

## Desenvolvimento do conceito de ângulo: Um estudo no 5.º ano de escolaridade

**MARISA ISABEL BERNARDO**

Escola Básica 2,3 António Sérgio

[marisaisabelbernardo@hotmail.com](mailto:marisaisabelbernardo@hotmail.com)

**MARGARIDA RODRIGUES**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

[margaridar@eselx.ipl.pt](mailto:margaridar@eselx.ipl.pt)

### Resumo:

A investigação em curso visa compreender a influência da implementação de um conjunto de tarefas no desenvolvimento do conceito de ângulo em alunos do 5.º ano de escolaridade, procurando responder às seguintes questões: a) Que concepções revelam alunos do 5.º ano de escolaridade relativamente ao conceito de ângulo?; b) Que estratégias utilizam os alunos do 5.º ano de escolaridade na exploração das tarefas utilizadas?; e c) Que aspetos do conceito de ângulo são desenvolvidos pelos alunos através da realização das tarefas propostas? A presente comunicação incide na primeira questão do estudo.

Optou-se por uma abordagem metodológica qualitativa de paradigma interpretativo com a modalidade de experiência de ensino. Selecionou-se quatro alunos para constituir o grupo-alvo. Procedeu-se à avaliação diagnóstica das concepções de ângulo dos quatro alunos através da realização, no 1.º Período do ano letivo de 2011/12, de entrevistas clínicas semiestruturadas individuais, gravadas em vídeo. Além das entrevistas, foram usadas, como técnicas de recolha de dados, a observação participante das aulas, videogravadas, bem como a análise de documentos. Para analisar os dados, foram elaboradas categorias analíticas.

Os resultados relativos à avaliação diagnóstica evidenciam concepções erradas de ângulo e respetiva amplitude: (a) os ângulos são os lados de polígonos (1 aluna); (b) o comprimento dos segmentos representativos dos lados está relacionado com o tamanho dos ângulos (2 alunos); (c) o comprimento do arco marcando o ângulo está relacionado com o tamanho dos ângulos (3 alunos); (d) nos polígonos côncavos, são

ângulos apenas os de amplitude inferior a  $180^{\circ}$  (3 alunos); (e) em figuras que não são polígonos, os ângulos são os espaços entre os segmentos de reta e as linhas curvas (1 aluno); (f) o ângulo é a área entre dois segmentos representativos dos lados (4 alunos); e (g) os ângulos retos são apenas os posicionados na posição usual horizontal/vertical (1 aluna).

**Palavras-chave:** conceito de ângulo; concepções matemáticas; avaliação diagnóstica

**Abstract:** The ongoing research aims to understand the influence of the implementation of a set of tasks in the development of the concept of angle in 5th grade students, trying to answer the following questions: a) What conceptions of angle reveal 5th grade students?; b) What strategies do 5th grade students use in tasks exploration?; and c) What aspects of the concept of angle are developed by students through the realization of the proposed tasks? This communication focuses on the first question of the study.

We opted for a qualitative approach of interpretive paradigm with the use of teaching experiment. Four students were selected to constitute the target group. We did the diagnostic evaluation of angle conceptions of these four students by conducting videotaped individual semi-structured clinical interviews, in the 1<sup>st</sup> Period of 2011/12. Besides the interviews, we used the participant observation of videotaped classes and the analysis of documents, as techniques of data collection. To analyze the data, analytic categories were developed.

The results for the diagnostic evaluation reveal misconceptions of angle and of angle amplitude: (a) the angles are the polygon sides (1 student); (b) the length of the segments representing the angle sides is related to the size of the angles (2 students); (c) the arc length marking the angle is related to the size of the angles (3 students); (d) in the concave polygons, only the angles with amplitude less than  $180^{\circ}$  are considered as angles (3 students); (e) in figures that there are not polygons, the angles are the spaces between straight segments and curved lines (1 student); (f) the angle is the area between the two segments representing the angle sides (4 students); and (g) the right angles are only perceived when placed in the horizontal/vertical usual position (1 student).

**Keywords:** concept of angle; mathematical conceptions; diagnostic evaluation

## **Introdução**

O presente estudo visa compreender a influência da implementação de um conjunto de tarefas no desenvolvimento do conceito de ângulo em alunos do 5.º ano de escolaridade. Sendo o conceito de ângulo central na construção do conhecimento geométrico, e simultaneamente difícil de ser aprendido e ensinado, apesar de constituir um tópico elementar da Geometria, as investigações recentes incidentes no mesmo ajudam a informar as práticas na sala de aula, com vista a enfrentar os problemas de ensino e de aprendizagem deste conceito. Assim, este estudo pretende contribuir para o desenho de um percurso didático que aponte possibilidades para que o ensino do ângulo obtenha uma dimensão ampla e adequada na aprendizagem dos alunos, já que tradicionalmente, existe uma abordagem estática a esta noção, resumindo-se o seu ensino à mera apresentação da definição e uso de instrumentos de medida.

A avaliação diagnóstica das concepções de ângulo dos alunos, feita através de entrevistas clínicas individuais a quatro alunos, selecionados pela diversidade de desempenho académico, orientou a preparação de um conjunto de tarefas que foram implementadas por uma das autoras numa das suas turmas de 5.º ano, com vista a desenvolver nos alunos uma compreensão mais aprofundada do conceito de ângulo, partindo dos dados obtidos nessa avaliação. O artigo apresenta os resultados da avaliação diagnóstica realizada.

## **Avaliação diagnóstica das concepções de ângulo**

### **Concepções e tipos de avaliação**

A avaliação, enquanto componente do currículo, pode ser concebida de diversos modos consoante a conceção que se tenha de currículo, tendo sido objeto de diversas conceptualizações durante o seu período breve de existência, no último século. Com efeito, a avaliação tem sofrido uma evolução, ao longo dos últimos tempos, no modo como é perspectivada e até operacionalizada, sendo possível identificar uma conceção: (i) técnica e instrumental, centrada em produtos, a partir de meados do séc. XIX, em

que a avaliação é vista como uma medida; (ii) de congruência entre os objetivos e os desempenhos dos alunos, nos anos 40; (iii) de julgamento de especialistas; e (iv) de interação social complexa, a partir dos anos 90, sendo esta uma concepção mais ampla, centrada nos processos, em que a avaliação é encarada como inscrita numa prática social, dinâmica e relacional com múltiplos significados, sejam de índole cultural, pedagógica ou política (Pinto e Santos, 2006).

O modelo de congruência é assumido por Tyler (1949), consistindo na verificação de resultados, através do confronto dos mesmos com o que se previa e que estava estabelecido nos objetivos definidos previamente. Esta concepção prescritiva de avaliação sofreu fortes críticas por não contemplar os resultados não previstos inicialmente nem fornecer informações que fundamentassem a tomada de decisões. No início da década de 70, surgem os primeiros sinais de uma mudança de paradigma, de uma avaliação prescritiva para uma avaliação 'iluminativa' (Parlett, 1975), colocando a ênfase na interpretação, na natureza qualitativa da avaliação que, por sua vez, visa a construção de modelos explicativos dos sistemas específicos em causa. Como defensores desta última corrente, encontramos Stenhouse (1981), ao sustentar que a avaliação deve integrar o desenvolvimento curricular ao iluminar e guiar o respetivo processo, e Sacristán (2000), que refere que a avaliação que enfatize o currículo contribui para a transformação do mesmo no curso do seu desenvolvimento dentro das condições escolares.

As diferentes funções da avaliação -- regulação dos processos de ensino e de aprendizagem; certificação; e seleção e orientação -- determinam diferentes modos de analisar os dados recolhidos, sustentados pelos diversos tipos de decisões que lhes são inerentes, e encontram-se associadas, respetivamente, aos diversos tipos de avaliação: formativa, certificativa e diagnóstica (Pinto e Santos, 2006).

Partilhando da perspetiva de avaliação como interação social e assumindo a dimensão pedagógica da avaliação, encaramos a avaliação diagnóstica, realizada no início do processo de ensino e de aprendizagem, como um tipo de avaliação que tem por função orientar a ação do professor. Este tipo de avaliação comporta quer a dimensão

de diagnóstico, quer a de prognóstico, e ambas as dimensões sustentam as decisões do professor de seleção e de orientação "em função de uma antecipação do futuro próximo do aluno em termos das suas competências para prosseguir determinados níveis de estudo subsequentes" (Pinto & Santos, 2006, p. 45).

Assim, a avaliação diagnóstica das concepções de ângulo realizada numa fase inicial do ensino dos ângulos pode permitir a elaboração de tarefas que visem o desenvolvimento nos alunos de aspetos conceptuais importantes relativos ao ângulo, partindo do modo concreto como os mesmos conceptualizam este objeto matemático. Tarefas construídas com base no conhecimento do professor das noções dos seus alunos poderão estimular nestes a transformação de concepções erradas em concepções fundadas numa compreensão mais aprofundada das propriedades inerentes aos diversos conceitos geométricos. Em suma, a avaliação diagnóstica visa

recolher informação que permite ao professor antecipar com a maior clarividência possível sobre a aprendizagem dos alunos e em segundo lugar reportar a progressão e os resultados das actividades precedentes, não para controlar o domínio dos conteúdos, mas sim para justificar as suas decisões de planificação. (Kraemer, 2008, p. 26)

### **Concepções de ângulo**

Nos últimos tempos, tem vindo a estabelecer-se que o conceito de ângulo é multifacetado. Três classes da definição de ângulo surgem frequentemente na revisão da literatura: (a) a união de duas semirretas com a mesma origem; (b) a região formada pela interseção de dois semiplanos; e (c) uma rotação, operação que transforma uma semirreta noutra semirreta com a mesma origem (Mitchelmore & White, 2000). Outros autores têm preferido basear a sua classificação noutras propriedades do ângulo, observando, em particular, a diferença entre os aspetos dinâmico e estático do conceito (Close; Kieran; Scally, citados por Mitchelmore & White, 2000). Ressalta assim, que o conceito de ângulo é um conceito geométrico complexo e que depende do contexto em que é trabalhado, sendo esta uma das razões para a dificuldade dos alunos na sua conceptualização (Mitchelmore & White 1998; Matos, 1999).

De acordo com Bryant (2009), no processo de construção do conceito de ângulo, os alunos têm grande dificuldade em coordenar as várias facetas deste conceito e possuem uma variedade de concepções erradas, originando grandes obstáculos para a sua compreensão. No nosso quotidiano, experimentamos ângulos em muitos contextos diferentes e à partida não será fácil para as crianças relacionarem os ângulos encontrados em diferentes formas, sendo que algumas representações são mais compreensíveis que outras. Por exemplo, muitas vezes os ângulos são formados pelo encontro de duas linhas nítidas, como o canto de uma mesa, enquanto noutros, o ângulo é representado apenas por uma linha, como a inclinação de uma colina, em que uma linha é a própria colina e a outra é uma linha horizontal imaginária (Bryant, 2009).

Tendo em conta os níveis de Van Hiele (Hiele, 1999), e no caso do desenvolvimento do conceito de ângulo, segundo Wilson e Adams (1999), as crianças primeiro olham para os ângulos de uma forma holística. Assim que começam a reconhecer ângulos, os alunos reparam que um triângulo tem três ângulos, mas não se focalizam em nenhuma propriedade particular desses ângulos. Mais tarde, compreendem que a amplitude de um ângulo pode ser menor ou maior que a de um ângulo reto e começam a identificar propriedades e relações entre ângulos. O passo seguinte de desenvolvimento é trabalhar com essas relações, como por exemplo: um triângulo não pode ter mais que um ângulo obtuso porque os três lados têm que formar uma figura fechada.

Outros estudos realizados por diferentes autores apontam vários equívocos e mal-entendidos que existem no pensamento das crianças quando lidam com o conceito de ângulo. Matos (1999), num estudo que efetuou com alunos do 4.º ano e 5.º ano, identificou uma série de respostas “incorretas” para as questões de ângulo, como por exemplo: no reconhecimento de ângulos retos, agudos e obtusos em outras orientações que não a vertical/horizontal; concepção de ângulo como a área entre dois segmentos representativos dos lados; na identificação de ângulos com  $180^{\circ}$  e  $360^{\circ}$ ; na identificação de ângulos incorporados em diferentes tipos de figuras (os alunos reconhecem ângulos em lados curvos de uma figura e reconhecem melhor ângulos convexos do que ângulos côncavos); dificuldade em reconhecer um ângulo obtuso

como ângulo; imagem mental de ângulo é de ângulo reto e ângulo agudo; metaforicamente, os ângulos são pensados como letras, utilizando os símbolos “L” e “V”; na relação entre ângulos e voltas (alguns alunos fazem associações ao círculo e não realizam um quarto de volta ou com menos de  $90^0$ ). Estes resultados são convergentes com estudos de outros autores (Owens, 1998; Keiser, 2000; Magina & Hoyles, 2007; Fyhn, 2007; Munier & Merle, 2009). Também é referido que os alunos tendem a pensar que o comprimento dos segmentos representativos dos lados (semirretas) está relacionado com a amplitude do ângulo (Mitchelmore & White, 1998; Wilson & Adams, 1999; Fyhn, 2007; Munier & Merle, 2009). Em suma, o ângulo é um conceito complexo, podendo ser definido em vários contextos, e os alunos apresentam dificuldades na construção deste conceito.

### **Abordagem metodológica**

Este estudo segue uma abordagem metodológica qualitativa de paradigma interpretativo com a modalidade de experiência de ensino. Optou-se por esta abordagem porque se enquadra num tipo de investigação onde se pretende conhecer profundamente as conceções dos quatro alunos em particular e também porque é utilizada quando se procura descrever ou obter determinada explicação interpretativa sobre alguma situação ou fenómeno educacional (Erickson, 1986).

Para a seleção dos participantes no estudo, privilegiou-se a escolha de alunos do 5.º ano de escolaridade do ensino básico, com aproveitamento geral diversificado e com uma atitude positiva em relação à escola. Seguindo estas orientações, selecionou-se quatro alunos de uma turma (a Isabel com aproveitamento fraco, o Rui e o Pedro, médio, e a Luísa, bom), cuja professora de Matemática desempenhou simultaneamente o papel de investigadora.

Tendo como objetivo o de recolher informação sobre as conceções dos alunos sobre o conceito de ângulo, procedeu-se a uma avaliação diagnóstica através da realização, no 1.º Período do ano letivo de 2011/2012, de entrevistas individuais, clínicas e semiestruturadas. Para Pires et al., citados por Moreira e Dominguez (1993) “a entrevista clínica é apenas um método de avaliação, mais especificamente, uma

técnica ou uma ferramenta por meio da qual se pode gerar dados com propósitos de avaliação” (p. 19). Procurou-se, assim, detetar preconceções existentes sobre o conceito de ângulo, com o propósito de utilizar os dados obtidos para a preparação de um conjunto de tarefas que levasse em conta tais conceções e procurasse facilitar a mudança conceptual.

Na entrevista clínica, é fixada uma hipótese à partida. Colocando o entrevistado na situação que corresponde a essa hipótese, o investigador suscita da parte dele a revelação de indícios e de informações que visam elucidar o problema colocado. (...) Trata-se, portanto, de um jogo de ações e de respostas, que, caso a entrevista seja bem orientada, conduzirá à elucidação do problema e à confirmação, ou não, da hipótese. (Pourtois & Desmet, citados por Lessard-Hebert, Goyette & Boutin, 1990, p. 164)

As entrevistas foram, assim, conduzidas através de um guião onde se encontravam uma série de questões, elaboradas com base em hipóteses decorrentes da revisão de literatura efetuada, e que foram sendo exploradas mediante as respostas orais e escritas dadas pelos alunos, bem como os seus gestos, com o intuito da investigadora compreender as conceções que os alunos apresentavam relativamente ao conceito de ângulo. A construção de algumas questões da entrevista foi baseada nos testes apresentados por Matos (1999). As entrevistas foram gravadas em vídeo e ocorreram em salas da escola onde se desenrolou o estudo. Após a sua realização, foram transcritas e os dados foram trabalhados, procedendo-se à elaboração de categorias analíticas com o objetivo de responder à questão apresentada neste artigo.

## **Análise e discussão dos resultados**

### *Representação de ângulo*

Ao ser-lhes proposto desenhar dois ângulos diferentes, todos os alunos desenharam um ângulo reto e um ângulo agudo, à exceção da Isabel que desenhou figuras geométricas (figura 1), identificando como ângulos os lados das figuras, como se pode verificar no extrato transcrito em baixo.



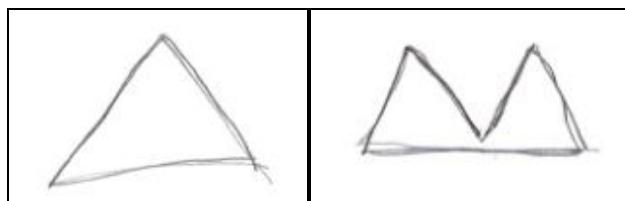


Figura 1 - Lados de figuras geométricas como representação de ângulos, pela Isabel

Inv.: (...) o que a professora te pede aqui é que tu desenes um ângulo qualquer.

Isabel (aluna): Posso desenhar um triângulo?! (*Afirmo com a cabeça que sim*)

Inv.: Então, tens aí um ângulo? (*A Isabel não responde*) Tens um ângulo?

Isabel: Não, tenho três!

Inv.: Então, diz-me lá quais são.

Isabel: É este.... (*Aponta com o dedo um dos lados do triângulo*)

Inv.: Podes marcar! Marca com o lápis o que tu dizes quais são os ângulos!

Isabel: É este....este e este.... (*Indica os três lados do triângulo*)

Pode-se assim inferir que dos quatro alunos entrevistados, três usam representações (desenhos) de exemplos prototípicos de ângulo e um não desenhou ângulos, tendo desenhado figuras geométricas. Mas o Rui representou o ângulo agudo não posicionado na posição usual horizontal/vertical (figura 2).



Figura 2 – Representação de um ângulo reto e de um ângulo agudo não posicionado na posição usual horizontal/vertical, pelo Rui

#### *Identificação de ângulos incorporados em diferentes tipos de figuras*

Na questão 4 do guião, era proposto assinalar ângulos em diferentes tipos de figuras: polígonos convexos, polígonos côncavos e figuras fechadas com linhas curvas. A Isabel identificou como ângulos, em todas as figuras, os segmentos de reta que as limitam, não assinalando como ângulo a linha curva de uma das figuras (figura 3).

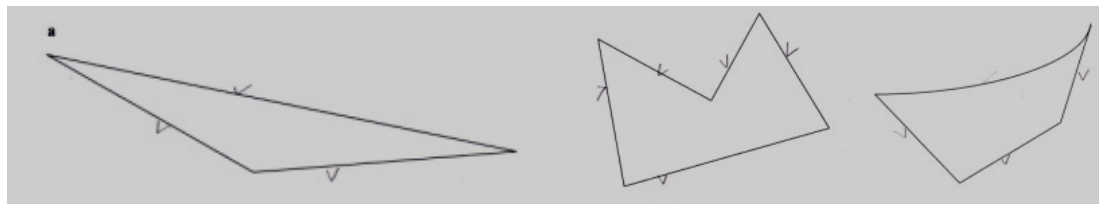


Figura 3 – Identificação, como ângulos, dos segmentos de reta que limitam as figuras, pela Isabel

Inv.: (...) vais marcar os ângulos que encontras nesta figura com a letra “v”.

*(A Isabel assinala os segmentos de reta que limitam as figuras)*

(...)

*(A Isabel na figura fechada com uma linha curva, assinala-a como ângulo, mas depois apaga)*

Inv.: Então, porque é que marcaste e depois decidiste que não era?

Isabel: Este está assim! *(Com o dedo contorna a linha curva da figura)*

Inv.: É uma linha?

Isabel: Curva!

No polígono convexo, os outros três alunos identificaram corretamente os ângulos, não se verificando o mesmo na identificação do ângulo interno de amplitude superior a  $180^{\circ}$  no polígono côncavo (figura 4): o Rui e a Luísa não o assinalaram e o Pedro, apesar de ter assinalado, no polígono, o ângulo interno superior a  $180^{\circ}$ , referia-se ao ângulo exterior (figura 5):

Inv.: E aqui? *(Refiro-me ao polígono côncavo)* Tu colocaste o “v” aqui! *(Aponto para o ângulo interno superior  $180^{\circ}$ )* Onde está o ângulo?

Pedro: É este e este! *(O aluno com o dedo contorna os lados dos ângulos internos que têm um dos lados comum ao ângulo interno superior a  $180^{\circ}$ )*  
E também dá para fazer um assim... *(O aluno com o lápis contorna os lados do ângulo interno superior a  $180^{\circ}$ , mas aponta para o ângulo externo)*

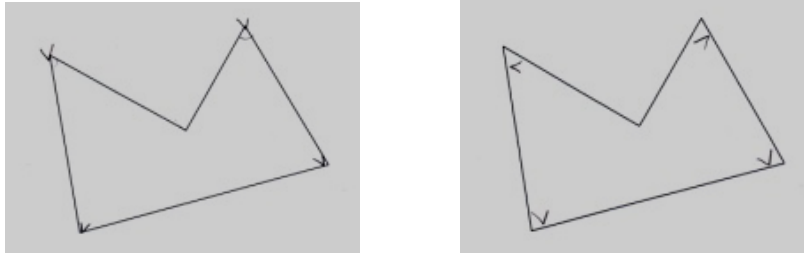


Figura 4 – Identificação dos ângulos no polígono côncavo, pelo Rui e pela Luísa, respectivamente

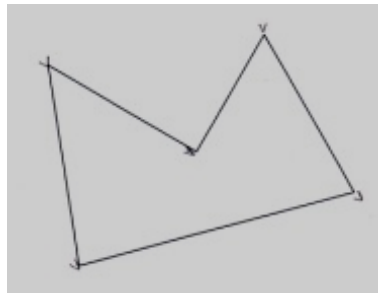


Figura 5 – Identificação dos ângulos no polígono côncavo, pelo Pedro

Nas figuras não-polígonos, a Luísa identificou corretamente, os ângulos existentes, não assinalando como ângulo o espaço entre um segmento de reta e uma linha curva (figura 6), ao contrário do Rui (figura 7).

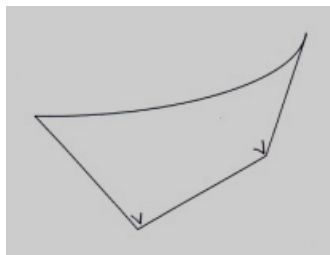


Figura 6 – Identificação correta dos ângulos em figuras não polígonos, pela Luísa

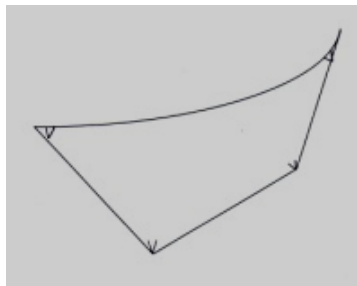


Figura 7 – Identificação incorreta dos ângulos em figuras não polígonos, pelo Rui

O Pedro referiu que para formar ângulos “tem de ser linhas retas”, mas assinalou como ângulo o espaço entre um segmento e uma linha curva, parecendo que percecionava o início da linha curva como reto (figura 8).

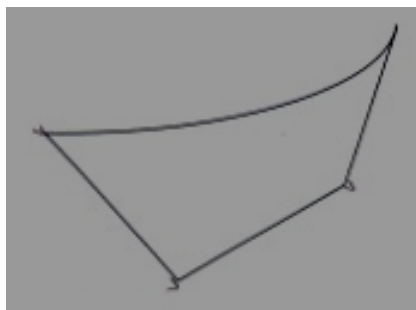


Figura 8 – Identificação dos ângulos em figuras não polígonos, pelo Pedro

À exceção da Isabel, que identificou incorretamente todos os ângulos nas diferentes figuras, o Rui, o Pedro e a Luísa identificaram de forma correta os ângulos inferiores a  $180^\circ$  nos polígonos convexos e côncavos. Nas figuras não-polígonos, só a Luísa identificou corretamente os ângulos existentes.

#### *Conceção de amplitude de ângulo*

Quando lhes foi proposto rodear os ângulos de maior amplitude, o Pedro e a Isabel assinalaram os ângulos que apresentavam os maiores segmentos representativos dos lados, a partir do critério de que a amplitude do ângulo aumenta com o comprimento dos segmentos representativos dos seus lados (Figura 9). Nas justificações às opções feitas, o Pedro referiu que as “arestas” são maiores e a Isabel, “estas linhas estão maiores”.

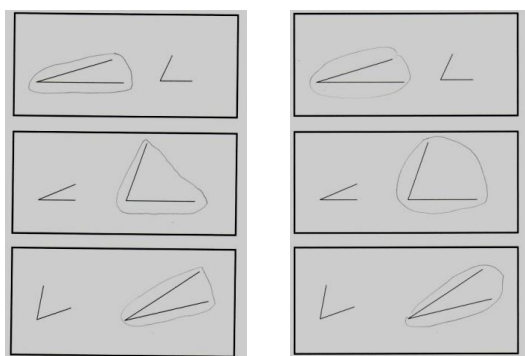


Figura 9 – Identificação dos ângulos de maior amplitude, pelo Pedro e pela Isabel, respetivamente

O Rui e a Luísa identificaram corretamente os ângulos de maior amplitude, fazendo até uma estimativa da sua amplitude (Figura 10). A Luísa referiu: “é um ângulo agudo e tem menos que  $90^{\circ}$ , mas este (*aponta para o 2.º ângulo da 1.ª caixa*) é quase um ângulo de  $90^{\circ}$ , mas tem mais...”.

Rui: Porque tem mesmo quase os  $90^{\circ}$  certinhos e este aqui não tem e também há a percentagem de ângulo. (*Na primeira caixa*)

Inv.: O que queres dizer com isso? Percentagem de ângulo?

Rui: Tem maior abertura e este não.

(...)

Rui: (...) e o ângulo deste aqui (*aponta para o ângulo da direita da segunda caixa*) está nos 85 por aí e este (*aponta para o ângulo da direita da primeira caixa*) em 65 e 70.

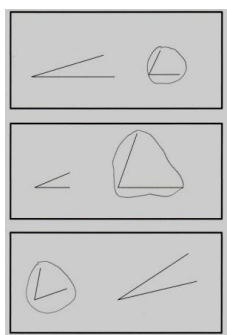


Figura 10 – Identificação correta dos ângulos de maior amplitude, pelo Rui

Na questão 11 do guião, era proposto aos alunos que rodeassem o ângulo de maior amplitude. Nesta questão, os ângulos estavam marcados com arcos de comprimentos diferentes. Apenas a Luísa identificou corretamente o ângulo com maior amplitude, referindo: “Escolhi este porque este tem o ângulo (*pausa*) os graus maiores do que este. Se nós formos a ver este está mais fechado e este aqui é mais aberto” (Figura 11).

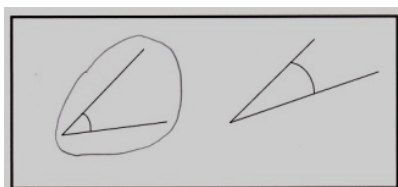


Figura 11 – Identificação correta do ângulo de maior amplitude, pela Luísa

Os outros três alunos identificaram incorretamente o ângulo com maior amplitude. A Isabel identifica o ângulo com maior amplitude a partir do critério de que a amplitude do ângulo aumenta com o comprimento dos segmentos representativos dos seus lados, ignorando os arcos. O Rui e o Pedro identificaram o ângulo maior como aquele que tem o arco com maior comprimento, fazendo referência ao espaço que compreende o arco.

Inv.: Agora é te pedido que rodeies o maior ângulo?

*(O aluno assinala o segundo ângulo)*

Inv.: Porque é que escolheste esse?

Rui: Porque está mais fechado e este tem um ângulo maior! *(Aponta para o segundo ângulo da caixa)*

Inv.: Qual é o ângulo que te estás a referir?

Rui: A este! *(Aponta para o segundo ângulo)*

Inv.: E aquele? *(Aponta para o primeiro ângulo)*

Rui: É mais pequeno!

Pedro: Este é o que tem mais dimensão, maior! *(Aponta para o segundo ângulo da caixa)* E dá para meter o ângulo mais...mais pa [sic] cá! Este aqui não dá assim tão bem!

Inv.: Dá para pôr o quê mais para cá? Explica lá essa tua ideia!

Pedro: Dá para meter.... O ângulo é maior aqui...o ângulo aqui está maior que este. *(Aponta o espaço que compreende o arco)*

Deste modo, dos quatro alunos, apenas a Luísa identificou corretamente os ângulos com maior amplitude e o Rui e o Pedro identificaram como maiores aquele que tem o arco com maior comprimento, considerando que se se alterar a posição do arco desenhado, também se altera o ângulo e a sua amplitude. Quer o Pedro quer a Isabel identificam como ângulos com maior amplitude aqueles cujo comprimento dos segmentos representativos dos seus lados são maiores.

### Conceção de ângulo

Na questão 7 do guião, era proposto aos alunos que circundassem os pontos inseridos no interior de ângulos. Todos os alunos circundaram apenas os pontos inseridos na área entre os segmentos representativos dos lados (Figura 12). No primeiro ângulo rodearam os pontos E e F e no segundo ângulo rodearam os pontos G e F, à exceção da Luísa que rodeou também os pontos A e B.

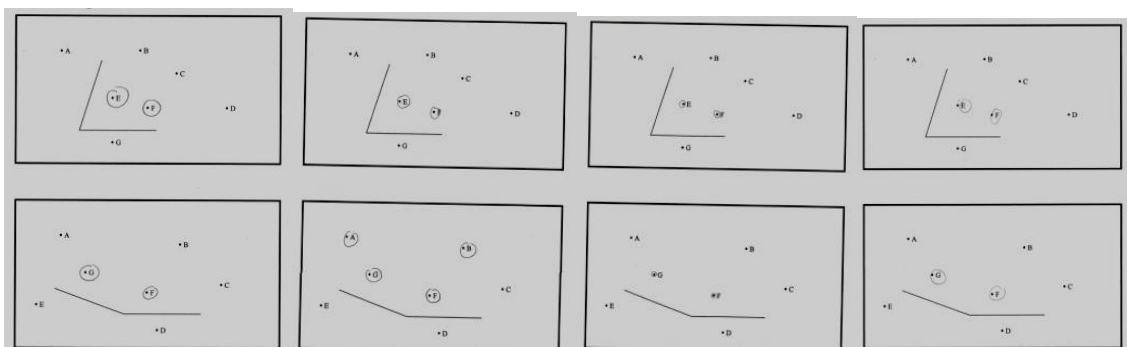


Figura 12 – Identificação dos pontos inseridos no interior de um ângulo, pelo Rui, pela Luísa, pelo Pedro e pela Isabel, respetivamente

O Rui diz que “o B e o C já estão um bocado mais afastados”; o Pedro, no segundo ângulo, refere que “se nós fizermos assim (*movimenta o lápis de forma a imaginar-se um terceiro segmento que une os outros dois segmentos*) eles estão cá dentro, eles ficam cá dentro.”. A Luísa chega a rodear no primeiro ângulo o ponto B, mas depois apaga, e quando questionada sobre o que fez, diz: “Porque o ângulo se fosse maior...se continuasse assim um bocadinho mais para cima (...) estas linhas mais para a frente, o B, o pontinho B, ia estar dentro!” (*com o dedo faz o gesto do prolongamento do segmento representativo de um dos lados do ângulo*). No segundo ângulo, a Luísa refere: “o F porque está aqui no meio (*aponta com o dedo para o interior do ângulo*), o B também e o G também. O A não está bem dentro do ângulo, mas ainda está...está quase fora do ângulo. Os outros estão lá dentro (*referindo-se aos que rodeou*)”.

O desempenho dos alunos evidencia que os mesmos conceberam o ângulo como uma superfície finita, isto é, como a área interior entre os dois segmentos representativos

dos lados, imaginando o fechamento dessa superfície, formando um triângulo, tal como representado na Figura 13.

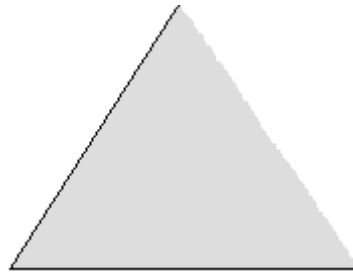


Figura 13 – Concepção de ângulo como uma área limitada pelos segmentos representativos dos lados

Nenhum dos alunos teve a ideia de poder prolongar infinitamente os segmentos, sendo que, conceptualmente, não encararam os lados dos ângulos como semirretas. A Luísa, quando o faz, com gestos, é para justificar o que não circundou. A Luísa evidencia ter considerado para o ângulo obtuso toda a área delimitada por linhas imaginárias verticais a partir dos extremos dos segmentos representativos dos lados, tal como representado na Figura 14. Das respostas dos alunos também se pode inferir que apenas têm como referência os ângulos convexos, pois nenhum aluno colocou a hipótese dos pontos A, G (no ângulo agudo), e E e D (no ângulo obtuso) pertencerem ao ângulo côncavo.



Figura 14 – Concepção de ângulo com um interior limitado, pela Luísa.

#### *Constância percetual*

Quando lhes foi proposto que circundassem os ângulos retos de entre um conjunto de ângulos representados numa malha quadriculada, o Rui e a Luísa (figura 15)



identificaram corretamente três, e o Pedro e a Isabel, dois (Figura 16), de entre os quatro ângulos retos, apresentados em diferentes posições.

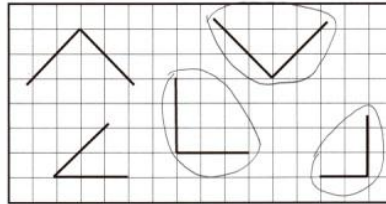


Figura 15 – Identificação de ângulos retos em diferentes posições, pela Luísa

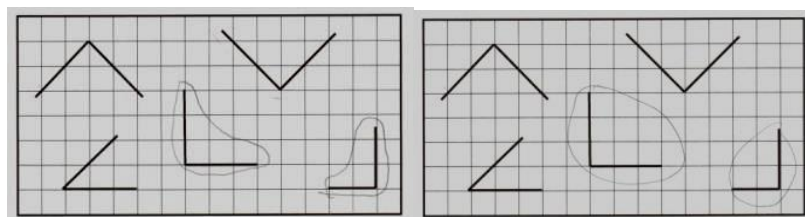


Figura 16 – Identificação de ângulos retos, pelo Pedro e pela Isabel, respetivamente

O Pedro, tal como a Luísa, movimentou a folha de papel, antes de assinalar os ângulos. Indicou apenas dois ângulos como retos, mas chegou a assinalar um terceiro ângulo que acabou por apagar e, ao justificar as suas escolhas, referiu que se pudesse mover a folha de papel, só um ângulo é que não seria reto.

Inv.: Então não é?

Pedro: Não!

Inv.: Porque é que no início estavas a rodear?

Pedro: Porque eu tava [*sic*] a vê-lo assim (*move a folha de papel*) e depois vi que era melhor vê-lo assim e não era...

Inv.: Então tens que ter sempre a folha direita?

Pedro: Sim, eu acho que é isso! Mas se pudermos vermos de todas as maneiras são quase todos, menos este (*indica o ângulo agudo*).

O Rui e a Luísa revelam alguma constância percetual relativamente ao ângulo reto. O Pedro não reconhece facilmente os ângulos retos não posicionados na posição usual

horizontal/vertical e a Isabel identificou apenas os ângulos retos representados na posição prototípica.

## **Conclusão**

Um dos objetivos deste estudo foi o de recolher informação sobre as concepções dos alunos sobre o conceito de ângulo, procedendo-se a uma avaliação diagnóstica para compreender que concepções apresentavam relativamente a este conceito. Os alunos utilizam representações de exemplos prototípicos de ângulos (reto e agudo) e nenhum representa um ângulo obtuso, dando evidências de possuírem a imagem mental de ângulo correspondendo ao ângulo reto e ângulo agudo, sendo que um aluno (Rui) pensa metaforicamente nos ângulos como as letras “L” e “V” (Matos, 1999). Apresentam, ainda, dificuldades em assinalar ângulos em diferentes tipos de figuras, tal como nos estudos efetuados por Owens (1998), Keiser (2000) e Matos (1999). A principal dificuldade detetada foi na identificação do ângulo interno de amplitude superior a  $180^{\circ}$  no polígono côncavo, onde nenhum dos alunos o assinalou. Na figura não-polígono, apenas um aluno identificou corretamente os ângulos existentes. As respostas dos alunos indicam que para eles, os ângulos só podem ser concebidos no interior das figuras. Na questão proposta para rodear os ângulos de maior amplitude, também aqui, as respostas de dois alunos convergem com um dos equívocos mais comuns e mencionado por diversos autores (Mitchelmore & White, 1998; Wilson & Adams, 1999; Fyhn, 2007; Munier & Merle, 2009): um “ângulo pequeno” tem lados curtos e um “ângulo grande” tem lados longos, ou seja, a concepção de que o comprimento dos segmentos representativos dos lados (semirretas) está relacionado com a amplitude do ângulo. Também o comprimento do arco que marcava os ângulos foi concebido como estando relacionado com a amplitude dos ângulos, por dois alunos. Na questão para circundar os pontos inseridos no interior de ângulos, os alunos evidenciam que concebem o ângulo como uma superfície finita, isto é, como a área interior entre os dois segmentos representativos dos lados, tal como aconteceu nos estudos de Matos (1999) e Keiser (2000). Das respostas dos alunos a esta questão

e à questão para assinalar ângulos em diferentes tipos de figuras, pode-se inferir que apenas têm como referência os ângulos convexos. Os alunos apresentam dificuldades no reconhecimento de ângulos retos, agudos e obtusos em outras orientações que não a vertical/horizontal (tal como em Matos, 1999; Fynh, 2007): um aluno não reconheceu facilmente os ângulos retos não posicionados na posição usual horizontal/vertical e a Isabel identificou apenas os ângulos retos representados na posição prototípica. É ainda de salientar que a aluna Isabel, ao longo da entrevista, indicou frequentemente como exemplos de ângulos, os segmentos de reta que formam diferentes tipos de figuras. Os resultados relativos à avaliação diagnóstica evidenciam assim conceções erradas de ângulo e respetiva amplitude, confirmando os estudos realizados por diferentes autores que apontam para vários equívocos existentes no pensamento das crianças sobre este conceito geométrico.

## Referências

- Bryant, P. (2009). Understanding space and its representation in mathematics. Key understandings in mathematics learning. Paper 5, 1-40. Nuffield Foundation Website. Consultado em [www.nuffieldfoundation.org](http://www.nuffieldfoundation.org)
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.
- Fyhn, A. B. (2007). Angles as tool for grasping space: Teaching of angles based on students' experiences with physical activities and body movement (Dissertação de doutoramento). Munin open research archive. Consultado em <http://munin.uit.no/handle/10037/994?language=no>
- Hiele, P. M. van (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310-316.
- Keiser, J. M. (2000). The role of definition. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(8), 506-511.
- Kraemer, J. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. Em J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.
- Lessard-Hebert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

- Magina, S. & Hoyles, C. (1997). Children's understandings of turn and angle. Em T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 99-114). Hove (UK): Psychology Press.
- Matos, J. M. L. (1999). Cognitive models for the concept of angle (Dissertação de doutoramento). Lisboa: APM.
- Mitchelmore, M. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.
- Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4-27.
- Moreira, M. A. & Dominguez, M. E. (1993). A entrevista clínica como técnica de pesquisa em ensino. Em M. A. Moreira e F. L. Silveira (Eds.), *Instrumento de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem* (pp. 9-30). Porto Alegre: EDIPUCRS.
- Munier, V. & Merle, H. (2009). Interdisciplinary mathematics-physics approaches to teaching the concept of angle in elementary school. *International Journal of Science Education*, 31(14), 1857-1895.
- Owens, K. (1998). Developing the angle concept through investigations. Mathematics Education. Research Group of Australasia (MERGA) Web site. Consultado a 28 de dezembro de 2011, em [http://www.merga.net.au/documents/RP\\_Owens\\_1998.pdf](http://www.merga.net.au/documents/RP_Owens_1998.pdf)
- Parlett, M. (1975). Evaluation innovation in teaching. Em M. Golby & J. G. West (Eds.), *Research unit on intellectual development* (pp. 414-424). London: Croom Helm e Open University Press.
- Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)
- Stenhouse, L. (1981). *An introduction to curriculum research and development*. London: Heinemann Educational Books Ltd.
- Tyler, R. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Wilson, P. S. & Adams V. M. (1999). A dynamic way to teach angle and angle measure. *Activities for Junior and Middle School Mathematics*, 2, 336-342.