas restando 3 objetos (que ficaram por embalar). Do ponto de vista da situação é possível decidir não embalar estes objetos ou então usar mais uma caixa ficando esta parcialmente ocupada. Do ponto de vista matemático diz-se que a divisão inteira de 33 por 6 tem quociente inteiro 5 e resto 3. Não pode afirmar-se que o quociente de 33 por 6 é 5 simplesmente, pois o uso da palavra quociente significa que é exato, o que não se verifica nesta situação. Se se aceitasse que 5 era o quociente de 33 por 6, deparar-se-ia com cenários absurdos como por exemplo que 30 e 33 representavam o mesmo número. Após a análise deste exemplo, proceda-se à generalização caracterizando a divisão inteira no conjunto dos números inteiros.

A operação divisão inteira definida no conjunto dos números inteiros não negativos, \mathbb{N}_0 , é uma operação (binária) que transforma cada par ordenado desses números (dividendo, divisor), (D, d) , com $d \neq 0$, num único par ordenado de números, (q, r) , em que q designa o quociente inteiro e r o resto.

À equação $D = d \times q + r$, com $0 \leq r < d$ chama-se *identidade fundamental da divisão inteira*.

Esta definição acolhe a de divisão como operação inversa da multiplicação no conjunto \mathbb{N}_0 , apresentada na subsecção anterior, o que é justificado pelo facto de a identidade fundamental se manter – $D = q \times d + 0$ – uma vez que D é múltiplo de d e o

resto é nulo. Pode chamar-se divisão exata a esta operação inversa da multiplicação e afirmar que na divisão exata em \mathbb{N}_0 , o quociente é um número natural e o resto é nulo, sendo assim um caso particular de divisão inteira.

A divisão inteira transforma um par ordenado de números num único par ordenado de números, par este cujo primeiro termo representa o quociente inteiro, q , e cujo segundo termo representa o resto inteiro r ; não se obtém, nunca, um único número; no caso da divisão exata, despreza-se o resto, para simplificar, uma vez que é nulo e que não gera qualquer mal entendido do ponto de vista matemático.

Em síntese, como ultrapassar a impossibilidade de, pela divisão exata se poderem resolver os casos em que o dividendo é maior que o divisor e não é múltiplo deste? Através da divisão inteira com resto que associa a cada par ordenado outro par ordenado e não um número apenas. A divisão inteira não é a operação inversa da multiplicação pois para um dividendo e um divisor nas condições aqui explicitadas – dividendo não múltiplo do divisor - o quociente (inteiro) não é solução inteira da equação $D = q \times d$. Esta equação é impossível em \mathbb{N}_0 .

Surgimento de número fracionário no contexto da divisão de inteiros

Já foram discutidos dois tipos de situações ligadas à divisão de números inteiros: aquela em que o dividendo era múltiplo, não nulo, do divisor e esta anterior em que o dividendo é maior, embora não múltiplo do divisor. Falta discutir o caso em que o dividendo é menor que o divisor e que é feito a seguir. Volte-se à igualdade $33 = 5 \times 6 + 3$ e considere-se o seu resto 3. Como este não é nulo, significa que 33 (ainda) não foi dividido exatamente por 6. Pode-se afirmar ainda que para responder a este impasse se pode procurar estudar como dividir este resto, 3, pelo divisor 6. A divisão como operação inversa da multiplicação não é solução, pois 3 não é múltiplo de 6. Será a divisão inteira um estratagema adequado? A igualdade $3 = 0 \times 6 + 3$, embora verdadeira de nada adianta. Realmente o quociente nulo traduz um não fracionamento do dividendo e conseqüentemente a manutenção do problema. A resposta a este problema é possível pela extensão a um novo conjunto numérico, que contém o conjunto \mathbb{N}_0 , da definição de divisão exata apresentada atrás e que pode ser expressa do seguinte modo:

D um número inteiro não negativo

d inteiro positivo ($d \neq 0$) e $D < d$

Define-se a divisão como sendo a operação que permite determinar o quociente

$q = \frac{D}{d}$, $d \neq 0$ de tal modo que q verifique a equação $q \times d = D$ e em que:

D representa o dividendo,

d o divisor

$\frac{D}{d}$ o quociente exato.

$\frac{D}{d}$ representa um exemplo de uma nova categoria de número, número fracionário

A esta representação $\frac{D}{d}$ chama-se fração própria.

Se o numerador for maior ou igual que o denominador pode afirmar-se que se trata de uma fração imprópria.

Esta caracterização da divisão de números inteiros permite agora afirmar que é possível efectuar a divisão de um número inteiro qualquer por um número não nulo.

Nos exemplos atrás estudados pode afirmar-se que o quociente de 3 por 6 é $\frac{3}{6}$ e que

o quociente de 33 por 6 é $\frac{33}{6}$.

Pode-se afirmar que um número racional é todo o número que se pode representar por uma fração cujos numerador e denominador representam números inteiros, mantendo a restrição de o denominador representar um número não nulo. Resulta assim que qualquer inteiro também é número racional.

A criação do número fracionário permitiu a construção de um conjunto numérico, campo racional que é o conjunto dos números racionais (não negativos representado por Q_0+). Este conjunto é a reunião dos conjuntos anteriormente invocados, IN_0 e o conjunto dos números fracionários.

O aparecimento deste novo conjunto numérico – Campo Racional - vai permitir efetuar as seguintes afirmações:

- Todo o número inteiro é racional.
- Todo o número fracionário é racional.

- Nenhum número inteiro é fraccionário.
- Nenhum número fraccionário é inteiro.
- Qualquer número racional é representável na forma de fracção.
- Os números racionais positivos e inferiores a 1 podem representar-se por fracções próprias.
- Os números racionais não inferiores a 1 podem ser representados por fracções impróprias ou por numerais mistos.
- Há fracções que representam números que não são racionais; por exemplo $\frac{\pi}{2}$.

Várias relações se podem estabelecer e discutir na análise comparativa destes dois conjuntos numéricos, Q_{0+} e IN_0 . Destaco as seguintes: (i) a densidade do conjunto dos números racionais Q_{0+} e (ii) os efeitos da multiplicação e da divisão tomando como universo este mesmo conjunto. Estas são duas diferenças estruturais importantes entre estes dois conjuntos numéricos.

A impossibilidade de dividir por zero

A definição da operação divisão em qualquer conjunto numérico exclui a possibilidade de o divisor ser nulo e portanto a fracção de denominador nulo não representa um número. Interprete-se esta impossibilidade explicitando as razões que a justificam. Recorde-se que atrás foi definida a divisão como sendo a operação que permite determinar o quociente

$$q = \frac{D}{d}, d \neq 0, \text{ de tal modo que } q \text{ verifique a equação } q \times d = D.$$

D representa o dividendo, d o divisor e $\frac{D}{d}$ o quociente exato. Raciocinando por absurdo veja-se que se o divisor pudesse ser nulo, então existiria um quociente q que satisfaria a equação $D = q \times 0$, para cada valor de D , nulo ou não nulo. Comece-se por este último, ou seja, D é não nulo e $d = 0$. Pela propriedade de zero ser elemento absorvente da multiplicação, o produto $q \times 0$ é obrigatoriamente nulo e se por exemplo se se supusesse que $D = 5$, obrigaria a que $0 = 5$, o que é absurdo e portanto é impossível a hipótese de que se partiu.

Se o dividendo e o divisor forem nulos, $D = 0$ e $d = 0$, pela definição de divisão ter-se-á, $0 = 0 \times q$ e qualquer valor atribuído a q seria candidato a quociente, o que é

impossível pois este tem de ser único. Demonstrou-se que é impossível dividir por zero.

A tabela seguinte apresenta resumidamente a caracterização matemática que fiz da divisão de inteiros.

Tabela 2: Divisão de números inteiros (divisor não nulo)

Relação de ordem entre o dividendo e o divisor	Divisão Inteira ($d \neq 0$)	Divisão Exata ($d \neq 0$)
$D \geq d$	$(D, d) \rightarrow (q, r)$ $D = q \times d + r,$ $r < d$	$\frac{D}{d}$ $q = \frac{D}{d},$ $q = 1, \text{ se } D = d$
$D < d$	$q = 0$ $r = D$	$\frac{D}{d}$ $q = \frac{D}{d}$ fração própria
$D = 0$	$q = 0$ $r = 0$	$\frac{0}{d}$ $q = \frac{0}{d} = 0$

Considerações finais

O propósito principal deste artigo é o de contribuir para a valorização do desenvolvimento do conhecimento matemático na formação inicial de professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico. Como vários autores argumentam, nomeadamente, Ma (1999), Ball (1990), Ball, Hill, & Bass (2005), o ensino requer uma compreensão profunda dos conceitos e procedimentos algorítmicos elementares em articulação com outras componentes, entre as quais destaco a didática.

O desenvolvimento do conhecimento necessário ao ensino dos Números Racionais conta já com outros contributos importantes, de natureza didática, nomeadamente relativos a alguns dos aspetos relacionados com os significados de fração como referem Monteiro & Pinto (2005). Há, no entanto, que prosseguir na produção e divulgação de materiais que aprofundem o conhecimento matemático de forma acessível a quem ensina nos 1.º e 2.º ciclos.

Na linha de argumentação de Shulman (1986) e de Ma (1999) procurei operacionalizar o aprofundamento matemático do sentido de número racional, especificamente através de uma abordagem da divisão de números inteiros como operação inversa da multiplicação, discutindo os impasses encontrados e fazendo emergir o conceito de número fracionário como meio de superação daqueles.

Espero ter dado um contributo no sentido da organização de materiais de apoio ao desenvolvimento do conhecimento necessário para o ensino da Matemática, especificamente no inerente ao âmbito da e sobre a Matemática.

Referências Bibliográficas

- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A Matemática na Formação Inicial de Professores*. Lisboa: APM.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Ball, D. L.; Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, Fall, 29(3), 14-46.
- Caraça, B. J. (2002). *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Lisboa: Gradiva. 4.^a ed.
- Davis, B., & Renert, M. (2009). Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 37-43.
- Davis, B. (2012). Subtlety and complexity of Mathematics teachers' disciplinary knowledge. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seul Disponível em: http://www.icme12.org/upload/submission/1947_F.pdf (acedido a 11 de novembro de 2012).
- Katz, V. J. (2010). *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. London: LEA
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-107.
- Serrazina, L. *et al.* (no prelo). O conhecimento matemático dos futuros docentes no início da licenciatura em educação básica: um projeto envolvendo três escolas superiores de educação. In *Atas do III Encontro Nacional de Educação Básica*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

