

# Análisis de la adecuación de libros de texto de E. Primaria a la enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas<sup>1</sup>

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia  
(Valencia, España)

**Resumo:** Un problema al que se enfrentan los profesores de matemáticas de Enseñanza Primaria es la necesidad de hacer adaptaciones en sus programaciones para ofrecer una educación adecuada a sus alumnos de altas capacidades matemáticas. Las editoriales de libros de texto de matemáticas de estos niveles educativos ofrecen diversas soluciones que, usualmente, consisten en incluir, en el libro del alumno, algunos problemas más difíciles y, en la documentación del profesor, una propuesta de problemas de ampliación. Una cuestión que se plantea al analizar un libro de texto de matemáticas es valorar cómo de útil puede ser el material proporcionado por la editorial (libro de texto y materiales complementarios) para un profesor que necesita una programación específica para sus alumnos de altas capacidades matemáticas. En este artículo proponemos diversas variables con las que valorar el grado de adecuación a estudiantes de altas capacidades matemáticas de los documentos proporcionados a los profesores por las editoriales. Después ponemos en práctica esta propuesta analizando el tema dedicado a los cuadriláteros en 4º curso de Enseñanza Primaria



Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2013). Análisis de la adecuación de libros de texto de E. Primaria a la enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 53-74.

Contacto: Ángel Gutiérrez, Departamento de Didáctica da Matemática, Universidade de Valência, Espanha / [angel.gutierrez@uv.es](mailto:angel.gutierrez@uv.es)

---

<sup>1</sup> La investigación presentada es parte de las actividades del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Subprograma de Investigación Fundamental No Orientada del Programa Nacional de I+D+i.

*de una editorial de amplia difusión en España. Las conclusiones globales son que los materiales del profesor analizados prestan poca atención a los estudiantes de altas capacidades matemáticas y que la metodología de análisis que hemos empleado permite identificar direcciones para plantear actividades interesantes para estos estudiantes.*

Palavras-chave: altas capacidades matemáticas, geometría, enseñanza primaria, análisis de libros de texto, educación matemática

**Abstract:** A problem facing mathematics teachers in Primary Education is the need to modify their programmes to provide suitable teaching for pupils with superior mathematical ability. Publishers of mathematics course books for these levels offer a variety of solutions, which usually consist of including, in the student's book, a range of more difficult problems and, in the teacher's book, suggestions for extended problems. An issue that arises when analyzing a mathematics course book, is how useful the material supplied by the publisher (text book and supplementary materials) will be for a teacher who needs a specific programme for high achievers in mathematics. In this article we present a series of variables with which to assess the suitability of these publishers' materials for students with advanced mathematical ability. We shall then put our proposals into practice by analyzing materials produced by a leading Spanish publisher and dealing with quadrilaterals in the 4th year of Primary Education. General conclusions are that the teaching materials pay scant attention to high-achieving mathematics pupils and that the methodology adopted allows us to identify more interesting directions which activities for these pupils could take.

Key words: superior mathematical ability, geometry, primary teaching, textbook analysis, mathematics education

**Résumé:** Un problème auquel sont confrontés les professeurs de mathématiques de l'enseignement élémentaire est la nécessité d'adapter leurs programmes pour fournir une éducation adéquate à leurs élèves doués en mathématiques. Les éditeurs de manuels de mathématiques de ces niveaux d'enseignement offrent diverses solutions qui consistent généralement à inclure dans le livre de l'élève, des problèmes plus difficiles et dans la documentation de l'enseignant, des propositions de problèmes d'approfondissement. Une question qui se pose lors de l'analyse d'un manuel de mathématiques est d'évaluer l'utilité de la documentation fournie par l'éditeur (manuels scolaires et matériel supplémentaire) pour un enseignant qui a besoin d'une programmation spécifique pour les élèves doués en mathématiques. Dans cet article, nous proposons plusieurs variables qui permettent d'évaluer l'adéquation aux étudiants doués en mathématiques des documents fournis aux professeurs par les éditeurs. Ensuite, nous mettons en œuvre cette proposition pour analyser le thème des quadrilatères en 4<sup>ème</sup> année de l'enseignement primaire dans une édition très répandue en Espagne. Les conclusions générales sont que les documents du professeur analysés accordent peu d'attention aux étudiants doués en mathématiques et que la méthodologie d'analyse que nous avons utilisée permet d'identifier des orientations pour planifier des activités intéressantes pour ces étudiants.

Mots-clés: grande capacité en mathématiques, géométrie, enseignement primaire, analyse des manuels, éducation mathématique

## INTRODUCCIÓN

Una mirada a las leyes y a la práctica de la enseñanza en los niveles educativos de Educación Primaria y Educación Secundaria en España, durante las últimas décadas del siglo XX, muestra que la atención a los estudiantes de altas capacidades –también llamados talentosos– y superdotados era muy escasa o nula y se limitaba a casos aislados de centros de enseñanza o profesores que eran conscientes de la necesidad de proporcionar a estos estudiantes una enseñanza diferente de la de sus compañeros y se esforzaban por hacerlo real en sus clases. Sin embargo, en la Ley Orgánica de Educación, publicada en 2006 y que rige en la actualidad el sistema educativo español, se produce un cambio significativo, ya que reconoce de manera explícita a los estudiantes de altas capacidades como parte del grupo de estudiantes con necesidades educativas especiales que requieren una atención diferenciada. Los desarrollos de dicha ley realizados por los gobiernos nacional y regionales reconocen la necesidad de detectar y atender a estos estudiantes y regulan las actuaciones de los diferentes agentes implicados –inspección educativa, psico-pedagogos, profesores, padres.

Tanto la práctica diaria como la investigación didáctica reconocen que los libros de texto son un elemento central en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria y Educación Secundaria (Brändström, 2005). Recientemente, Rezat (2006) y Rezat y Sträßer (2012) han propuesto modificar el conocido *triángulo didáctico* –formado por profesor, estudiante y contenido matemático– para convertirlo en un *tetraedro didáctico* al añadir un nuevo vértice que representa los artefactos que median en la enseñanza y el aprendizaje. En la mayoría de clases de matemáticas, el único artefacto, o el que tiene mayor importancia, es el libro de texto, con lo que el tetraedro se convierte en el de la Figura 1. De hecho, hay acuerdo generalizado en afirmar que los libros de texto son el principal agente determinante del currículo real de matemáticas implementado en las aulas de los niveles educativos no universitarios. Siendo más precisos, no se debe hablar del libro de texto –es decir, el libro que usan los estudiantes– como tales sino que, más bien, hay que considerar el conjunto de documentos que las editoriales comerciales ponen en manos del profesorado, formado por el libro de texto de los alumnos, la guía didáctica del profesor, la programación de aula, las propuestas de evaluación, de actividades complementarias, las páginas web, etc. En adelante, llamaremos *documento del profesor* a este conjunto de materiales que los profesores pueden utilizar para organizar sus cursos.

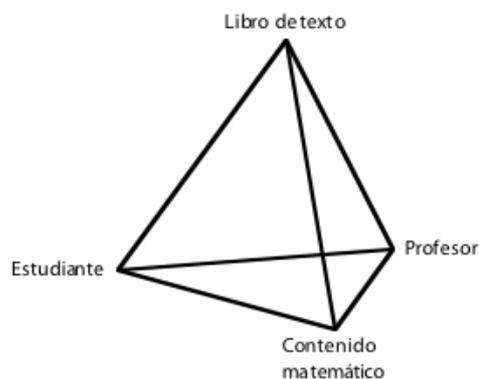


Figura 1: Tetraedro didáctico (Rezat, 2006)

Por otra parte, al analizar la problemática de la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de diferentes capacidades, hay estudios que muestran que los contenidos que se enseñan y su estructura –es decir, la presentación en los libros de texto– son tan importantes como la forma de organización de los estudiantes en las clases (Pepin & Haggarty, 2002, citado en Brändström, 2005).

En este contexto, una forma eficaz de propiciar que los profesores presten la adecuada atención a los estudiantes de altas capacidades matemáticas (aa.cc.mm.) sería que las editoriales de libros de texto implementaran esta atención incluyendo en el documento del profesor adaptaciones curriculares<sup>2</sup> desarrolladas en forma de contenidos concretos y de sugerencias metodológicas sobre cómo trabajar en las clases con dichas propuestas. Estas adaptaciones podrían estar incorporadas a los libros de los alumnos o sólo al documento del profesor. La afirmación de numerosos profesores españoles de Educación Primaria de que no encuentran materiales de apoyo que les permitan realizar las adaptaciones curriculares para sus alumnos de aa.cc.mm. hace sospechar que los libros de texto de matemáticas actuales no incluyen propuestas de adaptaciones curriculares o, cuando lo hacen, éstas presentan algunas deficiencias –por ejemplo, en el contenido o en las indicaciones didácticas a los profesores– que las hacen poco útiles para los profesores que carecen de una formación específica sobre cómo identificar y tratar a sus alumnos de aa.cc.mm.

Con el fin de confirmar la realidad de esa conjetura, hemos iniciado una investigación entre cuyos objetivos centrales está el de diseñar un instrumento específico de análisis que permita valorar el grado de adecuación a la enseñanza a alumnos de aa.cc.mm. de los actuales libros de texto y su documento del profesor de las Enseñanzas Primaria y Secundaria españolas que proporcione información sobre los elementos fuertes y débiles de una determinada propuesta curricular. Analizaremos los libros de texto en relación con sus contenidos matemáticos, metodologías y directrices didácticas explícitas o implícitas, problemas propuestos y resueltos, etc. para valorar qué oportunidades y ayudas dan a los profesores para que la organización de sus clases incluya una enseñanza diferenciada a sus alumnos de aa.cc.mm. Este análisis será descontextualizado, es decir desligado de las múltiples formas de uso que los profesores pueden hacer de los libros de texto y demás componentes del documento del profesor cuando los adaptan a sus propios estilos de enseñanza o puntos de vista, añaden o ignoran contenidos, los combinan con otros documentos o materiales, etc. En este artículo describimos las principales variables que estamos considerando para dicho instrumento de análisis y mostramos un ejemplo de aplicación al análisis de un tema de geometría de 4º curso de Enseñanza Primaria (niños de 9-10 años).

El artículo está dividido en cinco secciones. En la primera hemos introducido el tema de reflexión y planteado nuestros objetivos. La segunda sección ofrece una revisión de literatura relacionada con el análisis de los libros de textos de matemáticas de niveles no universitarios. Esta revisión es la base para, en la tercera sección, presentar una descripción teórica de las variables que consideraremos en el análisis de un libro de texto específico que presentamos en la cuarta sección. El artículo termina con unas reflexiones finales y conclusiones.

---

<sup>2</sup> En España, se llama *adaptación curricular* a la modificación de la programación ordinaria de una asignatura que un profesor de esa asignatura hace para un alumno –o un grupo de alumnos– concreto que tiene alguna necesidad especial –por problemas físicos o psicológicos, superdotación, o cualquier otra circunstancia específica– que aconseja que ese alumno no siga la programación ordinaria de la asignatura. La actual ley de educación española obliga a hacer adaptaciones curriculares para los estudiantes de altas capacidades o superdotados.

## REVISIÓN DE LA LITERATURA SOBRE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Diversos investigadores en educación matemática han realizado análisis o evaluaciones de libros de texto y han propuesto variables relevantes para los mismos. Pepin y Haggarty (2001), en una síntesis de las publicaciones destacadas sobre el tema, identifican cuatro aspectos en los que se centra la mayoría de los análisis de los libros de texto de matemáticas:

- aspectos matemáticos –contenidos presentados, creencias transmitidas sobre la naturaleza de las matemáticas y forma de presentación de los contenidos;
- aspectos didácticos –ayudas ofrecidas a los estudiantes para aprender sus contenidos, ayudas de tipo metodológico, por ejemplo al secuenciar los contenidos, y ayudas de tipo retórico, por ejemplo al destacar los contenidos más importantes;
- aspectos sociológicos –los rangos de capacidad matemática de los estudiantes a los que se dirigen los libros de texto, la cantidad y estilo de dibujos o fotografías, las expectativas sobre el futuro de los estudiantes que transmiten los libros de texto; y
- aspectos culturales –tradiciones educativas, sociales, etc. propios del país o su entorno cultural.

Algunos autores centran sus análisis de los libros de texto de matemáticas en diferentes aspectos de temas matemáticos específicos. Shield y Dole (2013) analizan el tema de la proporcionalidad aritmética planteando una variedad de indicadores para evaluar la calidad de los libros de texto en este tema. Algunos de los indicadores propuestos por estos autores son específicos del tema, por ejemplo “uso de relaciones de proporcionalidad internas y externas”, mientras que otros indicadores son fácilmente adaptables al análisis de cualquier otro tema, por ejemplo “relación explícita con el conocimiento sobre fracciones” o “usa tablas para destacar las relaciones de proporcionalidad”. Cañadas y Gómez (2012) proponen un modelo de análisis que presta atención a la estructura matemática de los temas o lecciones –qué conceptos propiedades y procedimientos se presentan y qué relaciones hay entre unos y otros–, los sistemas de representación usados –verbal, gráfico, geométrico, numérico, tabular, informático, etc.– y los elementos de fenomenología didáctica –contextos y fenómenos presentados, contenidos matemáticos que organizan, en qué parte del tema aparecen y para qué se usan. Fernández (2011) se basa en variables similares para analizar el contenido del tema de proporcionalidad en ESO, pero además tiene en cuenta los problemas –resueltos y propuestos, sus características y las formas de usar los conceptos al resolverlos. García-Moreno (2009), como los autores anteriores, analiza los contenidos matemáticos y los tipos de problemas o actividades de los libros de texto, pero también las acciones y actividades matemáticas que deben realizar los estudiantes.

Otros autores han hecho análisis detallados aplicables tanto a un libro de texto completo como a algún tema o lección específico. Así, Ortega (1996) y Monterrubio y Ortega (2011) definen un conjunto de categorías que valoran objetivos, contenidos, conexiones, metodología, evaluación, las actividades, el lenguaje, las ilustraciones, la motivación, uso de TICs, enfatización, aspectos formales, recursos y entorno. A su vez, cada categoría tiene un conjunto de valores específicos. De manera similar, Bodí y Valls (2002) proponen un conjunto de ocho organizadores de los contenido matemáticos –conceptos, procedimientos, errores,

sistemas de representación, materiales, fenomenología, desarrollo de la historia y representaciones de los números–, cada uno con diversas subcategorías, y asignan valores entre 0 y 5 para cada categoría o subcategoría; estos autores ejemplifican su modelo de análisis en los temas de números de la ESO. Haro y Torregrosa (2002) y Martín (2002) hacen estudios similares para los temas de álgebra y análisis y de probabilidad y estadística, respectivamente.

El tipo de análisis de los libros de texto que proponemos en este artículo está relacionado con algunas de las categorías mencionadas antes, concretamente con las relativas a los contenidos matemáticos, a los enfoques didácticos y al rango de capacidades matemáticas tenido en cuenta por los autores. Sin embargo, en coherencia con el objetivo de nuestro estudio planteado al final de la introducción, no consideramos estos tres componentes de manera independiente, sino que el relativo al rango de capacidades matemáticas consideradas por los libros de texto es transversal respecto de los otros dos componentes y es el componente principal de nuestro estudio al ser el que apunta a los estudiantes de aa.cc.mm.

La reconocida importancia que tiene la resolución de problemas y ejercicios para el aprendizaje de las matemáticas es aún mayor cuando se presta atención a los estudiantes de aa.cc.mm. Por este motivo, diversos investigadores en educación matemática han centrado sus estudios sobre la calidad de las propuestas de enseñanza de las matemáticas –en particular de los libros de texto– en la calidad de los ejercicios y problemas contenidos en tales propuestas.

Una forma de caracterizar la calidad de problemas –o tareas, actividades, cuestiones, etc.– de matemáticas usada frecuentemente por profesores e investigadores es valorar su dificultad de resolución. Los investigadores suelen recurrir al procedimiento experimental de plantear problemas a una muestra representativa de estudiantes y tomar como grado de dificultad de resolución de cada problema el porcentaje de respuestas incorrectas. Obviamente, este procedimiento no es adecuado cuando se trata de los problemas planteados en los libros de texto y hay que hacer una valoración a priori de su dificultad. Esta es una cuestión compleja tanto para profesores como para investigadores, ya que, como nos dice Schoenfeld (1985), la dificultad no es una propiedad inherente al problema sino que depende del sujeto que lo resuelve. Además, para aumentar la complejidad de esta cuestión, la dificultad de un problema para un estudiante específico puede variar con el tiempo, según que el estudiante comprenda mejor, aprenda u olvide determinados conocimientos matemáticos relativos al problema o que consiga o no resolver el problema con éxito.

Una primera aproximación para valorar la dificultad de una tarea planteada a los estudiantes es diferenciar si se trata de un ejercicio –una tarea cuya resolución sólo requiere recordar unos datos o aplicar un algoritmo adecuado que es conocido– o de un problema –tarea cuya resolución no es evidente y en la que no basta con recurrir al conocimiento disponible de manera inmediata, sino que requiere razonamiento y usar ese conocimiento disponible de manera no rutinaria (Kantowski, 1977). Hecha esta distinción, Krutetskii (1976) nos recuerda que no siempre es fácil evaluar de manera teórica la dificultad de un problema y, en su investigación, estima la dificultad de un problema basándose, en primer lugar, en una apreciación objetiva de la complejidad de las relaciones dadas en el problema. En este artículo, usamos el término *actividad* para referirnos tanto a ejercicios como a problemas indistintamente.

Smith y Stein (1998) y Stein y Smith (1998), proponen centrar el análisis de libros de texto en las actividades planteadas, y se aproximan a la cuestión de la dificultad de los problemas valorando la demanda cognitiva que supone para los estudiantes resolverlos. Para ello clasifican los problemas según cuatro tipos de demanda que, de menor a mayor dificultad, son:

- Memoria.
- Procedimientos sin conexión a conceptos o significados.
- Procedimientos con conexión a conceptos o significados.
- Hacer matemáticas.

Estos autores incluyen en sus textos ejemplos de indicadores de cada categoría para evaluar las actividades. Por su parte, Brändström (2005) analiza las tareas planteadas en los libros de texto como elementos de organización de los temas y las clasifica según su dificultad. Esta autora calcula la dificultad de las tareas valorando diferentes elementos intrínsecos e independientes del resolutor presentes en su enunciado y en su resolución, concretamente:

- La presencia de figuras y su papel en el enunciado.
- Las operaciones necesarias, su tipo y cantidad.
- Los procesos cognitivos necesarios de recordar, comprender, analizar, aplicar, etc.
- La demanda cognitiva según los tipos de Smith y Stein mencionados antes.

Entre las conclusiones de esta autora destacan, en relación con nuestros objetivos, que los libros de texto organizan las actividades de cada tema por niveles de dificultad, pero que la mayoría de ellas tienen una dificultad muy baja, incluso las de los niveles superiores, por lo que el uso exclusivo de esos libros de texto redundaría en que los estudiantes de mayor capacidad matemática tienen muy pocas oportunidades de aprender matemáticas con la intensidad adecuada a su capacidad.

Al analizar en este artículo la adecuación del documento del profesor ofrecido por una editorial a la enseñanza a estudiantes de aa.cc.mm., daremos un valor destacado a la propuesta de actividades que haga el documento del profesor, por lo que incluiremos variables que describan diversos aspectos de los ejercicios, los problemas, las tareas, etc. propuestos. En lo referente a la valoración de la dificultad de los problemas, puesto que esta depende de los resolutores, creemos que es más operativo y válido valorar la complejidad de los problemas adaptando la metodología de Krutetskii.

## **IDENTIFICACIÓN DE ALGUNAS VARIABLES PARA EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO**

En esta sección vamos a presentar el marco teórico en el que basaremos, en la sección siguiente, el análisis de la adecuación de un tema de geometría de un libro de matemáticas de Educación Primaria. Tendremos en cuenta el conjunto de materiales que forman parte del

documento del profesor –libro de texto, guía didáctica, programación, actividades complementarias, etc.– que tengan que ver con el tema elegido para nuestro análisis. Organizaremos nuestro análisis en tres bloques, centrados en (1) los contenidos matemáticos, (2) los problemas y ejercicios, y (3) las sugerencias didácticas acerca del tratamiento de los alumnos de aa.cc.mm.

Creemos que la enseñanza de las matemáticas no puede tener como único objetivo el aprendizaje de contenidos y procedimiento algorítmicos, ni tampoco puede tener como único objetivo el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas, sino que ambos objetivos de enseñanza deben estar presentes e interconectados para que una propuesta de enseñanza tenga un mínimo de calidad. En particular, si una editorial de libros de texto tiene el objetivo de que su documento del profesor sea útil para ofrecer una enseñanza diferenciada a los estudiantes de capacidades matemáticas baja, media y alta, la consideración conjunta de contenidos matemáticos y problemas y la observación de las relaciones entre unos y otros es necesaria y cobra importancia. En el conjunto de variables que vamos a identificar y analizar, incluiremos los **contenidos matemáticos estudiados** y las actividades planteadas – **problemas y ejercicios**–, teniendo en cuenta también en este análisis las relaciones establecidas entre contenidos y actividades.

Por otra parte, el aprendizaje de contenidos matemáticos y de habilidades de resolución de problemas debe complementarse con la adquisición de destrezas de razonamiento matemático, pues sólo cuando los estudiantes mejoran el nivel de su razonamiento matemático serán capaces de abordar el reto de comprender y aprender nuevos contenidos matemáticos más complejos y abstractos. Una de las diferencias entre los estudiantes de aa.cc.mm. y sus compañeros de clase es la mayor capacidad de razonamiento matemático de los primeros, lo cual les permite comprender relaciones más complejas o con mayor profundidad, resolver problemas de mayor complejidad, hacerlo de formas originales, desarrollando su creatividad, y producir argumentos más sofisticados. Por este motivo, entre las variables que identificaremos está el **nivel de razonamiento** requerido o esperado, necesario para comprender los contenidos matemáticos y sus relaciones explícitas en el libro de texto y demás componentes del documento del profesor.

Para completar el análisis global de un documento del profesor, es necesario también prestar atención a los **elementos didácticos** que contienen. Nos referimos a las indicaciones que pueda haber sobre objetivos de aprendizaje, metodologías de enseñanza propuestas, programación, comentarios sobre contenidos específicos, resoluciones de problemas, uso de materiales, propuestas de actividades de profundización o ampliación, etc. que presten atención a los estudiantes de aa.cc.mm.

Las dos últimas variables mencionadas –nivel de razonamiento y elementos didácticos– las utilizaremos de manera transversal, pues sin tenerlas en cuenta no es posible analizar correctamente la adecuación de los contenidos y las actividades a los estudiantes de las diferentes capacidades.

### **Análisis de los contenidos matemáticos**

Los contenidos matemáticos presentes en cualquier libro de texto de Enseñanza Primaria español –y probablemente también de cualquier otro país– están formados por definiciones o descripciones de conceptos matemáticos, enunciados de propiedades de esos conceptos,

presentación de fórmulas, algoritmos u otros procedimientos de tipo rutinario –que permiten manipular los conceptos y sus propiedades para realizar cálculos, dibujos, construcciones, etc.– y, finalmente, ejercicios y problemas. Ahora vamos a centrar nuestra atención en los conceptos, propiedades y algoritmos, dejando los problemas y ejercicios para el siguiente apartado.

Una de las propuestas metodológicas más ampliamente propugnadas y aceptadas es la *enseñanza en espiral*, que supone abordar los mismos temas matemáticos a lo largo de varios cursos incrementando cada vez la complejidad o profundidad del estudio de esos contenidos. La base de esta metodología de enseñanza es ayudar a los estudiantes a crear redes de conocimientos cada vez más completas a medida que aumenta la cantidad de contenidos matemáticos aprendidos por los estudiantes y su capacidad de razonamiento. Por tanto, es importante analizar el grado de complejidad de la red de relaciones entre los diferentes elementos matemáticos presentada en un tema y, si es el caso, incluir en esta red los contenidos pertinentes presentados en cursos anteriores.

Los mapas conceptuales son una herramienta útil para realizar este análisis. Un mapa conceptual es una representación gráfica de un conjunto de elementos (objetos, conceptos, definiciones, propiedades, ejemplos, etc.) unidos mediante conexiones que representan relaciones entre ellos. La estructura elemental de un mapa conceptual se puede ver en la Figura 2. No se debe confundir un mapa conceptual con un diagrama de flujo, ya que las conexiones de los mapas conceptuales no tienen por qué representar direcciones de movimiento ni relaciones de dependencia. Una ventaja importante de los mapas conceptuales para representar estructuras matemáticas es que permiten ver gráficamente y entender relaciones complejas entre conceptos, teoremas, etc. cuya descripción verbal ocuparía varias páginas y requeriría del lector una capacidad de abstracción mayor. La publicación más conocida sobre el uso educativo de los mapas conceptuales es Novak y Gowin (1996), si bien puede resultar más interesante Castillo-Olivares (1996), que hace una introducción al uso de los mapas conceptuales en las clases de matemáticas.



Figura 2: Estructura básica de un mapa conceptual

Los mapas conceptuales permiten, por una parte, representar gráficamente el conjunto de relaciones planteadas en el documento del profesor y, por otra, crear un mapa de experto del tema objeto de análisis, que recogerá todas las relaciones entre los contenidos matemáticos presentes en el documento del profesor. Este mapa servirá de referencia absoluta y compararlo con el mapa del documento del profesor nos permitirá valorar qué trabajo no se realiza si el profesor sigue la propuesta editorial, al pie de la letra, pero podría hacerse si el profesor amplía o diversifica el contenido presentado en sus clases. A la vista de los mapas conceptuales del documento del profesor y del experto, es posible tomar decisiones como identificar contenidos que resultan demasiado difíciles para los alumnos con dificultades en

matemáticas o contenidos que se pueden incorporar como profundización o refuerzo para los alumnos más capaces. De esta manera, un profesor puede manejar varios mapas conceptuales que correspondan a los contenidos que quiere enseñar a sus alumnos con capacidades matemáticas baja, media o alta.

Un elemento clave para valorar la adecuación de un documento del profesor a los estudiantes es la capacidad de razonamiento matemático de estos. Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele son reconocidos desde hace décadas como el marco teórico más útil para evaluar o describir el razonamiento en geometría y, por extensión, se puede utilizar también para evaluar o describir el razonamiento en otras áreas de las matemáticas. Los estándares curriculares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (NCTM, 2003) son un ejemplo de uso de los niveles de van Hiele como organizador del currículo de matemáticas.

En Jaime y Gutiérrez (1990), además de describir con detalle los niveles de razonamiento, se presenta un ejemplo de cómo una enseñanza en espiral combinada con un incremento en el nivel de razonamiento de los estudiantes da lugar a la creación de redes conceptuales más complejas. En este contexto, los mapas conceptuales permiten caracterizar diferentes formas de enseñar unos mismos contenidos matemáticos de acuerdo con diferentes niveles de razonamiento pues, a mayor nivel de razonamiento, mayor complejidad del mapa conceptual correspondiente. Si bien la diversidad de niveles de razonamiento en los cursos de Enseñanza Primaria es reducida –del primer nivel de razonamiento típico de los primeros cursos, en bastantes ocasiones apenas se llega al segundo nivel al acabar el 6° curso–, esperamos que los mapas conceptuales nos permitan obtener buenas descripciones de las diferencias entre los documentos el profesor de diferentes cursos o editoriales en términos de la cantidad de relaciones presentadas entre los conceptos y de los niveles de razonamiento utilizados.

Hay otras variables interesantes para valorar la adecuación de un documento del profesor a la enseñanza diferenciada a estudiantes de aa.cc.mm. Una de ellas, en el terreno matemático, es la variedad de sistemas matemáticos de signos empleados –verbal, tabular, gráfico y simbólico, pero también geométrico, numérico o informático–, que nos da una medida de su interés para los estudiantes de aa.cc.mm., pues estos están en condiciones de aprender a representar la información en una variedad de sistemas de signos mayor de lo habitual. Otra variable interesante es el uso que hace de las TICs el documento del profesor, pues en estos momentos el uso de software, de redes sociales y de información extraída de internet son dos herramientas muy interesantes con las que se consigue conectar con los estudiantes de aa.cc.mm. de manera eficaz y productiva. No obstante, por la limitación de este texto, no vamos a utilizar estas variables en la aplicación práctica que haremos en la sección siguiente.

### **Análisis de los problemas y ejercicios**

La resolución de problemas de matemáticas es un elemento clave en la enseñanza a estudiantes de aa.cc.mm. Resulta muy difícil imaginar una clase de matemáticas interesante para estos estudiantes que no invierta buena parte del tiempo en resolver ejercicios, investigaciones o problemas en los que tengan la posibilidad de poner en juego sus capacidades superiores de cálculo, visualización, razonamiento abstracto, intuición, etc. Así pues, el uso que hace un documento del profesor de los problemas es una variable necesaria para analizar su adecuación a los estudiantes de aa.cc.mm.

Son varios los elementos que se pueden tener en cuenta al analizar la resolución de problemas propuesta en un documento del profesor. El primero es la distinción entre los ejercicios y los problemas, en el sentido de las definiciones que dábamos de estos términos en la sección anterior (Kantowski, 1977). La mayor o menor proporción de problemas en un libro de texto es un indicador de su adecuación a los estudiantes de aa.cc.mm.

Paralelamente a la proporción entre ejercicios y problemas, la ubicación de unos y otros en el conjunto de espacio del libro de texto dedicado al tema analizado es otro indicador interesante. Típicamente, el desarrollo de un tema en los libros de texto de matemáticas se puede dividir en tres partes: *Comienzo*, caracterizado por presentar algunas situaciones – generalmente de tipos histórico o utilitario– que pretenden contextualizar los contenidos que se van a estudiar en el tema para hacerlos más interesantes a los estudiantes y, si es conveniente, un recordatorio de conocimientos previos, estudiados en curso anteriores que se utilizarán más adelante. Los problemas y ejercicios planteados en esta parte del tema pueden tener el objetivo de provocar el descubrimiento de nuevos contenidos matemáticos o el objetivo de facilitar el recuerdo de los conocimientos previos. *Desarrollo*, caracterizado por presentar el conjunto de nuevos conocimientos (conceptos, propiedades, fórmulas de cálculo, algoritmos, etc.). En esta parte del tema, lo más frecuente es encontrar ejercicios de aplicación inmediata de los conocimientos matemáticos recién introducidos. *Conclusión*, caracterizada por repartirse entre una síntesis del tema, que destaca lo que los autores del libro de texto consideran que son los objetivos de aprendizaje, y una lista de ejercicios y problemas sobre los diferentes contenidos del tema.

Sin ignorar la utilidad de los ejercicios como elemento favorecedor del necesario aprendizaje de elementos memorísticos o de práctica rutinaria, en este texto nos centraremos en analizar los problemas propuestos en el documento del profesor (tanto en el libro de texto como en la guía didáctica, las libretas de refuerzo, propuesta de profundización, etc.). Para ello, valoraremos la complejidad de los problemas, siguiendo a Krutetskii (1976) y a Brändström (2005), observando la cantidad de conocimientos matemáticos necesarios para resolverlos, la complejidad del desarrollo del problema o la cantidad y dificultad de los cálculos necesarios. El *espacio básico de un problema* es una herramienta que puede resultar útil para analizar problemas cuando estos alcanzan un cierto grado de complejidad y se pueden resolver de manera razonable –es decir sin utilizar herramientas matemáticas innecesariamente potentes ni caminos artificialmente largos– varias formas diferentes. El constructo de espacio de un problema fue introducido por Newell y Simon en varias publicaciones aparecidas a comienzo de la década de 1970, en el contexto de las teorías de la información y la resolución de problemas por sistemas expertos que intentaban simular a resolutores humanos, pero en nuestra investigación utilizaremos una evolución más reciente debida a Cobo (1998):

Consideramos el espacio de un problema como el conjunto de posibilidades que tiene el resolutor de resolver un problema, que dependen, entre otros factores, de los conocimientos de que disponga y de los que utilice en la resolución y de los enfoques que sea capaz de identificar.

Al espacio de un problema hecho por el resolutor experto lo denominamos espacio básico del problema. (p. 52)

Puesto que nuestro análisis de los problemas es teórico, sin relación con resolutores particulares, utilizaremos el constructo de espacio básico del problema para analizar su

adecuación a los estudiantes de aa.cc.mm., valorando la complejidad de las soluciones del problema y sus requisitos de conocimientos matemáticos.

Al igual que al analizar los contenidos matemáticos, los niveles de razonamiento de van Hiele son un instrumento útil para valorar la utilidad de los problemas plantados en el documento del profesor a los estudiantes de aa.cc.mm., pues, una vez construido el espacio básico de un problema, el análisis cognitivo de sus formas de resolución nos dará información sobre los niveles de razonamiento necesarios para resolver el problema. Salvo contadas excepciones, los problemas de matemáticas se pueden resolver utilizando, al menos, dos niveles de razonamiento diferentes; por ejemplo, justificar o demostrar la validez de una conjetura planteada en una clase de Enseñanza Primaria, se puede hacer en clave del primer o del segundo nivel de razonamiento y, en una clase de Enseñanza Secundaria, se puede hacer en clave del segundo o del tercer nivel de razonamiento. Los problemas más interesantes para un profesor con estudiantes de varias capacidades matemáticas son aquellos que admiten formas de resolución con diferentes niveles de razonamiento, pues esto facilitará la organización de las clases con atención diferenciada a los estudiantes de más o menos capacidad que la media de la clase.

#### **Análisis de las indicaciones didácticas sobre atención a alumnos de aa.cc.mm**

Los documentos del profesor elaborados por las editoriales de libros de texto incluyen diversos elementos como: una guía didáctica en la que se dan a los profesores directrices sobre metodología de enseñanza de cada contenido concreto del libro de texto; propuestas de actividades complementarias, tanto para estudiantes con dificultades de aprendizaje como para los que muestran mayor capacidad; propuestas de evaluación o propuesta de programación anual de la asignatura. Analizaremos los contenidos matemáticos y los ejercicios o problemas incluidos en partes del documento del profesor diferentes del libro de texto con los mismos criterios indicados en los párrafos anteriores, pero prestando atención especial a aquellos que el documento del profesor proponga para los estudiantes de aa.cc.mm. como actividades de ampliación o profundización.

Cuando los documentos del profesor incluyen propuestas explícitas para estudiantes de aa.cc.mm., por ejemplo listas de ejercicios o problemas de ampliación, un elemento importante del análisis que estamos haciendo es valorar la diferencia entre estos ejercicios y problemas y los incluidos en el libro de texto para todos los estudiantes. Una propuesta adecuada a los estudiantes de aa.cc.mm. debería incluir problemas cuya dificultad esté graduada, de manera que requieran diferentes cantidades de contenidos matemáticos o diferentes niveles de razonamiento.

En el análisis de la adecuación de un documento del profesor a la enseñanza a estudiantes de aa.cc.mm., identificaremos las directrices o indicaciones proporcionadas por los autores del documento que tengan que ver con los estudiantes más capaces, las propuestas específicas de actividades de ampliación o profundización, la graduación de la dificultad de los problemas planteados en el libro de texto, los criterios de evaluación y cualquier otra indicación que sirva de ayuda a los profesores para decidir cómo particularizar la enseñanza a sus alumnos de aa.cc.mm. La presencia de estos elementos, su cantidad y su calidad serán indicadores que, junto a las variables referidas a los contenidos matemáticos y a los ejercicios y problemas, nos permitirán hacer una valoración objetiva de la adecuación de los documentos del profesor producidos por las editoriales a la enseñanza personalizada a los estudiantes de aa.cc.mm.

## APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE UN TEMA DE GEOMETRÍA

En esta sección presentamos, de manera sintética, el resultado de analizar el tema de Cuadriláteros en un documento del profesor de 4º curso de Enseñanza Primaria de una editorial de muy amplia difusión en España (Ferrero, Gaztelu & Martín, 2012), siguiendo el esquema de los apartados definidos en la sección anterior. Este documento del profesor está formado por los siguientes elementos:

- El libro de texto del alumno.
- Un cuaderno para el alumno con actividades complementarias a las del libro de texto.
- La guía didáctica del profesor, que incluye las soluciones de las actividades del libro de texto, sugerencias metodológicas y unas actividades de refuerzo y ampliación que no están en el libro de texto.
- Un cuaderno para el profesor con actividades de refuerzo y de ampliación.
- Un cuaderno para el profesor con una propuesta de actividades de evaluación para cada tema.
- Otros elementos no pertinentes para el estudio que estamos realizando.

### Análisis de los contenidos matemáticos

Empezamos comparando los contenidos del tema de los cuadriláteros en los documentos del profesor de 3º y 4º cursos de Enseñanza Primaria de la misma colección de libros de texto. En primer lugar, creemos necesario hacer una aclaración sobre el significado que se da en los libros de texto españoles a la expresión “iguales dos a dos”. Esta expresión se usa en las definiciones de las clases de paralelogramos para matizar las relaciones de igualdad entre los ángulos o entre los lados, dándose en este contexto a dicha expresión el significado de que el polígono tiene dos pares –de lados o de ángulos– iguales pero siendo cada par diferente del otro –en longitud o en amplitud. Como consecuencia, la clase de los cuadrados es disjunta de las clases de los rombos y de los rectángulos. Un ejemplo típico de aplicación de estas definiciones es el siguiente ejercicio planteado en la guía didáctica del profesor (p. 209): *Si los lados de un cuadrilátero miden 4 cm, 7 cm, 4 cm y 7 cm, y sus ángulos son iguales dos a dos, ¿qué figura es?* La solución dada en la guía didáctica es: *Es un romboide*. Otro ejemplo lo tenemos en una actividad interactiva en la que se muestran a los estudiantes un cuadrado y las etiquetas de las cuatro clases de paralelogramos; el estudiante debe arrastrar junto a la figura del cuadrado la etiqueta adecuada; sólo la etiqueta de cuadrado es admitida como correcta. Es evidente que, en ambos casos, la expresión “iguales dos a dos” hace descartar los rectángulos o los rombos.

La Figura 3 muestra el mapa conceptual de los contenidos de cuadriláteros estudiados en los libros de texto de 3º y 4º de primaria y las relaciones entre dichos contenidos presentadas por los libros de texto. Los contenidos y relaciones de la zona con fondo blanco se estudian tanto en 3º como en 4º curso. Los contenidos y relaciones de las zonas con fondo oscuro se estudian solamente en 4º curso. Las zonas oscuras muestran claramente que hay un incremento en la cantidad de contenidos y en la complejidad de sus relaciones en 4º curso respecto de 3º. El tema de 3º sólo requiere de los estudiantes razonamiento de los niveles de

van Hiele 1 y 2 básico, pues la mayor parte de los contenidos y propiedades estudiados en este curso se basan en la mera percepción visual o manipulación básica (nivel 1 de van Hiele) y sólo la comprensión de las definiciones verbalizadas –que corresponden a la clasificación disjunta de las familias de cuadriláteros– requiere razonamiento del nivel 2 de van Hiele. El tema de 4º sigue presentando una parte de los contenidos y propiedades sólo de manera visual (nivel 1) y las mismas definiciones (nivel 2 básico), pero la parte correspondiente al estudio de las diagonales y las simetrías supone mayor complejidad (nivel 2 más avanzado que el exigido en 3º de Enseñanza Primaria), pues los estudiantes deben analizar componentes de los cuadriláteros que no están explícitos en las figuras.

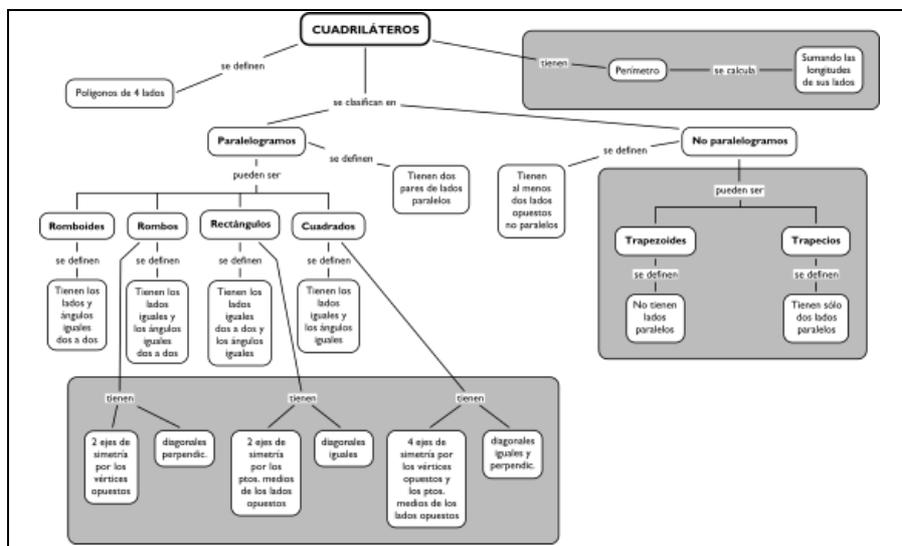


Figura 3: Mapa conceptual de 3º y 4º de E. Primaria. Las zonas sombreadas sólo se estudian en 4º curso

La Figura 4 muestra un mapa conceptual de experto del estudio de los cuadriláteros correspondiente a las definiciones usadas en el texto de 4º curso. Para crear este mapa, hemos tenido en cuenta todas las relaciones matemáticas entre los conceptos que se están considerando y las propiedades de esos conceptos que se estudian, o se pueden estudiar, en el curso que se está analizando. En una familia tan rica como la de los cuadriláteros, es posible crear un mapa de experto que incluya gran variedad de propiedades y relaciones complejas –por ejemplo, propiedades en las que intervienen razones trigonométricas–, que son propias de niveles educativos superiores. Esta opción no es útil porque convierte el mapa en un instrumento inadecuado para hacer un análisis que, necesariamente, debe estar basado en el nivel educativo correspondiente al libro de texto que se está analizando, en nuestro caso 4º de Enseñanza Primaria. Por este motivo, al crear el mapa de experto, lo limitamos a los contenidos matemáticos accesibles por estudiantes de Enseñanza Primaria, aunque sean de capacidad matemática superior a la media de su curso. Comparando los mapas de las Figuras 3 y 4, podemos apreciar los contenidos no desarrollados en el libro de texto, que se agrupan en tres bloques: estudio completo de los conjuntos de simetrías de las familias de paralelogramos, estudio completo de las propiedades de las diagonales de las familias de paralelogramos y estudio de algunos tipos de trapezios y trapezoides.

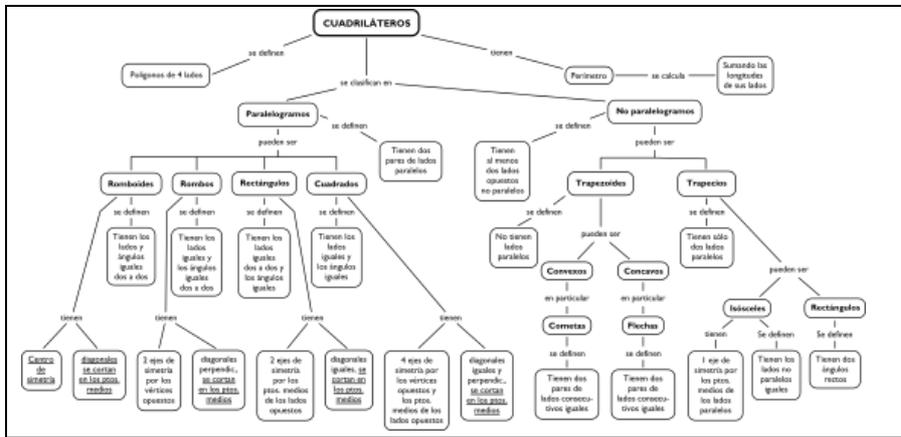


Figura 4: Mapa conceptual de experto para 4º de E. Primaria

Los contenidos del mapa de experto que no aparecen en el mapa del documento del profesor pueden ser objeto de actividades de ampliación o profundización para los estudiantes de aa.cc.mm. Así, en relación con las simetrías, una actividad interesante es proponer a los alumnos explorar de manera exhaustiva las familias de paralelogramos para, después de analizar la tabla resultante, llegar a descubrir que cada una de las cuatro familias de paralelogramos tiene un conjunto de simetrías diferente que la caracteriza –es decir, por ejemplo, los rombos son los únicos cuadriláteros que tienen dos ejes de simetría que pasan por los vértices opuestos. En relación con las diagonales, los estudiantes de aa.cc.mm. pueden realizar una exploración similar –lo cual les ayuda a aprender la estrategia de resolución de problemas basada en construir una tabla de datos– para llegar a la conclusión de que las posiciones relativas –perpendiculares o no– y los tamaños –con la misma longitud o no– de las diagonales caracterizan a las familias de paralelogramos –por ejemplo, los rombos son los únicos cuadriláteros cuyas diagonales son perpendiculares, de diferentes longitudes y se cortan en sus dos puntos medios.

En el documento del profesor de 4º que estamos analizando, no se entra a explorar la familia de los cuadriláteros no paralelogramos. Una carencia que detectamos en este documento del profesor es que no se alude en ningún momento a los cuadriláteros cóncavos, ni en el libro de texto ni en los restantes materiales del profesor. Resulta interesante, como actividad de profundización para los alumnos de aa.cc.mm. estudiar los trapezoides con dos pares de lados consecutivos iguales, que suelen llamarse cometa –el convexo– y flecha –el cóncavo– en alusión a sus formas. Es una actividad interesante de profundización relacionar los cometas y las flechas con los rombos, ya que comparten ciertas propiedades pero se diferencian en otras –tienen sólo un eje de simetría y sus diagonales son perpendiculares y se cortan (o sus prolongaciones), pero sólo en el punto medio de una de ellas.

**Análisis de los problemas y ejercicios**

Como hemos comentado en la sección anterior, la primera etapa del análisis de este documento del profesor consiste en diferenciar ejercicios de problemas. Hay dos factores fundamentales para hacer tal distinción en la práctica: la situación del enunciado en relación con los contenidos matemáticos del libro de texto y los conocimientos necesarios para

resolverlo. En el libro de texto que estamos analizando, el estudio de los cuadriláteros es parte del tema de Figuras Planas, que también incluye el estudio de los polígonos en general, los triángulos, la circunferencia y el círculo y las simetrías axiales. El tema comienza con una actividad de recordatorio de nombres de figuras planas poligonales y circulares y cada parte del tema –en particular la dedicada a los cuadriláteros– comienza directamente con las definiciones de las figuras objeto de estudio. Finalmente, el libro de texto incluye una sección de repaso del tema en la que, tras una síntesis de los contenidos matemáticos estudiados, se plantean diversas actividades relacionadas con ellos. Esto quiere decir que todas las actividades planteadas son de aplicación de los conocimientos estudiados.

En todos los ejercicios y problemas sobre cuadriláteros planteados en los diferentes elementos de este documento del profesor, los conocimientos necesarios para resolverlos se limitan a los que se consideran explícitamente en dicho tema. Por lo tanto, este tema no establece conexiones con otros temas del mismo curso ni de cursos anteriores, excepto con los temas de cursos anteriores dedicados a las figuras planas en los que se estudian los mismos contenidos.

La Tabla I resume la cantidad de ejercicios y problemas planteados en el documento del profesor para el tema de los cuadriláteros, diferenciando los incluidos en los diferentes elementos del documento mencionados antes.

Tabla I: Cantidad de ejercicios y problemas

	Ejercicios	Problemas		Total
		Aptos para aa.cc.mm.	Total	
<b>Libro de texto</b>	5	1	2	<b>7</b>
<b>Cuaderno de ejercicios</b>	4	0	1	<b>5</b>
<b>Guía didáctica</b>	2 (refuerzo)	2 (ampliación)	1 (refuerzo) y 2 (ampliación)	<b>5</b>
<b>Actividades de ampliación</b>	1	0	0	<b>1</b>
<b>Actividades de evaluación</b>	4	0	0	<b>4</b>

Como se ve, del total de 22 actividades planteadas en el documento del profesor para el tema de los cuadriláteros, sólo hay 6 que se puedan considerar como problemas; las restantes son ejercicios de aplicación directa de las definiciones, reconocimiento visual, dibujo de cuadriláteros o cálculo de perímetros. En la Figura 5 se ven dos ejemplos de ejercicios planteados en el libro de texto (Ferrero, Gaztelu & Martín, 2012, p. 169 del libro de texto).

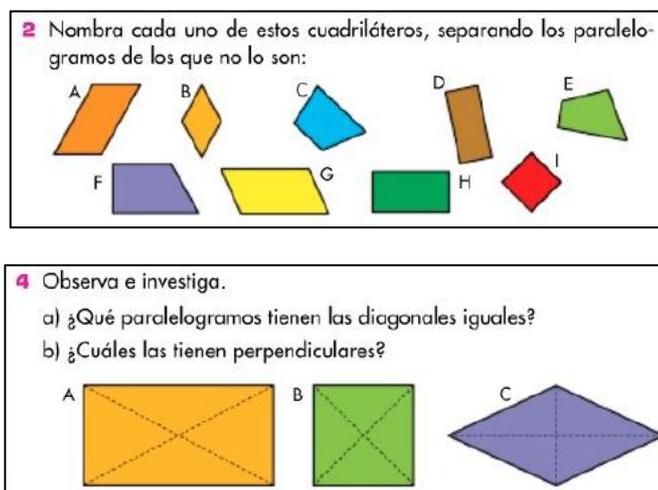
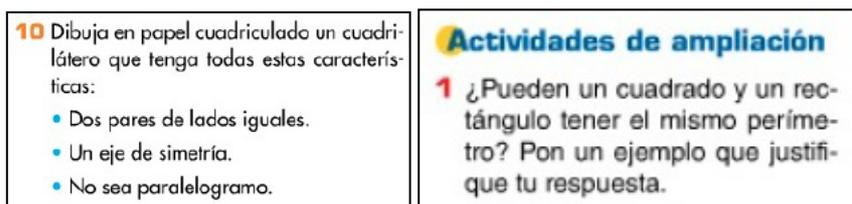


Figura 5: Dos ejemplos de ejercicios del libro de texto.

De los dos problemas planteados en el libro de texto, sólo uno (Figura 6a) se puede considerar de dificultad elevada para los estudiantes medios de 4° de Enseñanza Primaria (Ferrero, Gaztelu & Martín, 2012, p. 177 del libro de texto) y, por lo tanto, adecuado para los estudiantes de aa.cc.mm. de este curso. La guía didáctica del profesor incluye algunos problemas diferentes de los del libro de texto, clasificados como “actividades de refuerzo” – para los estudiantes con dificultades– y “actividades de ampliación” –para los estudiantes más adelantados. Las dos actividades de ampliación son problemas que se refieren a perímetros de cuadrados y rectángulos (la Figura 6b muestra uno de ellos) en los que se combinan las definiciones de estos polígonos con los procedimientos de cálculo de sus perímetros (Ferrero, Gaztelu & Martín, 2012, p. 209 de la guía didáctica). Por lo tanto, consideramos que estos dos problemas sí son adecuados para los estudiantes de aa.cc.mm. de este curso.



- a -

- b -

Figura 6: Dos problemas adecuados para los estudiantes de aa.cc.mm.

Como resumen final de este análisis podemos concluir que la cantidad de ejercicios planteados en este documento del profesor es razonable pero la cantidad de problemas es muy pequeña, no dando, por lo tanto, oportunidad al profesor de plantear a sus alumnos de aa.cc.mm. unos problemas que les permitan mejorar su comprensión de los cuadriláteros y profundizar en las relaciones entre estos. Por ello, consideramos que, en lo referente al

planteamiento de problemas, este documento del profesor es insuficiente para los estudiantes de aa.cc.mm.

Para terminar este análisis de los problemas, presentamos en la Figura 7 el espacio básico del problema enunciado en la Figura 6b. Este diagrama muestra los diferentes procedimientos razonables de un estudiante de aa.cc.mm., de 4° de Enseñanza Primaria, resolver el problema. No es de esperar que un niño de esta edad resuelva el problema de manera algebraica –salvo que se tratara de un niño de capacidad matemática excepcional. Por este motivo, el espacio básico del problema no incluye la resolución algebraica que, por otra parte, es similar a la que presentamos sustituyendo los valores concretos de las medidas por literales.

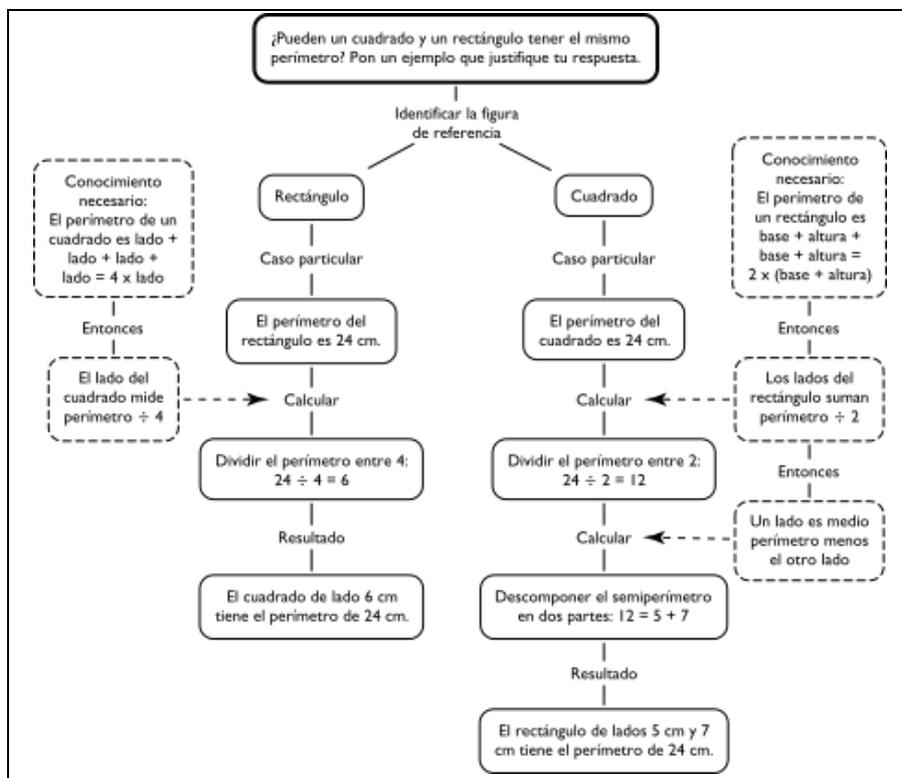


Figura 7: Espacio básico de un problema.

El enunciado del problema induce a trabajar con un ejemplo específico. El espacio básico del problema nos muestra que empezar dibujando un rectángulo resulta en una resolución más fácil y corta que empezar dibujando un cuadrado. El profesor puede pedir a sus alumnos de aa.cc.mm. que resuelvan el problema de las dos maneras diferentes para que ejerciten más sus conocimientos sobre los perímetros de cuadrados y rectángulos. Por otra parte, ambas formas de resolver el problema requieren un razonamiento del nivel 2 de van Hiele, si bien el razonamiento necesario para resolverlo a partir del ejemplo de un cuadrado necesita un razonamiento más complejo, por el paso intermedio del cálculo del semiperímetro.

### **Análisis de las indicaciones didácticas sobre atención a alumnos de aa.cc.mm**

La última parte del análisis del documento del profesor se centra en sus aspectos metodológicos. La guía didáctica incluye un comentario en el que se recuerda al profesor sintéticamente los contenidos de 3° de Enseñanza Primaria y se destacan los nuevos contenidos de 4° curso. Se propone utilizar materiales manipulativos adecuados a cada actividad y pedir a los estudiantes que escriban en sus libretas los resultados de las actividades. A pesar de que en la guía didáctica se incluyen dos actividades de ampliación y se recuerda al profesor que la versión electrónica del libro del alumno incluye actividades interactivas de ampliación, en ningún momento se menciona la atención a la diversidad ni se dan sugerencias metodológicas –ni explícitas ni implícitas– sobre la atención diferenciada a los estudiantes de aa.cc.mm. –ni tampoco a los estudiantes con dificultades.

Al comparar las actividades del libro de texto con las propuestas como ampliación en la guía didáctica y en el cuaderno del profesor de actividades de ampliación, se observa que en el libro de texto no hay ninguna actividad de cuadriláteros relacionada con los perímetros, mientras que los dos problemas de ampliación incluidos en la guía didáctica están dedicados a los perímetros de cuadrados y rectángulos. En cuanto al cuaderno de actividades de ampliación del profesor, sólo hay una relativa a los cuadriláteros, en la que se pide nombrar y describir las características de un polígono dibujado, que es un rombo. Para resolver este ejercicio sólo es necesario recordar el nombre y las propiedades aprendidas del rombo, contando además con la ayuda de la figura dada, por lo que realmente no se diferencia de algunos ejercicios planteados en el libro de texto.

Por lo tanto, tenemos que llegar a la conclusión de que el documento del profesor analizado no proporciona a los profesores ninguna sugerencia didáctica eficaz sobre una metodología adecuada para la atención a sus alumnos de aa.cc.mm. y se limita a ofrecer a los profesores unas pocas actividades –concretamente, un ejercicio y dos problemas–, que resultan claramente insuficientes.

### **CONCLUSIONES**

La literatura sobre análisis de libros de texto nos ofrece una variedad de puntos de vista y de variables para realizar análisis del contenido y de la calidad de los libros de texto. En este artículo hemos presentado una propuesta de criterios de análisis tratando de hacer una síntesis de los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas y su puesta en práctica en el contexto de la enseñanza ordinaria en Enseñanza Primaria, con la intención de que resulte útil para los profesores que necesiten crear materiales de enseñanza específicos para estudiantes de aa.cc.mm.

Hemos identificado diversas variables que se pueden utilizar para analizar los contenidos del conjunto de documentos que las editoriales comerciales de libros de texto ponen a disposición de los profesores de matemáticas de Primaria –libro de texto de los alumnos y otros materiales complementarios como guías didácticas, libretas de actividades, propuestas de evaluación, actividades interactivas, etc.–, con el fin de valorar la ayuda que estos documentos ofrecen a los profesores que tienen alumnos de aa.cc.mm. y necesitan materiales directamente utilizables en clase para organizar adaptaciones curriculares para estos alumnos. Hemos seleccionado tres grupos de variables, relacionados con los contenidos matemáticos estudiados –observando su relación con los enseñados en cursos anteriores, la complejidad

de las relaciones entre esos contenidos y el nivel de razonamiento de van Hiele necesario para entenderlos–, con las actividades planteadas –diferenciando entre ejercicios y problemas, valorando la adecuación de los problemas a los estudiantes de aa.cc.mm. como actividades de ampliación y el nivel de razonamiento necesario para resolverlos– y con las indicaciones didácticas y metodológicas proporcionadas –especialmente en relación con la atención a los estudiantes de aa.cc.mm. Hemos puesto en práctica esta aproximación teórica mostrando cómo analizar unos documentos del profesor concretos, correspondiente al estudio de los cuadriláteros en 4º curso de Enseñanza Primaria.

El análisis que hemos hecho, por medio de mapas conceptuales, de los contenidos del tema de cuadriláteros estudiados en el libro –comparándolos con una visión experta de esos contenidos– es una herramienta que permite identificar posibles direcciones para diseñar secuencias de actividades más complejas y útiles para que los estudiantes de aa.cc.mm. profundicen en su conocimiento y comprensión de los cuadriláteros.

El análisis que hemos realizado en este texto de las actividades planteadas –ejercicios y problemas– nos lleva a la conclusión de que el documento del profesor analizado, aparentemente, presta atención a los estudiantes de aa.cc.mm., ya que ofrece al profesor diversas “actividades de ampliación” que no están incluidas en el libro de texto, pero la cantidad de problemas es muy pequeña –sólo 3 problemas en todo el documento del profesor y, de ellos, sólo 2 problemas de ampliación– y la mayor parte de ellos son similares a los planteados en el libro de texto, por lo que la ayuda real es escasa.

En relación con las indicaciones didácticas o propuestas de metodología de enseñanza, la guía didáctica del profesor no ofrece ninguna indicación didáctica ni sugerencia metodológica para el tratamiento diferenciado de estudiantes de aa.cc.mm. Sería razonable que se presentara al profesor alguna indicación respecto a formas de abordar el tema de los polígonos específicas para los estudiantes de aa.cc.mm., pero no se hace. Por lo tanto, la conclusión global de este estudio es que el documento del profesor que hemos analizado presta atención a las necesidades de los estudiantes de aa.cc.mm., pero ésta es muy escasa. El amplio abanico de posibles necesidades de los estudiantes de un curso concreto hace difícil que, en unos documentos generales –como los producidos por las editoriales– haya materiales de enseñanza idóneos para cada uno de los colectivos implicados. Por tanto, la atención a los estudiantes con aa.cc.mm. requiere, por parte del profesor, la búsqueda por otras vías de materiales específicos adecuados a este colectivo. Una interesante línea de investigación e innovación didáctica, en la que estamos trabajando, es el diseño de unidades de enseñanza complementarias a las contenidas en los libros de texto, para que los profesores puedan hacer uso de ambas de manera conjunta.

Es necesario mencionar, por último, algunas limitaciones del estudio que hemos presentado: hemos tenido en cuenta algunas variables importantes, pero no otras como los sistemas de signos, el uso de software o páginas web, o la demanda cognitiva de los problemas. Estas variables son también interesantes y se pueden integrar con las que hemos usado en este artículo para dar una visión más completa de la utilidad de los libros de texto y demás documentos del profesor para enseñar a estudiantes de aa.cc.mm. Esto puede ser el objetivo de nuevas investigaciones didácticas que realizaremos en el futuro.

## Referencias

- Bodí, S. D. & Valls, J. (2002). Análisis del bloque curricular de números en los libros de texto de matemáticas. En M. C. Penalva, G. Torregosa & J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 301-312). Alicante: Universidad de Alicante.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty* (Tesis de licenciatura no publicada). Lulea, Suecia: Luleå University of Technology. Disponible en <<http://epubl.luth.se/1402-1757/2005/18/LTU-LIC-0518-SE.pdf>>.
- Cañadas, M. C., & Gómez, P. (2012). *Análisis de contenido*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Disponible en <[http://funes.uniandes.edu.co/1983/1/Apuntes\\_Modulo2.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1983/1/Apuntes_Modulo2.pdf)>.
- Castillo-Olivares, J.M. (1996). Mapas conceptuales en matemáticas. *Números*, 27, 45-58. Disponible en <<http://www.sinewton.org/numeros>>.
- Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. (Tesis doctoral no publicada), Bellaterra, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en <<http://www.tdx.cat/TDX-0615109-022631/>>.
- Fernández, C. (2011). Análisis de temas en los libros de texto de matemáticas. Características de un instrumento para la actividad profesional del profesor de matemáticas. *Uno*, 56, 77-85.
- Ferrero, L., Gaztelu, I., & Martín, P. (2012). *En línea - Matemáticas 4*. Madrid: Anaya.
- García-Moreno, M. A. (2009). *Modelo para categorizar el contenido de la geometría de los sólidos en la ESO. Su aplicación a tres manuales escolares* (Memoria de Trabajo de Investigación de Doctorado no publicada). Valencia: Universidad de Valencia.
- Haro, M. J., & Torregosa, G. (2002). El análisis de libros de texto como tarea del profesorado de matemáticas. En M. C. Penalva, G. Torregosa & J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 357-372). Alicante: Universidad de Alicante.
- Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. In S. Llinares & M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Disponible en <[www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf](http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf)>.
- Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 163-180.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.
- Martín, C. (2002). Criterios para el análisis de libros de texto desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Aplicación a la estadística y probabilidad. En M. C. Penalva, G. Torregosa & J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 373-385). Alicante: Universidad de Alicante.
- Monterrubio, M. C. & Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.

- NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Reston, VA, EE.UU.: N.C.T.M. [traducción al español del documento original *Principles and standards for school mathematics* publicado en 2000].
- Novak, J. D. & Gowin, D. B. (1996). *Aprendendo a aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números*, 28, 4-12.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *ZDM*, 33(5), 158-175.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks in England, France and Germany: Some challenges for England. En J. Winter & S. Pope (Eds.), *Research in mathematics education*. Volume 4: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics (pp. 127-144). Londres, G.B.: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Rezat, S. (2006). A model of textbook use. En J. Novotná (Ed.), *Proc. 30<sup>th</sup> Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 409-416). Praga, República Checa: PME.
- Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, 44(5), 641-651.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. N. York, EE.UU.: Academic Press.
- Shield, M. & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.