



**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**

**Departamento de Engenharia Mecânica**

**ISEL**



## **Localização Ótima de Apoios em Estruturas do Tipo Viga Utilizando o Método dos Algoritmos Genéticos**

**DIÓGENES PATRÍCIO MITANGE LOUREIRO**  
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação de Mestrado para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Mecânica - Ramo de Manutenção e Produção

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Mestre Tiago Alexandre Narciso da Silva

Júri:

Presidente: Doutor João Carlos Quaresma Dias  
Vogais: Doutora Inês de Carvalho Jerónimo Barbosa  
Doutora Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho  
Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Mestre Tiago Alexandre Narciso da Silva

**Dezembro de 2013**



# **Localização Ótima de Apoios em Estruturas do Tipo Viga Utilizando o Método dos Algoritmos Genéticos**

**DIÓGENES PATRÍCIO MITANGE LOUREIRO**  
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação de Mestrado para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Mecânica - Ramo de Manutenção e Produção

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Mestre Tiago Alexandre Narciso da Silva

Júri:

Presidente: Doutor João Carlos Quaresma Dias  
Vogais: Doutora Inês de Carvalho Jerónimo Barbosa  
Doutora Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho  
Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Mestre Tiago Alexandre Narciso da Silva



**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**  
**Lisboa**

**2013**



# Agradecimentos

O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito do Projeto FCT Ref.: PTDC/ATP-AQI/5355/2012, “ReabOp - Otimização de fluxos de trabalho de documentação em reabilitação de estruturas construídas”, cujo apoio se agradece.

Pelo apoio direto ou indireto gostaria de agradecer a várias pessoas:

A minha esposa e filho por terem pacientemente cedido parte do tempo e dedicação que lhes era reservado.

A minha orientadora Doutora Maria Amélia Loja, pelos conselhos, disponibilidade e esforço em auxiliar a colocar-me no caminho certo para a conclusão deste trabalho.

Ao orientador Mestre Tiago Silva, a paciência em ceder a sua experiência ao longo do desenvolvimento do trabalho.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.



# Resumo

Este trabalho pretende determinar a melhor localização dos apoios de diferentes vigas, que permita minimizar a respetiva deformada transversal máxima.

Para este efeito é utilizada a técnica dos algoritmos genéticos, em que a expressão da deformada transversal definida através das equações universais se constitui como função objetivo. Considerando como variáveis de projeto, as abcissas associadas às localizações dos apoios, esta função objetivo vai evoluindo ao longo do processo de otimização.

Complementarmente é ainda realizado um estudo comparativo entre algumas variantes dos operadores genéticos de seleção, de cruzamento e mutação.

A codificação deste método de otimização é feita com recurso a um programa de computação simbólica (Maple) e a sua aplicação é desenvolvida e exemplificada neste trabalho para diferentes casos de estudo.

**Palavras-chaves:** Localização ótima de apoios em vigas; Equações Universais; Algoritmo Genético; Operadores genéticos.





# Abstract

This study aims to determine the best location of the supports of different beams, which minimizes its maximum transverse deformed.

To this effect is used the technique of genetic algorithms, in which the expression of the transverse deformed defined by the universal equation is established as the objective function. Considering the design variables associated with the locations of the supports, this objective function evolves along the optimization process. Complementarily it's also performed a comparative study between some variants of genetic operators of selection, crossover and mutation.

The coding of this optimization method is done using a symbolic computation program (Maple) and their application is developed and exemplified in this work for different case studies.

**Keywords:** Optimal locations of supports on beams; Universal Equations; Genetic Algorithm; Genetic Operators.



*“...Basta a cada dia o seu próprio mal.”*  
*Mat. 6:34*



# Lista de Símbolos

$A$	Área de secção transversal	$[m^2]$
$b$	Grau de não uniformidade	$[-]$
$C_1$	Constante de integração para a flexão	$[-]$
$C_2$	Constante de integração para a rotação	$[-]$
$d_i$	Posição dos apoios na viga	$[m]$
$\underline{d}$	Limite inferior do gene	$[m]$
$\overline{d}$	Limite superior do gene	$[m]$
$E$	Módulo de elasticidade (Módulo de Young)	$[GPa]$
$F$	Força concentrada aplicada	$[N]$
$I$	2º Momento de área	$[m^4]$
$iga$	Número de gerações ou de iterações	$[-]$
$l$	Comprimento da viga	$[m]$
$maxit$	Máximo número de iterações	$[-]$
$M_i$	Momento concentrado aplicado	$[N \cdot m]$
$M_f$	Momento fletor	$[N \cdot m]$
$m$	Número de indivíduos na população	$[-]$
$N_{keep}$	Número de indivíduos sobreviventes	$[-]$
$n$	Número de variáveis de projeto	$[-]$
$n_i$	Classificação do individuo	$[-]$
$p_i$	Gene escolhido para ser mutado	$[m]$
$P_i$	Força concentrada aplicada	$[N]$
$p'$	Gene mutado	$[m]$
$P_{ma}, P_{da}$	Parâmetros dos progenitores	$[-]$
$P_{new1}, P_{new2}$	Primeiro e segundo descendente	$[-]$
$P_n$	Probabilidade para cada classificação	$[-]$
$r_1$	Probabilidade de seleção do gene	$[-]$
$R_{A-D}$	Reações nos apoios	$[N]$
$w$	Peso próprio da viga	$[N/m]$
$w_0$	Carga distribuída retangular	$[N/m]$
$Q_{1i}$	...	...
$w_1$	Carga distribuída triangular	$[N/m]$
$Q_{2i}$	...	...
$y_{max}$	Deformada máxima	$[mm]$
$y$	Distância do centróide a uma cota em espessura, genérica	$[m]$
$\theta$	Rotação	$[Rad]$
$\sigma$	Tensão normal	$[N/m^2]$
$\beta$	Número aleatório no intervalo $[0,1]$	$[-]$
$\alpha$	Ponto de cruzamento	$[-]$
$\rho$	Raio de curvatura da linha neutra	$[m]$



# Índice

<b>Agradecimentos</b> .....	<b>VII</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>IX</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>XI</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>XV</b>
<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>XIX</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>XXI</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>23</b>
1.1. Pesquisa bibliográfica .....	24
1.2. Organização da tese .....	26
<b>2. Otimização Estrutural</b> .....	<b>29</b>
2.1. Função objetivo.....	29
2.2. Variáveis de projeto .....	32
2.3. Restrições impostas ao projeto .....	33
<b>3. Equações Universais</b> .....	<b>35</b>
3.1. Forças concentradas .....	35
3.2. Momentos concentrados .....	36
3.3. Cargas distribuídas.....	37
3.3.1. Carga uniformemente distribuída (retangular) .....	37
3.3.2. Carga linearmente distribuída (triangular) .....	38
3.3.3. Carga linearmente distribuída (trapezoidal) .....	39
3.3.4. Caso particular das cargas distribuídas.....	40
3.3.5. Equação universal completa .....	40
<b>4. Algoritmos Genéticos</b> .....	<b>43</b>
4.1. Seleção Natural .....	43
4.1.1. Um pouco de Biologia.....	44
4.1.2. Teoria da Seleção Natural.....	45
4.2. Fases dos Algoritmos Genéticos.....	45
4.2.1. Definição da função objetivo.....	47
4.2.2. Definição da população inicial .....	48
4.2.3. Seleção.....	48
4.2.3.1. Seleção por roleta .....	49
4.2.3.2. Seleção por Torneio .....	50
4.2.3.3. Seleção Natural .....	50
4.2.4. Operador genético: Cruzamento.....	50

4.2.4.1.	Cruzamento num ponto .....	50
4.2.4.2.	Cruzamento em dois pontos .....	51
4.2.4.3.	Cruzamento uniforme.....	52
4.2.4.4.	Operador de cruzamento: AG vírgula flutuante (VF) .....	52
4.2.5.	Operador genético: Mutação .....	53
4.2.5.1.	Mutação uniforme .....	53
4.2.5.2.	Mutação não uniforme .....	53
4.3.	Verificação de convergência.....	54
4.4.	Algoritmo Genético em Vírgula Flutuante .....	54
4.5.	Verificação do Algoritmo: Problema teste .....	55
4.5.1.	Problema 1- Polinómio de 2º grau.....	55
4.5.2.	Problema 2 – Função com múltiplos extremos .....	60
<b>5.</b>	<b>Apresentação do caso de Estudo.....</b>	<b>67</b>
5.1.	Viga Encastrada-apoiada (caso 1).....	67
5.1.1.	Estudo paramétrico: Caso 1 .....	69
5.2.	Viga simplesmente apoiada (caso 2) .....	73
5.2.1.	Estudo paramétrico: Caso 2.....	75
5.3.	Viga apoiada em três pontos (caso 3) .....	78
5.3.1.	Estudo paramétrico: Caso 3.....	81
5.4.	Viga apoiada em quatro pontos (caso 4).....	84
5.4.1.	Estudo paramétrico: Caso 4.....	87
5.5.	Viga apoiada em três pontos com carregamento distribuído (caso 5) .....	89
5.5.1.	Estudo paramétrico: Caso 5.....	93
<b>6.</b>	<b>Estudo comparativo: Operadores do Algoritmo Genético.....</b>	<b>97</b>
6.1.	Resultados .....	99
6.1.1.	Viga Encastrada-apoiada .....	99
6.1.2.	Viga simplesmente apoiada.....	100
6.1.3.	Viga apoiada em três pontos (caso 3).....	100
6.1.4.	Viga apoiada em 4 pontos (caso 4).....	101
6.1.5.	Viga apoiada em três pontos com carregamento distribuído (caso 5).....	102
<b>7.</b>	<b>Conclusão .....</b>	<b>105</b>
<b>8.</b>	<b>Bibliografia .....</b>	<b>109</b>
<b>Anexo A.</b>	<b>.....</b>	<b>111</b>



# Lista de Figuras

Figura 3 - Curvatura de uma curva plana em um ponto $Q(z, y)$ (Beer et al, 2006) .....	30
Figura 1 - Viga Encastada (alternando a posição).....	32
Figura 2 - Viga contínua.....	34
Figura 4 - Viga em balanço com carga pontual $P_i$ (Barbosa, 2011).....	35
Figura 5 - Viga em balanço com momento concentrado (Barbosa, 2011).....	36
Figura 6 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Retangular (Barbosa, 2011).....	37
Figura 7 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Triangular (Barbosa, 2011).....	38
Figura 8 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Trapezoidal (Barbosa, 2011) .....	39
Figura 9 - Sobreposição dos carregamentos (Barbosa, 2011) .....	40
Figura 10 - Fluxograma de um Algoritmo Genético .....	47
Figura 11 - Cruzamento em um ponto (Adewuya, 1996).....	51
Figura 12 - Cruzamento em dois pontos (Adewuya, 1996).....	51
Figura 13 - Gráfico da função Polinomial de teste.....	56
Figura 14 - Gráfico da função objetivo com duas variáveis de projeto (problema 2).....	61
Figura 15 - Viga encastada na extremidade esquerda e apoiada na direita.....	68
Figura 16 - Estudo Paramétrico caso 1 (Taxa de Mutação) .....	70
Figura 17 - Estudo Paramétrico caso 1 (Taxa de Seleção) .....	71
Figura 18 - Estudo Paramétrico viga 1 (População).....	71
Figura 19 - Deformadas ao longo da viga (caso1).....	72
Figura 20 - Viga simplesmente apoiada .....	73
Figura 21 - Estudo Paramétrico viga 2 (Taxa de Mutação).....	76
Figura 22 - Estudo Paramétrico viga 2 (Taxa de Seleção) .....	76
Figura 23 - Estudo Paramétrico viga 2 (População).....	77
Figura 24 - Deformadas ao longo da viga (caso 2).....	78
Figura 25 - Viga continua (3 Apoios).....	79
Figura 26 - Estudo Paramétrico viga 3 (Taxa de Mutação).....	81
Figura 27 - Estudo Paramétrico viga 3 (Taxa de Seleção) .....	82
Figura 28 - Estudo Paramétrico viga 3 (População).....	82
Figura 29 - Deformadas ao longo da viga (caso 3).....	83
Figura 30 - Viga Continua (4 apoios).....	84
Figura 31 - Estudo Paramétrico viga 4 (Taxa de Mutação).....	87
Figura 32 - Estudo Paramétrico viga 4 (Taxa de Seleção) .....	87
Figura 33 - Estudo Paramétrico viga 4 (População).....	88
Figura 34 - Deformada ao longo da viga (caso 4) .....	89
Figura 35 - Viga continua com carregamento distribuído.....	90
Figura 36 - Estudo Paramétrico viga 5 (Taxa de Mutação).....	93
Figura 37 - Estudo Paramétrico viga 5 (Taxa de Seleção) .....	93
Figura 38 - Estudo Paramétrico viga 5 (População).....	94
Figura 39 - Deformada ao longo da viga (caso 5) .....	95
Figura 40 - Relação entre operadores genéticos (Mutação Uniforme).....	98
Figura 41 - Relação entre operadores genéticos (não Uniforme).....	98



# Lista de Tabelas

Tabela 1 - População Inicial de $f(x)$ e valores de função objectivo.....	57
Tabela 2 - Indivíduos sobreviventes e as respetivas probabilidades de seleção e acumulada por classificação (problema 1).....	58
Tabela 3 - Valor da função objetivo após seleção e cruzamento.....	58
Tabela 4 - Valor da função objetivo após a mutação .....	59
Tabela 5 - Melhores indivíduos e valores de função objetivo após 12 iterações (problema 1).....	59
Tabela 6 - Melhores indivíduos e valores de função objetivo após 35 iterações (problema 1).....	60
Tabela 7 - População Inicial $f(x, y)$ e valores da função objetivo .....	62
Tabela 8 - Indivíduos sobreviventes e respetivas probabilidades de seleção e acumulada por classificação (problema 2).....	62
Tabela 9 - Indivíduos após seleção e cruzamento e valores da função objetivo (problema 2) .....	63
Tabela 10 - indivíduos após a Mutação e valores de função objetivo (problema 2) .....	64
Tabela 11 - Melhor valor da função objetivo com 20 iterações e dimensão populacional igual a 20 (problema 2).....	65
Tabela 12 - Melhores indivíduos para 35 iterações e dimensão populacional igual a 35 (problema 2) .....	66
Tabela 13 - Dados da viga (caso 1) .....	68
Tabela 14 - Quadro comparativo dos valores inicial e ótimo de deformada e localização de apoios (caso 1).....	72
Tabela 15 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 1) .....	73
Tabela 16 - Dados da viga (caso 2) .....	73
Tabela 17 - Quadro comparativo dos valores ótimos de deformada (caso 2) .....	77
Tabela 18 - Quadro comparativo das reações nas ligações e o momento fletor máximo (caso 2) .....	78
Tabela 19 - Quadro comparativo dos valores ótimos da deformada (caso 3) .....	83
Tabela 20 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 3) .....	84
Tabela 21 - Quadro comparativo dos valores ótimos da deformada (caso 4) .....	88
Tabela 22 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 4) .....	89
Tabela 23 - Dados da viga 5 (caso 5) .....	90
Tabela 24 - Quadro comparativo dos valores da deformada (caso 5) .....	94
Tabela 25 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 5) .....	95
Tabela 26 - Operadores do AG.....	97
Tabela 27 - Performance do Algoritmo Genético viga 1.....	99
Tabela 28 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 2 .....	100
Tabela 29 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 3 .....	101
Tabela 30 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 4 .....	102
Tabela 31 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 5 .....	103
Tabela 32 - Apresentação dos resultados finais .....	106



# 1. Introdução

Nos últimos anos tem sido muito comum, em projetos de diversos tipos e níveis de complexidade, associar critérios de racionalização dando-se primazia à vertente económica. O conceito de fazer cada vez mais e melhor com menos recursos assenta como uma filosofia basilar nas indústrias. Esta racionalização manifesta-se através de técnicas de otimização aplicadas nos processos de produção, nos recursos utilizados na produção, no transporte do equipamento, na forma, local onde será utilizado e também como é o caso do presente estudo, no projeto ótimo de vigas.

Um processo de otimização pode ser entendido como um processo de busca que tem como objetivo encontrar soluções que se mostrem ótimas relativamente a um determinado objetivo, constituindo estas soluções os mínimos ou máximos dessa função dependendo de se pretender minimizar ou maximizar as soluções iniciais de determinado problema. Uma outra definição mais simplista traduz a otimização como o processo de fazer qualquer coisa melhor (Haupt & Haupt, 1998).

Os métodos de otimização podem ser classificados em duas vertentes: o critério de busca do mínimo local ou do global. Uma das grandes desvantagens dos algoritmos existentes é a sua incapacidade de distinguir o mínimo local do global (Haftka & Gurdal, 1992). Esta limitação tem incentivado o aprimoramento dos algoritmos existentes mas também o aparecimento de outros.

Entre os algoritmos que surgiram nos últimos anos para tentar ultrapassar o problema de convergência para mínimos locais encontra-se a técnica dos algoritmos genéticos, um método heurístico que tem como uma das suas vantagens o facto de que a solução ótima quando encontrada é única nas condições definidas inicialmente e potencialmente será a solução ótima global. Este método de otimização é inspirado no critério de busca encontrado na teoria da Seleção Natural das espécies proposto por Charles Darwin (1859).

As fases de modelação de um problema de otimização (Hillier & Lieberman, 2001) podem ser resumidas na seguinte forma:

- i. Definição do problema e recolha de informações relevantes;
- ii. Formulação do modelo matemático representativo do problema;
- iii. Desenvolvimento de código base em computador para obtenção da solução do problema a partir do modelo;
- iv. Teste ao modelo e refinamento se necessário;

v. Implementação em problemas mais elaborados.

A otimização estrutural é uma das áreas em que os algoritmos de otimização têm tido larga aplicação onde o objetivo é simples: produzir equipamentos que garantam o desempenho requerido respeitando as restrições do projeto que poderão dizer respeito a uma redução do peso (material) e/ou alteração da configuração dos mesmos.

No caso do presente estudo onde se pretende desenvolver um projeto ótimo de vigas, este deve obedecer a um simples critério: que a viga seja projetada para apresentar um valor máximo de deformada inferior ou igual a um valor admissível. Como é do conhecimento dos profissionais de engenharia de estruturas este valor máximo de deformada depende de fatores como as propriedades geométricas da viga, do material de que ela é feita do carregamento a que a mesma se encontra submetida, bem como das suas condições de fronteira (natureza e localização dos apoios).

O objetivo deste trabalho é o de implementar um processo de cálculo que seja capaz de otimizar a localização dos apoios de um conjunto de vigas submetidas a carregamentos diversos, encontrando-se em cada caso pré-definidas as condições de carregamento, o número e localização inicial dos apoios. Partindo desta configuração inicial pretende-se minimizar o valor da deformada máxima por alteração das posições dos apoios. Neste trabalho serão consideradas vigas prismáticas e isotrópicas, e como técnica de otimização os algoritmos genéticos.

Uma vez encontrada a melhor solução, pretende-se também avaliar comparativamente a influência dos principais operadores do algoritmo genético, como a seleção, cruzamento (*crossover*) e mutação abordados em pormenor nos capítulos que se seguem.

Este objetivo pressupõe um conhecimento detalhado do código fonte das diferentes fases do algoritmo, o que por diversas razões não é possível na maioria dos programas comerciais existentes que não permitem o acesso ao código fonte. Neste trabalho utilizou-se a aplicação de computação simbólica Maple para desenvolver e implementar o código fonte da análise da estrutura conducente à definição da função objetivo bem como a técnica de otimização (algoritmo genético).

## **1.1. Pesquisa bibliográfica**

O campo da otimização estrutural não é novo, surge pela primeira em estudos conduzidos por Maxwell em 1872 e anos mais tarde por Michell em 1904, em que o principal

problema estudado envolvia determinar o mínimo peso na estrutura que equilibraria em segurança o sistema de forças externas. A solução apresentada por ambos era um sistema de treliça. Apesar dos resultados promissores, não houve durante muito tempo um desenvolvimento nesta área, na sua generalidade os problemas puramente académicos (treliça ou vigas) eram resolvidos recorrendo a equações diferenciais, métodos gráficos, que tornavam o processo moroso e desaconselhável para projetos importantes.

Nos finais dos anos 50 e princípio dos anos 60 começaram a desenvolver-se os computadores de alto desempenho que acabam por ter um grande impacto no desenvolvimento da programação matemática, nomeadamente o método de elementos finitos. Schmit (1960) desenvolveu algumas técnicas de otimização sequencial aproximada, que utilizavam este método matemático para resolver problemas estruturais paramétricos. Uma revisão bibliográfica destas técnicas é apresentada por Hafta & Gurdal (1992). No trabalho apresentado por estes co-autores, refere-se que antes do aparecimento de sistemas computacionais de alto desempenho, a maioria das soluções na análise de estruturas estava assente na formulação de equações diferenciais, eram resolvidas usando por exemplo métodos numérico. Porém os modelos matemáticos apresentados eram restritivos na quantidade de variáveis de projeto a avaliar dentro do espaço de busca e para problemas mais complexos a solução encontradas convergia para um mínimo local.

Por volta da mesma altura John Holland apresenta um modelo de programação que replicava a teoria da seleção natural (ver capítulo 4) que viria a ser a origem dos algoritmos genéticos (AGs). A aplicação em casos práticos é feita pelo seu aluno Goldberg & Samtani (1989), que entre outros aspetos considera os AGs como uma ferramenta, no processo de otimização estrutural paramétrica. Desde essa altura muitos foram os autores que tentaram com sucesso tornar o algoritmo robusto e capaz de ser utilizado em muitas outras aplicações, Holland (2004) apresenta brevemente algumas dessas técnicas e o caminho ainda a percorrer no sentido de tornar os AGs o mais fiel ao processo que ocorre na natureza.

Procurou-se nesta fase de pesquisa bibliográfica associar unicamente os trabalhos desenvolvidos no processo de otimização estrutural de forma, e que utilizavam os algoritmos genéticos como ferramenta de otimização, mas verificou-se que maioritariamente, os autores não fazem distinção nos processos, mas sim utilizam um misto de variáveis discretas e contínuas ou seja abordam os três campos em simultâneo (paramétrica, forma ou topológica). Alguns exemplos descritos aparecem em Jenkins (1992) onde se aborda o projeto de pórticos, Rajan (1995), Wu & Chow (1995) e Galante (1996) com aplicação em treliças, Soh & Yang (1996) apresenta um sistema de controlo de vibração em vigas.

Na literatura recente e citando, por exemplo, a última revisão de Bendsoe & Sigmund (2003), a área de otimização estrutural ocupa-se de encontrar a configuração ótima no domínio do projeto, alterando as condições de fronteira de uma configuração de teste com vista a minimizar ou maximizar uma dada função objetivo sujeita a um conjunto de restrições.

Lankalapalli & Eischen (2003) apresentam uma revisão bibliográfica da metodologia utilizada para escolher a melhor posição dos apoios em estruturas como colunas, vigas e placas. Os trabalhos apresentados até então consistiam em encontrar o número de apoios necessários para reduzir uma determinada variável de estado tendo como função objetivo minimizar a energia de deformação em vigas contínuas.

Por outro lado os algoritmos genéticos estão cada vez mais afastados do modelo original criado por Holland, em muitos casos foram introduzidas variações e o impacto que estas alterações produziram foram estudados por muitos autores como o caso de De Jong, (1975), Goldberg (1989) e Michalewicz et al. (1994), mais recentemente Kumar et al. (2006) incidiram os seus estudos no mecanismo de mutação no contexto desta técnica de otimização.

Neste trabalho pretende-se, analisar um determinado conjunto de vigas cujos apoios estão em posições pré-definidas de tal modo que seja possível:

1. Encontrar a melhor localização para os apoios que reduza a deformada máxima na viga;
2. Utilizar a equação universal que governa a linha elástica da viga para construir a função objetivo (fitness) (Barbosa, 2011);
3. Utilizar os algoritmos genéticos como meio para atingir o objetivo de minimização da deformada máxima;
4. Apresentar um estudo comparativo dos operadores genéticos.

Porém para a concretização destes objetivos foram totalmente desenvolvidos e implementados procedimentos de cálculo num programa de computação simbólica neste caso o Maple.

## **1.2. Organização da tese**

A apresentação deste trabalho segue a metodologia utilizada na maioria dos processos de implementação de um algoritmo de otimização e pode ser dividida em três partes.



A primeira envolve uma análise estrutural do comportamento das vigas e do método utilizado para a otimização do problema. Inicialmente é feita uma definição clara do problema através da revisão da teoria das vigas. Esta revisão é apresentada no capítulo 2 e envolve a análise do comportamento de vigas retas de seção transversal constante e com pelo menos um plano de simetria quando submetidas a esforços de flexão. Desta análise resulta a definição da equação que governa a linha elástica. Um outro aspeto importante abordado neste capítulo é o efeito dos constrangimentos no projeto de vigas.

A definição de um modelo matemático capaz de proporcionar de uma forma mais expedita a constituição da função objetivo, cuja determinação é reconstituída a cada iteração, é apresentada no Capítulo 3. Para este fim apresentam-se os conceitos fundamentais associados à formulação do método das equações universais. A simplicidade com que este método permite determinar a deformada de uma viga sujeita a carregamentos combinados torna-o particularmente apto para a construção da função objetivo neste trabalho.

Os algoritmos genéticos são descritos no capítulo 0, onde é feita uma breve explicação dos conceitos biológicos que servem de introdução para compreender a teoria da seleção natural. Os operadores genéticos e as suas variantes são explicados neste capítulo, bem como os passos necessários para a implementação de um algoritmo genético simples. A consolidação deste assunto é feita através da apresentação de dois problemas teste ao funcionamento do algoritmo genético.

A segunda parte deste trabalho envolve a aplicação dos conceitos apresentados anteriormente. Os problemas propostos envolvem a análise de cinco configurações de vigas e são apresentados no capítulo 5. Esta análise de otimização é feita seguindo a metodologia delineada nos capítulos anteriores. Os valores ótimos encontrados são alvo de comparação entre os resultados obtidos na análise estrutural das vigas nas condições iniciais previamente definidas e a solução final que é obtida no processo de otimização.

Uma terceira parte deste trabalho surge para analisar o impacto de modificar os operadores genéticos na solução do problema. O capítulo 6 aborda este estudo comparativo entre os operadores dos AGs e mede a influência que estes têm na melhoria do valor ótimo.



## 2. Otimização Estrutural

Todos os métodos e ferramentas que visam auxiliar o engenheiro a melhorar o projeto de peças e componentes, tendo em conta a sua resposta a solicitações (ex: mecânicas, térmicas, elétricas, etc...) enquadram-se num domínio que designamos de otimização estrutural Fonseca & Cardoso (2009). O objetivo deste é encontrar os melhores valores para as variáveis de projeto, satisfazendo todas as restrições impostas ao mesmo.

Existem atualmente três linhas de pensamento em otimização estrutural: a otimização paramétrica, de forma e topológica. No primeiro caso são otimizadas dimensões da estrutura mas mantendo-se a sua forma pré definida. Na otimização de forma são alterados unicamente contornos internos e externos da estrutura como por exemplo as posições das articulações no caso de uma treliça ou o contorno de uma peça. Por último a otimização topológica que em termos ilustrativos se pode entender com dizendo respeito à otimização da ligação entre elementos de barra e viga, números de furos em estruturas entre outros.

Independentemente do processo de otimização escolhido, a criação do seu algoritmo abrange os seis passos importantes apresentados na introdução, mas no caso da otimização estrutural o primeiro desses passos pode ser subdividido em quatro vertentes interligados entre si:

- i. Análise estrutural;
- ii. Função objetivo;
- iii. Variáveis de projeto;
- iv. Restrições impostas ao projeto;

No contexto do presente trabalho, a análise da linha elástica da estrutura é efetuada recorrendo ao método das equações universais, concorrendo para a definição da linha elástica (função objetivo) todo um conjunto de informações de natureza material, geométrica bem como condições de fronteira, que se poderão constituir como variáveis de projeto e/ou restrições impostas ao projeto.

### 2.1. Função objetivo

O sucesso de qualquer problema de otimização depende de quão bem adaptado está o modelo matemático ao problema, este modelo (também designado como função objetivo)

deve ser capaz de avaliar o que se pretende otimizar e ser apresentado como uma função das variáveis de projeto e suas restrições.

A análise estrutural da viga considera o momento fletor máximo na viga, que é diretamente proporcional à tensão normal máxima e responsável pela curvatura da linha neutra. Sendo assim o cálculo do momento fletor segundo o princípio de Saint-Venant pode ser resolvido analisando a curvatura da linha neutra. Na prática o comportamento da viga quando submetida a carregamentos transversais varia porque o momento fletor também varia a uma distância  $x$  à esquerda da viga, sendo esta relação expressa como:

$$\frac{M_f(z)}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad (1)$$

onde,

$M_f(z)$ -Momento fletor em qualquer ponto na viga,

$EI$  – Módulo de rigidez à flexão

$\rho$  - Raio de curvatura.

Por sua vez a análise da curvatura da linha neutra que tem base no teorema fundamental das curvas planas, define a curvatura de uma curva plana definida no plano  $xy$  para um ponto  $Q(z, y)$  da seguinte maneira,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{(1 + (\frac{dy}{dz})^2)^{3/2}} \quad (2)$$

onde  $\frac{dy}{dz}$  e  $\frac{d^2y}{dz^2}$  são respectivamente a primeira e a segunda derivada da função  $y(z)$ , em que  $y(z)$  é a função deformada da viga representada esquematicamente na Figura 1. Este conceito aplicado a uma viga reta considerando a flexão num plano, permite extrair uma relação direta entre o momento fletor e o comportamento da linha elástica.

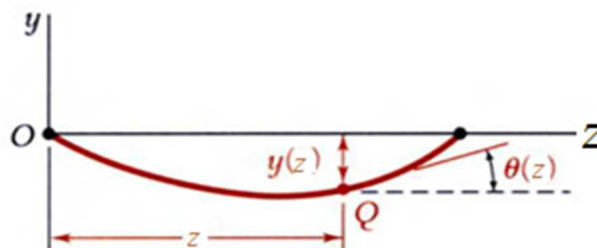


Figura 1 - Curvatura de uma curva plana em um ponto  $Q(z, y)$  (Beer et al, 2006)

Para pequenas deformações a inclinação da linha elástica de uma viga  $\frac{dy}{dz} = tg(\theta) \approx \theta$  é pequena e o seu quadrado é desprezável comparado com a unidade, logo a expressão (2) pode escrever-se como:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

Relacionando assim a expressão da curvatura da superfície neutra (1) com a expressão (3) obtemos a equação diferencial de segunda ordem que governa a linha elástica:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_f(z)}{EI} \quad (4)$$

Considerando que a análise incide em vigas prismáticas e isotrópicas, o módulo de rigidez à flexão (EI) é constante. Multiplicando os membros da equação acima por esse módulo e integrando em  $x$  obtemos:

$$EI \frac{dy}{dz} = \int_0^z M_f(z) dz + C_1 \quad (5)$$

Como referido para pequenas deformações

$$\frac{dy}{dz} = tg\theta \approx \theta \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) temos a equação característica da rotação da linha neutra.

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz + C_1 \quad (7)$$

Integrando a expressão (7) extrai-se a equação característica da linha elástica.

$$EIy = \iint_0^z M_f(z) dz dz + C_1 z + C_2 \quad (8)$$

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  associadas à equação da rotação e da linha elástica são determinadas pelas condições de fronteira, ou por outras palavras, pelas restrições impostas às extremidades da viga. A função objetivo é então  $y(z)$  e resulta da expressão (8). Sendo a função objetivo relativamente simples, a sua construção requer, no

entanto, particular atenção, como se poderá depreender da necessidade do cálculo das constantes de integração.

## 2.2. Variáveis de projeto

Consideram-se como variáveis de projeto todos os parâmetros que podem ser alterados para melhorar o sistema, seja a geometria do problema, a área da seção transversal a localização dos apoios ou uma dimensão a ser alterada. As variáveis de projeto podem ser classificadas como variáveis contínuas e discretas. Quando existe a possibilidade da variável poder assumir qualquer valor real/complexo então a variável considera-se contínua. Se se considerar por exemplo como variável de projeto a escolha do material a utilizar na produção de vigas de uma lista de  $n$  materiais então a variável é discreta.

É no domínio das variáveis de projeto onde se encontra a principal diferença entre os tipos de otimização estrutural. Na otimização paramétrica o domínio das variáveis de projeto é estático e conhecido de início, e permanece inalterado durante todo o processo de otimização. Por outro lado na otimização de forma o objetivo é encontrar a forma ótima dentro deste domínio, isto é o problema de forma é definida agora no domínio da variável de Projeto. A parametrização topológica envolve a determinação simultânea de variáveis discretas e contínuas como o número, e localização e forma de furos dentro do domínio das variáveis (Bendsoe & Sigmund, 2003).

Se se considerar uma viga conforme a figura 1 com um comprimento  $L$ , projetada para suportar diversos carregamentos previamente definidos, em que o objetivo a atingir envolve a localização do apoio existente no domínio do projeto entre  $[0, L]$ . Então o problema de otimização é um problema de otimização estrutural de forma em que a localização dos apoios são as variáveis de projeto contínuas, uma vez que os apoios podem tomar qualquer valor ao longo do comprimento da viga.

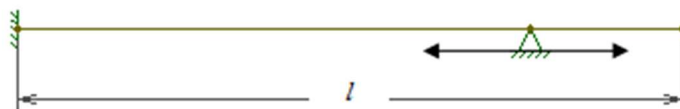


Figura 2 - Viga Encastada (alternando a posição)

As variáveis de projeto irão influenciar os valores assumidos pela função objetivo, na medida em que por exemplo alterar a posição do apoio influencia diretamente o valor da sua deformada. Esta relação causa-efeito pressupõe conhecimento sobre a análise estrutural

da viga e através de algumas manipulações matemáticas é possível conseguir encontrar uma relação entre a variável de projeto e a função objetivo.

### 2.3. Restrições impostas ao projeto

As restrições do projeto são, limitações impostas ao nível local ou global do projeto com vista à obtenção de uma solução admissível. Estas limitações podem ser de naturezas diversas. Por um lado podem classificar-se como restrições naturais por exemplo quando as limitações estão dependente da resposta da estrutura, ou geométricas no caso de envolver dimensões como altura ou comprimento.

Na maior parte dos casos as restrições estão ligadas diretamente às variáveis de projeto dentro de limites mínimos e máximos, quando isto ocorre as restrições recebem a designação de restrições laterais e podem ser representadas como restrições de igualdade e/ou de desigualdade. Uma restrição de igualdade ocorre quando é atribuído à variável de projeto um valor fixo durante todo o processo de otimização, como por exemplo atribuir um determinado valor de tensão máxima, ou do deslocamento. Por outro lado, quando as variáveis de projeto podem assumir valores dentro de intervalos de valores, como por exemplo o apoio estar entre  $0$  e  $l$  então a restrição é de desigualdade (Haftka & Gurdal, 1992). A definição das restrições é um aspecto fundamental a considerar no processo de otimização, sob risco de os valores ótimos estarem fora do domínio em análise.

Quanto às condições de fronteira consideradas, as vigas podem ser do tipo simplesmente apoiadas, em consola, biencastrada, encastrada numa extremidade e apoiada na outra. Cada um destes tipos de ligações dita quais os graus de liberdade<sup>1</sup> da estrutura que se encontram restringidos ou não, o que por sua vez permite aferir do grau de hiperestaticidade<sup>2</sup> do problema.

Note-se que são considerados carregamentos de natureza exclusivamente transversal.

A grande dificuldade em encontrar a melhor posição dos apoios reside na alteração do modelo estrutural a cada cromossoma gerado à medida que o processo de otimização evolui, tendo em conta a alteração das posições dos apoios. A figura 2 apresenta o caso de uma viga contínua de comprimento  $L$  com quatro apoios em que o apoio A se encontra na posição zero.

---

<sup>1</sup> Movimento não restringido

<sup>2</sup> Número de reações superior ao estritamente necessário para impedir qualquer movimento.

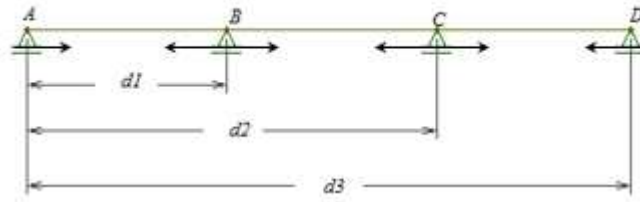


Figura 3 - Viga contínua

A solução para este problema passa por criar regras para a modificação das posições (permuta) que devem ser seguidas ao longo de todo o processo, essas regras são:

Sejam  $d_i$  elementos que representam as posições dos apoios, tendo como referencial o início da viga. Então:

- Os apoios podem assumir qualquer posição ao longo da viga:  $d_i \in [0, L]$ , com  $i = 1, \dots, n$  apoios;
- A posição dos apoios deve obedecer a uma hierarquia (Ex:  $d_1 < d_2 < d_3$ ).



### 3. Equações Universais

As equações universais constituem-se como um método de cálculo da linha elástica de vigas submetidas a diversos carregamentos tais como, forças concentradas, momentos concentrados e cargas distribuídas desde que variando linearmente. As equações universais resultam do método de integração direta aplicado aos carregamentos cuja ocorrência é mais frequente nas estruturas. Para cada tipo específico destes carregamentos é criada uma equação designada de universal. Este método segue o princípio da sobreposição de ações (e não dos seus efeitos), constituindo o contributo final destes carregamentos a equação universal completa (Barbosa, 2011). De acordo com essa formulação, elas são válidas quando se trate da análise de vigas retas prismáticas com pelo menos um plano de simetria na sua secção transversal, numa situação de flexão plana.

Para a constituição das equações universais, quer da rotação, quer da deformada transversal, apresentam-se de seguida, os casos mais frequentes de acordo com a formulação já referenciada. De notar que a caracterização do momento fletor que atua numa determinada secção da viga é efetuada, considerando a aplicação do método das secções tomando como origem do referencial na extremidade esquerda da viga.

#### 3.1. Forças concentradas

Forças concentradas são conceptualmente forças pontuais, podendo no entanto ser consideradas como tal as forças que atuam em áreas muito reduzidas quando comparadas com a dimensão da estrutura. Consideremos como exemplo a Figura 4 que caracteriza uma viga em balanço com uma carga pontual ( $P_i$ ) aplicada a distância  $b_i$  da extremidade livre (origem do referencial).

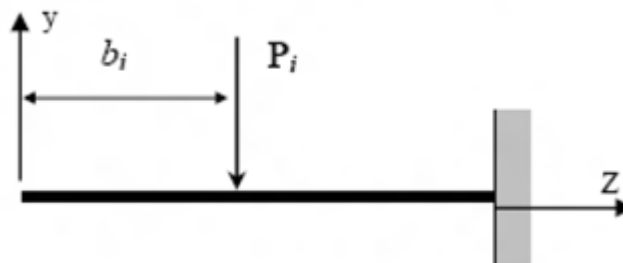


Figura 4 - Viga em balanço com carga pontual  $P_i$  (Barbosa, 2011)

O momento concentrado gerado a partir da carga concentrada pontual ( $P_i$ ) é dado por,

$$M_f(z) = P_i \cdot (z - b_i) \quad (9)$$

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz = \int_0^{b_i} M_f(z) dz + \int_{b_i}^z M_f(z) dz \quad (10)$$

Visto que, no troço considerado,  $0 \leq z < b_i$ , não há nenhum momento concentrado o integral que caracteriza essa zona será zero. Assim o integral que caracteriza a equação das rotações para a viga em balanço é dada por,

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz = \int_{b_i}^z (P_i(z - b_i)) dz = \frac{P_i(z - b_i)^2}{2} \quad (11)$$

Para a linha elástica temos

$$EIy = \iint_0^z M_f(z) dz dz = \int_0^z \frac{P_i(z - b_i)^2}{2} dz \quad (12)$$

Assim a equação universal da linha elástica considerando as ações de forças concentradas é,

$$EIy = \frac{P_i(z - b_i)^3}{3!} \quad (13)$$

### 3.2. Momentos concentrados

À semelhança do que se disse para as forças concentradas, os momentos concentrados são conceptualmente momentos aplicados em pontos de uma estrutura.

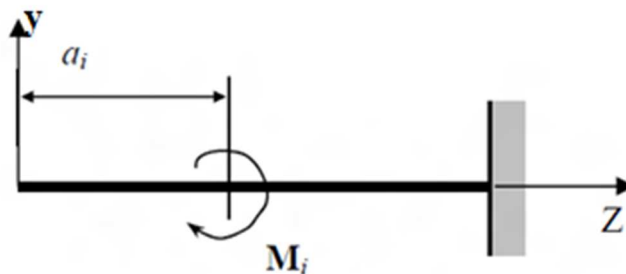


Figura 5 - Viga em balanço com momento concentrado (Barbosa, 2011).

Considerando novamente uma viga em balanço (Figura 5) sujeito a um momento concentrado ( $M_i$ ) localizado a uma distância ( $z - a_i$ ), teremos para a equação das rotações:

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z)dz = \int_0^{a_i} M_f(z)dz + \int_{a_i}^z M_f(z)dz \quad (14)$$

Novamente verifica-se que o trecho considerado de,  $0 \leq z < a_i$ , não tem ação de nenhum momento concentrado logo, o integral que caracteriza essa zona será zero, como resultado o integral que caracteriza a ação de momentos concentrados na viga será,

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z)dz = \int_{a_i}^z Mi \cdot dz = Mi(z - a_i) \quad (15)$$

De novo, para a linha elástica teremos,

$$EIy = \iint_0^z M_f(z)dz dz = \int_{a_i}^z Mi(z - a_i) \cdot dz \quad (16)$$

Assim a equação universal da linha elástica para o momento concentrado é,

$$EIy = \frac{Mi(z - a_i)^2}{2!} \quad (17)$$

### 3.3. Cargas distribuídas

Cargas distribuídas são cargas por unidade de comprimento, cujo valor é constante ou varia linearmente dentro do domínio de aplicação da carga. As cargas distribuídas podem ser triangulares, retangulares ou trapezoidais. No caso de cargas uniformemente distribuídas, a equação universal é obtida da mesma forma que a carga concentrada.

#### 3.3.1. Carga uniformemente distribuída (retangular)

São cargas cujo valor por unidade de comprimento ( $q_{1i}$ ) é constante conforme representada na Figura 6.

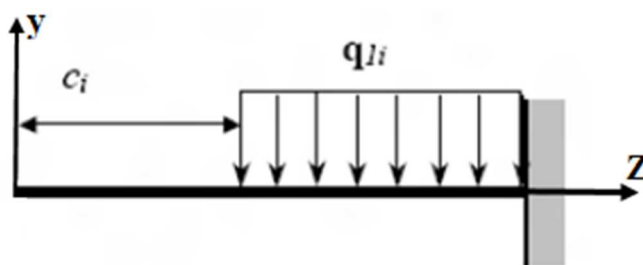


Figura 6 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Retangular (Barbosa, 2011).

Logo,

$$M_f = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < c_i \\ q_{1i} \cdot (z - c_i) \cdot \frac{(z - c_i)}{2}, & c_i \leq z \leq l \end{cases} \quad (18)$$

Onde  $c_i$  representa o ponto onde se inicia a aplicação da carga distribuída. Assim o integral que caracteriza a equação das rotações para a viga em balanço é dada por,

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz = \int_{c_i}^z q_{1i} \cdot \frac{(z - c_i)^2}{2} dz \quad (19)$$

A linha elástica devida à ação de cargas uniformemente distribuídas será então caracterizada por:

$$EIy = \iint_0^z M_f(z) dz dz = \int_{c_i}^z q_{1i} \cdot \frac{(z - c_i)^3}{6} dz \quad (20)$$

Logo a equação universal da linha elástica para uma carga distribuída uniforme

$$EIy = q_{1i} \cdot \frac{(z - c_i)^4}{4!} \quad (21)$$

### 3.3.2. Carga linearmente distribuída (triangular)

São cargas distribuídas cujo valor varia linearmente por unidade de comprimento, conforme representado na Figura 7.

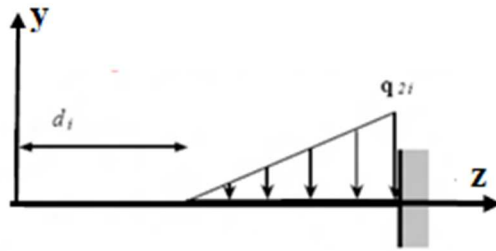


Figura 7 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Triangular (Barbosa, 2011).

Logo,

$$M_f = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < d_i \\ \frac{q_{2i}}{2 \cdot (l - d_i)} \cdot (z - d_i) \cdot (z - d_i) \cdot \frac{(z - d_i)}{3}, & d_i \leq z \leq l \end{cases} \quad (22)$$

Onde  $d_i$  representa o ponto onde se inicia a aplicação da carga distribuída, por outro lado convém referir que o valor da carga distribuída varia de 0 a  $q_{2i}$ .

Assim o integral que caracteriza a equação das rotações para a viga em balanço é dada por,

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz = \int_{d_i}^z \frac{q_{2i}}{l - d_i} \cdot \frac{(z - d_i)^3}{6} dz \quad (23)$$

### 3.3.3. Carga linearmente distribuída (trapezoidal)

As cargas distribuídas trapezoidais (combinação entre as cargas distribuídas retangulares e triangulares) são cargas que aplicadas a partir do ponto à distância  $c_i$  da extremidade variam linearmente entre valores de densidade de carga  $q_{1i}$  e  $q_{2i}$ .

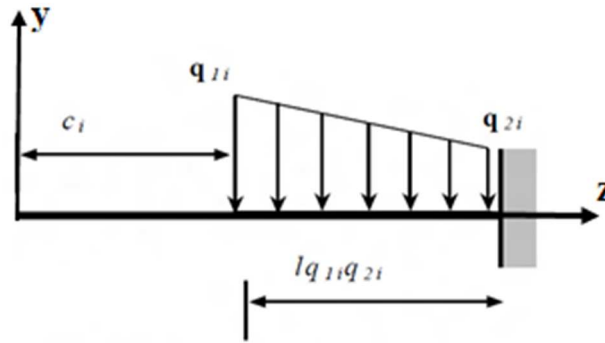


Figura 8 - Viga em Balanço com Carga Distribuída Trapezoidal (Barbosa, 2011)

$$EI\theta = \int_0^z M_f(z) dz = (q_{1i}) \cdot \frac{(z - c_i)^3}{3!} + \frac{q_{2i} - q_{1i}}{l q_{1i} q_{2i}} \cdot \frac{(z - c_i)^4}{4!} \quad (24)$$

A linha elástica devida à ação de cargas distribuídas trapezoidais será então caracterizada por:

$$EIy = \iint_0^z M_f(z) dz dz = (q_{1i}) \cdot \frac{(z - c_i)^4}{4!} + \frac{q_{2i} - q_{1i}}{l q_{1i} q_{2i}} \cdot \frac{(z - c_i)^5}{5!} \quad (25)$$

Note-se que as expressões (19) e (23), relativas à rotação para uma carga distribuída retangular e triangular, respectivamente, são um caso particular da expressão (24), tendo em conta que a carga distribuída trapezoidal pode ser construída a partir da sobreposição das contribuições de uma carga distribuída retangular e outra triangular.

### 3.3.4. Caso particular das cargas distribuídas

Os efeitos devidos às cargas distribuídas, pressupõem no entanto que as mesmas podendo ter início numa dada coordenada longitudinal, medida a partir da origem, só terminam no fim da viga. Caso isso não ocorra, há necessidade de compensar um efeito que é introduzido pelas equações e que de facto não existe. Assim a solução real, quer em termos de rotações quer em termos de linha elástica, pode ser obtida considerando cargas distribuídas iguais mas de sinal oposto de acordo com a realidade física. A Figura 9 é exemplificadora desta situação.

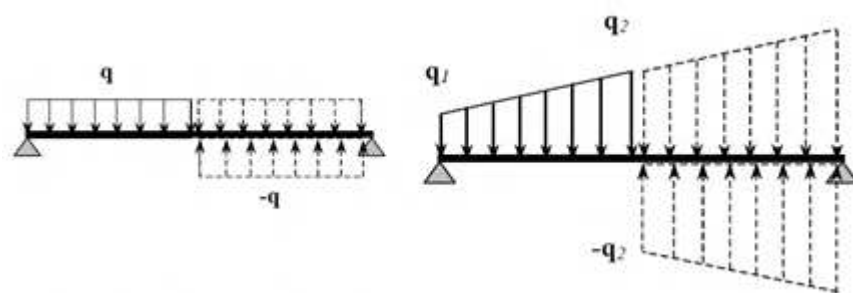


Figura 9 - Sobreposição dos carregamentos (Barbosa, 2011)

### 3.3.5. Equação universal completa

As equações universais completas podem ser então escritas a partir dos contributos das situações de carga definidas anteriormente. Ter-se-á para a equação das rotações:

$$EI\theta = EI\theta_0 + \sum \frac{P_i(z - b_i)^2}{2!} + \sum M_i(z - a_i) + \sum \left( (q_{1i}) \cdot \frac{(z - c_i)^3}{3!} + \frac{q_{2i} - q_{1i}}{l_{q_{1i}} q_{2i}} \cdot \frac{(z - c_i)^4}{4!} \right) \quad (26)$$

E para a equação universal da linha elástica:

$$\begin{aligned}
Ely = Ely_0 + EI\theta_0 * z + \sum \frac{P_i(z - b_i)^3}{3!} + \sum \frac{M_i(z - a_i)^2}{2!} \\
+ \sum \left( (q_{1i}) \cdot \frac{(z - c_i)^4}{4!} + \frac{q_{2i} - q_{1i}}{l_{q_{1i} q_{2i}}} \cdot \frac{(z - c_i)^5}{5!} \right)
\end{aligned}
\tag{27}$$

onde,

$P_i$ - Carga concentrada

$M_i$ - Momento concentrado

$q_{1i}$  - Valor inicial da carga distribuída

$q_{2i}$  - Valor final da carga distribuída

$a_i, b_i, c_i$  – Abcissas dos pontos de aplicação de solicitações

$z$  - coordenada longitudinal da viga

A análise do comportamento da viga sejam quais forem as condições de fronteira ou o carregamento está dependente de apenas duas constantes de integração  $\theta_0$  e  $y_0$ , constantes estas que representam a rotação e o deslocamento da linha elástica na origem do referencial, que conforme se referiu oportunamente se situa na extremidade esquerda da viga. O valor destas constantes é obtido através da imposição de equações associadas às condições de fronteira existentes. Uma vez determinada a equação da linha elástica (deformada transversal), a equação das rotações bem como as distribuições de momento fletor, esforço transversal e eventuais carregamentos distribuídos são obtidos por derivação sucessiva.

A simplicidade desta metodologia de cálculo torna-a muito eficiente na análise de vigas hiperestáticas (Barbosa, 2011).





## 4. Algoritmos Genéticos

Os AGs enquadram-se nas técnicas de otimização global mais precisamente na classe das técnicas evolucionárias e são um método heurístico (a arte de descobrir) que baseia o seu critério de busca no mecanismo de seleção natural.

As primeiras tentativas de combinar ciência da computação e evolução datam do final de 1950 e início de 1960. Em meados de 1960, John Holland, criou com sucesso um modelo matemático em codificação binária, tendo como base o processo evolucionário (Holland, 1975). Holland desenvolveu um sistema de classificação que representava a estrutura de qualquer programa de computador, este sistema de classificação consiste num conjunto de regras, em que cada regra corresponde a uma ação ou condição a ser satisfeita por uma parte da informação de dados. Estas condições e ações eram então representadas por cadeias de bits (Holland, 2004), por exemplo as regras de classificação no caso de reconhecimento de cães poderia ser codificada em uma cadeia de bits contendo 1's para bits que correspondam ao cabelo, latido, cor do pelo e caso não contenha a 0 (Haupt & Haupt, 1998).

O modelo criado por Holland propunha resolver problemas complexos cujas soluções eram então impossíveis com o sistema de computação da altura. Os problemas estudados eram então formulados em termos genéticos e a solução obtida através do algoritmo genético. Esta abordagem pioneira deu origem ao livro “Adaptation in Natural and Artificial Systems” (Holland, 1975).

O modelo proposto por Holland também designado por convencional (Koza, 1992), era composto por esquema de seleção por roleta, cruzamento em um único ponto e mutação também em um ponto.

Os AG têm sido objeto de muitos estudos no sentido do seu aperfeiçoamento bem como têm sido utilizados no âmbito de muitas e distintas aplicações ao longo dos anos. Neste trabalho são utilizados os AGs com o objetivo de minimizar a máxima deformada transversal da estrutura do tipo viga quando submetida a um determinado caso de carga.

### 4.1. Seleção Natural

Grande parte dos autores dedicam um espaço a esclarecer a ligação dos algoritmos genéticos com o que acontece na natureza, este subcapítulo incidirá sobre a relação que existe entre a teoria de seleção natural e os AGs.

### 4.1.1. Um pouco de Biologia

É um facto que todos os seres vivos são provenientes de outro ser vivo. E os organismos vivos são perfeitos agentes de solução para problemas, quando confrontados com decisões (Holland, 2004). No mundo natural estas decisões são tomadas em frações de segundo. E tudo isso começa com uma única célula. Cada célula é composta por um ou mais cromossomas, cada cromossoma contém uma única molécula do impressionante Acido Desoxirribonucleico (ADN) (Mitchel, 1996). É no ADN onde se concentra toda a informação necessária para a formação do ser vivo. O cromossoma individualmente é dividido em genes, e os genes encerram em si códigos que por sua vez determinam os traços ou características do ser vivo (fenótipo), por definição a possibilidade de os traços variarem por exemplo em cor (no caso dos olhos ser azul ou castanho) é designada por alelos. Por exemplo (Mendel, 1885) estudou por anos o comportamento genético de algumas espécies de ervilhas. As suas experiências de recombinação genética das espécies de ervilhas permitiram observar que os traços dos “pais” eram transmitidos as gerações seguintes de ervilhas, resultando na “Teoria da hereditariedade”. As conclusões de Mendel definiram-se a partir da década de 1920 a base da genética moderna (Ridley, 2004).

Uma grande maioria dos organismos possui múltiplos cromossomas em cada célula, no caso dos mosquitos 6, dos sapos 26, dos humanos 46 e dos golfinhos 94. Todos os cromossomas juntos representam o genoma do organismo (Ridley, 2004).

Interessante verificar que o número de cromossomas apresentados anteriormente para os organismos estão arrançados aos pares, este emparelhamento é chamado diplóide; Organismos desemparelhados são chamados de haplóides. Na natureza, a maior parte das espécies são diplóides (Mitchel, 1996).

Uma vez que os cromossomas na maior parte dos organismos vivos estão organizados aos pares, existirá neste emparelhamento, duplicação de genes. Qualquer gene encontra-se numa localização específica e ao ligar-se com outro formam um genótipo que pode ser homogéneo ou heterogéneo. Porém o resultado físico do genótipo é designado como fenótipo como por exemplo o corpo, a inteligência, tamanho do cérebro etc. (Ridley, 2004)

Durante a reprodução sexual diplóide ocorre o cruzamento, isto é dá-se uma troca de material genético entre os cromossomas dando origem a um único cromossoma, os gâmetas (ou células reprodutivas) proveniente dos pais emparelham entre si e criam um conjunto completo de cromossomas diplóides. No caso da reprodução sexual dos haplóides, a troca de material genética é realizado por cromossomas desemparelhados resultando num gâmeta

com apenas um conjunto. Os descendentes são então sujeitos a mutação, na qual os nucleótidos isolados são modificados a partir dos pais para os filhos. As mudanças quase sempre resultam de erros resultantes da replicação (Kyrk, 2012).

#### **4.1.2. Teoria da Seleção Natural**

A teoria da seleção natural é a teoria fundamental utilizada para explicar a teoria da Evolução enunciada por Darwin no seu livro “A Origem das Espécies” e define-se como o processo pelo qual aquelas formas de organismos de uma população que estão mais bem adaptadas ao ambiente aumentam em frequência relativamente às formas menos bem adaptadas, ao longo de uma série de gerações. (Ridley, 2004). A seleção natural é apresentada em duas categorias (Ridley, 2004):

- A seleção reprodutiva - A seleção pelo comportamento de acasalamento, seja por meio da competição entre os membros do mesmo sexo para ter acesso aos membros de outro sexo, seja pelos membros de um sexo de determinados membros de outro sexo. Os indivíduos que possuam certas características de maior aptidão têm maior probabilidade de intervir nos processos de reprodução;
- A seleção ecológica - Faz com que os organismos compitam para sobreviverem, quer pela defesa do território quer para obtenção de alimentos, os mais aptos têm maior probabilidade de sobrevivência. Esta aptidão não implica o recurso a força ou ao tamanho sendo suficiente que os indivíduos produzem uma prole em número maior.

Duas outras categorias são anexadas à seleção natural, o cruzamento e a mutação apresentados com algum detalhe no próximo capítulo.

A aptidão/robustez (fitness) no caso de um organismo é definido tipicamente como a probabilidade que o organismo tem de sobreviver para se reproduzir ou em função do número de descendentes que organismo produziu (Mitchel, 1996).

### **4.2. Fases dos Algoritmos Genéticos**

Tratando-se de um algoritmo que tem como base o comportamento encontrado na natureza, a nomenclatura dos AG é similar aos termos utilizados no contexto da biologia. Nas muitas aplicações dos AGs o usual é os cromossomas serem individuais (haplóides) e codificados numa cadeia de bits ou representarem um valor real.

O termo cromossoma refere-se tipicamente aos indivíduos candidatos à solução para um dado problema na análise estrutural, se a solução ótima pretendida for a menor

deformada, então os possíveis valores assumidos pelos genes, constituem cromossomas candidatos para o efeito. São esses cromossomas candidatos que competem entre si. Em termos gerais, numa estratégia elitista, quanto melhor for o valor da função objetivo correspondente a um dado cromossoma, maior será a probabilidade desse indivíduo ser selecionado para se reproduzir através da partilha ou recombinação dos seus genes. Tal como se referiu os genes podem obedecer a uma codificação binária ou em vírgula flutuante.

Num cromossoma representado em vírgula flutuante, os respetivos genes estão codificados como números reais, em que o comprimento do cromossoma depende do número de variáveis de projeto na função objetivo (Adewuya, 1996). Nesse caso cada gene não necessita de descodificação prévia para a informação do tipo inteiro ou real antes constituem-se de imediato como os valores das variáveis de projeto, por exemplo se uma dada variável de projeto estiver associada a uma propriedade material definida num dado intervalo então o gene correspondente poderia representar o valor do módulo de elasticidade

Na linguagem dos AGs os termos, cromossoma ou indivíduo significam ambos a mesma coisa (Batista et al, 2009). Neste trabalho considerar-se-ão indistintamente os termos: indivíduo para se referir aos cromossomas, o termo gene para se referir a variável de projeto. Alguns autores decidem manter o termo geração ao passo que outros utilizam iteração, na prática os termos traduzem o mesmo, um processo que se inicia numa população inicial e que será alvo dos processos de seleção, cruzamento e mutação para obtenção de novos indivíduos. Este processo será repetido as vezes que forem necessárias até a obtenção do melhor indivíduo.

O termo cruzamento (crossover) e mutação não sofrem nenhuma alteração na codificação para o AG e serão apresentados nos capítulos a frente.

O funcionamento de um algoritmo genético simples é apresentado na Figura 10, e apresentado com algum detalhe em seguida.

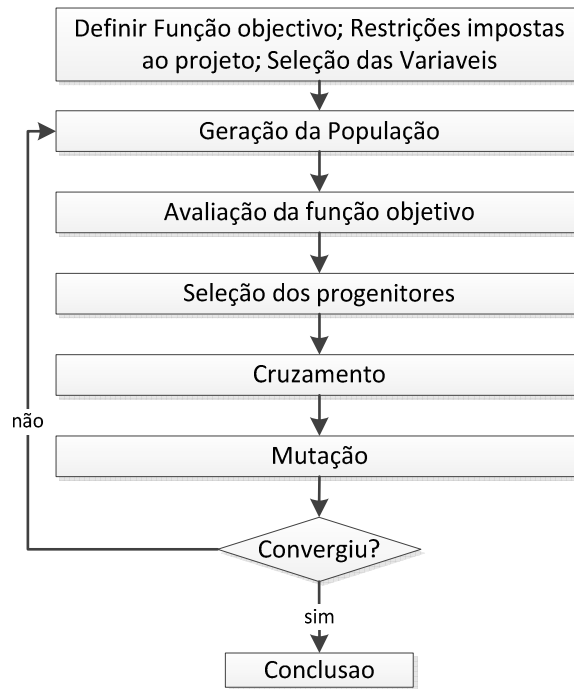


Figura 10 - Fluxograma de um Algoritmo Genético

#### 4.2.1. Definição da função objetivo

A representatividade e adequação da função objetivo é crucial para o funcionamento do AG, devendo estar portanto adaptada à realidade do problema, querendo isto também dizer que deverão ser respeitadas as restrições impostas ao projeto.

Tratando-se de um problema de otimização estrutural em que a configuração da viga em análise sofre alterações constantes fruto da mudança aleatória das posições dos apoios, encontrar uma função objetivo que seja capaz de avaliar todas as possíveis combinações dos apoios com vista a minimizar a deformada no problema envolve tempo e esforço. Sendo adicionalmente necessário considerar que cada combinação dos apoios está restringida dentro de um determinado intervalo de valores limitados pelo comprimento da viga, podendo ocorrer um aumento ou uma diminuição do número de troços em análise.

Para garantir que todos os elementos gerados aleatoriamente fossem avaliados pela função objetivo foram deduzidas todas as possíveis combinações de apoios e as suas respectivas restrições e para cada uma destas combinações as suas equações universais da linha elástica. O conjunto de todas estas equações universais compõe o conjunto das possíveis funções objetivo para o problema a otimizar.

### **4.2.2. Definição da população inicial**

A população inicial é criada aleatoriamente tendo como base um número de  $m$  indivíduos, em que cada indivíduo representa uma solução de  $n$  variáveis de projeto. Cada solução está relacionada com um cromossoma e as variáveis representadas nesse cromossoma, os seus genes. (Correia & Tavares, 1999).

A dimensão da população inicial corresponde ao número total de indivíduos presentes e que serão avaliados pela função objetivo. Nesse sentido é necessário ser criterioso na definição da dimensão populacional uma vez que se a dimensão da população for muito pequena existe o risco de não ter uma boa cobertura do espaço de busca e com isso apresentar uma solução que não corresponda ao mínimo/máximo global, este fenómeno é conhecido como convergência prematura, por outro lado se a dimensão da população for muito grande exigirá um esforço de processamento maior, podendo mesmo ser demasiado tendo em conta a complexidade do problema em análise (Haupt & Haupt, 1998). É necessário encontrar um equilíbrio entre o esforço de computação e a capacidade de percorrer completamente o espaço de busca.

Em cada iteração, os pais são selecionados a partir da população e são aplicados operadores genéticos de cruzamento e mutação para obtenção dos descendentes, estes novos indivíduos substituem os indivíduos menos capazes de modo a manter o número inicial de indivíduos na população. Nestas circunstâncias estamos perante um modelo estacionário (Batista, Perez, & Vega, 2009).

### **4.2.3. Seleção**

A seleção é caracterizada em dois grupos: uma pré seleção que dita a quantidade de indivíduos que sobrevive, também designada de subpopulação com dimensão inferior à primeira (Correia & Tavares, 1999). Essa quantidade de indivíduos que sobrevive depende do valor da taxa de seleção, o segundo grupo é a seleção propriamente dita que caracteriza a seleção dos indivíduos candidatos a pais nos métodos definidos a seguir.

A pré-seleção apresenta uma dicotomia ou seja aumentar a taxa de seleção pode prejudicar a mutação dos genes no cromossoma pois permite que indivíduos menos adaptados sobrevivam. Por outro lado, diminuir a mesma pode limitar o contágio positivo nos genes dos descendentes porque exclui indivíduos razoavelmente aptos. Portanto é considerando como critério no operador seleção a utilização de uma taxa de seleção de 50%.

A seleção ocorre aleatoriamente por meio de mecanismos, que apesar de diferentes mantêm a mesma finalidade, ou seja, selecionar de entre a população indivíduos aptos para serem pais e produzirem descendentes. Alguns destes esquemas são: seleção por roleta, torneio e a seleção natural.

#### 4.2.3.1. Seleção por roleta

A seleção por roleta baseia-se na criação de uma roda de probabilidades, que pode ser proporcional ao valor da função objetivo ou proporcional à classificação dos indivíduos, a diferença entre as funções reside na uniformidade da probabilidade, o que impede a rápida convergência para determinados indivíduos com probabilidade mais altas.

Neste trabalho recorreu-se ao esquema de seleção probabilística proporcional a classificação do indivíduo para a construção da roda de probabilidades pelo motivo mencionado acima mas também porque o seu funcionamento é independente do problema. Assim a probabilidade para cada classificação é dado por,

$$P_n = \frac{N_{keep} - n + 1}{\sum_{n=1}^{N_{keep}} n} \quad (28)$$

onde,

$P_n$ -Probabilidade para cada classificação

$N_{keep}$ -Número de indivíduos sobreviventes

$n$ - Classificação do indivíduo

Para cada probabilidade da classificação é obtida a sua probabilidade acumulada. Em seguida são criados dois vetores com a dimensão do número de pares permitidos, cada um destes vetores correspondem aos progenitores um e dois, sendo os valores destes vetores são gerados aleatoriamente no intervalo entre zero e um.

Inicia-se a roleta por escolher o primeiro valor do vetor criado e compará-lo com os valores da probabilidade acumulada se o valor escolhido estiver dentro do intervalo na roda de probabilidades então é aceite. Caso contrário é eliminado. Os valores aceites devolvem um número que corresponde ao índice do indivíduo selecionado para pai ou mãe (Adewuya, 1996). Este processo prossegue até atingir o número de pares formados

Para garantir que os melhores indivíduos são selecionados é usual organizá-los por ordem crescente ou decrescente dependendo se o que pretendemos é minimizar ou maximizar.

#### **4.2.3.2. Seleção por Torneio**

A seleção por torneio pressupõe criar uma competição entre grupos de indivíduos na população escolhidos aleatoriamente, onde os melhores são selecionados para serem os pais. Este torneio ocorre até que o número de pares formados esteja completo. O tamanho do torneio, ou seja, a quantidade de indivíduos que competem entre si utilizado neste trabalho é 2 sem substituição, apesar de se encontrar em algumas referências a utilização de um tamanho de torneio de 3. Neste tipo de seleção não ocorre a pré-seleção o que também implica que não exista uma classificação crescente ou decrescente dos indivíduos (Goldberg & Deb, 1991).

#### **4.2.3.3. Seleção Natural**

A seleção natural é a seleção aleatória pura, em que se escolhe de forma puramente aleatória os indivíduos para formarem pares. Só os indivíduos melhores adaptados são escolhidos para o acasalamento, a garantia para que isso aconteça recai inteiramente na pré-seleção onde os melhores valores dos indivíduos ficam ordenados para que apareçam no início da tabela.

#### **4.2.4. Operador genético: Cruzamento**

O cruzamento ou “Crossover” entre os indivíduos da subpopulação permite gerar novos descendentes de modo a obter uma nova população de  $m$  indivíduos (Correia & Tavares, 1999). De forma generalista o cruzamento permite que os indivíduos mais adaptados transmitam parte da sua informação aos seus descendentes abrindo a possibilidade para que os descendentes convirjam para a solução ótima do problema. A maneira mais simples de explicar o operador cruzamento continua a ser através da codificação binária, razão pelo que, na sua maioria os trabalhos disponíveis o apresentem mesmo que os problemas propostos utilizem valores de vírgula flutuante. Uma consideração sobre métodos de cruzamento utilizando valores reais foi apresentada por Adewuya (1996).

Variantes do mecanismo de cruzamento original foram desenvolvidos e estudados por diversos investigadores. Neste trabalho apresentamos apenas alguns.

##### **4.2.4.1. Cruzamento num ponto**

Cruzamento num ponto consiste na seleção aleatória de uma posição onde se processa a divisão do indivíduo em duas partes (ver Figura 11). Em seguida é produzida uma ligação entre as seções que se encontrem à direita do ponto de cruzamento (pai) e à esquerda



do ponto de cruzamento (mãe), assim, os filhos irão ter genes compostos por aqueles dois tipos.

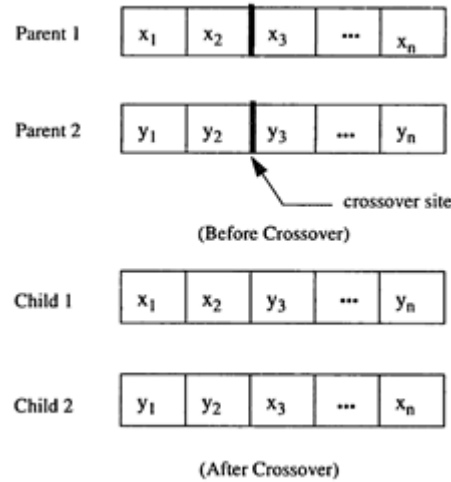


Figura 11 - Cruzamento em um ponto (Adewuya, 1996)

#### 4.2.4.2. Cruzamento em dois pontos

O cruzamento em dois pontos tem um procedimento semelhante ao anterior, ou seja, seleciona-se aleatoriamente as posições para corte, neste caso em dois locais (ver Figura 12) e em seguida trocam as posições entre as partes nas posições referidas. Este procedimento é mais vantajoso que o anterior, pois ao utilizar o corte em duas localizações é possível explorar mais facilmente o indivíduo na busca do ótimo em comparação com o método anterior.

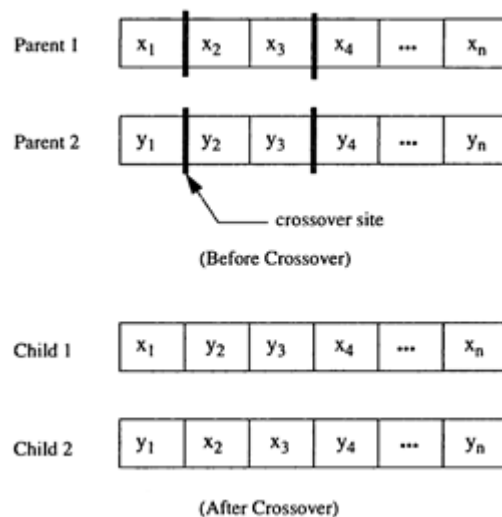


Figura 12 - Cruzamento em dois pontos (Adewuya, 1996)

#### 4.2.4.3. Cruzamento uniforme

O cruzamento uniforme pode ser considerado um caso extremo dos anteriores porque são selecionados pelo menos dois locais de corte, a principal diferença está na escolha aleatória dos pais para troca de posição dos genes. Escolhe aleatoriamente qual dos pais irá transmitir os seus genes para os filhos, a escolha dos genes obedece a uma probabilidade  $p$ . Se o valor de probabilidade for maior que 0,5 os genes têm características muito próximas do primeiro progenitor do contrário tem características do segundo, caso o valor seja intermédio então o gene possui uma combinação dos progenitores (Adewuya, 1996, Michalewicz, 1998).

#### 4.2.4.4. Operador de cruzamento: AG vírgula flutuante (VF)

De acordo com alguns autores (Adewuya, 1996; Michalewicz, 1998; Mitchel, 1996; Haupt & Haupt, 1998), os operadores de cruzamento funcionam melhor quando se utiliza a representação em vírgula flutuante do que na representação binária. Isto porque de acordo com os mesmos, os valores gerados inicialmente pelos métodos anteriores são transportados para as próximas gerações mas com outra combinação, não existindo assim introdução de dados novos. Este facto relega a responsabilidade total para introdução de dados novos ao operador de mutação.

Com vista a combinar os valores das variáveis provenientes dos pais e passá-los aos descendentes, Adewuya (1996) e Michalewicz (1998) usaram o método designado por *blending methods* que consiste em, encontrar modos de combinar os valores das variáveis de dois progenitores em novas variáveis nos descendentes. Usando um raciocínio similar Haupt & Haupt (1998) recorre a combinação de métodos de extrapolação e cruzamento. Primeiro seleciona aleatoriamente o ponto de cruzamento (variável de projeto), em seguida utiliza o ponto de cruzamento para produzir os dados novos a serem transmitidos aos filhos de acordo com a expressão.

$$\begin{aligned} P_{new1} &= P_{m\alpha} - \beta \cdot (P_{m\alpha} - P_{d\alpha}) \\ P_{new2} &= P_{d\alpha} + \beta \cdot (P_{m\alpha} - P_{d\alpha}) \end{aligned} \quad (29)$$

Onde,

$P_{new1}$  - Primeiro descendente

$P_{new2}$  - Segundo descendente

$\beta$  - Número aleatório no intervalo [0,1]

$\alpha$  - Ponto de cruzamento (número aleatório no intervalo [1, N variável de projeto])

$P_m$  - Primeiro progenitor

$P_d$  - Segundo progenitor

### 4.2.5. Operador genético: Mutação

Quer na análise da teoria da seleção natural, quer na aplicação dos algoritmos genéticos, este operador permite a existência de alterações significativas nos indivíduos da população, o que poderá impedir a convergência prematura em torno de um ótimo que pode ser local. A mutação ocorre sobre os indivíduos resultantes do processo de cruzamento e numa taxa pré-selecionada. O número de mutações é obtido multiplicando a taxa de mutação pelo total de indivíduos e parâmetros (genes) na população. Assim, aumentar o número de mutações aumenta a liberdade de procura do algoritmo para fora dos espaço de busca (Haupt & Haupt, 1998), razão porque muitos autores preferam trabalhar com valores baixos de taxa de mutação. De entre os esquemas de mutação são destacados os seguintes.

#### 4.2.5.1. Mutação uniforme

A mutação uniforme consiste em escolher aleatoriamente um ou vários genes dependendo da taxa de mutação definida e substituir o seu valor por outro dentro do intervalo definido para o gene e de acordo com uma distribuição uniforme. Cada gene tem exatamente igual probabilidade de sofrer mutação. Em alguns para garantir uma maior diversidade dentro a nova população adiciona-se ou multiplica-se ao gene alvo de mutação um valor entre 0 e 1.

#### 4.2.5.2. Mutação não uniforme

Este procedimento tem a mesma finalidade que o processo anterior mas a substituição do gene é feita seguindo uma distribuição não uniforme. Uma adaptação da expressão apresentada por Michalewicz (1994) é aplicada neste trabalho da seguinte forma:

$$p' = \begin{cases} p_i + (\bar{d} - p_i) \cdot f(iga), & r_1 < 0.5 \\ p_i - (p_i - \underline{d}) \cdot f(iga), & r_1 > 0.5 \\ p_i, & c.c \end{cases} \quad (30)$$

onde,

$$f(iga) = (r_1 \cdot (1 - \frac{iga}{maxit}))^b$$

$p'$  - Corresponde ao gene mutado

$p_i$  - Corresponde ao gene escolhido para ser mutado

$\bar{d}$  - Limite superior do gene

$\underline{d}$  - Limite inferior do gene

$iga$  - Número de iteração

$r_1$  – Probabilidade de seleção do gene

$b$  - Parâmetro de não uniformidade (nestes trabalho considerou-se  $b = 5$ )

### 4.3. Verificação de convergência

Os elementos candidatos são alvo de sucessivas avaliações pela função objetivo até que ocorra a convergência. Caso contrário o processo é reiniciado.

A convergência do AG ocorre quando todos os indivíduos tendem a ser muito parecidos e os operadores genéticos praticamente não geram indivíduos novos. Assim, à medida que as sucessivas iterações vão sendo realizadas, desejavelmente os indivíduos irão começar a convergir em torno de um valor. Na definição do algoritmo existem alguns critérios que definem a paragem do mesmo,

- O AG *pára* quando o número de iterações máximo pré-definido, é atingido;
- O AG *pára* quando se atinge um valor de tolerância definida para o processo de otimização em curso.

Matematicamente não existe um método que garanta a convergência do algoritmo genético em torno do valor global. Relativamente a esta matéria, Haupt & Haupt (1998) aponta algumas directrizes relevantes, para além dos mencionados enquanto critérios de paragem.

### 4.4. Algoritmo Genético em Vírgula Flutuante

O termo algoritmo genético VF está relacionado com o tipo de codificação utilizado. As primeiras aplicações para os AG, utilizavam uma codificação binária. Assim ainda hoje há muitos autores que consideram a utilização de AGs dessa natureza. Isto pese embora, muitos destes problemas usem variáveis de projeto de natureza contínua. Desde há alguns anos, já estão igualmente vulgarizados os AGs com representação em vírgula flutuante, existindo já alguns programas computacionais comerciais que incluem os AGs na sua biblioteca de rotinas.

No estudo presente, a codificação e implementação do AG foi realizada com recurso ao programa de computação simbólica *Maple*.

Um Algoritmo Genético simples é caracterizado por uma estrutura de programação, cujo pseudo-código se apresenta:

Início

Criar população inicial.

Avaliar a função objetivo (fitness)

Iniciar ciclo de cálculo (enquanto critério de paragem não estiver satisfeito)

Seleção

Cruzamento

Mutação

Avaliar a função objetivo (fitness)

Fim do ciclo.

Neste trabalho foram considerados diferentes mecanismos de seleção, cruzamento e mutação. Porém convém ter em atenção que o motivo de usar o AG VF em vez do binário é bem explicado por Michalewicz (1992) onde se diz que ‘os estudos conduzidos indicam que usar uma representação/codificação da informação em vírgula flutuante é mais rápido, mais consistente em cada iteração e fornece maior precisão (principalmente porque a codificação binária para domínios maiores requer representações proibitivamente longas).

## **4.5. Verificação do Algoritmo: Problema teste**

A explanação do AG apresentada serve de base para a implementação do algoritmo genético num programa de computação simbólica (Maple). Após esta fase o algoritmo é verificado recorrendo a dois problemas, que por sua vez permitem entender as fases de implementação dos operadores genéticos de seleção, cruzamento e mutação. O primeiro problema utiliza inicialmente uma variável de projeto e a solução ótima é encontrada utilizando o método analítico, o segundo problema usa duas variáveis de projeto e é utilizado um método de programação linear na busca de solução ótima.

### **4.5.1. Problema 1- Polinómio de 2º grau.**

Considerando a seguinte função polinomial, pretende-se minimizar  $f(x)$  cujo valor de  $x$  está contido no intervalo  $[0, 6]$ ,

$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$

$$\min f(x),$$

$$s. a: 0 \leq x \leq 6$$

Para a análise desta função bastaria substituir na função todos os valores inteiros de  $x$  pertencente ao intervalo, para verificar o comportamento do algoritmo após a codificação.

O resultado para esta função (ver Figura 13) é uma parábola com concavidade positiva onde o valor mínimo ocorre para  $x = 2,5$ , e é igual a  $-3,25$ .

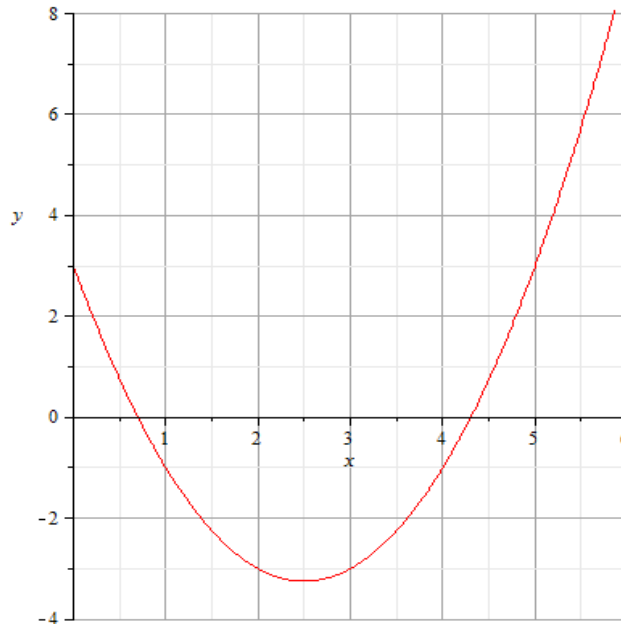


Figura 13 - Gráfico da função Polinomial de teste

A simulação desta função é feita utilizando o algoritmo genético simples com o operador seleção por roleta, cruzamento num ponto e mutação uniforme.

O AG é ajustado para os seguintes parâmetros:

- Número de parâmetros a otimizar é igual a 1
- Constituição do cromossoma  $[x]$
- Taxa de mutação é de 0.05
- Taxa de seleção (a população que sobrevive) de 0.6
- Dimensão populacional de 35.

Definida a função objetivo, bem como as restrições impostas a esta função, o passo a seguir é a criação da população inicial. Neste exemplo será criada uma população inicial de 12 indivíduos, ( $m = 12$  e  $n = 1$ ) para permitir ilustrar os operadores usados.

Cada indivíduo presente na população inicial é um vetor com um único gene, gerado aleatoriamente dentro do intervalo definido  $[0,6]$ , e os membros desta são avaliados de acordo com a função objetivo. Do resultado desta avaliação obtém-se a solução candidata ao ótimo.

Na Tabela 1 estão representados os genes da população inicial e os indivíduos candidatos à solução ótima.

Tabela 1 - População Inicial de  $f(x)$  e valores de função objectivo

	$x$	$f(x)$
1	4,852964	2,286439
2	0,788065	-0,31928
3	4,824443	2,153034
4	4,787534	1,982813
5	2,734408	-3,19505
6	1,392491	-2,02342
7	0,487702	0,799343
8	3,161796	-2,81203
9	4,566879	1,02199
10	0,634934	0,228471
11	4,52896	0,866677
12	4,073618	-0,77373

Após a criação da população inicial, os indivíduos (neste caso coincidentes com  $x$  ao que corresponderão os valores da função objectivo  $f(x)$ ) são organizados tendo atenção o objetivo a atingir, isto é, o objetivo de minimizar ou de maximizar. Uma vez que neste exemplo o que se pretende é minimizar, os indivíduos serão organizados por ordem crescente para que se faça a pré-seleção. Fica claro que o individuo  $f(x)_5$  é o melhor dos doze indivíduos.

Tabela 2 - Indivíduos sobreviventes e as respectivas probabilidades de seleção e acumulada por classificação (problema 1)

	$f(x)$	Probabilidade de Seleção $P_n$	Probabilidade Acumulada $\sum_{i=1}^n P_i$
1	-3,19505	0,285714	0,285714
2	-2,81203	0,238095	0,52381
3	-2,02342	0,190476	0,714286
4	-0,77373	0,142857	0,857143
5	-0,31928	0,095238	0,952381
6	0,228471	0,047619	1

A subpopulação que sai da pré seleção é composta pelo top seis da tabela acima. Seguindo o método de seleção por roleta, são escolhidos os progenitores:

$$Mae = [4,2,6]$$

e,

$$Pai = [5,4,1]$$

O indivíduo 4 emparelha com o 5, o 2 com o 4 e o 6 com o 1. O passo a seguir é o cruzamento, é nesta fase que os seis piores indivíduos são descartados e substituídos pelos descendentes produzidos pelo cruzamento entre os seis melhores. A Tabela 3 abaixo apresenta os novos indivíduos gerados, seguindo a metodologia de cruzamento num único ponto.

Tabela 3 - Valor da função objetivo após seleção e cruzamento

	$f(x)$
1	-3,195053079
2	-2,812025748
3	-2,023424024
4	-0,773725031
5	-0,319279954
6	0,22847088
7	-2,227524124
8	-1,928668942
9	-1,663721406
10	-2,297542796
11	-2,165078441
12	-2,903005202

Após o cruzamento, é a mutação que introduzirá nesta última população novos membros que podem ser benéficos ou não para o processo de otimização. Este novo



indivíduo aparece agora na posição nove com o valor de -3,247066294 em substituição do anterior valor de -1,663721406.

Tabela 4 - Valor da função objetivo após a mutação

	$f(x)$
1	-3,195053079
2	-2,812025748
3	-2,023424024
4	-0,773725031
5	-0,319279954
6	0,22847088
7	-2,227524124
8	-1,928668942
9	-3,247066294
10	-2,297542796
11	-2,165078441
12	-2,903005202

Estes valores são obtidos unicamente na primeira iteração. Uma vez terminado o processo de otimização a matriz solução composta pelos melhores indivíduos de cada iteração é apresentada na Tabela 5 e verifica-se que a solução ótima é encontrada na segunda iteração, não existindo nenhum valor inferior a este.

Tabela 5 - Melhores indivíduos e valores de função objetivo após 12 iterações (problema 1)

$x$	$f(x)$
2,734407596	-3,19505
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707
2,554163692	-3,24707

Aumentando a dimensão da população para 35 indivíduos, o resultado encontrado à nona iteração conforme apresentado na Tabela 6 é igual ao obtido analiticamente.

Tabela 6 - Melhores indivíduos e valores de função objetivo após 35 iterações (problema 1)

<i>Iteração</i>	<i>x</i>	<i>f(x)</i>
0	2,647185	- 3,22834
1	2,647185	- 3,22834
2	2,293890	- 3,22834
3	2,708206	- 3,22834
4	2,708206	- 3,24584
5	2,592868	- 3,24637
6	2,435500	- 3,24990
7	2,550495	- 3,24998
8	2,489927	- 3,24999
<b>9</b>	<b>2,495720</b>	<b>- 3,25000</b>
.	.	.
.	.	.
.	.	.
33	2,500000	- 3,25000
34	2,500000	- 3,25000
35	2,500000	- 3,25000

Pelo que pode-se concluir que a codificação do algoritmo genético funciona para otimização de funções com uma variável.

#### 4.5.2. Problema 2 – Função com múltiplos extremos

Repare-se agora que para uma questão mais complexa a alteração da forma como utilizamos o AG é mínima. Neste caso estuda-se uma função com múltiplos extremos, possuindo duas variáveis de projeto  $x$  e  $y$ , Haupt & Haupt (1998).

$$f(x, y) = x \sin(4x) + 1.1y \sin(2y)$$

$$\min f(x, y)$$

$$s. a: -10 < x < 10$$

$$-10 < y < 10$$

O gráfico tridimensional desta função no domínio referenciado revela a existência de vários pontos de mínimos locais, pelo que o AG tem de ser capaz de encontrar o mínimo global dentro do espaço de pesquisa definido pelas restrições das variáveis de projeto.

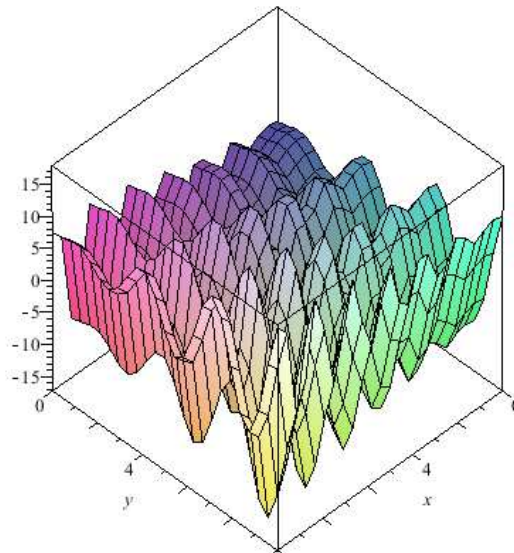


Figura 14 - Gráfico da função objetivo com duas variáveis de projeto (problema 2)

Para este caso começou-se por utilizar o comando “*minimize*” do *software* Maple, para encontrar, ou produzir, o valor mínimo da função com múltiplos extremos apresentando os seguintes resultados:

$$f(x, y) = -18,55472$$

$$x = 9,0389 \text{ e } y = -8,6682$$

A simulação do Algoritmo Genético para esta função é feita utilizando o método de seleção por roleta, cruzamento num ponto e mutação uniforme.

O AG é ajustado para os seguintes parâmetros:

- Número de variáveis de projecto : 2
- Constituição do cromossoma  $[x, y]$
- Taxa de mutação é igual 0.05;
- Taxa de seleção (população que sobrevive) de 0.5;
- Dimensão populacional de 35. Neste exemplo a dimensão da população será reduzida para 20 para efeito de demonstração.

A população inicial é criada aleatoriamente considerando a restrições impostas às variáveis de projeto e considerando  $m = 20$  e  $n = 2$ , para efeito de demonstração dos operadores usados. Após a criação da população inicial os seus elementos são avaliados pela função objetivo produzindo os resultados apresentadas na Tabela 7,

Tabela 7 - População Inicial  $f(x, y)$  e valores da função objetivo

	$x$	$y$	$f(x, y)$
1	- 9,3110784	9,1898485	- 8,6670608
<b>2</b>	<b>9,0044410</b>	<b>5,8441466</b>	<b>- 13,8963306</b>
3	- 3,6580104	8,3147105	- 4,0656339
4	3,8965725	- 1,5647743	0,4936706
5	6,4691566	- 7,1622732	12,1211944
6	- 8,0573644	6,0056094	2,3734959
7	- 9,0765722	- 0,2924870	- 8,7555481
8	- 4,4615403	9,1433390	- 9,1294177
9	- 9,3633431	9,4118556	- 2,5453963
10	4,1209218	- 6,8477384	3,9240151
11	- 6,5762662	9,2977707	3,4909493
12	3,1095578	9,1501367	- 5,6521349
13	- 2,1554596	0,9376304	2,5345969
14	4,8626494	- 4,4300356	5,3577319
15	5,1548026	- 8,0491919	1,6835418
16	3,5747031	2,6471849	1,0955699
17	8,6798650	8,2675171	- 8,0924278
18	6,9825861	- 7,4602637	8,1693813
19	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
20	3,1148140	6,2944737	- 0,1766977

Observa-se que o indivíduo ( 9,0044410; 5,8441466 ) é o melhor dos vinte indivíduos. A pré - seleção dita que os indivíduos menos adaptados são empurrados para o fim da tabela ocupando as ultimas posições.

Tabela 8 - Indivíduos sobreviventes e respectivas probabilidades de seleção e acumulada por classificação (problema 2)

	$f(x, y)$	<i>Probabilidade de Seleção</i> $P_n$	<i>Probabilidade Acumulada</i> $\sum_{i=1}^n P_i$
1	- 13,896331	0,181818	0,181818
2	- 9,365930	0,163636	0,345455
3	- 9,129418	0,145455	0,490909
4	- 8,755548	0,127273	0,618182
5	- 8,667061	0,109091	0,727273
6	- 8,092428	0,090909	0,818182
7	- 5,652135	0,072727	0,890909
8	- 4,065634	0,054545	0,945455
9	- 2,545396	0,036364	0,981818
10	- 0,176698	0,018182	1

A seleção por roleta escolhe os indivíduos para o acasalamento, resultando,

$$Mae = [2,6,6,3,3]$$

e,

$$Pai = [2,4,2,9,4]$$

Assim, o indivíduo número 2 vai emparelhar com o 2, o indivíduo número 6 com o número 4, o indivíduo número 6 com o número 2, o indivíduo número 3 com o número 9 e o número 3 com o número 4. Após a seleção ocorre o cruzamento e produz as alterações visíveis na Tabela 9.

Tabela 9 - Indivíduos após seleção e cruzamento e valores da função objetivo (problema 2)

	$x$	$y$	$f(x, y)$
1	9,0044410	5,8441466	- 13,8963306
2	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
3	- 4,4615403	9,1433390	- 9,1294177
4	- 9,0765722	- 0,2924870	- 8,7555481
5	- 9,3110784	9,1898485	- 8,6670608
6	8,6798650	8,2675171	- 8,0924278
7	3,1095578	9,1501367	- 5,6521349
8	<b>- 3,6580104</b>	<b>8,3147105</b>	<b>- 4,0656339</b>
9	- 9,3633431	9,4118556	- 2,5453963
10	3,1148140	6,2944737	- 0,1766977
11	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
12	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
13	- 2,2588936	- 0,2924870	1,0347961
14	1,8621864	- 0,2924870	1,8890220
15	8,6798650	8,2294331	- 7,5759163
16	<b>- 9,2857664</b>	<b>4,0359743</b>	<b>- 9,9649099</b>
17	- 5,4252114	9,4118556	1,2853844
18	- 8,3996719	9,4118556	6,6077655
19	- 4,4615403	5,8409530	- 8,7326800
20	- 9,0765722	3,0098989	- 9,7952024

A mutação ocorre na posição 8, e 16 com a entrada de novos indivíduos conforme a Tabela 10.

Tabela 10 - indivíduos após a Mutação e valores de função objetivo (problema 2)

	$x$	$y$	$f(x, y)$
1	9,0044410	5,8441466	- 13,8963306
2	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
3	- 4,4615403	9,1433390	- 9,1294177
4	- 9,0765722	- 0,2924870	- 8,7555481
5	- 9,3110784	9,1898485	- 8,6670608
6	8,6798650	8,2675171	- 8,0924278
7	3,1095578	9,1501367	- 5,6521349
8	<b>- 3,6580104</b>	<b>0,5455984</b>	<b>3,7516008</b>
9	- 9,3633431	9,4118556	- 2,5453963
10	3,1148140	6,2944737	- 0,1766977
11	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
12	- 9,2857664	8,1158387	- 9,3659295
13	- 2,2588936	- 0,2924870	1,0347961
14	1,8621864	- 0,2924870	1,8890220
15	8,6798650	8,2294331	- 7,5759163
16	<b>- 9,2857664</b>	<b>8,1539227</b>	<b>- 0,5667983</b>
17	- 5,4252114	9,4118556	1,2853844
18	- 8,3996719	9,4118556	6,6077655
19	- 4,4615403	5,8409530	- 8,7326800
20	- 9,0765722	3,0098989	- 9,7952024

Os resultados apresentados na Tabela 9 e Tabela 10 são obtidos com apenas uma iteração. A Tabela 11 apresenta as melhores soluções em cada iteração e os respectivos valores de variáveis de projeto. Verifica-se que a solução ótima   obtida   quinta iteração.

Tabela 11 - Melhor valor da função objetivo com 20 iterações e dimensão populacional igual a 20 (problema 2)

<i>iteração</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>f(x, y)</i>
1	9,0044410	5,8441466	- 13,8963306
2	- 9,0765722	8,7592199	- 18,2929144
3	- 9,1104998	8,7592199	- 18,2929144
4	- 9,0765722	8,7592199	- 18,2929144
<b>5</b>	<b>- 9,0765722</b>	<b>8,7592199</b>	<b>- 18,4496765</b>
6	- 9,0765722	8,7592199	- 18,4496765
7	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
8	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
9	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
10	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
11	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
12	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
13	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
14	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
15	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
16	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
17	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
18	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
19	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765
20	- 9,0765722	8,6800788	- 18,4496765

Aumentando a dimensão da população para 35 indivíduos o resultado encontrado a 13ª iteração é igual ao obtido no processo de otimização, recorrendo à função “minimize” do Maple.

Tabela 12 - Melhores indivíduos para 35 iterações e dimensão populacional igual a 35 (problema 2)

Iterações	$x$	$y$	$f(x, y)$
0	9,0044410	-8,2675171	- 15,64241302
1	9,0044410	-8,7640473	- 18,29181028
2	9,0044410	-8,4829338	- 18,29181028
3	9,0044410	-8,4829338	- 18,29181028
4	9,0587447	-8,7640473	- 18,50189070
5	9,0336251	-8,6158858	- 18,55042791
6	9,0220232	-8,6725086	- 18,55403441
7	9,0404252	-8,6484027	- 18,55403441
8	9,0404252	-8,6534749	- 18,55454079
9	9,0404252	-8,6534749	- 18,55454079
10	9,0404252	-8,6734855	- 18,55457197
11	9,0404252	-8,6692245	- 18,55457216
12	9,0404252	-8,6680514	- 18,55457216
<b>13</b>	<b>9,0404252</b>	<b>-8,6682660</b>	<b>- 18,55457227</b>
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
32	9,0404252	-8,6681401	- 18,55457227
33	9,0404252	-8,6681685	- 18,55457227
34	9,0404252	-8,6681858	- 18,55457227
35	9,0404252	-8,6681860	- 18,55457227

Pelo que podemos concluir que a codificação do AG está correta e capaz de otimizar funções com mais de uma variável de projeto como as que serão utilizadas neste trabalho.



## 5. Apresentação do caso de Estudo

Conforme se referiu previamente pretendeu-se, em diferentes casos de estudo, determinar a melhor localização de apoios de vigas que conduziriam ao menor valor da deformada máxima transversal seguindo a metodologia apresentada no capítulo 0, os algoritmos genéticos, conhecendo a localização das cargas aplicadas. Considerou-se para o efeito, a análise de 5 (cinco) vigas estaticamente indeterminadas, submetidas a diversos carregamentos transversais incluindo o peso próprio. O perfil escolhido será do tipo I, em aço macio, de larga aplicação na construção de estruturas metálicas. Uma vez que o que se pretende é minimizar a deformada máxima alterando as posições dos apoios, considerar-se-á que os carregamentos aplicados às diversas vigas não se alteram durante todo o processo de análise.

A função objetivo para estes casos de estudo é conseguida com recurso ao método das equações universais. A utilização da técnica de otimização em causa permite a cada geração (iteração) a obtenção de novas localizações candidatas para a posição dos apoios da viga. Esta resposta, por parte do algoritmo, implica considerar na definição da função objetivo que o número de troços em análise na configuração inicial da viga aumentará até atingir um determinado número de troços, no limite o número máximo de troços. Consequentemente o número de equações da deformada transversal também aumentará respeitando os constrangimentos geométricos e naturais.

Para cada caso será considerado a viga IPN180 (Norma de referência DIN17100). Inicialmente é realizado o cálculo estrutural para a viga estando os apoios fixos em posições pré-definidas, em seguida a deformada de cada troço é avaliada por forma a se definir a deformada máxima e a localização onde esta ocorre na viga e após a identificação do valor da deformada máxima inicia-se o processo de otimização. Todos os processos de cálculo quer na análise estrutural e na otimização pelos AGs são realizados através do programa de computação simbólica MAPLE.

### 5.1. Viga Encastrada-apoiada (caso 1)

Como primeiro exemplo apresenta-se uma viga encastrada na extremidade esquerda e apoiada na direita, carregada com uma carga distribuída triangular de intensidade máxima  $w_1(x)$  aplicado entre  $B$  e  $C$  e sob ação do peso próprio  $w(x)$  (ver Figura 15).

O objetivo deste exemplo é localizar a melhor posição para o apoio  $D$  com vista a reduzir a deformada máxima da viga.

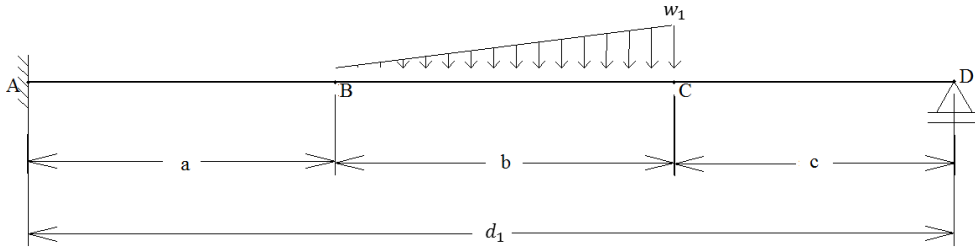


Figura 15 - Viga encastada na extremidade esquerda e apoiada na direita

Os dados do problema são apresentados na Tabela 13:

Tabela 13 - Dados da viga (caso 1)

$l$ [m]	$w_1$ [kN/m]	$w$ [kN/m]	$a = b$ [m]	$c$ [m]
10	45	0,725	2,5	5

Dados (parâmetros prescritos):  $E, w_1, l, I, w, a, b, c$

Número máximo de troços: 4

Objetivo: minimizar a deformada máxima.

Variáveis do projeto:  $d$  (representa a posição do apoio  $D$ ),

$$d = [d_1]$$

Restrições:

$$0 \leq d_1 \leq l$$

- Equações de equilíbrio

$$\sum F_y = 0, \quad A_y - P_{viga} + D_y - q_1 = 0$$

$$\sum M_a = 0, \quad -D_y \cdot d_1 + \frac{P_{viga} \cdot l}{2} - M_0 + q_1 \cdot \left( a + \frac{2 \cdot b}{3} \right) = 0$$

- Condições de fronteira:

$$M_D = \theta_A = 0$$

e,

$$y_A = y_D = 0$$

A função objetivo  $y(x)$  pode ser escrita em função dos parâmetros prescritos e das variáveis de projeto. Para o caso 1 quando o apoio  $D$  está na posição  $d_1 = l$  a função objetivo é expressa da seguinte forma:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2}{EI}, & 0 \leq x < a \\ \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2 - \frac{1}{120} \frac{w1(x-a)^5}{b}}{EI}, & a \leq x < a + b \\ \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2 - \frac{1}{120} \frac{w1(x-a)^5}{b}}{EI} +, & a + b \leq x < d_1 \\ \quad + \frac{\frac{1}{24}w1(x - (a + b))^4}{EI} + \\ \quad + \frac{\frac{1}{120} \frac{w1(x-(a+b))^5}{b}}{EI} \end{cases} \quad (31)$$

Como consequência da alteração da posição do apoio  $D$  o número de troços a analisar aumenta. Considere como exemplo, o caso extremo em que a posição do apoio está no intervalo  $0 < d_1 < a$  Neste caso a expressão para deformada é apresentada da seguinte forma,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2}{EI}, & 0 \leq x < d_1 \\ \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2 + \frac{1}{6}Dy(x - d_1)^3}{EI}, & d_1 \leq x < a \\ \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2 + \frac{1}{6}Dy(x - d_1)^3}{EI} -, & a \leq x < a + b \\ \quad - \frac{\frac{1}{120} \frac{w1(x-a)^5}{b}}{EI} \\ \frac{\frac{1}{6}Ay(x)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2}Mo \cdot x^2 + \frac{1}{6}Dy(x - d_1)^3}{EI} -, & a + b \leq x < l \\ \quad - \frac{\frac{1}{120} \frac{w1(x-a)^5}{b} + \frac{1}{24}w1(x - (a + b))^4}{EI}, \\ \quad + \frac{\frac{1}{120} \frac{w1(x-(a+b))^5}{b}}{EI} \end{cases} \quad (32)$$

### 5.1.1. Estudo paramétrico: Caso 1

Assumido nesta fase do trabalho o AG Simples, constituído pelos mecanismos comuns, como o operador seleção por roleta, o cruzamento num ponto único e a mutação uniforme, é feito um estudo dos parâmetros do algoritmo para o exemplo. O estudo consiste

em fazer variar a taxa de mutação, dimensão da população e taxa de seleção (sobreviventes). Este estudo paramétrico tem como finalidade avaliar a influência dos parâmetros do AG na obtenção do menor valor de deformada máxima à medida que eles são modificados.

### **Mutação:**

Do exposto anteriormente, o operador de mutação é responsável pela aleatoriedade na população de indivíduos candidatos, por esta razão, o operador de mutação foi considerado o primeiro parâmetro a ser estudado e verificou-se que os valores mais baixos da deformada surgiam para taxas de mutação elevadas.

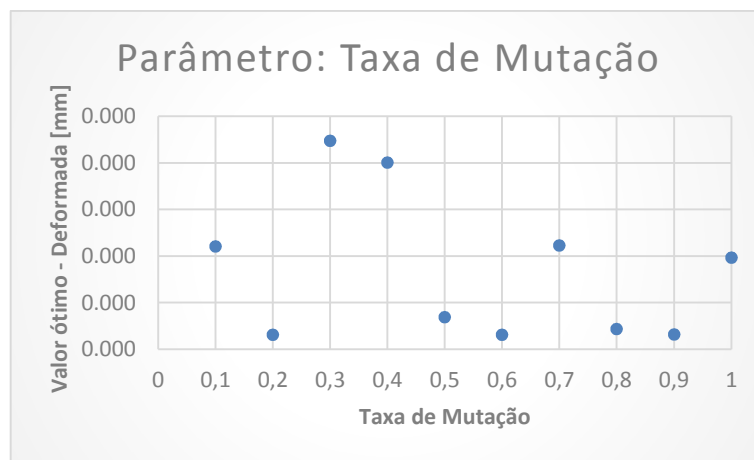


Figura 16 - Estudo Paramétrico caso 1 (Taxa de Mutação)

- Verifica-se uma convergência do valor de deformada em cinco situações ou seja recorrendo a taxas de mutação de 20, 50, 60, 80 e 90%. Neste caso a melhoria que se consegue obter ao usar uma taxa de mutação de 20% em vez de 30% (apresenta um maior valor de deformada máxima) é de apenas 4%. Será escolhido 20% como valor da taxa de mutação.

### **Taxa de Seleção:**

Este parâmetro decide a entrada ou não de indivíduos candidatos para o acasalamento e reprodução (cruzamento), este poder de decisão pode implicar a entrada de maus indivíduos ou limitar a entrada a indivíduos que poderiam contribuir positivamente para o algoritmo. Por este motivo, este é o segundo parâmetro a ser analisado.

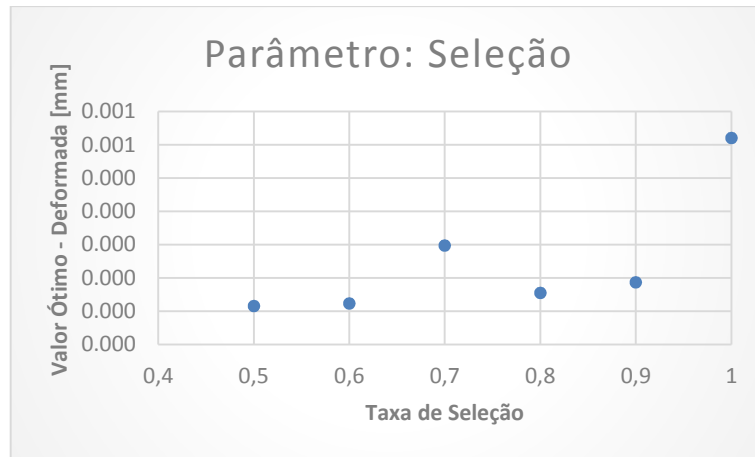


Figura 17 - Estudo Paramétrico caso 1 (Taxa de Seleção)

- Para taxas de Seleção abaixo do 50% aumenta a restrição do algoritmo o que pode impedir que candidatos capazes sejam escolhidos. Por outro lado verifica-se um afastamento razoável na convergência para o valor ótimo quando se utiliza taxas de seleção acima dos 60%. Considerando que ocorre uma convergência do valor de menor deformada máxima para taxas de seleção de 50-60% pode-se assumir que a escolha de uma taxa de mutação de 50% é acertada.

**População:**

Após a avaliação dos pontos anteriores considere-se a avaliação do fator dimensão da população.

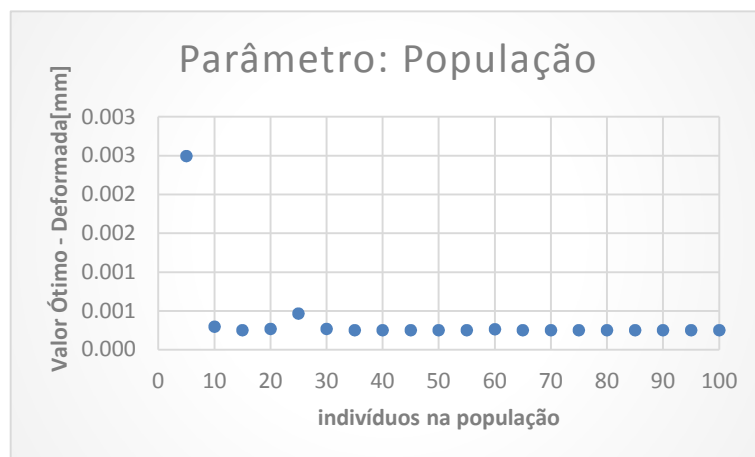


Figura 18 - Estudo Paramétrico viga 1 (População)

- Para populações pequenas (inferiores a 5 indivíduos) o comportamento do algoritmo é mau ao passo que para populações maiores o comportamento do algoritmo melhora significativamente, verificando-se mesmo uma convergência no intervalo entre 35 a

100 indivíduos, isto é acima de um determinado valor não compensa aumentar a população.

Do estudo paramétrico conclui-se que os parâmetros que influenciam o algoritmo resultando no menor valor de deformada máxima precisam ser ajustadas para as seguintes condições:

- Dimensão da população 75
- Taxa de mutação 0.6
- Taxa de seleção 0.5

Estes valores permitem obter os resultados apresentados na

Tabela 14:

Tabela 14 - Quadro comparativo dos valores inicial e ótimo de deformada e localização de apoios (caso 1)

	$y_{max}$ [mm]	Localização [m]	Apoio D [m]
<b>Solução inicial</b>	14,287	5,335	10
<b>Melhor solução</b>	0,451	2,901	4,718

A representação gráfica da deformada para a análise estrutural na configuração inicial e após o processo de otimização (Melhor solução).

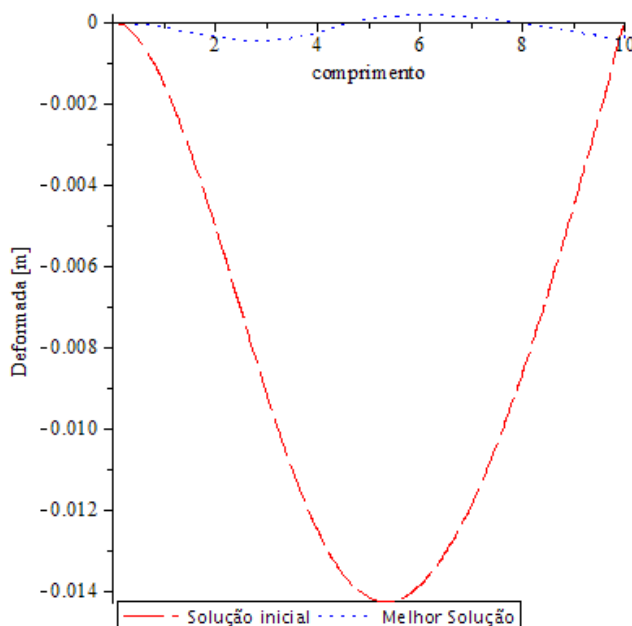


Figura 19 - Deformadas ao longo da viga (caso1)

O Ajuste do Apoio D, quase metade da posição anterior resulta numa redução da deformada de aproximadamente 100%, mas à custa de um aumento do valor da reação no apoio D.

Na Tabela 15 são apresentados os valores das reações nas ligações, bem como o valor do maior momento fletor aplicado a viga nas condições iniciais e após o processo de otimização. O maior valor do momento fletor ocorre  $x = 2,901$  que é dizer que o processo de otimização resulta num impacto significativo na máxima tensão normal na viga.

Tabela 15 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 1)

	$R_A$ [N]	$R_D$ [N]	$M_A$ [N.m]	$M_{max}$ [N.m]
<b>Solução inicial</b>	47.994,41	15.507,59	115.559,10	64.451,24
<b>Melhor solução</b>	8.550,42	54.951,58	11.378,20	10.181,11

## 5.2. Viga simplesmente apoiada (caso 2)

O segundo exemplo em análise refere-se a uma viga simplesmente apoiada carregada com uma força concentrada em  $B$  e um Momento concentrado em  $C$  (ver Figura 20) considerando a ação do peso próprio  $w$ .

O objetivo deste exemplo é localizar as melhores posições para os apoios  $A$  e  $D$  com vista a reduzir a deformada máxima da viga.

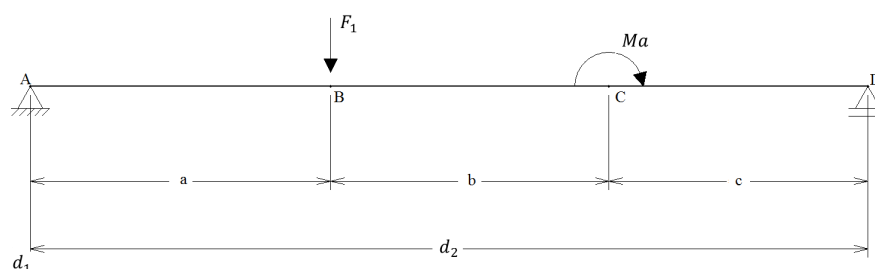


Figura 20 - Viga simplesmente apoiada

Os dados do problema são apresentados na Tabela 16:

Tabela 16 - Dados da viga (caso 2)

$F_1$ [kN]	$M_a$ [kN.m]	$l$ [m]	$w$ [kN/m]	$a = b$ [m]	$c$ [m]
45	10	10	0,725	2,5	5

Dados (parâmetros prescritos):  $E, M_a, F_1, l, I, a, b, c$

Número máximo de troços: 5

Objetivo: minimizar a deformada máxima

Variáveis do projeto:  $d$  (representa as posições dos apoios  $A$  e  $D, d_1$  para  $A$  e  $d_2$  para  $D$ ),

$$d = [d_1, d_2]$$

Restrições:

$$0 \leq d_1 \leq l$$

$$0 \leq d_2 \leq l$$

$$0 < d_1 < d_2 < l$$

(esta restrição impede que os apoios A e D troquem de posição)

- Equações de equilíbrio

$$\sum F_y = 0, \quad A_y - F_1 + D_y - P_{viga} = 0$$

$$\sum M_a = 0, \quad A_y \cdot d_1 - F_1 \cdot a + D_y \cdot d_2 - \frac{P_{viga} \cdot l}{2} - M = 0$$

- Condições de fronteira:

$$M_A = M_D = 0$$

e,

$$y_A = y_D = 0$$

Por outro lado os troços apresentados também estarão sujeitos a restrições geométricas. Assim a função objetivo  $y(x)$  pode ser escrita em função dos parâmetros prescritos e das variáveis do projeto. Para o caso 2, quando os apoios A e D estão nas posições  $d_1 = 0$  e  $d_2 = l$  respetivamente, a função objetivo é expressa da seguinte forma,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < a \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI} - \frac{\frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI}, & a \leq x < a + b \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI} - \frac{\frac{1}{6}F_1(x - a)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI}, & a + b \leq x < d_2 \end{cases} \quad (33)$$

Porém, a medida que se alteram as posições dos apoios A e D o número de troços a analisar aumenta, sendo que a expressão (33) para deformada quando os apoios estão compreendidos por exemplo no intervalo  $0 \leq d_1 < a$  e  $0 \leq d_2 < a$  passa a ser expressa da seguinte forma,



$$y(x) = \begin{cases} \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < d_1 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & d_1 \leq x < d_2 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} +, & d_2 \leq x < a \\ \frac{\frac{1}{6}Dy(x - d_2)^3}{EI} \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} +, & a \leq x < a + b \\ \frac{\frac{1}{6}Dy(x - d_2)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} +, & a + b \leq x < l \\ \frac{\frac{1}{6}Dy(x - d_2)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI} \end{cases} \quad (34)$$

### 5.2.1. Estudo paramétrico: Caso 2

A semelhança do que aconteceu no caso 1 (viga encastrada/Apoiada), a avaliação da influência dos parâmetros do AG inicia-se com o estudo da taxa de mutação, em seguida a taxa de seleção e por último com a modificação da dimensão da população. Este critério seguir-se-á em, todos os outros casos.

### Taxa de mutação:

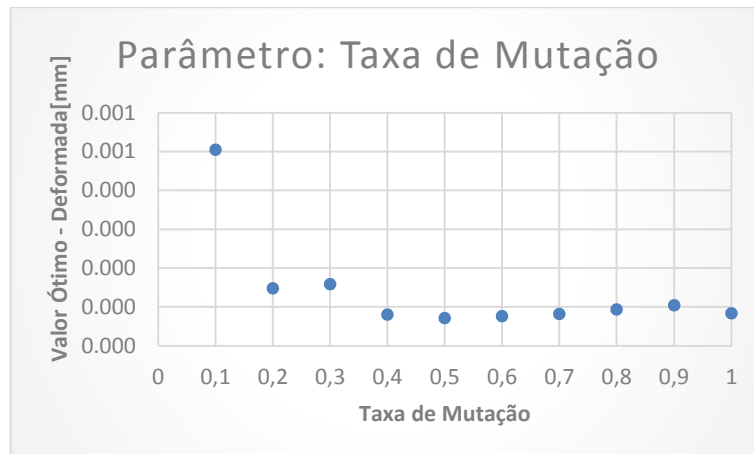


Figura 21 - Estudo Paramétrico viga 2 (Taxa de Mutação)

- Para esta configuração de viga verifica-se que os valores de deformada máxima vão convergindo em torno de um determinado valor ótimo a partir de uma taxa de mutação de 40% até 100% de acordo com os resultados da Figura 21, no entanto diminuir a taxa de mutação prejudica o comportamento do AG sendo que o ideal representado na figura é situar a Taxa de mutação entre os 40-60% resultando na melhoria do desempenho do algoritmo.

### Taxa de seleção:

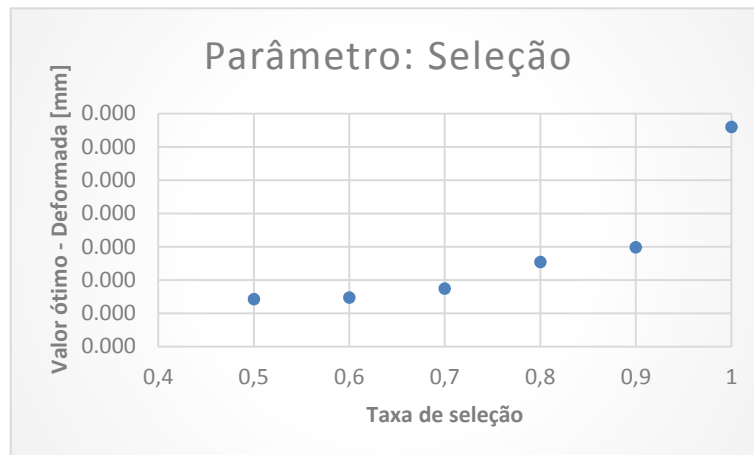


Figura 22 - Estudo Paramétrico viga 2 (Taxa de Seleção)

- De acordo com os resultados apresentados na Figura 22, a taxa de seleção apresenta mínimos interessantes em duas situações: sobrevivendo 50% e 70% dos indivíduos candidatos a progenitores. Neste caso, significa que se escolher a taxa de seleção de 50% existe a garantia de que todos os valores escolhidos são excelentes candidatos por outro lado apresenta-se como vantagem a diminuição do tempo de computação.

### Dimensão da população:

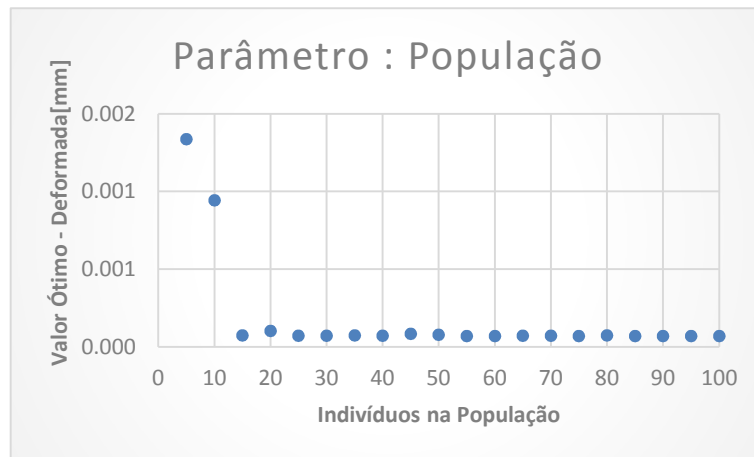


Figura 23 - Estudo Paramétrico viga 2 (População)

- Para pequenas populações o comportamento do algoritmo é mau apresentando uma maior dispersão, ao passo que para populações maiores o comportamento do algoritmo é ótimo no intervalo entre os 35 a 100 indivíduos na população onde se verifica a convergência em torno da melhor solução (ver Figura 23).

Do estudo paramétrico conclui-se que os parâmetros que conduzem o AG ao menor valor de deformada máxima precisam ser ajustadas para as seguintes condições:

- Dimensão da população 60
- Taxa de mutação 0.5
- Taxa de seleção 0.5

Estes valores permitem obter os melhores resultados apresentados na Tabela 17:

Tabela 17 - Quadro comparativo dos valores ótimos de deformada (caso 2)

	$y_{max}$ [mm]	Localização [m]	Apoio A [m]	Apoio D [m]
<b>Solução inicial</b>	22,080	4,574	0	10
<b>Melhor solução</b>	0,069	5,614	2,422	7,229

Na Figura 24 são apresentados as deformadas para a viga antes e depois do processo de otimização.

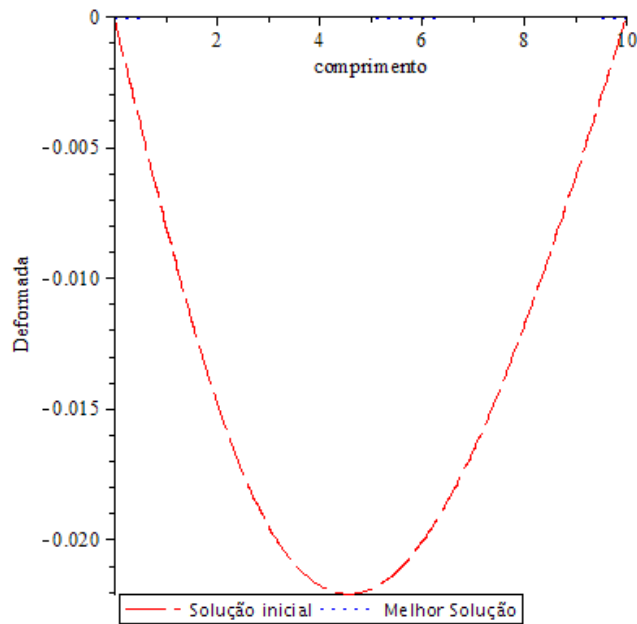


Figura 24 - Deformadas ao longo da viga (caso 2)

À medida que os apoios *A* e *D* se aproximam da posição dos carregamentos, ocorre uma diminuição acentuada do valor da deformada.

Tabela 18 - Quadro comparativo das reações nas ligações e o momento fletor máximo (caso 2)

	$R_A$ [N]	$R_D$ [N]	$M_{max}$ [N.m]
<b>Solução inicial</b>	36.376,00	15.876,00	65.472,54
<b>Melhor solução</b>	<b>45.552,22</b>	6.699,78	3.831,05

Sendo relevante considerar que a diminuição acentuada do máximo momento fletor tem implicações significativas na redução da máxima tensão normal quando se ajusta os apoios para as posições apresentadas na tabela 17.

### 5.3. Viga apoiada em três pontos (caso 3)

O terceiro exemplo em análise apresenta uma viga suportada em três pontos, uma variante do caso 2 (ver Tabela 16), já que o carregamento não foi alterado.

O objetivo deste exemplo é mais uma vez determinar as melhores localizações para os apoios *A*, *B* e *D* com vista a reduzir a máxima deformada da viga.

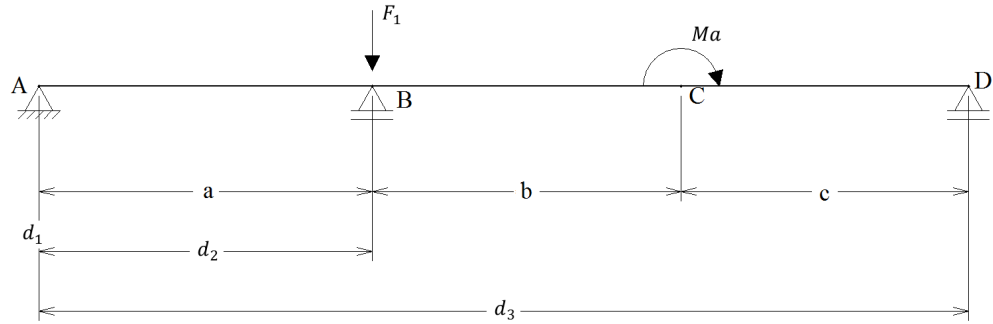


Figura 25 - Viga continua (3 Apoios)

Dados (parâmetros prescritos):  $E, Ma, F_1, l, I, a, b, c, w$

Número máximo de troços: 6

Objetivo: minimizar a deformada máxima

Variáveis do projeto:

$d$  (representa as posições dos apoios  $A, B$  e  $D, d_1$  para  $A, d_2$  para  $B$  e  $d_3$  para  $D$ ),

$$d = [d_1, d_2, d_3]$$

Restrições:

$$0 \leq d_1 \leq l$$

$$0 \leq d_2 \leq l$$

$$0 \leq d_3 \leq l$$

$$0 < d_1 < d_2 < d_3 < l$$

(esta restrição impede que os apoios  $A, B$  e  $D$  troquem de posição)

- Equações de equilíbrio

$$\sum F_y = 0, \quad A_y - F_1 + D_y - P_{viga} + B_y = 0$$

$$\sum M_a = 0, \quad -A_y \cdot d_1 + F_1 \cdot a - D_y \cdot d_3 + \frac{P_{viga} \cdot l}{2} - B_y \cdot d_2 + M = 0$$

- Condições de fronteira:

$$M_A = M_B = M_D = 0$$

e,

$$y_A = y_B = y_D = 0$$

Por outro lado os troços apresentados também estarão sujeitos a restrições geométricas. Assim a função objetivo  $y(x)$  pode ser escrita em função dos parâmetros prescritos e das variáveis do projeto. Neste caso de estudo a expressão (35) representa a função objetivo quando os apoios  $A, B$  e  $D$  estão compreendidos nas posições  $d_1 = 0, d_2 = (a + b)$  e  $d_3 = l$  respetivamente:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < a \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI}, & a \leq x < d_2 \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI}, & d_2 \leq x < l \end{cases} \quad (35)$$

Porém, a medida que se alteram as posições dos apoios  $A$ ,  $B$  e  $D$  o número de troços a analisar aumenta, sendo que a expressão para deformada quando os apoios estão compreendidos por exemplo no intervalo  $0 \leq d_1 < a, a \leq d_2 < (a + b)$  e  $a \leq d_3 < (a + b)$  passa a ser expressa da seguinte forma,

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < d_1 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & d_1 \leq x < a \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & a \leq x < d_2 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} + \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & d_2 \leq x < d_3 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} + \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3}{EI}, & d_3 \leq x < a + b \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{6}Dy(x - d_3)^3}{EI}, & a + b \leq x < l \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} + \frac{\frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{6}Dy(x - d_3)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI} - \frac{\frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} \end{array} \right. \quad (36)$$

### 5.3.1. Estudo paramétrico: Caso 3

#### Taxa de Mutação

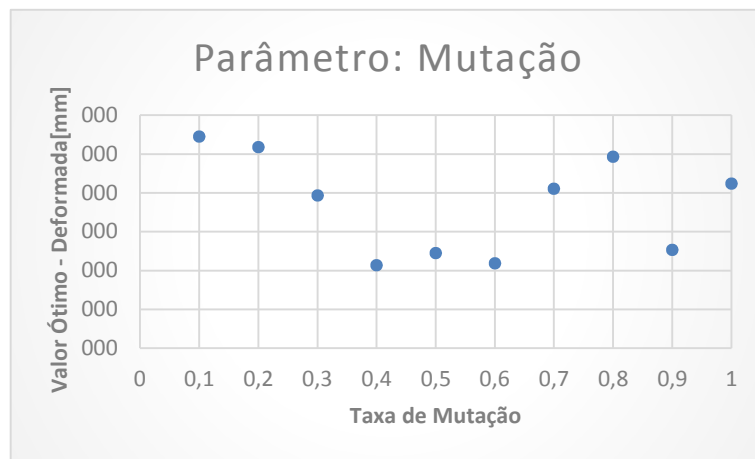


Figura 26 - Estudo Paramétrico viga 3 (Taxa de Mutação)

- Neste caso de estudo a inclusão de um terceiro apoio condiciona as soluções possíveis, razão porque os melhores valores surgem recorrendo a uma taxa de

mutação intermédia. O comportamento do AG melhora significativamente com uma taxa de mutação entre os 40% e os 60%, apesar de existirem outros valores que conduzem a deformada, próximos do valor ótimo. Como a diferença entre os diversos valores para a taxa de mutação de 40-60% não é substancial, a escolha deste valor dependerá do rigor que se pretende ter ou do esforço de computação.

**Taxa de seleção:**

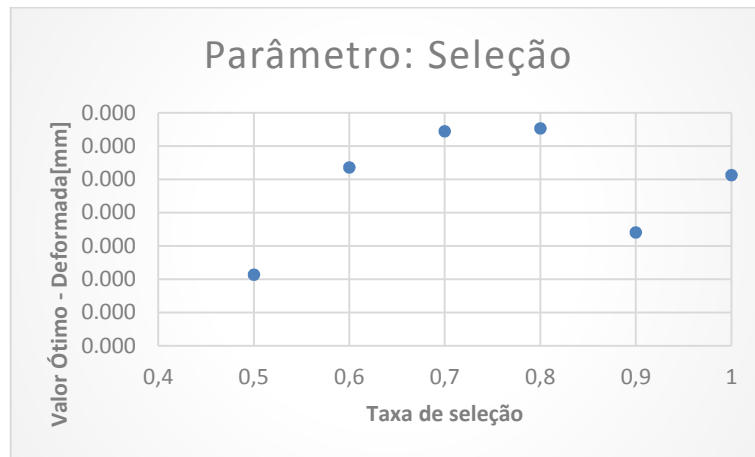


Figura 27 - Estudo Paramétrico viga 3 (Taxa de Seleção)

- Neste caso, verifica-se que utilizar taxas de seleção superior a 50% revela-se má para o comportamento do AG, ou seja existe grande possibilidade de entre os indivíduos que sobrevivem existirem alguns menos aptos. Com esses dados escolhe-se usar o valor de 50% como taxa de seleção. (ver Figura 27).

**Dimensão da população:**

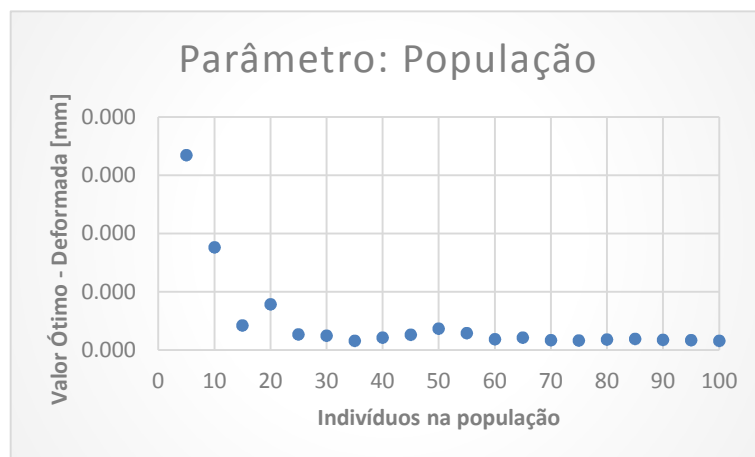


Figura 28 - Estudo Paramétrico viga 3 (População)

- Ao adicionar à estrutura do caso 2 um apoio e tendo em conta que a taxa de mutação encontrada é de 40%, verifica-se que a convergência para um valor ótimo torna-se



difícil para pequenas populações ao passo que para populações maiores o comportamento do algoritmo melhora mas não ao ponto de ocorrer convergência a solução ótima. O menor valor de deformada máxima é encontrado com uma dimensão da população de 35 e outra com 100 indivíduos (ver Figura 28). Para reduzir o esforço de computação, será considerado que a dimensão da população é igual à 35.

Do estudo paramétrico conclui-se que os parâmetros que influenciam o AG resultando no menor valor de deformada devem ser ajustados para as seguintes condições:

- Dimensão da população      35
- Taxa de mutação                0.4
- Taxa de seleção                0.5

Estes valores para os parâmetros permitem obter os seguintes resultados apresentados na Tabela 19:

Tabela 19 - Quadro comparativo dos valores ótimos da deformada (caso 3)

	$y_{max}$ [mm]	Localização [m]	Apoio A [m]	Apoio B [m]	Apoio D [m]
<b>Solução inicial</b>	2,350	2,363	0	5	10
<b>Melhor solução</b>	0,016	5,531	2,373	6,391	9,430

A Figura 29 apresenta as deformadas para a viga antes e depois do processo de otimização,

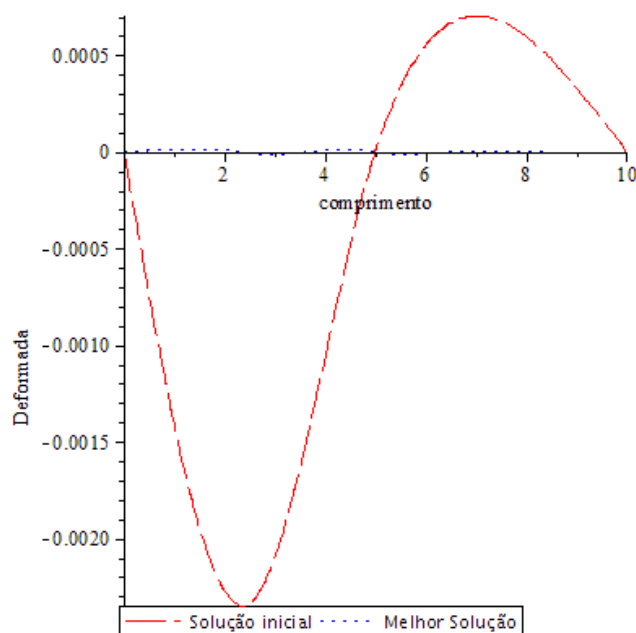


Figura 29 - Deformadas ao longo da viga (caso 3)

Intuitivamente, o resultado esperado teria de ser melhor que o anterior ou seja a inclusão de um terceiro apoio melhora substancialmente o comportamento da deformada da viga, por outro lado a otimização da deformada através da redistribuição dos apoios reduz o valor ótimo de deformada na ordem do micrómetro.

Tabela 20 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 3)

	$R_A$ [N]	$R_B$ [N]	$R_D$ [N]	$M_{max}$ [N.m]
<b>Antes</b>	18.641,00	35.470,00	- 1.859,00	42.027,03
<b>Depois</b>	44.430,64	6.729,25	1.092,11	- 2.575,16

A semelhança do que ocorreu nos casos de estudo anteriores ocorre em todas as situações uma redução muito significativa do momento fletor máximo que como se sabe tem um efeito linear com a máxima tensão normal que a viga pode suportar naquelas condições.

#### 5.4. Viga apoiada em quatro pontos (caso 4)

O quarto caso em análise consiste num caso em que se adiciona ao problema do caso 3 mais um apoio (ver Figura 30), continuando a considerar os mesmos carregamentos (ver Tabela 16).

O objetivo deste exemplo é localizar a melhor posição para o apoio  $A, B, C$  e  $D$  com vista a reduzir a deformada da viga.

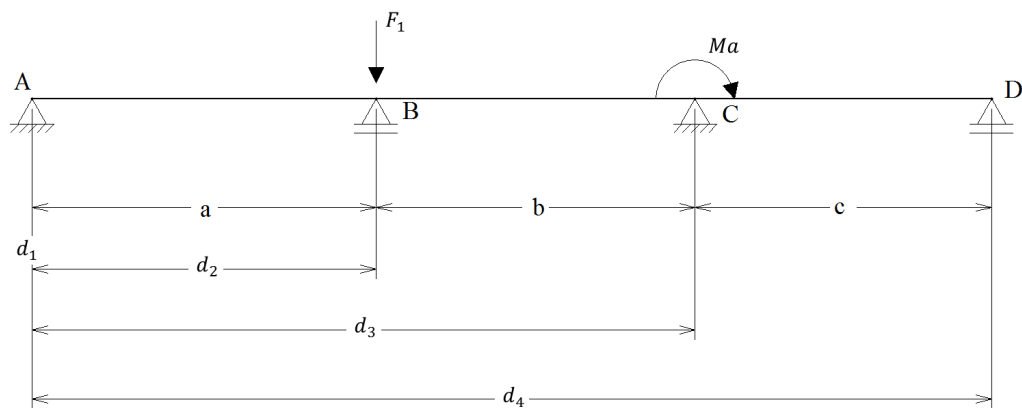


Figura 30 - Viga Contínua (4 apoios)

Dados (parâmetros prescritos):  $E, M, F_1, l, I, a, b, c, w$

Número máximo de troços: 7

Objetivo: minimizar a deformada máxima.

Variáveis de projeto:  $d$  (representa as posições dos apoios  $A, B, C$  e  $D, d_1$  para  $A, d_2$  para  $B, d_3$  para  $C$  e  $d_4$  para  $D$ ),

$$d = [d_1, d_2, d_3, d_4]$$

Restrições:

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_1 \leq l \\ 0 &\leq d_2 \leq l \\ 0 &\leq d_3 \leq l \\ 0 &\leq d_4 \leq l \\ 0 &< d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < l \end{aligned}$$

(esta restrição impede que os apoios  $A, B, C$  e  $D$  troquem de posição)

- Equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, \quad A_y - F_1 + D_y - P_{viga} + B_y + C_y = 0 \\ \sum M_a = 0, \quad -A_y \cdot d_1 + F_1 \cdot a - D_y \cdot d_4 + \frac{P_{viga} \cdot l}{2} - B_y \cdot d_2 - C_y \cdot d_3 + M = 0 \end{aligned}$$

- Condições de fronteira:

$$M_A = M_B = M_C = M_D = 0$$

e,

$$y_A = y_B = y_C = y_D = 0$$

Por outro lado os troços apresentados também estarão sujeitos a restrições geométricas. Assim a função objetivo  $y(x)$  pode ser escrita em função dos parâmetros prescritos e das variáveis do projeto. Para este caso de estudo 3, a expressão (37) representa a função objetivo quando os apoios  $A, B, C$  e  $D$  estão compreendidos nas posições  $d_1 = 0, d_2 = a, d_3 = (a + b)$  e  $d_4 = l$  respetivamente:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < d_2 \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3}{EI}, & d_2 \leq x < d_3 \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2 + \frac{1}{6}Cy(x - d_3)^3}{EI}, & d_3 \leq x < d_4 \end{cases} \quad (37)$$

Porém, à medida que se alteram as posições dos apoios  $A, B, C$  e  $D$  o número de troços a analisar aumenta. Como exemplo apresenta-se a expressão para deformada quando os apoios

estão compreendidos no intervalo  $0 \leq d_1 < a, a \leq d_2 < (a + b), a \leq d_3 < (a + b)$  e  $(a + b) \leq d_4 < l$ ,

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < d_1 \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & d_1 \leq x < a \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} -, & a \leq x < d_2 \\ \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} +, & d_2 \leq x < d_3 \\ \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3}{EI} \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} -, & d_3 \leq x < a + b \\ \frac{\frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{6}Cy(x - d_3)^3}{EI} & (38) \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} +, & a + b \leq x < d_4 \\ \frac{\frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{6}Cy(x - d_3)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI} \\ \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4}{EI} \\ \frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3 - \frac{1}{6}F_1(x - a)^3}{EI} +, & d_4 \leq x < l \\ \frac{\frac{1}{6}By(x - d_2)^3 + \frac{1}{6}Cy(x - d_3)^3 + \frac{1}{2}Ma(x - (a + b))^2}{EI} \\ \frac{-\frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Dy(x - d_4)^3}{EI} \end{array} \right.$$

### 5.4.1. Estudo paramétrico: Caso 4

#### Taxa de mutação

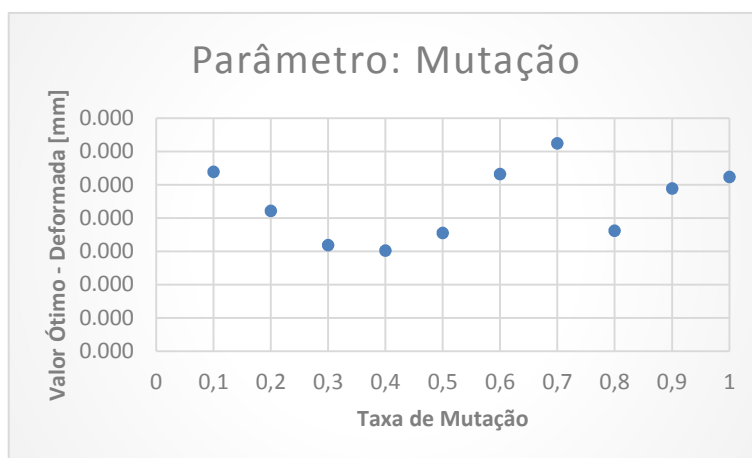


Figura 31 - Estudo Paramétrico viga 4 (Taxa de Mutação)

- Nesta fase as hipóteses de melhorar a deformada é reduzida se tiver em consideração o valor de deformada antes da otimização (0,2 mm). Esta dificuldade é interpretada pelo AG e naturalmente a taxa de mutação vai convergindo para o valor ótimo (ver Figura 31) mais precisamente entre 30 e 40%. O efeito de aumentar a taxa de mutação acima dos 40% aumenta a dispersão para valores muito afastados da solução ótima. Nestas condições uma taxa de mutação de 40% será o valor escolhido.

#### Taxa de seleção:

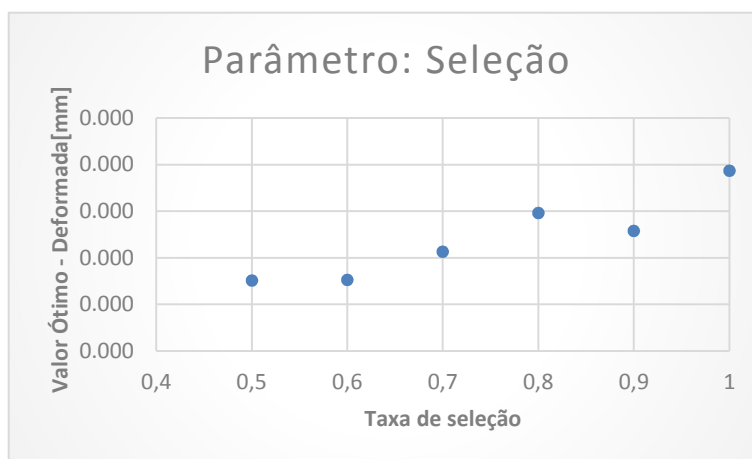


Figura 32 - Estudo Paramétrico viga 4 (Taxa de Seleção)

- De acordo com a Figura 32 o número de indivíduos que sobrevive obedece a uma taxa de seleção de 50 ou 60%, a semelhança da consideração feita anteriormente usar

uma taxa de seleção de 50% é suficiente garantia de que todos os indivíduos sobrevivente são aptos para gerarem descendentes. Verifica-se também que usar taxa de mutação superior a 60% seria prejudicial para o comportamento do AG na medida que produziria soluções cada vez mais afastadas do melhor resultado.

### Dimensão da população:

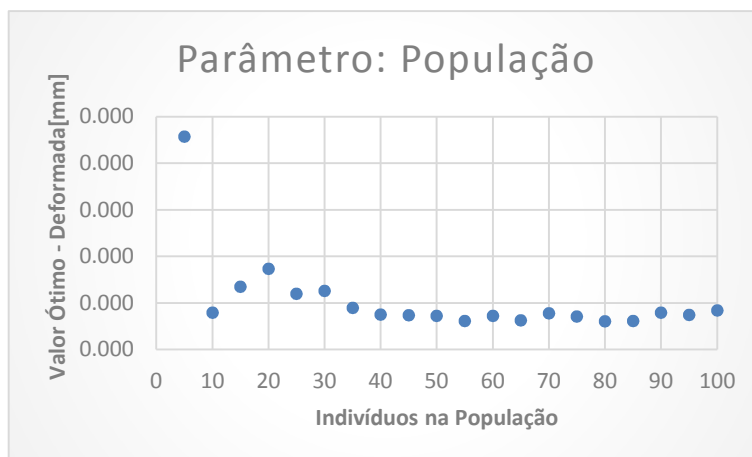


Figura 33 - Estudo Paramétrico viga 4 (População)

- O impacto de fazer variar a dimensão da população apresenta resultados razoáveis para populações inferiores a 40% ao passo que para populações superiores verifica-se que os valores vão oscilando em torno de um mínimo de deformada máxima (ver *Figura 33*).

Do estudo paramétrico conclui-se que os parâmetros que influenciam o AG resultando no menor valor de deformada devem ser ajustados para as seguintes condições:

- Dimensão da população 85
- Taxa de mutação 0.4
- Taxa de seleção 0.5

Estes valores dos parâmetros permitem obter os resultados apresentados na Tabela 21:

Tabela 21 - Quadro comparativo dos valores ótimos da deformada (caso 4)

	$y_{max}$ [m]	Localização [m]	Apoio A [m]	Apoio B [m]	Apoio C [m]	Apoio D [m]
<b>Solução inicial</b>	0,239	7,404	0	2.5	5	10
<b>Melhor solução</b>	0,012	3,061	2,399	3,899	6,215	9,698

A Figura 34 apresenta as deformadas para a viga antes e depois do processo de otimização,

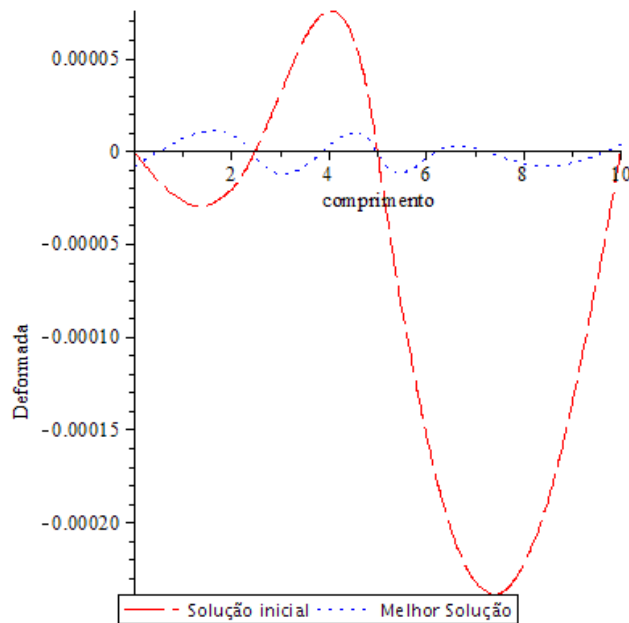


Figura 34 - Deformada ao longo da viga (caso 4)

Mantendo as condições do caso 3 e incrementando um apoio, o efeito no comportamento da deformada é substancialmente melhor (*Tabela 19 e Tabela 21*), por outro lado, uma comparação entre os valores máximos de deformada transversal do caso 3 versus o caso 4 nas suas configurações iniciais revela uma melhoria só superada pelos resultados após a redistribuição dos apoios na viga.

Tabela 22 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 4)

	$R_A$ [N]	$R_B$ [N]	$R_C$ [N]	$R_D$ [N]	$M_{max}$ [N.m]
<b>Solução inicial</b>	1.543,03	42.087,30	6.534,98	2.086,69	2.973,44
<b>Melhor Solução</b>	45.746,13	- 2.109,19	7.558,73	1.056,32	1.628,19

Segundo a tabela 22 o efeito da distribuição dos apoios na viga resulta numa redução do momento fletor máximo na estrutura que é dizer que ocorre uma melhoria significativa na tensão máxima da viga.

### 5.5. Viga apoiada em três pontos com carregamento distribuído (caso 5)

Neste exemplo a viga contínua é carregada com uma carga distribuída retangular de intensidade  $w_0(x)$  aplicado entre  $B$  e  $C$  e uma carga distribuída triangular de intensidade máxima  $w_1(x)$  aplicado entre os pontos  $D$  e  $E$ , sujeita ao peso próprio (ver Figura 35). O primeiro impacto da configuração do problema ocorre na definição da função objetivo.

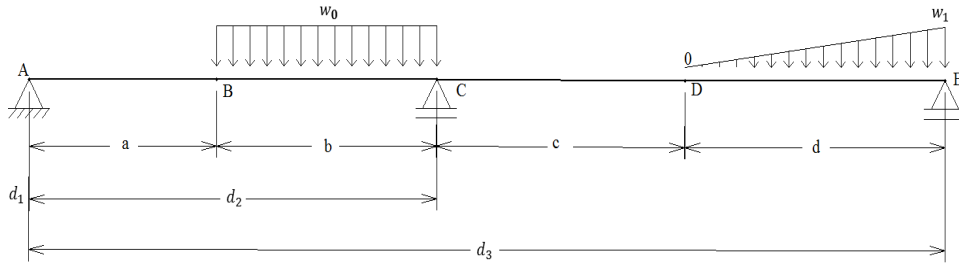


Figura 35 - Viga continua com carregamento distribuído

Tal como se referiu anteriormente, quando temos cargas distribuídas que não ocorrem até ao final da viga, na escrita das equações universais há que compensar o seu efeito nos troços onde de facto não existem. Assim é necessário introduzir uma carga adicional de sinal contrário. A metodologia para ultrapassar este problema, foi referida no ponto 0. Os dados do problema são apresentados na tabela seguinte:

Tabela 23 - Dados da viga 5 (caso 5)

$w_0$ [kN/m]	$w_1$ [kN/m]	$l$ [m]	$w$ [kN/m]	$a = b = c = d$ [m]
45	45	10	0,725	2,5

O objetivo é localizar a melhor posição para os apoios  $A$ ,  $C$  e  $E$  com vista a reduzir a deformada da viga.

Dados (parâmetros prescritos):  $E, w_0, w_1, l, I, w, a, b, c, e$

Número máximo de troços: 7

Objetivo: minimizar a deformada máxima

Variáveis do projeto:

$d$  (representa as posições dos apoios  $A, C$  e  $E$ ,  $d_1$  para  $A$ ,  $d_2$  para  $C$  e  $d_3$  para  $E$ ),

$$d = [d_1, d_2, d_3]$$

Restrições:

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_1 \leq l \\ 0 &\leq d_2 \leq l \\ 0 &\leq d_3 \leq l \\ 0 &< d_1 < d_2 < d_3 < l \end{aligned}$$

(esta restrição impede que os apoios  $A, C$  e  $E$  troquem de posição)

- Equações de equilíbrio

$$\sum F_y = 0, \quad A_y - F_1 - P_{viga} + B_y + C_y - q_1 - q_2 = 0$$



$$\sum M_a = 0, \quad -A_y \cdot d_1 + q_3 \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - C_y \cdot d_3 + \frac{P_{viga} \cdot l}{2} - B_y \cdot d_2 + q_2 \cdot \left((l-d) + \frac{2 \cdot d}{3}\right) = 0$$

- Condições de fronteira:

$$M_A = M_B = M_D = 0$$

e,

$$y_A = y_B = y_D = 0$$

Por outro lado os troços apresentados também estarão sujeitos a restrições geométricas. Assim a função objetivo  $y(x)$  pode ser escrita em função dos parâmetros prescritos e das variáveis do projeto. A semelhança dos casos anteriores a expressão (39) representa a função objetivo quando os apoios  $A$   $C$  e  $E$  estão compreendidos nas posições  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = (a + b)$  e  $d_3 = l$  respetivamente:

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x-d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < a \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x-d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x-a)^4}{EI} +, & a \leq x < d_2 \\ \quad + \frac{-\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4}{EI} \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x-d_1)^3 - \frac{w1}{24} \cdot (x-a)^4}{EI} -, & d_2 \leq x < l-d \\ \quad - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 - \frac{w1}{24} \cdot (x-(a+b))^4 +}{EI} \\ \quad + \frac{\frac{1}{6}By(x-d_2)^3}{EI} \\ \frac{EI \cdot \theta_A \cdot x + \frac{1}{6}Ay(x-d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x-a)^4}{EI} -, & l-d \leq x < d_3 \\ \quad - \frac{\frac{1}{24} \cdot w \cdot x^4 + \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x-(a+b))^4}{EI} + \\ \quad + \frac{\frac{1}{6}By(x-d_2)^3 - \frac{1}{120} \cdot \frac{w2(x-(l-d))^5}{e}}{EI} \end{array} \right. \quad (39)$$

Porém, à medida que se alteram as posições dos apoios  $A$   $C$  e  $E$  o número de troços a analisar aumenta. Como exemplo, apresenta-se a expressão para deformada quando os apoios estão compreendidos no intervalo  $0 \leq d_1 < a$ ,  $0 \leq d_2 < a$  e  $(a + b) \leq d_3 < (l - d)$ ,

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll}
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4}{EI}, & 0 \leq x < d_1 \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI}, & d_1 \leq x < d_2 \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI} +, & d_2 \leq x < a \\
\frac{\frac{1}{6}By(x - d_1)^3}{EI} \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI} +, & a \leq x < a + b \\
\frac{\frac{1}{6}By(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - a)^4}{EI} \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI} +, & a + b \leq x < d_3 \\
\frac{\frac{1}{6}By(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - a)^4}{EI} - \\
\frac{\frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - (a + b))^4}{EI} \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI} +, & d_3 \leq x < l - d \\
\frac{\frac{1}{6}By(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - a)^4}{EI} - \\
\frac{\frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - (a + b))^4 + \frac{1}{6}Cy(x - d_1)^3}{EI} \\
\frac{EI \cdot y_A + EI \cdot \theta_A \cdot x - \frac{w}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{6}Ay(x - d_1)^3}{EI} +, & l - d \leq x < l \\
\frac{\frac{1}{6}By(x - d_1)^3 - \frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - a)^4}{EI} - \\
\frac{\frac{1}{24} \cdot w1 \cdot (x - (a + b))^4 + \frac{1}{6}Cy(x - d_1)^3}{EI} - \\
\frac{\frac{1}{120} \cdot \frac{w2(x - (a + b + c))^5}{d}}{EI}
\end{array} \right. \quad (40)$$

### 5.5.1. Estudo paramétrico: Caso 5

#### Taxa de mutação:

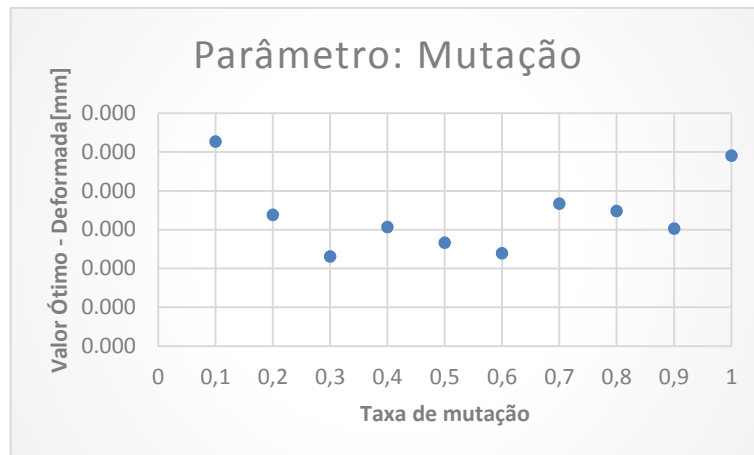


Figura 36 - Estudo Paramétrico viga 5 (Taxa de Mutação)

- Neste caso de estudo verifica-se que os melhores valores de deformada ocorrem com taxas de mutação de 30,50 e 60 %. A dispersão verificada no gráfico sugere que para valores de taxa de mutação diferentes dos mencionados implicará que as soluções obtidas serão más. Nestas condições taxa de mutação de 30% será é a ideal para o algoritmo.

#### Taxa de seleção:

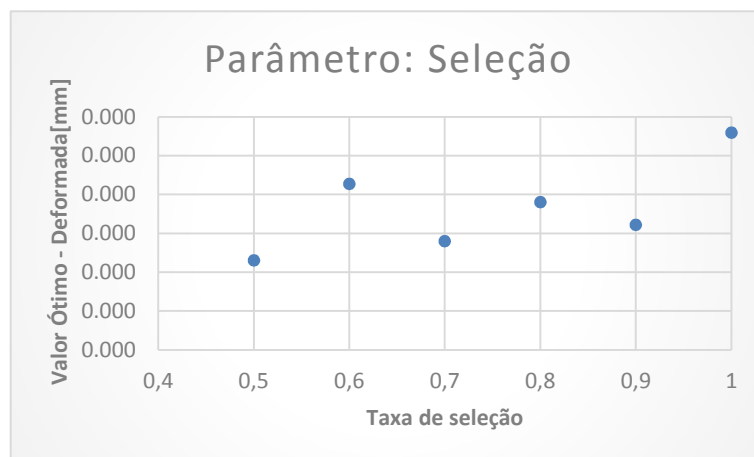


Figura 37 - Estudo Paramétrico viga 5 (Taxa de Seleção)

- O impacto da taxa de seleção acima dos 50% (ver Figura 37) é negativo para o comportamento do AG, afastando-se as soluções do menor valor encontrado quando

se garante uma sobrevivência de 50% dos melhores indivíduos candidatos a progenitores.

**Dimensão da população:**

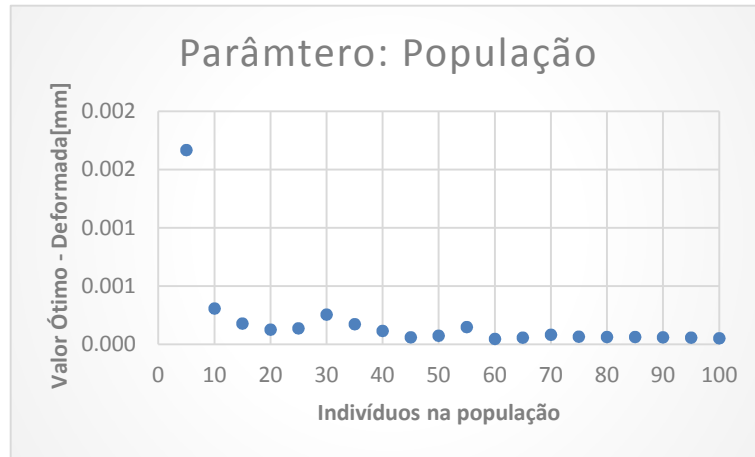


Figura 38 - Estudo Paramétrico viga 5 (População)

- Para este caso de estudo, verifica-se uma dispersão dos valores ótimos de deformada ( Figura 38) partindo de uma dimensão populacional igual a 10. Apesar deste facto os melhores valores de deformada máxima vão oscilando em torno de uma solução ótima que atinge o seu mínimo quando se considera uma dimensão igual a 60 indivíduos.

Do estudo paramétrico conclui-se que os parâmetros que influenciam o AG resultando no menor valor de deformada devem ser ajustadas para as seguintes condições:

- Dimensão da população      60
- Taxa de mutação                0.3
- Taxa de seleção                0.5

Assim, estes valores dos parâmetros do AG permitem obter os resultados apresentados na Tabela 24:

Tabela 24 - Quadro comparativo dos valores da deformada (caso 5)

	$y_{max}$ [m]	Localização [m]	Apoio A [m]	Apoio C [m]	Apoio E [m]
<b>Solução inicial</b>	6,380	2,578	0	5	10
<b>Melhor solução</b>	0,046	8,743	2,805	4,396	9,155

A Figura 39 apresenta as deformadas ao longo da viga antes e depois do processo de otimização,

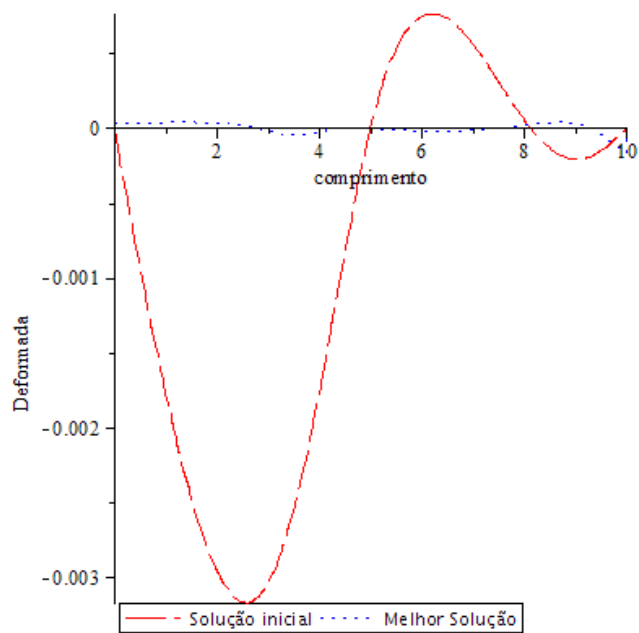


Figura 39 - Deformada ao longo da viga (caso 5)

Pode ser considerado como o melhor exemplo para verificação da influência de alterar não só as posições nos apoios mas também do tipo de carregamento, mantendo as mesmas propriedades geométricas.

Tabela 25 - Quadro comparativo dos esforços internos e o momento fletor máximo (caso 5)

	$R_A$ [N]	$R_C$ [N]	$R_E$ [N]	$M_{max}$ [N.m]
<b><i>solução inicial</i></b>	19.480,13	118.683,80	38.230,13	47.539,97
<b><i>Melhor solução</i></b>	49.367,37	68.093,47	58.541,16	7.397,58

Neste caso de estudo verifica-se que a redistribuição dos apoios na viga resulta numa distribuição equilibrada dos esforços internos na viga, no mesmo sentido considera-se que ocorre uma melhoria significativa do momento fletor máximo.



## 6. Estudo comparativo: Operadores do Algoritmo Genético

As soluções apresentadas no capítulo 5 foram obtidas tendo como base um algoritmo genético simples, composto pelos seguintes elementos: seleção por roleta, cruzamento em um ponto único e mutação uniforme. Os resultados obtidos foram alvos de comparação recorrendo as soluções obtidas no cálculo estrutural para cada caso de estudo.

Neste capítulo será apresentada uma análise dos valores obtidos, fazendo variar os operadores do AG apresentados na Tabela 26 e as soluções ótimas obtidas serão alvo de comparação dentre as possíveis combinações dos operadores genéticos.

Tabela 26 - Operadores do AG

<b>Operador</b>		
<b>Seleção</b>	<b>Cruzamento</b>	<b>Mutação</b>
Natural	Um ponto	Uniforme
Torneio	Dois pontos	Não Uniforme
Roleta	Uniforme	

Uma vez que o AG é composto pelos três operadores, encontrar uma relação que permita compará-los não é simples.

Para facilitar à análise são criadas duas relações entre operadores tendo como base o tipo de mutação. Na primeira relação utiliza-se a mutação uniforme colocada ao centro (ver a Figura 40), em que o AG é composto por exemplo por seleção natural – cruzamento em dois pontos – mutação uniforme. Conserva-se a hierarquia dos operadores nos AGs em que o cruzamento antecede a mutação.



Figura 40 - Rela o entre operadores genéticos (Muta o Uniforme)

Na segunda rela o, a base   a muta o não uniforme, conforme a Figura 41 e o modelo a ser seguido   similar ao apresentado anteriormente



Figura 41 - Rela o entre operadores genéticos (não Uniforme)

Em ambas situa es, a análise inicia-se de uma configura o base composta pelo operador de sele o por roleta, cruzamento em ponto único e muta o uniforme.



## 6.1. Resultados

Os valores apresentados neste capítulo representam os valores de deformada máxima obtida, para os casos de estudo definidos no capítulo 5, com uma dimensão populacional de 60 indivíduos e 60 iterações. Para cada caso será considerado a taxa de mutação de 0.2 e probabilidade de seleção de 0.5.

### 6.1.1. Viga Encastrada-apoiada

Para o caso 1 com uma variável de projeto, verifica-se que os valores ótimos de deformada máxima convergem praticamente em torno do mesmo valor em todas as combinações possíveis (ver Tabela 27). A combinação que produz a melhor solução para este caso é obtida recorrendo ao mecanismo de seleção Natural e mutação não uniforme para todos os casos de cruzamento.

Tabela 27 - Performance do Algoritmo Genético viga 1

<i>Mutação Uniforme</i>			
	Cruzamento ponto único	Cruzamento duplo ponto	Cruzamento Uniforme
<i>Seleção Natural</i>	0,46757	0,45154	<b>0,45153</b>
<i>Seleção Torneio</i>	0,45703	0,47238	0,53559
<i>Seleção Roleta</i>	0,46757	0,47238	0,46102
<i>Mutação não Uniforme</i>			
<i>Seleção Natural</i>	<b>0,45153</b>	<b>0,45153</b>	<b>0,45153</b>
<i>Seleção Torneio</i>	0,53559	0,75136	0,45703
<i>Seleção Roleta</i>	<b>0,45153</b>	<b>0,45153</b>	0,46102

Verifica-se ainda que a utilização de um esquema de mutação não uniforme tem um efeito muito significativo para obtenção da melhor solução. As seleções natural e por roleta apresentam um melhor desempenho nestas condições não sendo tão marcante o operador de cruzamento.

### 6.1.2. Viga simplesmente apoiada

Para o caso 2 com duas variáveis de projeto, verifica-se melhor desempenho do AG com as seleções por roleta e natural, sendo que a melhor solução é obtida com esquema de cruzamento em dois pontos.

Tabela 28 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 2

<i>Mutação Uniforme</i>			
	Cruzamento ponto único	Cruzamento duplo ponto	Cruzamento Uniforme
<i>Seleção Natural</i>	<b>0,06946</b>	0,07255	0,21876
<i>Seleção Torneio</i>	0,10535	0,18065	0,10535
<i>Seleção Roleta</i>	0,07241	0,0699	0,08596

<i>Mutação não Uniforme</i>			
<i>Seleção Natural</i>	0,07026	<b>0,0685</b>	<b>0,06927</b>
<i>Seleção Torneio</i>	0,37559	0,18065	0,37559
<i>Seleção Roleta</i>	0,07732	0,06853	0,07251

Neste caso de estudo que considera duas variáveis de projeto, verifica-se que o impacto da mutação não uniforme continua a ser significativo, mas menos expressivo quando comparado com o caso anterior

### 6.1.3. Viga apoiada em três pontos (caso 3)

Considerando agora o caso 3 onde o número de variáveis de projeto é igual a 3, verifica-se uma convergência dos valores mínimos de menor deformada máxima quando se utiliza a seleção natural associado aos operadores de cruzamento em ponto único e mutação uniforme. Ao passo que no caso estudado anteriormente (caso 1) era irrelevante a escolha do operador de cruzamento, o comportamento do AG para as combinações possíveis (entre os operadores) deixa de convergir especialmente porque o número de iterações e a dimensão da população escolhidas não foram suficientes.

Tabela 29 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 3

<i>Mutação Uniforme</i>			
	Cruzamento ponto único	Cruzamento duplo ponto	Cruzamento Uniforme
<i>Seleção Natural</i>	<b>0,01573</b>	0,05286	ND
<i>Seleção Torneio</i>	0,04426	<b>0,02786</b>	0,06936
<i>Seleção Roleta</i>	0,06098	0,03075	0,05215
<i>Mutação não Uniforme</i>			
<i>Seleção Natural</i>	0,0543	0,03181	0,05179
<i>Seleção Torneio</i>	0,06936	0,10415	<b>0,04426</b>
<i>Seleção Roleta</i>	0,05146	0,05428	0,0518

#### 6.1.4. Viga apoiada em 4 pontos (caso 4)

O resultado desta simulação é apresentado na Tabela 30. Neste caso são consideradas 4 variáveis de projeto, e como se mantém o mesmo comprimento  $L$  da viga o espaço de busca para indivíduos ótimos é mais limitado.

Os operadores de seleção por roleta e cruzamento em um e dois pontos e mutação uniforme são os escolhidos por apresentarem valores mínimos de deformada máxima.

Tabela 30 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 4

<i>Mutação Uniforme</i>			
	Cruzamento ponto único	Cruzamento duplo ponto	Cruzamento Uniforme
<i>Seleção Natural</i>	0,01645	0,01545	ND
<i>Seleção Torneio</i>	0,02982	0,04891	0,02962
<i>Seleção Roleta</i>	0,01628	0,02785	ND
<i>Mutação não Uniforme</i>			
<i>Seleção Natural</i>	<b>0,01156</b>	<b>0,01521</b>	ND
<i>Seleção Torneio</i>	0,02982	0,06871	0,04891
<i>Seleção Roleta</i>	<b>0,01156</b>	<b>0,01521</b>	<b>0,014</b>

No entanto e a semelhança do caso 1 o esquema de mutação não uniforme tem um efeito significativo na obtenção do melhor valor de deformada máxima para o problema.

### **6.1.5. Viga apoiada em três pontos com carregamento distribuído (caso 5)**

Este problema é similar ao apresentado anteriormente com a principal alteração a residir no carregamento aplicado mantendo-se o mesmo número de variáveis de projeto. O resultado desta simulação é apresentado na Tabela 31. Verifica-se que os valores mínimos de deformada máxima são obtidos considerando o esquema de cruzamento em duplo ponto em todos os casos de mutação, a exceção do esquema de seleção por torneio. Porém a melhor solução ocorre no mecanismo de seleção natural mas usando a técnica de mutação uniforme com o cruzamento em duplo ponto.

Tabela 31 - Performance do Algoritmo Genético - Viga 5

<i>Mutação Uniforme</i>			
	Cruzamento ponto único	Cruzamento duplo ponto	Cruzamento Uniforme
<i>Seleção Natural</i>	0,16353	<b>0,05</b>	ND
<i>Seleção Torneio</i>	0,25949	0,28929	0,25949
<i>Seleção Roleta</i>	0,12326	0,09312	0,15497
<i>Mutação não Uniforme</i>			
<i>Seleção Natural</i>	<b>0,07581</b>	0,07746	<b>0,11787</b>
<i>Seleção Torneio</i>	0,43114	0,25041	0,43114
<i>Seleção Roleta</i>	0,14803	0,22619	0,17367



## 7. Conclusão

Este trabalho concentrou-se na otimização estrutural, analisando o comportamento da deformada da linha elástica de vigas prismáticas em função da posição dos seus apoios, utilizando para o efeito os algoritmos genéticos.

Como primeiro objectivo a ser atingido encontrava-se a codificação da técnica dos AGs. Neste contexto, os problemas de teste 1 e 2 serviram para verificar o comportamento do AG ao lidar com funções conhecidas de uma ou duas variáveis de projeto.

Adicionalmente e como objetivo paralelo, tinha-se a codificação de uma função objetivo capaz de avaliar o comportamento da viga quando se alterassem repetidamente as posições dos apoios o que implica dizer que ocorreria uma alteração constante das restrições impostas ao projeto. Para o efeito recorreu-se às equações universais como método de cálculo da linha elástica em função dos carregamentos e das propriedades materiais e geométricas da viga. Um pressuposto adicional correspondeu a considerar que todos os possíveis carregamentos seriam exclusivamente transversais.

Uma vez codificada a função objetivo para as cinco configurações de vigas através das equações universais realizou-se o estudo paramétrico. Verificou-se que foram as taxas de mutação entre os 30-60% que apresentaram melhores resultados, acima destes valores submetiam o algoritmo a uma excessiva aleatoriedade, por exemplo admite-se provavelmente que genes bem adaptados fossem substituídos. Uma outra consideração do estudo paramétrico demonstrou, na generalidade dos casos estudados que a utilização de populações inferiores a 35 indivíduos resulta em resultados piores e pouco significativos para encontrar o melhor resultado, surgindo como bom indicador considerar que populações de 40-60 indivíduos. Por outro, lado tal como acontece na natureza onde os seres vivos tem um probabilidade de 50-50 de sobrevivência, ficou claro que o uso de valores de taxa de seleção acima dos 50% na maioria do casos resulta em soluções cada vez mais afastadas do *Melhor* resultado.

As representações das menores deformadas máximas ao longo da viga, apresentadas no capítulo 5 são esclarecedoras do efeito obtido com o processo de otimização utilizando os AGs na melhoria do comportamento da linha elástica face aos valores obtidos na análise estrutural. Apesar do número de apoios introduzidos (caso 1-4) garantirem uma redução da deformada, o AG apresentou melhores valores do que estes em todos os casos estudados (ver *Tabela 32*). O estudo realizado assume-se diferente das análises realizadas até então no

sentido de que o sucesso na redução da deformada máxima é conseguido não pela imposição de mais apoios ao problemas mas sim através do ajuste da localização dos apoios existentes.

Tabela 32 - Apresentação dos resultados finais

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>	<b>Caso 4</b>	<b>Caso 5</b>
<b>Solução inicial</b>	14,287	22,080	2,350	0,239	6,381
<b>Melhor Solução</b>	<b>0,452</b>	<b>0,069</b>	<b>0,016</b>	<b>0,012</b>	<b>0,046</b>
<b><i>Performance (redução)</i></b>	<b>96,8%</b>	<b>99,7%</b>	<b>99,3%</b>	<b>95,0%</b>	<b>99,3%</b>

Nestes trabalhos foram apresentados 8 operadores genéticos (três operadores de seleção, três operadores de cruzamento e dois operadores de mutação), com a finalidade de analisar o comportamento do algoritmo genético na busca da solução ótima para os casos de vigas em estudo. Sendo prematuro tirar conclusões de natureza universal, é no entanto adequado salientar que em cada processo de otimização há sempre necessidade de avaliar a influência dos diferentes parâmetros e operadores. A cada função objetivo e restrições inerentes corresponde sempre uma abordagem mais adequada.

Porém o estudo destes operadores forçosamente leva-nos a algumas considerações:

- Operador de Seleção: Constatou-se que o operador de seleção independentemente do método utilizado é importante para manter o algoritmo dentro do espaço de busca, porém a opção por um método de seleção dependerá de factores como o esforço de computação. Algumas considerações sobre este operador:
  - A seleção por torneio mostrou ser mais estável que os demais esquemas de seleção abordados na medida em que, os valores obtidos através deste esquema são aproximadamente iguais, esta estabilidade deve-se ao facto de que todos os indivíduos presentes são forçados a competirem entre si, e selecionados para a fase seguinte apenas os melhores. A medida que as iterações vão ocorrendo os indivíduos vão adquirindo características muito semelhantes. No entanto, esta estabilidade é a custa do tempo de processamento do algoritmo e como verificado em alguns casos com uma solução ótima menor que os outros operadores. Porém alguns estudos têm apresentado resultados excelentes no uso deste método quando associados a uma prévia seleção (ver Haupt & Haupt (1998)).
  - A seleção natural é um método puramente aleatório, a principal diferença dentro os demais é que, não existe um controlo direto sobre ele por parte do



utilizador, sendo sempre necessário que haja a pré-seleção. No entanto este método combinado com os outros operadores genéticos de cruzamento e seleção está na origem das melhores soluções para os problemas estudados.

- A maioria das referências apresentadas neste trabalho utiliza o método de seleção por roleta, uma vez que este permite um controlo maior sobre a forma como os indivíduos são escolhidos para serem progenitores quer seja a partir do valor de cada indivíduo ou através da posição onde este estará colocado. À solução ótima encontrada está em algumas situações melhor que a solução apresentada pelo mecanismo de seleção natural. No entanto, à semelhança do método anterior será sempre necessário fazer a pré-seleção.
- Operador de Cruzamento: Verificou-se que o operador de cruzamento uniforme tem um funcionamento em muitas situações inferiores aos demais operadores de cruzamento, isto ocorre porque limita-se unicamente a trocar as posições dos genes e a transmiti-las aos seus descendentes isto é, não existe a introdução de dados novos considero este um aspeto a ser tomado em conta para trabalhos futuros porque a sua capacidade de adaptação face ao número de genes presentes na solução vetorial deveria tornar-lhe a solução indicada.
- Operador de Mutação: Como apresentado o operador de seleção é responsável pela aleatoriedade dos indivíduos presentes na população, em regra neste trabalho considera-se que utilizar a técnica de mutação não uniforme resulta na melhoria da performance do algoritmo na maioria das combinações possíveis quando comparado com a mutação uniforme.

### **Considerações futuras:**

Os casos apresentados apesar de trabalharem com um número pequeno de variáveis de projeto (4 no máximo) são suficientes para verificarem a capacidade dos AGs na otimização estrutural. Porém o sucesso dos AGs implementados neste trabalho foi medido como comparação com as análises efetuadas a vigas cuja configuração padrão era desfavorável pelo que será interessante efetuar um estudo comparativo dos AG com outra técnica de otimização.

O estudo relativo a influência dos operadores do algoritmo genético (seleção, cruzamento e mutação) apresentado no capítulo 6, foi realizado estimando que os valores quer da dimensão populacional, quer da taxa de mutação e da taxa de seleção seriam os mesmos para todas as possíveis configurações do algoritmo experimentado. Pelo que, será

interessante verificar o efeito que ocorreria no valor da deformada máxima transversal quando as configurações tivessem os parâmetros ajustados e conseqüentemente permitirá concluir para uma dada estrutura em análise qual será a melhor configuração do algoritmo genético.

Considerando que os apoios numa situação dita real obedecem a algumas restrições dentre elas o espaço de alocação dos mesmos poder-se-á estudar o efeito na máxima deformada transversal quando se impõe uma restrição que impede os apoios de aproximarem-se uns dos outros obedecendo a uma variação na distância que pode ser estimada.

## 8. Bibliografia

- Adewuya, A. (1996). *New Methods in Genetic Search with Real-Valued Chromosomes*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
- Althaus, G. W., & Spedicato, E. (1998). *Algorithms for Large Scale Linear Algebraic Systems - Application in Science and Engineering*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Barbosa, J. I. (2011). *Computação Simbolica e Ensino Assistido Por Computador Na Mecânica dos Corpos Deformaveis*. CLME. Lisboa.
- Batista, B. M., Perez, J. A., & Vega, J. M. (2009). Algoritmos Genéticos. Una visión Práctica. *Números*, Volumen 71,29-47.
- Beer, F. P., Jr, R. J., & DeWolf, J. T. (2006). *Mechanical of Materials - Fourth Edition*. Texas: The McGraw Hill Companies.
- Bendsoe, M. P., & Sigmund, O. (2003). *Topology Optimization - Theory, Methods and Applications*. Berlin: Springer.
- Chagas. (2011). *Manual Técnico de Produtos Siderurgicos*. Torres Vedras.
- CHAN, A. S., B.Sc., M. S., D. I., & A. F. (1962). *The Design of Michell Optimum Structures*. England: Her Majesty's Stationary Office.
- Correia, F. V., & Tavares, L. V. (1999). *Otimização Linear e Não Linear- Conceitos, Métodos e Algoritmos 2ª edição*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Davis, L. D. (1991). *Handbook of Genetic Algorithms*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- De Jong, K. A. (1975). *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. Michigan.
- Fonseca, J., & Cardoso, E. L. (2009). *Introdução à Otimização Estrutural - Teorias, Métodos e Soluções*. DEMEC-UFRRGS. Universidade Tecnológica de Dalian, china, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Fraternali, F., Marino, A., El Sayed, T., & Della Ciopa, A. (2011). *On the Structural Shape Optimization through Variational Methods and Evolutionary Algorithms*. London: Taylor & Francis.
- Galante, M. (1996). Genetic algorithms as an approach to optimize real-world trusses. *international journal for numerical methods in engineering*, 39, 361-382.
- Gen, M., & Cheng, R. (2000). *Genetic Algorithms & Engineering Optimization*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Goldberg, D. E., & Deb, K. (1991). A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. Em G. J. Rawlins, *Foundations of genetic algorithms* (p. 69:79). San Mateo, California: Morgan kaufmann publishers.
- Haftka, R. T., & Gurdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization-third revised and expanded edition*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Haupt, R. L., & Haupt, S. E. (1998). *Practical Genetic Algorithms*. New York: John Wiley & Sons, INC.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to operation Research Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill Higher Education.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: An introduction analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Oxford, England: U. Michigan Press.

- Holland, J. H. (9 de 12 de 2004). *Department of Economics - Iowa State University*. Obtido em 3 de 08 de 2012, de [www.econ.iastate.edu](http://www.econ.iastate.edu):  
<http://www.econ.iastate.edu/tesfatsi/holland.GAIntro.htm>
- Jenkins, W. (1992). *Plane Frame Optimum Design Environment Based on Genetic Algorithm*. Hatfield, England: American Society of Civil Engineers.
- Karian, Z. A., & Tanis, E. A. (2008). *Probability and Statistics with Maple second edition (slightly revised)*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Koza, J. (1992). *Genetic Programming - On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. London, England: A Bradford Book, The MIT Press.
- Kumar, P., Gospodaric, D., & Bauer, P. (8 de December de 2006). Improved genetic algorithm inspired by biological evolution. Fildrstadt, Fildrstadt, Germany.
- Kyrk, J. (1 de 08 de 2012). <http://www.johnkyrk.com>. Obtido de johnkyrk:  
<http://www.johnkyrk.com/DNAanatomy.pt.html>
- Lankalapalli, S., & Eischen, J. W. (2003). Optimal Pick-up Locations for Transport and Handling of Limp Materials. Parte I: One-Dimensional Strips. *Textile Research Journal*, Vol. 73,9:pp. 787-796.
- Marcelin, J. (2006). *Optimization of the boundary conditions by genetic algorithms*. Grenoble: Praize Worthy Prize.
- Mendel, G. (8 de 03 de 1885). *Experiments in Plant Hybridization (1865)*. (R. B. Blumberg, Produtor) Obtido de Mendel's Paper in English:  
<http://www.mendelweb.org/Mendel.html>
- Michalewicz, Z. (1998). *Genetic Algorithms (+) Data Structures (=) Evolution Programs*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.
- Michalewicz, Z., Logan, T. D., & Swaminathan, S. (1994). Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming* (pp. pp.84-97). NJ: A.V. Sebald and L.J. Fogel .
- Mitchel, M. (1996). *An Introduction to Genetic Algorithms*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
- Rajan, S. (1995). *Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of trusses Using Genetic Algorithm*. Arizona: Journal of Structural Engineering.
- Ridley, M. (2004). *Evolução 3ª Edição*. Oxford: Blackwell Science Ltd.
- Schimit, L. A. (1960). Structural Design by Systematic Synthesis. *Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation* (pp. 105-122). New York: ASCE.
- Soh, C.-K., & Yang, J. (1996). Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization. *Journal of computing in civil engineering*, 10(2), 143-150.
- Wu, S.-J., & Chow, P.-T. (1995). *Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms*. Taiwan: Computers&Structures.

# **Anexo A.**

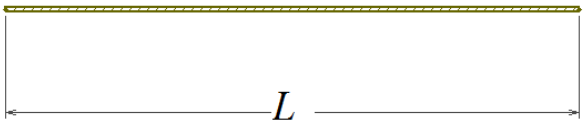
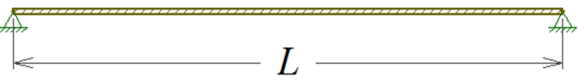
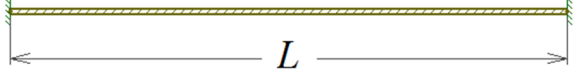
Condições de Fronteira.



# Anexo A.

## Condições de Fronteira

Tabela I – Condições de Fronteira

Condições de Fronteira		$z = 0$	$x = L$
Extremidade livre		$\frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} = 0$
		$\frac{d^3 y(z, t)}{dz^3} = 0$	$\frac{d^3 y(z, t)}{dz^3} = 0$
Extremidade simplesmente apoiada		$y(z, t) = 0$	$y(z, t) = 0$
		$\frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} = 0$
Extremidades encastradas		$y(z, t) = 0$	$y(z, t) = 0$
		$\frac{dy(z, t)}{dz} = 0$	$\frac{dy(z, t)}{dz} = 0$