INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

O CÁLCULO MENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO NO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

Cristina Maria da Silva Morais

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

2011

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

O CÁLCULO MENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO NO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

Cristina Maria da Silva Morais

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Professora orientadora:

Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

2011

Resumo

Este estudo tem como principal objectivo compreender de que modo os alunos de 1.º ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção. Para tal, procurou responder-se a três questões: a) Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtracção?; b) De que modo evoluem essas estratégias?; e c) Será que o significado da operação de adição ou subtracção, presente no problema, influencia a estratégia de cálculo mental utilizada na sua resolução?

Tendo em conta a problemática do estudo, seguiu-se uma metodologia de natureza qualitativa, tendo sido realizados três estudos de caso.

O trabalho de campo deste estudo foi realizado numa turma do 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico, da qual sou professora, tendo sido concluído no início do ano lectivo seguinte, quando os alunos frequentavam o 2.º ano de escolaridade. Os alunos em estudo resolveram três cadeias de problemas, contemplando os diferentes significados das operações de adição e subtracção: as primeiras duas cadeias foram resolvidas a pares, na sala de aula, e a última foi resolvida individualmente, apenas pelos alunos que constituíram os casos e fora da sala de aula.

Os registos realizados pelos alunos aquando da resolução dos problemas, juntamente com as gravações áudio, vídeo e as notas de campo, constituíram-se como as principais fontes de recolha de dados.

Os dados permitem afirmar que as estratégias de cálculo usadas pelos alunos evoluíram de estratégias elementares baseadas em contagem e na utilização de factos numéricos, para estratégias de cálculo mental complexas, aditivas ou subtractivas das categorias 1010 e N10.

Foi possível identificar uma preferência por estratégias aditivas do tipo 1010 na resolução dos problemas de adição e, na resolução dos problemas de subtracção, as estratégias utilizadas pelos alunos variaram com o significado presente em cada problema: foram usadas estratégias subtractivas do tipo 1010 em problemas com o significado de retirar e, na resolução dos problemas com os significados de comparar e completar, de um modo geral, os alunos utilizaram estratégias aditivas do tipo A10, pertencente à categoria N10.

Os dados apontam também para uma possível influência do ambiente de aprendizagem na utilização de estratégias de cálculo mental mais eficientes, particularmente a nível da estratégia aditiva do tipo 1010.

Os dados permitem ainda concluir que alunos do 1.º ano são capazes de desenvolver e utilizar estratégias de cálculo mental, referidas na literatura a que tive acesso (por exemplo, Beishuizen, 1993; 2001; Buys, 2001; Cooper, Heirdsfield & Irons, 1995; Thompson & Smith, 1999), associadas a alunos mais velhos. Deste modo, os resultados deste estudo salientam a necessidade de, em ambientes de aprendizagem enriquecedores, o professor promover o desenvolvimento de estratégias complexas de cálculo mental, evoluindo para além das estratégias de cálculo elementares, habitualmente associadas aos alunos mais novos.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, estratégias de cálculo mental, resolução de problemas, ambiente de aprendizagem.

Abstract

This study has the main purpose to understand how first grade pupils develop mental calculation strategies, in an addition and subtraction problem solving context. To do so, sought to answer three questions: a) Which mental calculation strategies do pupils use when solving addition and subtraction problems?; b) How do these strategies evolve?; and c) Do the addition or subtraction situations, presented in the problem, influence the strategy of mental calculation used in its resolution?

Considering the purpose of this study, a qualitative methodology was conducted and three case studies were held.

This study fieldwork was conducted in a first grade class, of which I am the teacher, and it was completed at the beginning of the second grade. The studied pupils solved three problems chains, covering the different addition and subtraction situations: the first two chains were solved in pairs, in the classroom, and the last one was solved individually and outside the classroom.

The records of the pupils' work when solving the problems, along with the audio, video recordings and the field notes, constituted the main sources of data collection.

According to the data support, the pupils' strategies have evolved from basic strategies, such as counting and using number facts, to more complex additive and subtractive 1010 and N10 strategies.

It was possible to identify a preference for additive 1010 strategies when solving addition problems and, in the subtraction problems, the pupils' strategies varied according to the subtraction situation: subtractive 1010 strategies were used in take away problems, and in compare and complete problems, the pupils generally used additive A10 strategies, which belong to N10 category.

The data also suggest a possible influence of the learning environment on the use of more efficient strategies, particularly in the additive 1010 strategy.

The data also allow to conclude the first grade pupils are able to develop and use mental calculation strategies, mentioned in the literature that I had consulted (e.g., Beishuizen, 1993; 2001; Buys, 2001; Cooper, Heirdsfield & Irons, 1995; Thompson & Smith, 1999), linked to older pupils. Thus, the results of this study highlight the teacher need of promoting and developing complex mental strategies, in rich learning environments, evolving beyond the basic calculation strategies, usually associated to younger pupils.

Keywords: number sense, mental calculation, mental calculation strategies, problem solving, learning environment.

Agradecimentos

À Professora Lurdes Serrazina pela orientação, incentivo e por ter estado sempre presente.

Aos alunos que participaram neste estudo.

E à minha família que partilhou comigo este percurso.

Índice Geral

Índice de quadros

Índice de figuras

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Pertinência do estudo

Numa sociedade cada vez mais dependente da tecnologia, onde os computadores e calculadoras parecem estar à disposição de qualquer um, estamos constantemente rodeados de informação sob diferentes formas: gráficos, tabelas, percentagens, números decimais, entre muitos outros. Para lidar com todas estas representações, sendo capazes de as compreender, analisar e até mesmo para agir na sociedade actual, é essencial que tenhamos desenvolvido um bom sentido de número (Albergaria & Ponte, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys & Reys, 1992).

O sentido de número, embora difícil de definir uma vez que inclui vários domínios, é caracterizado por McIntosh *et al.* (1992) como um conhecimento geral dos números e das operações que é operacionalizado de modo flexível, bem como um conhecimento dos diferentes significados que os números podem ter.

O desenvolvimento do sentido de número assume um papel central no ensino da Matemática. Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) são objectivos, entre outros, a compreensão dos números e suas relações e a compreensão do significado das operações, estabelecendo relações entre estas e a capacidade de calcular com destreza.

Em Portugal, o documento A Matemática na Educação Básica (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999) reforça a importância do desenvolvimento do sentido de número, aspecto essencial para o ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos de escolaridade. Só no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007) a noção de sentido de número se torna explícita, constituindo-se como uma das três ideias chave do tema Números e Operações, juntamente com a compreensão dos números e operações e com o desenvolvimento da fluência no cálculo.

Para melhor compreender as questões relativas ao desenvolvimento do sentido de número surge, em 2005, em Portugal, o projecto "Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares" (DSN), através do qual se procurou i) compreender e aprofundar o conhecimento sobre o modo como as crianças desenvolvem o seu sentido de número, tendo sido construídas, experimentadas e avaliadas várias tarefas propostas a crianças com idades compreendidas entre os 5 e os 12 anos e ii) estudar sobre como se pode desenvolver o sentido de número nos primeiros anos de escolaridade, reflectindo-se sobre o desenvolvimento curricular e a prática lectiva (Brocardo & Serrazina, 2008; Serrazina & Ferreira, 2005).

De entre o trabalho desenvolvido no âmbito do projecto DSN, resultou um conjunto de materiais de apoio ao professor para promover o desenvolvimento da competência de cálculo e do sentido de número nos alunos (Equipa do Projecto DSN, 2005, 2007).

É importante referir que, numa fase inicial deste projecto, ao analisar as estratégias e procedimentos informais utilizados por alunos do 1.º ciclo na resolução de problemas, foram identificadas, entre outras, dificuldades na utilização de estratégias flexíveis de cálculo mental. As estratégias utilizadas consistiam em contagens um a um ou, a um nível formal, à utilização do algoritmo (Serrazina & Ferreira, 2005). No entanto, e apesar do trabalho realizado neste projecto não incidir, em particular, no desenvolvimento do cálculo mental, os professores que nele participaram começaram a valorizar mais o cálculo mental e, nos dados recolhidos, foi possível compreender como os alunos eram capazes de utilizar de modo ágil diferentes estratégias no cálculo com números até 100 (Brocardo & Serrazina, 2008).

A operacionalização flexível do conhecimento dos números e suas relações, reflecte-se no desenvolvimento de estratégias úteis e eficazes, próprias do cálculo mental, utilizado no nosso dia-a-dia, quer na nossa vida profissional quer enquanto cidadãos (Buys, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; Thompson, 2009).

O cálculo mental, caracterizado por Buys (2008) como “movimento rápido e flexível no mundo dos números” (p. 122), é fundamental para o desenvolvimento de um bom sentido de número. A importância do cálculo mental está presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), onde o ensino de diferentes estratégias de cálculo mental se constitui como um dos objectivos na aprendizagem da Matemática. Contudo, não são explícitos no programa quais os tipos de estratégias de cálculo mental que devem ser trabalhadas nos primeiros anos, sendo apenas mencionado que deverão ser ensinadas “diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações” (p. 14).

Existem diferentes estratégias de cálculo para a adição e subtracção, com números até 20 (ver, por exemplo, Thompson, 2009; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007) e com números superiores a 20 (Beishuizen, 1993; 1997; 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998). A aprendizagem das diferentes estratégias de cálculo mental, segundo alguns autores (ver, por exemplo, Beishuizen, 2001; 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998; Buys, 2001; 2008) deverá seguir um determinado percurso, de modo a promover um bom desenvolvimento do sentido de número. Existem vários estudos que evidenciam as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, sendo grande parte destes estudos realizados com alunos a partir do 2.º ano de escolaridade. Por exemplo, no estudo de Foxman e Beishuizen, realizado em 1987, reanalisado por Beishuizen (2001), foram identificadas as estratégias de cálculo mental utilizadas para a subtracção e multiplicação, por alunos com 11 anos de idade.

Outro estudo realizado com crianças dos primeiros anos, é apresentado por Beishuizen (1993) que identifica quais as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 2.º ano de escolaridade, na resolução de adições e subtracções. Os resultados obtidos neste estudo permitiram concluir quais as estratégias mais usadas e quais os erros mais cometidos na sua utilização, identificando-se fragilidades em algumas estratégias. Mais tarde, Thompson e Smith (1999), em 1999, identificaram as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos com idades compreendidas entre os 8 e os 10 anos, na adição e subtracção com números de dois algarismos.

Cooper, Heirdsfield e Irons (1995) realizaram um estudo entre 1991 e 1993, também com crianças mais novas, iniciando-se no 2.º ano e terminando no início do 4.º ano. Neste estudo foram analisadas e identificadas as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, desta vez num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção.

No último estudo referido, os investigadores analisaram as estratégias de cálculo mental a partir da resolução de problemas. De facto, o cálculo mental, como defende Thompson (2009), não só desenvolve um bom sentido de número, como também promove o desenvolvimento de competências da resolução de problemas. Existe assim uma profunda relação entre o desenvolvimento do sentido de número, cálculo mental e resolução de problemas.

De acordo com o Programa do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), no 1.º ciclo, relativamente ao tema Números e Operações, os alunos devem desenvolver "o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (p. 13). Neste documento é atribuída grande importância à resolução de problemas na aprendizagem da Matemática, constituindo-se como uma das três capacidades transversais a todo o programa.

A nível dos primeiros anos de escolaridade, particularmente no 1.º e 2.º ano, a resolução de problemas de adição e subtracção assume um papel central, sendo essencial para o desenvolvimento da compreensão dos números e das operações.

Quando se referem problemas de adição e subtracção não se trata apenas de problemas de adicionar ou subtrair quantidades. Cada uma destas operações pode ter diferentes significados, isto é, existem diferentes situações em que as operações estão presentes, aspecto que o professor deverá considerar ao planificar o trabalho a desenvolver com os seus alunos (Ponte & Serrazina, 2000).

Tal como Ponte e Serrazina (2000) afirmam, "aprende-se Matemática resolvendo problemas" (p. 55), podendo estes ser um ponto de partida para o trabalho de novos conceitos e ideias matemáticas, ou um modo de consolidar e aplicar esses conhecimentos (Fosnot & Dolk, 2001; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 2007).

Enquanto professora do 1.º ciclo, é minha preocupação aprofundar os meus conhecimentos sobre todos estes aspectos referidos, fundamentais na minha prática. O facto de ter começado a leccionar uma turma de 1.º ano no momento em que iniciei este estudo, motivou a problemática a ser estudada.

Tal como já referi, em Portugal, no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), não são definidas quais as estratégias de cálculo mental que devem ser privilegiadas na aprendizagem, e os estudos relativos às estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos quer em cálculos de adição e subtracção, quer na resolução de problemas, são na sua maioria realizados com crianças que frequentavam, pelo menos, o 2.º ano de escolaridade. Por todos estes aspectos, aliados à minha vontade de compreender o que diariamente vivencio em sala de aula, com os meus alunos, parece-me pertinente procurar compreender de que modo alunos do 1.º ano de escolaridade desenvolvem as suas estratégias de cálculo mental.

Problema e questões do estudo

Como já foi mencionado, o desenvolvimento do sentido de número está intimamente relacionado com o desenvolvimento do cálculo mental e das competências da resolução de problemas (por exemplo, McIntosh *et al.*, 1992; Thompson, 2009). Beishuizen (2009) acrescenta que o trabalho com os números como um todo, característico do cálculo mental, permite que as crianças compreendam significativamente os números e as operações numéricas.

Tendo em conta tudo o que foi referido, considerei pertinente realizar este estudo onde procuro compreender como alguns destes aspectos relativos ao desenvolvimento do sentido de número se entrecruzam, nomeadamente ao nível da utilização de estratégias de cálculo mental na resolução de problemas.

Deste modo, procuro compreender de que modo os alunos de 1.º ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção. Para tal, tentarei dar resposta às seguintes questões:

a) Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtracção?
b) De que modo evoluem essas estratégias?
c) Será que o significado da operação de adição ou subtracção, presente no problema, influencia a estratégia de cálculo mental utilizada na sua resolução?

Contexto do estudo

Tendo em conta o objectivo do estudo, segui uma metodologia de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), com o *design* de estudo de caso (Yin, 2009).

O trabalho de campo deste estudo foi realizado no ano lectivo de 2009/2010, na minha turma de 1.º ano de escolaridade, de uma escola de ensino particular em Lisboa, tendo sido concluído no início do ano lectivo de 2010/2011. A turma é constituída por 25 alunos de onde foram seleccionados três alunos: Cátia, Miguel e André.

A realização de tarefas de cálculo mental faz parte do trabalho diário em sala de aula, sendo encaradas pelos alunos como um desafio. A resolução de problemas constitui-se como o ponto de partida para o trabalho de diferentes ideias matemáticas, sendo geralmente realizada a pares, ou em pequenos grupos, terminando com uma discussão colectiva, com a participação de todos os alunos.

Na sala de aula é valorizado um ambiente de partilha de ideias entre os alunos e entre professora e alunos, onde as crianças são incentivadas a comunicar as suas descobertas e conhecimentos aos colegas, bem como a justificar os seus pontos de vista perante os colegas e professora. Por este motivo, o trabalho a pares ou em pequenos grupos são modos de trabalho privilegiados desde o início do 1.º ano, não só na realização de trabalhos na área de Matemática, como também em tarefas das restantes áreas curriculares.

Capítulo II

REVISÃO DA LITERATURA

O cálculo mental é considerado essencial para o desenvolvimento de um bom sentido de número, contudo, nem sempre é entendido do mesmo modo na comunidade matemática. Como pode então ser definido o cálculo mental? Será que calcular mentalmente é calcular *de cabeça*, sem qualquer recurso a papel e lápis? O que o distingue de outro tipo de cálculos? Quais as estratégias características do cálculo mental?

Neste capítulo procurei, com base na literatura, responder a estas questões e clarificar alguns conceitos relativos ao cálculo mental, começando por enquadrar a sua importância para o desenvolvimento do sentido de número. Apresento também alguns aspectos subjacentes à resolução de problemas, contexto escolhido para a realização deste estudo. Termino com uma abordagem ao que é considerado por diversos autores como um bom ambiente de aprendizagem, essencial para uma aprendizagem significativa.

Sentido de Número: O que é?

O termo sentido de número, embora de origem pouco clara, terá surgido em substituição do termo numeracia, proposto por Crowther, em 1959. Este era utilizado para descrever capacidades de nível superior para lidar com as exigências matemáticas da sociedade. Contudo, acabou por ficar associado ao domínio de capacidades básicas de matemática, e não a capacidades de nível superior como inicialmente definido (McIntosh *et al.*, 1992). Surge na literatura de educação matemática, na década de 80 e início da década de 90, a expressão sentido de número, com o intuito de se afastar de uma perspectiva redutora das capacidades matemáticas a que a numeracia acabou por estar associada (Cebola, 2002).

Sowder (1992) refere-se ao sentido de número como uma intuição quantitativa (*quantitative intuition*[1]) e define-o como uma rede conceptual, bem organizada, que permite a relação entre números, operações e suas propriedades, permitindo também a

[1] Em itálico da autora.

resolução de problemas de modo flexível e criativo. Esta autora acrescenta que é necessária uma definição de sentido de número que oriente o seu ensino.

Verschaffel, Greer e De Corte (2007) também comparam sentido de número a uma intuição e referem que a comunidade matemática concorda com a sua importância, uma vez que abarca inúmeros aspectos relacionados quer com os números, operações e suas relações, quer com a resolução de problemas.

A intuição, referida acima, está presente na proposta por McIntosh *et al.* (1992), que tomarei como orientação ao longo deste trabalho:

> "O sentido de número surge como a compreensão geral dos números e das operações, em paralelo com a capacidade e inclinação para utilizar este conhecimento de forma flexível de forma a fazer julgamentos matemáticos e a desenvolver estratégias eficazes para lidar com os números e as operações" (p. 3).

Assim, o sentido de número, para além de se constituir como o conhecimento que cada um possui sobre os números e operações, relaciona-se também com a aptidão e a escolha de cada um na utilização desse conhecimento de modo ágil, crítico e no desenvolvimento de estratégias cada vez mais eficientes de cálculo. Deste modo, o sentido de número é algo pessoal, uma vez que se constitui a partir das ideias sobre os números que um indivíduo tem e do modo como essas ideias foram estabelecidas (Cebola, 2002; McIntosh *et al.*, 1992).

Para além de ser pessoal, o sentido de número é também evolutivo, pois tem início antes da entrada na escola e desenvolve-se de modo gradual, ao longo de toda a vida e não apenas ao longo da escolaridade (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh *et al.*, 1992; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Reys e Yang (1998) acrescentam que o sentido de número não é uma entidade finita, pois não é algo que os alunos têm ou não têm, é sim um processo que se desenvolve e amadurece com experiência e conhecimento.

McIntosh *et al.* (1992) propõem um modelo para a análise das diferentes dimensões que constituem o sentido de número, considerando três grandes áreas, cada uma delas dividida em várias componentes:

- conhecimento *de* e facilidade *com* os números: a noção de limite dos números; múltiplas representações dos números; o sentido de grandeza relativa e absoluta dos números e um sistema de valores de referência;
- conhecimento e facilidade com as operações: compreensão do efeito das operações; consciência das propriedades matemáticas das operações e conhecimento da relação entre as operações;
- aplicação do conhecimento e facilidade com os números e as operações aos contextos de cálculo: compreensão da relação entre o contexto de problemas e os cálculos adequados, consciência da existência de diversas estratégias de resolução e aptidão para a escolha de uma estratégia eficiente e predisposição para a verificação dos resultados, reflectindo sobre a sua correcção e relevância perante o contexto do problema.

McIntosh *et al.* (1992) referem também que a atenção dada ao desenvolvimento do sentido de número constitui-se como uma reacção à atenção excessiva dada aos procedimentos mecanizados, como os que são utilizados nos algoritmos usuais, desprovidos de verdadeiro sentido de número. Por este motivo, acrescentam que uma elevada capacidade de cálculo escrito não é necessariamente o reflexo de um bom sentido de número. Esta foi uma das conclusões de um estudo realizado por Reys e Yang (1998) com alunos tailandeses do 6.º e 8.º ano de escolaridade.

Na sua investigação, Reys e Yang (1998) procuraram compreender a relação entre a competência de cálculo e o sentido de número destes alunos. Foram seleccionados alunos asiáticos por serem estes que obtêm melhores resultados em estudos internacionais relativos ao conhecimento matemático. O estudo foi realizado com 115 alunos do 6.º ano e 119 do 8.º ano que resolveram dois tipos de testes: um relativo à competência de cálculo e outro com questões relativas a conhecimentos do sentido de número. Reys e Yang (1998) concluíram que os alunos revelaram elevadas capacidades de cálculo escrito mas não apresentaram os mesmos resultados no teste relativo aos conhecimentos característicos de um bom sentido de número. Concluíram também que os alunos dependiam bastante das técnicas de cálculo ensinadas na escola e, embora os alunos com melhores resultados tivessem maior probabilidade de utilizar estratégias diferentes, só o faziam quando lhes era pedido que resolvessem determinada situação de modo diferente.

Os resultados deste estudo reflectem precisamente o que é explícito no documento nacional, A Matemática na Educação Básica (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999) "não basta aprender os procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento" (p. 46). Também Serrazina (2002) afirma que "desenvolver a competência de cálculo exige um equilíbrio e conexão entre compreensão conceptual e proficiência de cálculo" (p. 59).

A nível internacional, o desenvolvimento do sentido de número constitui-se como o ponto-chave das normas para o tema dos Números e Operações, nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007). Assim, desde o pré-escolar até ao 12.º ano de escolaridade, os alunos deverão ser capazes de: a) compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos; b) compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si; e por último c) calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis.

Em Portugal, em A Matemática na Educação Básica de Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), surge explicitamente o termo sentido de número, cujo entendimento é semelhante ao apresentado por McIntosh *et al.* (1992), constituindo-se como "uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos" (p. 46). Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), os alunos com sentido de número são alunos que "desenvolveram significados para os números e para as relações numéricas, reconhecem a sua grandeza relativa e os efeitos das operações sobre os números, tendo desenvolvido referentes para as quantidades e para as medidas" (p. 61), sendo capazes de interpretar e verificar a razoabilidade dos resultados de um determinado problema de modo crítico.

No documento Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME, 2001), embora não seja mencionado de modo explícito sentido de número, é referido que "ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática" (p. 57) que devem ser desenvolvidos ao longo de todos os ciclos de escolaridade. Assim, os alunos devem desenvolver, entre outros, a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas. No mesmo documento é referido que um dos aspectos da competência matemática a desenvolver ao longo de toda a educação básica, no domínio dos Números e Cálculo, é a compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações (ME, 2001).

Todos estes aspectos aproximam-se nitidamente do entendimento de sentido de número apresentado. Apesar de não ser explícito o termo sentido de número, é bastante claro que o seu desenvolvimento se constitui como uma das preocupações deste documento nacional.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), o desenvolvimento do sentido de número faz parte de três ideias-chave a serem estudadas no tema Números e Operações, juntamente com a compreensão dos números e operações e com o desenvolvimento da fluência no cálculo. Neste documento, o sentido de número é entendido como:

> "a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números" (p. 13).

Deste modo, o propósito principal de ensino do tema Números e Operações é desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos (Ponte *et al.*, 2007).

Embora a noção de sentido de número não seja recente a nível internacional, em Portugal só com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) se tornou explícito, constituindo-se como um dos principais propósitos de ensino. Contudo, é igualmente importante referir que embora este termo não seja referido explicitamente no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (2001), o seu desenvolvimento assume grande importância ao longo da escolaridade básica.

Cálculo mental

A importância do cálculo mental para o desenvolvimento do sentido de número é sublinhada por diversos autores (ver, por exemplo, Buys, 2008; Sowder, 1992), uma vez que "encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 59).

Mas, o que se entende por cálculo mental? Calcular mentalmente será calcular "na cabeça" sem recurso a qualquer tipo de registo? Será que falamos de cálculo mental quando usamos o algoritmo "na cabeça"?

Buys (2008) descreve cálculo mental como "o cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números" (p. 121), acrescentando que se trata de "um movimento rápido e flexível no mundo dos números" (p.122), mundo esse que resulta do seu próprio sentido de número. Também Noteboom, Bokhove e Nelissen (2008) definem o cálculo mental como "um cálculo pensado (não mecânico) sobre representações mentais dos números" envolvendo "o uso de factos, de propriedades dos números e das operações e o modo como estes se relacionam" (p. 90).

O cálculo mental é caracterizado por Buys (2008) como um cálculo: a) com números e não com dígitos, uma vez que os números são vistos como um todo, mantendo o seu valor; b) com utilização de propriedades de cálculo elementares e de relações numéricas (como a propriedade comutativa, distributiva, relações inversas e suas combinações); c) apoiado num bom conhecimento dos números e num profundo conhecimento de factos numéricos básicos com números até 20 e até 100; e d) com a utilização de notas intermédias, de acordo com a situação, mas, principalmente, efectuado mentalmente. É esta caracterização de cálculo mental que tomarei como orientação ao longo deste estudo.

Relativamente à existência de registos intermédios, também Noteboom, Bokhove e Nelissen (2008) acrescentam que calcular mentalmente "não é o mesmo que fazer os cálculos na cabeça, mas sim com a cabeça e registar determinados passos, se necessário. Neste sentido, não deve ser visto como o oposto ao cálculo escrito" (p. 90).

No entanto, existem diferentes entendimentos na comunidade matemática relativamente à existência deste tipo de registos, sendo um assunto bastante controverso. McIntosh, Reys e Reys (1997), por exemplo, definem cálculo mental como "o cálculo exacto efectuado na cabeça [*in the head*][2]. Portanto, não são utilizadas quaisquer ferramentas externas, como a calculadora ou o papel e lápis” (p. 322), acrescentando que a estratégia de cálculo pode ser inventada ou até mesmo ser a mesma que é utilizada nos procedimentos usuais de papel e lápis, ou seja, nos algoritmos usuais.

Em oposição a este tipo de caracterização de cálculo mental, Beishuizen (2009) foca a atenção não para um contraste entre cálculo mental e cálculo escrito, mas sim para as distinções entre os diferentes tipos de estratégias e procedimentos. Também Verschaffel, Greer e De Corte (2007) referem que “não é a presença ou ausência de papel e lápis, mas sim a natureza das entidades matemáticas e as acções que são cruciais na distinção entre cálculo mental e algoritmos (escritos)” (p. 566).

Sowder (1988, em Cebola, 2002), distingue os cálculos habitualmente associados aos cálculos de papel e lápis dos cálculos utilizados no cálculo mental, denominando estes últimos de algoritmos mentais. Assim, para a autora, os algoritmos mentais são: a) variáveis, uma vez que existem diferentes modos para realizar um mesmo cálculo; b) flexíveis, podendo adaptar-se os números a calcular de modo a facilitar a operação; c) activos, pois o indivíduo escolhe, conscientemente ou não, um método para realizar determinado cálculo; d) globais, pois os números são considerados como um todo e não pelos seus dígitos; e) construtivos, começando-se a calcular, geralmente, a partir do primeiro número apresentado no cálculo; f) requerem a total compreensão, desenvolvida pela própria utilização; e g) indicam uma aproximação inicial da resposta, uma vez que o cálculo se inicia geralmente com o dígito da maior ordem de grandeza (da esquerda para a direita).

Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) referem que as crianças aprendem a calcular evoluindo através de três níveis de cálculo, relacionados com o grau de abstracção das operações realizadas. Para o cálculo com números até 20, distinguem os três níveis do seguinte modo:

i. *Cálculo por contagem,* as operações são realizadas através de um movimento ao longo da linha numérica: saltando para a frente na adição, saltando para trás na subtracção;
ii. *Cálculo por estruturação,* os números são agrupados ou divididos de modo mais conveniente. Neste nível, o material estruturado desempenha um papel central;

[2] Em itálico dos autores.

iii. *Cálculo formal,* os cálculos são, na sua maioria, ligados a relações numéricas que as crianças já aprenderam e compreenderam.

No domínio dos números menores que 20, Thompson (2009) enumera diferentes níveis de estratégias aditivas utilizadas pelos alunos aquando da resolução de problemas de palavras, identificados por Carpenter e Moser:

i) contar todos: quando o aluno recorre a material, dedos ou outro tipo de suporte para determinar o resultado de uma adição, contando tudo. Por exemplo no cálculo 3+4, o aluno conta a partir do 1 até ao 7;
ii) contagem a partir do primeiro número: quando o aluno, num cálculo como 3+4, começa a contar a partir do primeiro número (3) e continua a contar a partir deste. No cálculo apresentado, o aluno conta "Três… quatro, cinco, seis, sete";
iii) contagem a partir do número maior: ao resolver o cálculo 3+4, o aluno começa a contar a partir do 4, apercebendo-se da vantagem de começar a contar do número maior;
iv) utilização de factos numéricos de adição: o aluno dá uma resposta imediata, uma vez que recorre a um facto numérico que já é do seu domínio, ou seja, já sabe que, para o exemplo dado, 3+4=7;
v) cálculo com base em factos numéricos: o aluno recorre a factos numéricos do seu domínio para calcular o que ainda não sabe. No exemplo dado, recorrendo aos dobros e quase dobros, o aluno poderia saber que 3+4=7 uma vez que 3+3=6 então 6+1=7 ou 4+4=8 e 8-1=7.

Thompson (2009), apoiando-se no seu estudo realizado em 1995, apresenta diferentes níveis de estratégias de subtracção. Contudo, o autor afirma que a sequência entre os níveis identificados não está ainda tão definida quanto a da adição:

i) contagem dos que sobram (*count out*)[3]: para calcular, por exemplo, 7-4, o aluno levanta 7 dedos, baixa 4 e conta os restantes;
ii) contagem para trás a partir de um número (*count back from*): para o mesmo exemplo, o aluno conta quatro números para trás a partir de 7, dizendo algo como "Sete… seis, cinco, quatro, três", e para não se perder utiliza os dedos ou outro tipo de suporte;

[3] Em itálico do autor.

iii) contagem para trás até (*count back to*): o aluno faz uma contagem decrescente, a partir de 7, até chegar ao 4, utilizando os dedos ou outro tipo de suporte para saber quantos números disse;

iv) contagem até (*count up*): a partir do 4, o aluno conta até 7, recorrendo de novo aos dedos ou a outro tipo de suporte;

v) utilização de factos numéricos de subtracção e cálculo com base em factos numéricos, à semelhança das estratégias já descritas para a adição.

Incluída no conjunto de estratégias onde são utilizados factos numéricos, entendidos como aqueles que são apropriados pelos alunos após a sua verificação e compreensão, e cujo questionamento já não se coloca (Ribeiro, Valério & Gomes, 2009), Thompson (1999) e Treffers (2008) destacam a importância da estratégia de saltos através do 10 (*bridging through ten*[4]ou *jumping via ten*[5]) na resolução de adições ou subtracções.

Neste tipo de estratégia, ao efectuar uma adição ou subtração, à primeira parcela é adicionada ou subtraída uma parte da segunda parcela, de modo a obter 10, sendo depois adicionada ou subtraída a parte restante, por exemplo: 8+6=; 8+2=10; 10+4=14 ou 12-5=; 12-2=10; 10-3=7.

As estratégias mais evoluídas para o cálculo de adições e subtracções no domínio dos números até 20 são caracterizadas pela utilização de factos numéricos básicos e o seu domínio é fundamental para uma evolução da utilização de estratégias cada vez mais eficientes (Baroody, 2006; Beishuizen & Anghileri, 1998; Fosnot & Dolk, 2001; Sowder, 1992).

Beishuizen e Anghileri (1998) referem que se não existir prática suficiente de tarefas de cálculo mental que permitam a compreensão e posterior memorização de factos numéricos básicos, muitas crianças irão continuar a utilizar estratégias de contagem, sem evoluir para estratégias mais eficientes. Fosnot e Dolk (2001) reforçam que é a automatização destes factos e o desenvolvimento das relações numéricas que constituem a base para um cálculo eficiente e para um progressivo desenvolvimento do sentido de número.

[4] Em itálico de Thompson (1999)
[5] Em itálico de Treffers (2008)

Segunda a minha interpretação, as estratégias utilizadas na adição e na subtracção com números até 20, apresentadas segundo Thompson (2009), não são consideradas como estratégias de cálculo mental, uma vez que, e apoiando-me em Buys (2008), não apresentam as características deste tipo de cálculo. É a partir da utilização destas estratégias mais elementares que os alunos constroem e desenvolvem as suas representações mentais dos números, evoluindo para a utilização de estratégias progressivamente mais complexas, essas sim, características do cálculo mental (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema, 1997).

Assim, assentes nos três níveis de cálculo com números até 20, já identificados por van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), Buys (2008) apresenta três formas básicas de cálculo mental com números superiores a 20, relacionadas entre si, uma vez que evoluem a partir da anterior, e cuja aquisição é acompanhada pelo progressivo desenvolvimento do sentido de número:

i. *Cálculo em linha*, os números são vistos como objectos na linha numérica e as operações são movimentos ao longo da linha: para a frente (adição), para trás (subtracção), repetidamente para a frente (multiplicação) ou repetidamente para trás (divisão).
ii. *Cálculo recorrendo à decomposição decimal*, opera-se com os números a partir das suas decomposições decimais;
iii. *Cálculo mental utilizando estratégias variadas*, baseado nas propriedades aritméticas nas quais os números são considerados objectos que podem ser estruturados de vários modos e em que é escolhida uma estrutura adequada para operar, utilizando as propriedades aritméticas adequadas.

Buys (2008) acrescenta que o processo de evolução através destas três formas básicas de cálculo não implica que a forma anterior desapareça, é sim integrada numa forma mais complexa, aumentando gradualmente o conjunto de estratégias de cálculo mental, do qual os alunos podem escolher a mais adequada mediante o tipo de problema e a sua própria preferência.

Para a adição e subtracção com números de dois algarismos, superiores a 20, são identificados na literatura holandesa diferentes tipos de estratégias, organizados em duas categorias: estratégias N10 e 1010 (ver, por exemplo, Beishuizen, 1993; 1997; 2009).

Na categoria das estratégias N10 (número+número de dezenas ou número-número de dezenas) à primeira parcela é adicionado ou subtraído um múltiplo de 10 (Beishuizen, 1993, 1997, 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998; Varol & Farran, 2007). Nesta categoria distingue-se um nível mais complexo, a estratégia N10C (número+número de dezenas ou número-número de dezenas com compensação), onde à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número aproximado da segunda parcela, correspondente a um múltiplo de 10, de modo a facilitar o cálculo. Obtido o resultado, este é depois compensado, ou seja, ao resultado é depois adicionada ou subtraída a diferença ao número aproximado (Beishuizen, 1993, 1997; Beishuizen & Anghileri, 1998; Varol & Farran, 2007).

Noutro tipo de estratégia, ainda da categoria N10, identificada como A10 (*adding on*)[6], à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, sendo depois adicionada ou subtraída a outra parte (Beishuizen, 2001; Varol & Farran, 2007).

Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens e estas são adicionadas ou subtraídas, sendo o resultado obtido através da recomposição do número (Beishuizen, 1997, 2009; Varol & Farran, 2007). Uma variante desta estratégia é a denominada por 10S (s-sequencial), onde os números são inicialmente divididos nas suas ordens para a adição ou subtracção, que são adicionadas ou subtraídas sequencialmente (Beishuizen, 1993, 2001, 2009; Varol & Farran, 2007).

No quadro da página seguinte, são apresentadas as diferentes categorias das estratégias de cálculo mental referidas, complementadas com exemplos para a adição e subtracção.

[6] Em itálico de Beishuizen (2001)

Quadro 1 – Estratégias de cálculo mental para a adição e subtracção, com números superiores a 20 (adaptado de Beishuizen, 1993, 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998)

Estratégias		**65 + 27 =**	**74 – 38 =**
N10	N10	65 + 20 = 85; 85 + 7 = 92	74 – 30 = 44; 44 – 8 = 36
	N10C	65 + 30 = 95; 95 – 3 = 92	74 – 40 = 34; 34 + 2 = 36
	A10	65 + 5 = 70; 70 + 22 = 92	74 – 4 = 70; 70 – 34 = 36
1010	1010	60 + 20 = 80; 5 + 7 = 12 80 + 12 = 92	70 – 30 = 40; 4 – 8 = – 4 40 – 4 = 36
	10S	60 + 20 = 80; 80 + 5 = 85; 85 + 7 = 92	70 – 30 = 40 40 + 4 = 44; 44 – 8 = 36

No quadro apresentado, veja-se a utilização da estratégia 1010 para o exemplo relativo à subtracção. É notória a dificuldade que a utilização deste tipo de estratégia pode constituir no caso da subtracção.

Beishuizen (2009) refere que a estratégia 1010 poderá ser pouco vantajosa numa situação de subtracção com empréstimo[7], como a que foi apresentada no quadro 1, uma vez que as crianças poderão não conseguir resolver 4-8, ou poderão calcular erroneamente 8-4. A autora refere que a dificuldade desta estratégia não está na decomposição dos números na sua estrutura decimal, mas sim na correcta recomposição dos números. Beishuizen (2009) refere que a estratégia N10 é menos vulnerável a este tipo de erros, tornando-se mais eficiente no cálculo. No entanto, a utilização deste tipo de estratégia não é fácil para os alunos, pois deverão ser capazes de adicionar ou subtrair facilmente múltiplos de 10 a partir de qualquer número (Beishuizen, 1993, 2009). Para ultrapassar esta dificuldade, Beishuizen (2009) sublinha a importância da utilização da linha numérica vazia, como falarei mais abaixo.

Beishuizen (2001) apresenta uma nova análise dos dados relativos a um estudo conduzido por uma agência financiada pelo governo britânico, a Assessment of Performance Unit (APU), à luz das recentes discussões sobre o cálculo mental e das categorias de cálculo mental, já apresentadas. O estudo foi realizado em 1987, em

[7] Neste estudo, designo subtracção com empréstimo quando, como descrito por Ponte e Serrazina (2000), o número de unidades de uma ordem no subtractivo é maior que o correspondente do aditivo.

Inglaterra, com 256 crianças com 11 anos. A autora apresenta os dados relativos às estratégias de cálculo mental utilizadas pelas crianças em duas questões, uma de subtracção e outra de multiplicação, organizando-as em diferentes categorias: utilização de estratégias N10, utilização de estratégias 1010, utilização do algoritmo e uma última categoria para as estratégias não classificadas e para os alunos que não apresentaram qualquer resposta.

Tendo em conta a problemática do meu estudo, irei apenas apresentar os resultados relativos às estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos na questão de subtracção. Uma das conclusões retiradas deste estudo foi que, no final do ensino primário, um terço dos alunos britânicos parecia utilizar estratégias N10 para resolver a subtracção 64-27, método que não lhes teria sido ensinado, tendo em conta que este estudo foi realizado no final da década de 80. Beishuizen (2001) refere ainda que a estratégia 1010 foi também bastante utilizada, muitas vezes na variante 10S para o mesmo cálculo (60-20+4-7). Contudo, a taxa de sucesso na utilização deste tipo de estratégia foi muito inferior à das estratégias do tipo N10.

A autora acrescenta que esta reanálise dos resultados parece confirmar a fraqueza da estratégia 1010 e do algoritmo usual, em particular na perda do sentido de número durante o procedimento de cálculo.

As mesmas conclusões estão presentes num segundo estudo, mais recente, analisado por Thompson e Smith (1999), realizado em 1999, em 18 escolas de Newcastle, em Inglaterra. Foram seleccionados alunos com idades compreendidas entre os 8 e os 10 anos, com diferentes níveis de aproveitamento, perfazendo um total de 144 crianças. Foram realizadas entrevistas para se compreender como resolviam adições e subtracções com números de dois algarismos, como 23+24 ou 37+45, e 68-32 ou 54-27.

As estratégias de resolução utilizadas pelos alunos foram categorizadas como no estudo de 1987, apresentado anteriormente, embora com pequenas diferenças: categoria 1 – contagem de 1 em 1 e/ou de 10 em 10; categoria 2 – manipulação de dígitos, que incluía o algoritmo usual utilizado mentalmente; categoria 3 – utilização da estratégia 1010; categoria 4 – utilização da estratégia 10S e a categoria 5 – utilização da estratégia N10 ou N10C.

Os resultados obtidos confirmaram os resultados do estudo realizado em 1987, particularmente a nível da subtracção, onde as estratégias do tipo N10 e N10C foram muito utilizadas, apesar de, provavelmente, estas estratégias não terem sido ensinadas às crianças.

Beishuizen (2001), analisando o estudo de Thompson e Smith, diz ainda que as estratégias de cálculo mental utilizadas para a adição foram diferentes das utilizadas para a subtracção. Na adição foram utilizados principalmente métodos como 1010 e 10S e na subtracção foram usadas várias estratégias: por um lado métodos como as contagens e o cálculo por dígitos e por outro lado métodos complexos como as estratégias do tipo N10 e N10C.

Também no estudo longitudinal realizado por Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema e Empson (1998), com 82 alunos do 1.º ao 3.º ano, se concluiu que a estratégia do tipo 1010 era pouco utilizada no cálculo de subtracções. Estes autores verificaram ainda que, no 2.º ano, eram poucos os alunos que utilizavam estratégias informais de cálculo para efectuar subtracções, e que, no final do 3.º ano, praticamente um terço dos alunos nunca tinha utilizado qualquer estratégia informal para o cálculo de diferenças. Relativamente à adição, não se verificou uma preferência por estratégias do tipo 1010, pois mais de metade dos alunos utilizou estratégias pertencentes a ambas as categorias, N10 e 1010.

Beishuizen (2009) refere que os alunos com mais facilidade no cálculo parecem indicar a estratégia N10 como a mais eficiente, enquanto que os alunos com mais dificuldade preferem a estratégia 1010, embora lhes ofereça alguns obstáculos. Menciona também que a maioria dos alunos selecciona apenas uma das estratégias que utiliza quer para adição quer para a subtracção, e que apenas uma minoria utiliza as duas estratégias de modo flexível: a estratégia do tipo 1010 para a adição e a do tipo N10 para a subtracção.

Vários autores sugerem que deverá existir uma sequência no ensino e aprendizagem das diferentes estratégias, partindo das estratégias do tipo N10, sendo introduzidas a seguir as estratégias pertencentes à categoria 1010 (ver, por exemplo, Beishuizen, 2001; 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998; Buys, 2001; 2008).

Esta sequência na aprendizagem das estratégias de cálculo de N10 para 1010, reflecte um percurso evolutivo com origem nas estratégias de contagem inicialmente utilizadas de modo espontâneo pelos alunos, passando depois para adições ou subtracções através do 10, até à utilização de estratégias do tipo N10 (Beishuizen, 1997;

2009). Deste modo, as estratégias do tipo N10 dão continuidade às estratégias de contagem inicialmente utilizadas, que se transformam em estratégias com progressiva eficiência e complexidade.

Mais tarde, e após o domínio deste tipo de estratégias, são introduzidas estratégias de decomposição dos números, do tipo 1010, sendo depois introduzidos os algoritmos usuais (Beishuizen, 2009). Este tipo de estratégia 1010 é introduzido depois de serem trabalhadas as do tipo N10, devido às dificuldades que a utilização de estratégias do tipo 1010 oferece em situações como a subtracção com empréstimo (Beishuizen, 1997), já referidas. Para além deste aspecto, Beishuizen (2009) refere que esta sequência permite que os alunos aprendam a estratégia do tipo 1010, considerada mais complexa, fácil e rapidamente, uma vez que já adquiram um bom domínio no cálculo com números até 100, através da utilização de estratégias do tipo N10.

Parece-me possível estabelecer a relação entre esta sequência na aprendizagem das estratégias de cálculo, com as três formas básicas de cálculo mental apresentadas por Buys (2008) (ver página 16). O autor apresenta três formas básicas, organizadas em níveis de complexidade, que me parecem estar de acordo com a sequência para aprendizagem das estratégias de cálculo mental, proposta na literatura holandesa: as estratégias pertencentes à categoria N10 identificam-se com a primeira forma básica de cálculo mental, o cálculo em linha. A segunda forma básica parece corresponder às estratégias do tipo 1010, uma vez que o cálculo é efectuado através da decomposição decimal dos números. Por último, na terceira forma básica de cálculo mental, incluem-se as estratégias como N10C ou A10, que Buys (2008) descreve como estratégias variadas.

Buys (2001) apresenta uma trajectória de aprendizagem de estratégias de cálculo, com alunos do 2.º ano de escolaridade, e que organiza em quatro fases. Numa primeira etapa, no início do ano escolar, os alunos exploram os diferentes contextos dos números, passando depois à segunda etapa, onde efectuam cálculos com números até 100, privilegiando-se as estratégias de saltos através do 10 e de saltos de 10. Assente nestas estratégias, é depois introduzida, na terceira etapa, a estratégia do tipo N10 com o suporte da linha numérica vazia. Deste modo, a linha numérica vazia constitui-se como um suporte privilegiado para o trabalho das estratégias de cálculo mental, uma vez que é considerada como: “i) um suporte para a aprendizagem de estratégias mentais cada vez mais eficientes; ii) um modelo mais natural e transparente para o cálculo; iii) um modelo aberto às estratégias informais sendo em simultâneo um suporte para o desenvolvimento de estratégias mais formais e eficientes; e iv) um modelo que promove um aumento da flexibilidade de estratégias de cálculo mental, particularmente variações das estratégias do tipo N10" (Beishuizen, 2009, p. 160). Por fim, na quarta etapa, são introduzidas as estratégias do tipo 1010, N10C e A10, entre outras denominadas por variadas ou mistas.

Buys (2008) refere que se esta sequência de aprendizagem não for realizada na ordem definida e com a profundidade suficiente, os alunos com maiores dificuldades poderão não dominar as estratégias de cálculo mental referidas, acabando por misturar os diferentes tipos de abordagem. Beishuizen (2001) menciona que, de acordo com a literatura e experiência holandesa, a introdução em simultâneo das diferentes estratégias de cálculo não promove o desenvolvimento e utilização de novas estratégias de cálculo mental.

Beishuizen e Anghileri (1998) referem que o programa experimental da linha numérica vazia, com a sequência de N10 para 1010, realizado ao longo de um ano com 10 turmas do 2.º ano de escolaridade, foi um sucesso. De entre as conclusões obtidas por este programa, parte integrante de um estudo conduzido pela universidade de Leiden entre 1992 e 1996, as autoras referem que, após um bom domínio das estratégias do tipo N10, os alunos facilmente adoptaram as estratégias do tipo 1010 como uma estratégia alternativa, três meses antes do final do 2.º ano.

Antes da introdução da linha numérica vazia no currículo holandês dos primeiros anos, as estratégias do tipo 1010 eram muito utilizadas nas salas de aula. Nessa altura, no final da década de 80, foi realizado um estudo onde se desenvolveram dois programas de computador: um que levasse os alunos a progredir na utilização de estratégias do tipo 1010 para 10S, até à utilização de estratégias do tipo N10 e outro que promovesse a prática da estratégia N10 (Beishuizen, 2001). Esta sequência foi assim delineada pois os alunos adaptavam muitas vezes a estratégia 1010 para uma estratégia 10S, aquando da resolução de subtracções com empréstimo.

Embora os resultados deste estudo tenham sido inconclusivos, Beishuizen (2001) recorda o estudo de 1987, da responsabilidade da APU e o estudo de Newcastle, de Thompson e Smith, ambos já referidos, onde os resultados obtidos parecem sugerir uma trajectória de aprendizagem de estratégias do tipo 1010, para 10S e finalmente

N10, uma vez que os alunos tendem a adoptar estratégias do tipo 1010 para a adição, recorrendo a estratégias do tipo N10 para a subtracção.

Em Portugal, não existe uma sequência definida para a aprendizagem das diferentes estratégias de cálculo mental. No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) é sublinhada a importância do trabalho de "diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações" (p. 14), o que parece remeter para o trabalho de estratégias do tipo 1010, contudo, não são explícitos quais os tipos de estratégias de cálculo mental a privilegiar nos primeiros anos, ou mesmo se deveria existir um trabalho sequencial dos diferentes tipos de estratégias.

No mesmo documento, o cálculo mental é apresentado seguindo a caracterização de Buys (2008), já referida, sendo realçada a importância do ensino de diferentes estratégias de cálculo mental enquanto objectivo da aula de Matemática, bem como a importância do desenvolvimento do cálculo mental a par do desenvolvimento do sentido de número.

O desenvolvimento do cálculo mental constitui-se assim como um dos principais objectivos do tema Números e Operações, devendo ser trabalhado desde o início do 1.º ciclo de escolaridade, uma vez que "a destreza do cálculo é essencial para a manutenção de uma forte relação com os números, para que os alunos sejam capazes de olhar para eles criticamente e interpretá-los de modo apropriado" (p. 10). Assim, neste tema, o desenvolvimento de destrezas de cálculo numérico mental e escrito, constitui-se como um dos objectivos gerais de aprendizagem, que deverá ser promovido pela prática de rotinas de cálculo mental que podem ser apoiadas por registos escritos. Deste modo, os alunos deverão ser capazes de, progressivamente, "utilizar as suas estratégias de modo flexível, e de seleccionar as mais eficazes para cada situação" (p. 14).

Internacionalmente, o desenvolvimento do cálculo mental, a par com o desenvolvimento do sentido de número, ocupa uma posição central nas normas definidas pela NCTM, para o tema dos Números e Operações. A destreza de cálculo é essencial, devendo os alunos possuir e utilizar métodos de cálculo eficazes e precisos. Esta destreza de cálculo poderá manifestar-se através da utilização de várias estratégias mentais e registos escritos. Acrescenta-se ainda que "independentemente do método utilizado, os alunos deverão ser capazes de o explicar, compreender que existem muitos outros métodos, e ver a utilidade de métodos que são eficazes, precisos e de aplicação generalizada" (NCTM, 2007, p. 34).

Assim, os alunos deverão ser capazes de: a) desenvolver e usar estratégias para o cálculo com números inteiros, principalmente a nível da adição e subtracção; b) desenvolver destreza em combinações numéricas fundamentais para a adição e subtracção; e c) utilizar uma diversidade de métodos e ferramentas de cálculo, onde se inclui o papel e lápis (NCTM, 2007).

Resolução de problemas

Uma das componentes do sentido de número, constituinte do modelo proposto por McIntosh *et al.* (1992) para a análise das diferentes dimensões do sentido de número, é a aplicação do conhecimento dos números e das operações aos contextos de cálculo.

Esta componente diz respeito à compreensão da relação entre o contexto de problemas e os cálculos adequados, consciência da existência de diversas estratégias de resolução e aptidão para a escolha de uma estratégia eficiente e predisposição para a verificação dos resultados, reflectindo sobre a sua correcção e relevância perante o contexto do problema (McIntosh *et al.*, 1992).

A resolução de problemas poderá ser o ponto de partida para a abordagem de novos conceitos e ideias matemáticas ou, por outro lado, pode ser uma actividade para ajudar a aplicar, desenvolver e consolidar ideias matemáticas já trabalhadas (Fosnot & Dolk, 2001; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 2007).

É importante começar por clarificar o termo problema. Muitas vezes, denominamos problema a uma tarefa que para muitos alunos poderá ser um exercício. Como Yackel, Cobb, Wood, Weatley e Merkel (1991) referem, "as situações que as crianças acham problemáticas distinguem-se devido às diferenças dos seus conhecimentos, experiências e objectivos" (p. 18). Assim, uma determinada tarefa poderá constituir-se como um problema para um aluno se este não possuir meios para o resolver através de uma solução rápida. Por outro lado, se o aluno possuir uma forma de o resolver rapidamente seguindo determinada estratégia, tal tarefa não se trata de um problema, mas sim de um exercício. Dependendo do conhecimento prévio de cada aluno, o que para uns alunos poderá ser considerado como um problema, cuja resolução se constitui como um desafio, para outros poderá tratar-se apenas de um exercício (Abrantes, 1988; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008; ME, 2001; Ponte, 1987; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 2007).

Referi acima a palavra estratégia, cujo significado deve também ser esclarecido, uma vez que será um termo ao qual irei recorrer com frequência ao longo deste estudo. Ponte e Serrazina (2000) definem estratégia como "uma abordagem que pode ser usada em diversos problemas" (p. 55). Os autores apresentam um conjunto das estratégias mais utilizadas na resolução de problemas a nível do 1.º ciclo: utilização de diagramas e outras representações matemáticas, onde se inclui a realização de um esquema ou a utilização de tabelas, procurar regularidades, fazer uma listagem de todas as possibilidades, experimentar casos particulares, usar tentativa e erro e pensar do fim para o princípio.

Contudo, esta definição de estratégia não coincide com a definição que será utilizada neste trabalho. Consciente de que estratégia é um termo muito utilizado na literatura, e nem sempre com a mesma definição, e assumindo ainda que talvez esteja a atribuir este termo ao que Beishuizen (1997) denomina de procedimentos de cálculo mental, ao longo deste trabalho o termo estratégia diz respeito às estratégias do tipo N10, 1010 e variantes, já descritas.

Existem várias classificações relativamente aos diferentes tipos de problemas (Abrantes, 1988; Boavida *et al.*, 2008; Schoenfeld, 1996), no entanto, tendo em conta o objectivo deste estudo, irei centrar-me apenas nos problemas de palavras de adição e subtracção.

Para Abrantes (1988), neste tipo de problemas está bem presente o significado concreto das operações matemáticas. Verschaffel, Greer e De Corte (2007) acrescentam que a resolução de problemas de palavras possibilita o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, constituindo-se também como uma oportunidade para as crianças construírem uma compreensão rica e ampla das quatro operações básicas, de revelar níveis avançados de contagem, e de construir um conjunto de estratégias de cálculo com números inteiros, cada vez mais eficientes.

Neste estudo, irei centrar-me nas operações de adição e subtracção, uma vez que estas operações assumem um papel importante no 1.º e 2.º anos de escolaridade.

Estas operações surgem em diferentes situações, que lhes poderão conferir significados diferentes, ou seja, existem diferentes situações que poderão ser resolvidas recorrendo à adição ou à subtracção. Deste modo, as operações da adição e subtracção, dependendo da situação/problema onde estão presentes, assumem diferentes significados.

Pires (1992) define significado de uma operação como "a classe de situações problemáticas que se resolvem através dessa operação" (p. 64), acrescentando que essa aprendizagem é realizada, principalmente, através da resolução de problemas.

Ponte e Serrazina (2000) identificam cinco situações distintas, para a adição e subtracção, de acordo com o significado que estas operações podem ter: Mudar juntando e Combinar, no caso da adição, e Mudar tirando, Comparar e Tornar igual, para a subtracção.

Também no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) é contemplado o trabalho de todos os significados da adição e subtracção, sendo objectivos: a) compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar (denominado por Mudar juntando por Ponte e Serrazina, 2000) e b) compreender a subtracção nos sentidos retirar (correspondente ao que Ponte e Serrazina denominam de Mudar tirando), comparar e completar (significado identificado pelos mesmos autores como Tornar igual).

Cada um dos diferentes significados que as operações de adição e subtracção poderão assumir, e que irei seguir ao longo deste trabalho, encontram-se descritos e exemplificados no quadro seguinte.

Quadro 2 – Diferentes significados das operações de adição e subtracção
(adaptado de Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 2007)

Adição	**Combinar:** duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade. *Exemplo: A turma do Luís tem 13 meninos e 11 meninas. Quantos alunos tem a turma?*
	Acrescentar: uma quantidade é aumentada. *Exemplo: A Helena tem 14 cromos, comprou mais 5. Com quantos cromos ficou?*

(continua)

Quadro 2 (continuação)

Subtracção	**Retirar:** a uma quantidade é retirada outra. *Exemplo: O Marco tinha 23 berlindes mas perdeu 9. Com quantos ficou?*
	Comparação: são comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra. *Exemplo: A Luísa já leu 14 livros e o Tomás leu 5. Quantos livros a mais já leu a Luísa?*
	Completar: é calculado quanto se deverá juntar a uma quantidade para se obter um determinado valor. *Exemplo: O Pedro quer comprar um jogo que custa 32€ e já tem 17€. Quanto dinheiro ainda tem de poupar?*

Estes diferentes significados da adição e da subtracção deverão estar presentes nos problemas a resolver pelas crianças, não que interesse para estas o significado da operação presente, mas sim porque o professor deverá proporcionar aos seus alunos diferentes situações onde os vários significados estejam presentes (Ponte & Serrazina, 2000).

É importante sublinhar que a adição e a subtracção se encontram intimamente relacionadas e o contexto dos problemas torna-se essencial para que os alunos compreendam a relação existente entre estas duas operações (Fosnot & Dolk, 2001). Neste sentido, as experiências com dois dos quatro projectos analisados em Fuson *et al.* (1997) sugerem que os problemas de adição e subtracção deverão ser resolvidos pelos alunos desde início e em simultâneo.

Fuson (1992) salienta que deverá ser feita uma distinção entre o tipo de problema e a operação necessária para descobrir o resultado desconhecido. Também Fosnot e Dolk (2001) referem que apesar do professor planear um determinado contexto, com um significado da adição ou subtracção presente, não significa que os alunos o irão interpretar desse modo. Estes autores acrescentam ainda que "é provável que um determinado contexto afecte os modelos e estratégias utilizados pelas crianças" (p. 90).

Esta é uma das conclusões da investigação realizada por Christou e Philippou (1998), com alunos dos 2.º, 3.º e 4.º anos de escolaridade aos quais foi pedido que resolvessem problemas de palavras, com estruturas aditivas ou multiplicativas inerentes.

Os autores, entre outras evidências, destacaram que a dificuldade sentida na resolução de cada problema se devia à natureza de cada situação e à operação envolvida no problema. Apesar de neste estudo, no caso particular dos problemas de estrutura aditiva, serem definidas categorias de problemas diferentes das apresentadas anteriormente, de Ponte e Serrazina (2000), as conclusões sublinham a importância que o contexto assume na resolução de problemas.

É através do contexto que as crianças se relacionam e envolvem na resolução de problemas. Nos primeiros anos o contexto é fundamental, uma vez que se constitui como uma base concreta para o cálculo (Treffers, 2008) e como suporte ao pensamento dos alunos mais novos (Ponte *et al.*, 2007).

Para que os alunos sejam capazes de resolver problemas deverão resolver problemas regularmente (Ponte *et al.*, 2007). É ao resolver problemas que os alunos adquirem confiança na interpretação dos problemas e na sua consequente resolução, desenvolvendo estratégias de resolução inicialmente informais, mas que evoluem para estratégias cada vez mais flexíveis e formais, a par do desenvolvimento do seu conhecimento matemático (Ponte *et al.*, 2007).

Entre 1991 e 1993, Cooper, Heirdsfield e Irons (1995) realizaram um estudo ao longo de dois anos (com início no 2.º ano e fim no início do 4.º ano) com 106 crianças em Queensland, Austrália. Os alunos pertenciam a diferentes escolas do 1.º ciclo e tinham diferentes níveis de aproveitamento (acima da média, mediano e abaixo da média).

Foram realizadas entrevistas onde os alunos resolviam problemas de palavras de adição e subtracção, envolvendo números de dois e três algarismos. O estudo foi realizado entre o 2.º e o 3.º ano por serem os anos em que são introduzidos os algoritmos usuais nas escolas de Queensland, cujos efeitos se esperavam observar nas estratégias utilizadas pelos alunos.

Os significados das operações presentes nos problemas foram: i) combinar (*joining addition*)[8], como no exemplo: "Se uma maçã custa 35 cêntimos e uma laranja custa 27 cêntimos, quanto custam as duas peças de fruta?"; ii) retirar (*separation subtraction*), como no problema "Se o John tivesse 82 cêntimos e gastasse 54 cêntimos em bananas, com quanto dinheiro é que ficava?" e iii) completar (*missing-addend*), por exemplo "Se a Nancy tivesse 47 cêntimos e o chocolate custasse 75 cêntimos, quanto dinheiro é que ainda precisava?" (p. 197).

Cooper, Heirdsfield e Irons (1995) identificaram as estratégias utilizadas pelos alunos utilizando uma categorização semelhante à que apresentei relativamente ao cálculo mental:

1. Contagem, recorrendo ou não à contagem pelos dedos, por exemplo: 27+15=; 27, 28, 29,…
2. Estratégias recorrendo a factos numéricos, por exemplo: 15+17=; 15+15=30; 30+2=32;
3. u-1010 (o cálculo é feito da direita para a esquerda, nesta categoria está incluída a utilização do algoritmo), por exemplo 28+35=; 5+8=13=10+3; 20+30+10=60; 60+3=63;
4. 1010 (o cálculo é feito da esquerda para a direita), por exemplo: 28+35=; 20+30=50; 5+8=13; 50+13=63;
5. u-N10 (o cálculo é realizado começando por adicionar ou subtrair o número de unidades), por exemplo: 28+35=; 28+5=33; 33+30=63;
6. N10, por exemplo: 28+35=; 28+30=58; 58+5=63;
7. métodos mistos, por exemplo: 368+275=; 368+200=568; 568+5=573; 573+70=643
8. estratégias holísticas, por exemplo: 38+56= 40+50+4=94.

Cooper, Heirdsfield e Irons (1995) concluíram que as estratégias de contagem foram progressivamente substituídas por estratégias cada vez mais complexas de cálculo. As estratégias holísticas e do tipo 1010 também foram sendo mais utilizadas no decorrer do estudo.

No final do estudo, a estratégia do tipo u-1010 era a que os alunos mais utilizavam correctamente. Importa recordar que esta investigação foi realizada nos anos

[8] Em itálico de Cooper, Heirdsfield e Irons (1995)

lectivos em que é ensinado o algoritmo usual, o que talvez tenha influenciado a escolha das estratégias de resolução.

Heirdsfield e Cooper (1996) acrescentam que, de um modo geral, os alunos utilizaram estratégias subtractivas na resolução em problemas com o significado de retirar e estratégias aditivas em problemas com o significado de completar. Segundo Cooper, Heirdsfield e Irons (1995), os problemas com o significado de completar foram aqueles em que os alunos revelaram maiores dificuldades.

O estudo mostra também que, de um modo geral, os alunos têm menos sucesso na resolução de situações de subtracção do que de adição. Este aspecto é igualmente mencionado por Fuson *et al.* (1997) quando referem que a subtracção com números com mais de um algarismo parece ser mais difícil para as crianças do que a adição. A falta da comutatividade da subtracção é apontada pelos autores como uma das possíveis causas para esta dificuldade, à semelhança do que já tinha sido referido aquando da utilização de estratégias do tipo 1010 na subtracção.

A resolução de problemas assume grande importância na aprendizagem da Matemática, o que está patente quer em orientações a nível internacional, quer a nível nacional.

Em Portugal, a resolução de problemas, tal como o raciocínio matemático e a comunicação matemática, é entendida como uma capacidade matemática fundamental e transversal a toda a aprendizagem da Matemática (Ponte *et al.*, 2007).

Centrando-me nos problemas de adição e subtracção, no Programa de Matemática do Ensino Básico são objectivos: a) compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar e b) compreender a subtracção nos sentidos retirar, comparar e completar (Ponte *et al.*, 2007).

Nas orientações internacionais, nomeadamente a nível das normas definidas pela NCTM (2007), a resolução de problemas assume um papel central na aprendizagem da Matemática, sendo parte integrante de toda a aprendizagem, englobando todas as áreas da Matemática. Neste documento é definido que todos os alunos, no final do 12.º ano de escolaridade deverão ser capazes de: a) construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas; b) resolver problemas que surgem em matemática e noutros contextos; c) aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas; e d) analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

Ambiente de aprendizagem

Diversos autores referem que o ambiente vivido em sala de aula é determinante para a aprendizagem dos alunos, facto que tenho vindo a constatar na minha prática profissional. Fuson (1992) e Wood, Merkel e Uerkwitz (1996), por exemplo, referem que a melhoria do conhecimento dos alunos só pode ter lugar num bom ambiente de aprendizagem. Também Wheatley (1999) reforça que quando a sala de aula é entendida como um local de aprendizagem, e não como um local de trabalho ou exercício, o seu ambiente promove uma atitude de iniciativa, resultando em aprendizagem significativa.

De acordo com Ponte e Serrazina (2000), o ambiente de aprendizagem depende da cultura de sala de aula, da negociação de significados, do tipo de comunicação, do modo de trabalho dos alunos e do tipo de tarefas propostas. Apoiando-me em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) acrescentaria a estes um outro factor: o professor, pois este é, segundo os mesmos autores, "o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula" (p. 26).

Segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), é a cultura de sala de aula que "regula as normas de comportamento e interacção e estabelece as expectativas dos respectivos intervenientes" (p. 90). É essencial que sejam estabelecidas normas entre todos os intervenientes em sala de aula, alunos e professor, que promovam um ambiente em que os alunos se sintam livres para construir os seus próprios significados, onde queiram comunicar as suas ideias aos outros (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996) e onde se valorize a cooperação e negociação de significados, em vez da competição e o conflito (Yackel *et al.*, 1991).

Para que tal aconteça, o professor deverá ser capaz de, juntamente com os seus alunos, promover um ambiente de confiança mútua (Yackel *et al.*, 1991), criando situações em que os alunos partilhem e expliquem os seus pensamentos (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996), possibilitando uma negociação de significados entre alunos e também entre alunos e professor.

Ponte *et al.* (1997) entendem a negociação de significados como "uma interacção entre dois ou mais intervenientes, com pontos de partida e interesses muitas vezes diferentes, que podem dar algo uns aos outros, beneficiando todos" (pp. 87-88), fundamental para a aprendizagem.

Outro dos factores de que depende o ambiente de aprendizagem, identificado em Ponte e Serrazina (2000) e já referido ainda sem que o devido destaque, é a comunicação. Para Ponte *et al.* (1997) a comunicação é em simultâneo "um indicador da natureza do processo de ensino-aprendizagem e uma condição necessária para o seu desenvolvimento" (p. 83). A comunicação, enquanto partilha e debate de ideias, é essencial não só para exprimir e clarificar o próprio pensamento, mas também para a construção significativa de conhecimento (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996).

O modo de trabalho dos alunos é outro dos factores do qual depende o ambiente de aprendizagem. Os diferentes modos de trabalho são valorizados por diversos autores (ver, por exemplo, Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.*, 1997; Ponte *et al.*, 2007), em colectivo, em pequenos grupos, a pares e individualmente, sendo da responsabilidade do professor decidir qual o modo de trabalho mais adequado à tarefa que pretende realizar.

Numa abordagem centrada na resolução de problemas, como a que foi seguida neste estudo, o trabalho em colectivo e a pares é fundamental. As aulas centradas na resolução de problemas seguem uma linha orientadora comum (ver, por exemplo, Wheatley, 1991; Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996; Yackel *et al.*, 1991): iniciam-se com a introdução do problema a resolver, seguido de um momento para o trabalho a pares, finalizando-se com um momento em colectivo onde as diferentes resoluções do problema são partilhadas e discutidas por todos os alunos.

Neste tipo de abordagem, o trabalho a pares constitui-se como uma oportunidade para os alunos realizarem dois tipos de actividades: a resolução dos problemas e a resolução dos conflitos resultantes de um trabalho em conjunto com os colegas (Ponte *et al.*, 1997; Yackel *et al.*, 1991). Relativamente a este último aspecto, César (2000) refere que, neste modo de trabalho, os alunos têm que ser capazes de recontextualizar o que sabem, de modo a comunicar com o seu par, e têm de ser capazes de compreender outras estratégias, que poderão resultar em respostas diferentes. A autora sublinha que são "estes movimentos de descentração e recontextualização, de procura de significados, que promovem o desenvolvimento cognitivo e a apreensão de saberes" (p. 31).

Uma sala de aula, de acordo com Fuson (1992), deverá ser um local onde: a) as crianças se envolvam em situações matemáticas que são significativas e interessantes para elas; b) a ênfase está no envolvimento nas situações matemáticas e não em respostas rápidas; c) diferentes soluções são aceites, discutidas e justificadas; e d) os erros são expectáveis e são analisados de modo a melhorar o entendimento de todos.

Apoiando-me na minha experiência profissional, este último aspecto tem especial influência no ambiente de aprendizagem, pois os alunos apenas se sentem livres para experimentar e partilhar ideias matemáticas, se sentirem que as suas respostas, mesmo que incorrectas, são respeitadas e tomadas em consideração quer pelos colegas, quer pelo professor. Para além disso, o erro é um importante indicador sobre as concepções matemáticas do aluno (Abrantes Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte & Serrazina, 2000). Cobb, Yackel, Wood, Wheatley e Merkel (1988) sublinham a importância das tentativas de resolução dos alunos "enquanto expressão do seu pensamento matemático, que deve ser tratado com respeito, em vez de ser visto como exemplos de pensamentos errados que precisam de ser corrigidos" (p. 74).

Em resumo, e de acordo com Cobb *et al.* (1988), neste tipo de ambiente os alunos: a) persistem nas suas tentativas de resolução de problemas, sem dar importância ao número de problemas resolvidos; b) entendem os problemas como desafios, evitando conhecer o resultado por outros colegas; c) acreditam que a Matemática tem que fazer sentido, atingindo a satisfação pessoal quando são capazes de descobrir por si próprios; e d) sentem-se livres para discutir o seu entendimento matemático, em pequenos grupos e em colectivo, sendo capazes de explicar e justificar as suas resoluções.

Wood, Merkel e Uerkwitz (1996) acrescentam que este ambiente não só promove a aprendizagem dos alunos, como também do próprio professor, aspecto que merece alguma reflexão. Neste tipo de ambiente o professor tem a oportunidade de ouvir e procurar compreender as concepções matemáticas de cada aluno, tentando apoiar e encorajar o raciocínio e a reflexão dos alunos. O papel do professor é claramente exigente (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996), no entanto, proporcionar-lhe-á não só "uma compreensão mais clara do desenvolvimento matemático de cada criança, mas também a percepção do crescimento do significado matemático entre as crianças" (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996, p. 43).

Apesar de me ter centrado no ambiente de aprendizagem em Matemática, particularmente num ambiente de resolução de problemas, este só é criado se as suas características definirem a atmosfera continuamente vivida em sala de aula, independentemente da área curricular.

Para Ponte e Serrazina (2000) a sala de aula constitui-se como "uma microcultura onde se afirmam diversas crenças e valores que são perpetuados pelas práticas diárias" (p. 126), ou seja, a sala de aula é, como designada por Fosnot e Dolk (2001), uma comunidade, o que revela que a riqueza de um ambiente como o que foi descrito não só se reflecte numa aprendizagem significativa dos conteúdos das diversas áreas, mas também numa aprendizagem socio-afectiva. Este aspecto é igualmente valorizado por César, Torres, Caçador e Candeias (1999) que, embora se refiram ao trabalho a pares, apresentam algumas conclusões que se estendem para além deste modo de trabalho e da área de Matemática:

> "a maior riqueza da implementação de um trabalho deste tipo é que permite desenvolver nos alunos aspectos que nos parecem essenciais: uma auto-estima positiva, (…) maior autonomia e sentido crítico, mais solidariedade e respeito pelos pares e professores" (p. 87).

Também na minha sala de aula, onde realizei este estudo, existe um ambiente onde se incentiva a experimentação e partilha de ideias, privilegiando-se o trabalho a pares ou em pequenos grupos, factores que se revelaram bastante enriquecedores para este estudo.

Capítulo III

METODOLOGIA

Opções metodológicas

Este estudo foi realizado com o objectivo de compreender de que modo alunos do 1.º ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção. Mais especificamente, pretendo dar resposta às seguintes questões:

a) Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtracção?
b) De que modo evoluem essas estratégias?
c) Será que o significado da operação (de adição ou de subtracção) presente no problema influencia a estratégia de cálculo mental utilizada na sua resolução?

Tendo em conta o objectivo deste estudo, segui uma metodologia de natureza qualitativa, enquadrando-se nas características deste tipo de investigação enumeradas por Bogdan e Biklen (1994): i) a fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal; ii) é uma investigação descritiva e os dados recolhidos incluem vídeos, notas de campo, fotografias, transcrições de entrevistas e outros documentos; iii) o interesse principal do investigador é pelo processo e não pelos resultados ou produtos; iv) a análise dos dados é realizada de forma indutiva, uma vez que os dados recolhidos não têm o objectivo de confirmar hipóteses construídas previamente; e v) preocupação do investigador pela compreensão do ponto de vista dos participantes.

Adoptei uma metodologia de estudo de caso, pois, e de acordo com Yin (2009) e Ponte (1994): a) o objectivo principal é compreender em profundidade o "como" e o "porquê" da problemática em estudo; b) enquanto investigadora, não pretendo intervir ou alterar o contexto, mas compreendê-lo tal como ele é; e c) o foco do trabalho está na problemática em estudo indissociável do contexto em que ocorre.

Pela impossibilidade de análise de dados relativos a toda a turma, foram seleccionados três alunos da turma da qual sou professora. Deste modo, assumo um duplo papel: professora e investigadora.

O professor enquanto investigador

Tomei a decisão de realizar o estudo na minha turma para ter a oportunidade de compreender com maior profundidade diferentes aspectos relativos ao cálculo mental e à resolução de problemas, que presencio diariamente com os meus alunos.

O facto de o professor sentir a necessidade de compreender os acontecimentos que ocorrem no seu ambiente particular é um dos motivos que, segundo Serrazina e Oliveira (2002), o levam a adoptar este duplo papel de professor investigador, definido por Ponte (2002) como "um professor que realiza investigação, normalmente sobre a sua prática" (p. 9).

É importante reflectir sobre algumas questões que se levantam quando o professor assume este papel. Por exemplo, Bogdan e Biklen (1994) alertam para a dificuldade que as pessoas envolvidas têm em distanciar-se, quer de preocupações pessoais, quer do conhecimento prévio que possuem das situações, o que poderá enviesar a análise e, consequentemente, os resultados obtidos. No entanto, os métodos utilizados na recolha de dados, que resultam numa grande quantidade de dados, a par do período de tempo geralmente extenso, para essa mesma recolha, tendem a minimizar a subjectividade do investigador aquando da sua análise. Também Yin (2009) reforça a necessidade da utilização de múltplas fontes de evidência, que neste estudo passam pela observação participante, o uso de notas de campo, fotografias dos registos dos alunos e gravações vídeo e áudio, integralmente transcritas.

O facto de conduzir o estudo com alunos da minha turma, com os quais já existe uma relação próxima, evita a presença de um segundo adulto, cuja presença poderia alterar o comportamento dos alunos, sendo, de certo modo, intrusiva (Bogdan & Biklen, 1994). Deste modo, anulam-se possíveis alterações de comportamento, cujos efeitos são designados por Bogdan e Biklen (1994) como "efeitos do observador" (p. 68), garantindo que o contexto em que ocorrem, tão importante na metodologia de estudo de caso, se mantenha inalterado.

De facto, o duplo papel de professor e investigador confere uma familiaridade indispensável para uma recolha de dados que traduza as ocorrências típicas e naturais em sala de aula. Serrazina e Oliveira (2002) sublinham a importância da interacção entre professor e aluno enquanto fonte de informação da aprendizagem, fundamental para a procura de respostas a que um estudo desta natureza se propõe.

Apesar de este estudo surgir de uma preocupação em aprofundar os meus conhecimentos relativamente à problemática já identificada, a sua realização foi acompanhada de uma reflexão sobre a minha prática enquanto professora, e como esta poderá ser melhorada (Oliveira & Serrazina, 2002). Para Oliveira e Serrazina (2002), a reflexão "proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais responsáveis, melhores e mais conscientes" (p. 37). É meu desejo que, com base neste estudo, esta reflexão conduza a um aprofundamento dos meus conhecimentos sobre o tema em estudo, esperando que estes se reflictam numa melhoria da minha prática enquanto professora.

Participantes

A escola

O estudo foi realizado numa escola de ensino particular, localizado na freguesia de Benfica, no concelho de Lisboa. Esta escola iniciou a sua actividade em 1958 e abrange a educação Pré-Escolar e o Ensino Básico, sendo frequentada por cerca de 700 alunos. De um modo geral, os alunos pertencem a famílias com um poder socio-económico médio-alto.

No ano em que se iniciou a recolha de dados existiam seis turmas do 1.º ciclo, que se encontravam organizadas do seguinte modo: duas turmas do 1.º e 3.º anos de escolaridade e uma turma de 2.º e 4.º ano, perfazendo um total de 150 alunos.

Este estudo foi realizado numa das duas turmas de 1.º ano de escolaridade, da qual sou professora, ao longo do ano lectivo de 2009/2010, tendo terminado no início do ano lectivo seguinte, 2010/2011, quando os alunos já frequentavam o 2.º ano de escolaridade.

A turma

Como já referi, o estudo foi realizado na minha turma de 1.º ano de escolaridade. A turma é constituída por 25 alunos: 14 meninas e 11 meninos. Uma das meninas integrou a turma no início do ano lectivo, tendo frequentado o ensino pré-escolar noutra escola. Os restantes 24 alunos frequentam esta escola desde os 3 anos, tendo sido colegas na mesma turma ao longo dos três anos da educação pré-escolar.

Os alunos revelam diferentes ritmos de trabalho, sendo um grupo heterogéneo, existindo duas alunas que necessitam de apoio individualizado, com a professora de apoio da escola.

A partilha de novidades, experiências e saberes entre os alunos da turma é muito valorizada, não só por mim como também pelos alunos, o que acaba por se reflectir no trabalho desenvolvido. Desde o início do 1.º ano, é privilegiado o trabalho colaborativo na sala de aula. É habitual os alunos trabalharem a pares, em pequenos grupos ou em grande grupo. Deste modo, para além de serem trabalhadas diferentes competências específicas de cada área disciplinar, são igualmente desenvolvidas as capacidades de argumentação, justificação, o saber escutar e respeitar diferentes opiniões.

A nível da área de Matemática, as tarefas de cálculo mental e a resolução de problemas estão presentes diariamente desde o início do 1.º ano, sendo dada particular atenção às estratégias de cálculo utilizadas.

As tarefas de cálculo mental são de curta duração (entre 15 a 20 minutos) e planeadas por mim. A escolha dos números envolvidos é crucial, pois nestas tarefas de cálculo mental procuro promover a utilização de diferentes estratégias.

No trabalho desenvolvido na sala de aula, geralmente os problemas constituem o ponto de partida para trabalhar conceitos e ideias matemáticas. De novo, o trabalho realizado pelos alunos é valorizado e partilhado com toda a turma, sendo discutidas as diferentes estratégias de resolução utilizadas, bem como a sua eficácia e rapidez.

Os alunos

Tratando-se de uma turma que estava a iniciar o 1.º ano de escolaridade, cujos alunos ainda desconhecia, a selecção dos três casos foi baseada na percepcão inicial que tive dos alunos. Assim, seleccionei dois alunos com uma expressão oral bastante articulada e que pareciam ter bastante facilidade no trabalho com os números: Cátia e Miguel. O André foi escolhido por parecer apresentar maior dificuldade na área de Matemática. Os nomes dos alunos foram alterados de modo a assegurar o seu anonimato.

Esta selecção teve por base uma entrevista inicial realizada a 10 alunos, nos meses de Setembro e Outubro do 1.º ano de escolaridade.

Recolha de dados

Como já referi, a resolução de problemas é o ponto de partida habitual para o trabalho na área de Matemática, tendo sido este o contexto seleccionado para a realização do estudo.

Na sala de aula, os problemas são geralmente resolvidos a pares, pelo que, também no estudo, este modo de trabalho foi mantido. Habitualmente na sala de aula, no trabalho com os colegas, os alunos discutem o plano para a resolução do problema e partilham as suas estratégias de resolução. O facto de poderem esclarecer junto dos colegas as suas dúvidas relativamente ao enunciado ou à resolução do problema parece torná-los progressivamente mais autónomos. É minha convicção que os pares não devem ser fixos, de modo a variar e a enriquecer o conhecimento construído em conjunto com os colegas. A opção por manter o trabalho a pares no estudo teve ainda como objectivo compreender de que modo este aspecto pode ou não influenciar a evolução das estratégias de cálculo mental utilizadas.

Dado que os problemas das duas primeiras cadeias foram resolvidos por toda a turma no ambiente de trabalho habitual, os três alunos seleccionados resolveram esses problemas com outros colegas da turma. Sempre que as interacções estabelecidas entre os pares são objecto de análise, esses colegas são identificados. Assim, ao longo da análise das resoluções dos alunos surgem outros três alunos que não são objecto de análise neste estudo, aqui designados por Madalena, Matilde e Guilherme.

Apesar da resolução de alguns problemas ter sido feita a pares, a análise das estratégias de resolução de cada um dos três alunos é feita individualmente. Para melhor compreender as estratégias usadas por cada aluno, considerei de extrema importância a existência de um momento de resolução individual de problemas. Neste momento, procurei também perceber a existência de uma possível influência do trabalho realizado a pares, na escolha e utilização de estratégias de resolução de cada aluno. Assim, o terceiro momento de recolha de dados foi realizado fora da sala de aula e de modo individual, em Outubro do 2.º ano de escolaridade, no ano lectivo de 2010/2011.

As cadeias de problemas

Foram elaboradas e aplicadas três cadeias de problemas de adição e subtracção. Utilizo o termo cadeia para identificar o conjunto de problemas que foram elaborados e resolvidos pelos alunos. São assim identificados por terem sido construídos de modo a contemplar os diferentes significados que a adição e subtracção poderão assumir, e os números neles envolvidos terem sido criteriosamente escolhidos para que fossem progressivamente maiores, aumentando o grau de dificuldade dos cálculos a efectuar.

A primeira cadeia foi constituída por sete problemas, a segunda por oito e a terceira por cinco problemas, perfazendo um total de vinte problemas.

As três cadeias foram resolvidas pelos alunos em três momentos distintos. Os problemas da primeira cadeia foram resolvidos a pares por toda a turma, na sala de aula, entre Janeiro e Março de 2010, no 1.º ano de escolaridade. A segunda cadeia, também resolvida a pares por todos os alunos da turma, foi aplicada nos meses de Maio e Junho de 2010, no final do 1.º ano.

A última cadeia de problemas, tal como já foi referido, foi resolvida apenas pelos alunos seleccionados, fora da sala de aula e de modo individual, em Outubro do ano lectivo seguinte (2010/2011), quando os alunos frequentavam o 2.º ano de escolaridade.

Para cada cadeia, foram elaborados problemas tendo como referência os diferentes significados das operações de adição e subtracção identificados em Ponte e Serrazina (2000) e em Ponte *et al.* (2007), de modo a poder compreender-se de que modo as estratégias de cálculo mental utilizadas eram ou não influenciadas pelo significado da operação presente no problema. Os enunciados dos problemas das três cadeias poderão ser consultados no anexo 3.

Foram igualmente tidos em conta os tipos de números utilizados. Ao longo de cada cadeia houve a preocupação de aumentar, progressivamente, a ordem de grandeza dos números e seleccionar números cuja escrita tivesse um número de algarismos diferente. Outro aspecto importante considerado para a escolha dos números foi o facto de se realizarem adições com e sem transporte e subtracções com e sem empréstimo. De novo, com a intenção de se perceber qual a influência destes aspectos nas estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos.

Os problemas e os números neles envolvidos foram alterados no decorrer da recolha de dados, sempre que necessário, de modo a acompanhar o desenvolvimento da capacidade de cálculo dos alunos.

Nos quadros 3, 4 e 5 são apresentados os cálculos correspondentes a adições com e sem transporte e subtracções com e sem empréstimo, relativos a cada um dos problemas das três cadeias, identificando-se a evolução da ordem de grandeza dos números e a existência de números com diferente número de algarismos.

Cada cadeia de problemas é apresentada seguindo a ordem com que os problemas foram resolvidos pelos alunos, de modo a compreender-se como todos estes aspectos se foram alterando ao longo das cadeias.

Quadro 3 – Cálculos envolvidos nos problemas da primeira cadeia

	Cadeia 1			
	Significado da operação	Problema	Cálculo	
Adição	Combinar	"Gormitis"	5+14	adição sem transporte
	Acrescentar	"Idade do Dinis"	7+9	adição com transporte
Subtracção	Comparar	"A mana das gémeas"	20-6	subtracção com empréstimo
	Retirar	"Uma ida ao teatro"	15-7	subtracção com empréstimo
Adição	Acrescentar	"A lista de palavras do Vasco"	13+16	adição sem transporte
Subtracção	Completar	"As leituras da Marta"	28-16	subtracção sem empréstimo
		"Chupa-chupas para todos!"	25-18	subtracção com empréstimo

Quadro 4 – Cálculos envolvidos nos problemas da segunda cadeia

	Cadeia 2			
	Significado da operação	Problema	Cálculo	
Adição	Combinar	"Tiro ao alvo"	35+12 ou 12+35	adição sem transporte
			29+27 ou 27+29	adição com transporte
Subtracção	Completar	"Os pontos do Daniel"	55-32	subtracção sem empréstimo

(continua)

Quadro 4 (continuação)

Adição	Acrescentar	"Os balões da Cláudia"	37+25	adição com transporte
Subtracção	Retirar	"Viagem de autocarro"	49-26	subtracção sem empréstimo
	Comparar	"Pai e filho"	42-14	subtracccção com empréstimo
		"Saltos à corda"	75-48	subtracção com empréstimo
	Retirar	"Que azar!"	82-36	subtracção com empréstimo
	Completar	"A caderneta das Winx"	124-47	subtracção com empréstimo

Quadro 5 – Cálculos envolvidos nos problemas da terceira cadeia

	Cadeia 3			
	Significado da operação	Problema	Cálculo	
Adição	Acrescentar	"Cesto d'Ouro"	134+63	adição sem transporte
Subtracção	Comparar	"Parar ou Avançar"	157-43	subtracção sem empréstimo
Adição	Combinar	"Na escola do Mário"	129+175	adição com transporte
Subtracção	Retirar	"Uma sessão de cinema"	257-125	subtracção sem empréstimo
	Completar	"Concurso na livraria"	250-135	subtracção com empréstimo

Habitualmente, a turma está organizada em cinco grupos de quatro alunos e um de cinco alunos, por isso, aquando da resolução dos problemas do estudo, estes grupos foram mantidos, dispondo as mesas duas a duas.

Todas as aulas de resolução de problemas, das primeiras duas cadeias, seguiram as seguintes etapas:

i. Apresentação do problema: neste momento o problema era lido primeiro pelos alunos e depois por um aluno em voz alta, sendo esclarecidas possíveis dúvidas;
ii. Resolução do problema a pares: cada par resolvia o problema, enquanto eu circulava pela sala, apoiando os alunos que me chamassem;
iii. Apresentação das estratégias de resolução mais significativas para a discussão em grande grupo: os pares indicados por mim apresentavam aos colegas o seu modo de resolução do problema. A estratégia de resolução explicada pelo par era registada por mim no quadro;
iv. Síntese e identificação das estratégias de cálculo mais eficientes: após os pares seleccionados partilharem as suas resoluções, todas as estratégias que ficavam

registadas no quadro eram novamente discutidas, identificando-se quais as estratégias menos e mais eficientes.

Na última cadeia de problemas, cada aluno leu o enunciado do problema, resolvendo-o de seguida. No fim, explicava a sua estratégia de resolução.

Instrumentos de recolha de dados

Na resolução das duas primeiras cadeias de problemas foi colocada uma câmara de vídeo num canto da sala, de modo a recolher as imagens correspondentes aos pares que incluíam os três alunos do estudo. Foi também colocado um gravador áudio numa das mesas de cada par de alunos.

No fim de cada uma das aulas onde foi resolvido um problema, elaborei uma síntese escrita dos aspectos mais relevantes do trabalho realizado por cada aluno, quer a nível individual, quer no trabalho a pares, constituindo assim um conjunto que designo por notas de campo.

Os registos que cada aluno realizou no seu caderno foram fotografados para complementar os dados recolhidos.

Como já referi, foram realizadas entrevistas iniciais a dez alunos da turma. Nestas entrevistas, os alunos foram questionados relativamente ao seu conhecimento da leitura e escrita de números, resolveram problemas de adição e subtracção, colocados por mim oralmente, resolveram tarefas de contagens de objectos agrupados de diferentes modos e realizaram tarefas de contagens através de cartões de pontos.

Deste modo, as entrevistas serviram para, além de seleccionar os três alunos do estudo, os caracterizar relativamente ao seu conhecimento dos números, operações, capacidade de resolução de problemas e também relativamente à capacidade de comunicação oral.

Análise dos dados

As gravações áudio realizadas em cada um dos problemas, foram integralmente transcritas, complementadas com os dados recolhidos nas gravações vídeo, com os dados das minhas notas de campo e com as fotografias tiradas ao caderno de cada aluno.

No final de cada transcrição áudio, e tendo esta presente, foi analisada a gravação vídeo, para que esta pudesse ser completada com os gestos dos alunos, expressões faciais e outros elementos impossíveis de detectar através da gravação áudio. Sempre que necessário, a gravação áudio foi de novo ouvida para que se pudesse compreender a relação entre o que foi visualizado no vídeo e o que foi dito pelos alunos.

A par deste trabalho, também as minhas notas de campo foram consultadas, de modo a completar-se a transcrição com aspectos relevantes, como por exemplo, a existência e identificação dos registos iniciais feitos pelos alunos, que foram depois apagados e cuja percepção foi praticamente impossível a partir da fotografia do trabalho dos alunos em cada problema.

Comecei por analisar o modo como cada aluno resolveu os problemas de cada cadeia. Optei por fazer a análise de todos os problemas das três cadeias, resolvidos por cada aluno, em vez de analisar as resoluções dos três alunos de um mesmo problema, para melhor compreender a evolução revelada por cada um dos alunos nas estratégias de cálculo utilizadas na resolução de cada problema, no período de tempo disponível para a recolha de dados.

Para realizar essa análise, voltei a reler toda a transcrição, a visualizar o vídeo e a analisar a fotografia da resolução do aluno, identificando os elementos ilustrativos da estratégia de resolução utilizada. De seguida, categorizei essa estratégia de acordo com os diferentes tipos de estratégias de cálculo enumeradas por Thompson (1999, 2009) e Treffers (2008) para cálculos com números até 20 (consultar páginas 14 e 15), e as estratégias de cálculo mental identificadas por Beishuizen (1993, 1997, 2001, 2009) e Beishuizen e Anghileri (1998) para cálculos com números superiores a 20 (consultar quadro 1 da página 18).

No final da análise de todos os problemas de cada cadeia, foi elaborada uma pequena síntese dos aspectos mais significativos, tendo terminado com uma síntese global no final das três cadeias.

Realizada esta análise das estratégias de resolução utilizadas por cada aluno, procurei identificar uma possível relação entre o significado de cada problema e o tipo de estratégia utilizada. Para tal, organizei todos os problemas aplicados segundo o significado da operação neles presente, para poder identificar uma possível relação entre estes e a estratégia utilizada.

Analisei também de que modo a ordem de grandeza dos números presentes em cada problema influenciava a estratégia de cálculo utilizada pelos alunos. Por fim, procurei compreender se o tipo de estratégia de resolução variava com o facto de a adição ter ou não transporte ou a subtracção ter ou não empréstimo. Para tal, sempre que necessário, reli a transcrição relativa a cada problema e observei a gravação vídeo.

Capítulo IV

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Neste capítulo apresento a análise da resolução de todos os problemas, das três cadeias propostas e resolvidas pelos alunos. Como já referi no capítulo anterior, as resoluções dos problemas de cada aluno foram analisadas de acordo com a ordem de aplicação de cada problema, de modo a facilitar a compreensão da evolução das estratégias utilizadas por cada aluno.

No final da análise das resoluções dos problemas de cada cadeia, elaborei uma síntese onde coloco em evidência os aspectos mais significativos identificados nessa cadeia. Após a análise de todos os problemas propostos, realizei uma síntese global onde procurei explicitar os tipos de estratégias que cada aluno parece privilegiar, tendo em conta os diferentes tipos de problemas, e outros aspectos considerados relevantes.

Cátia e suas estratégias

A Cátia, de 6 anos, é uma menina que revela bastante auto-confiança. É muito tranquila e demonstra um enorme gosto por aprender. Tem grande sucesso no seu desempenho escolar, não só a nível da Matemática, como das restantes áreas curriculares.

No início do 1.º ano possuía um domínio na leitura e escrita de números até mil e revelava grande facilidade no cálculo de adições e subtracções de números com um algarismo, recorrendo a dobros e quase dobros. Em cálculos envolvendo números de dois algarismos, por exemplo 12+6, realizava contagens de um em um, a partir do número maior, recorrendo aos dedos.

Gosta de realizar tarefas de carácter lúdico, normalmente designadas por quebra-cabeças, o que revela o seu gosto por desafios. Tem grande facilidade em exprimir-se oralmente e, da maneira segura e calma que a caracteriza, procura sempre partilhar o seu ponto de vista no trabalho em pequenos grupos ou perante a turma, sendo muitas vezes vista como líder pelos colegas.

Resolução dos problemas da 1.ª cadeia

"Gormitis" – 29 Janeiro de 2010

Este problema foi de fácil resolução para Cátia. Rapidamente, Cátia tenta partilhar com o colega um modo possível de resolução que regista depois no caderno (figura 1).

A aluna reconhece que o problema pode ser resolvido efecuando 14+5. Para a aluna, este cálculo trata-se já de um facto numérico básico, no entanto, preocupa-se em registar no seu caderno como sabe que 14+5=19. Esta preocupação deve-se ao meu pedido constante na sala para que tentem registar o modo como pensam nas diversas situações realizadas na aula.

Cátia – Olha, eu já tive uma ideia! Vou-te dizer qual é: quatro mais…

Miguel – 14 mais 5 eu sei que é 19, é só pôr…

Cátia – Eu também sabia…

Miguel – É só pôr…

Cátia – Mas nós temos que pôr a nossa maneira…

Miguel – 14 mais 5... igual …

Cátia – Se 4 mais 5 igual a 9… 14 mais 5 igual a 19…

No momento da partilha das resoluções à turma, quando o seu colega Miguel, diz que já sabia o resultado, Cátia reforça que também ela sabia o resultado de 14+5, explicando que o seu registo se constituía apenas como uma confirmação desse facto numérico.

Cátia – Mas eu também já sabia. Eu já sabia, mas eu fiz para confirmar.

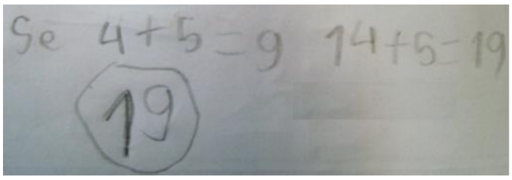


Figura 1. Resolução do problema "Gormitis" – Cátia

"Idade do Dinis" – 4 Fevereiro de 2010

Talvez devido à noção de tempo presente neste problema, Cátia efectuou uma contagem da idade do Dinis, à medida que ia celebrando o seu aniversário, ou seja, fez uma contagem de um em um, a partir de oito, registando a par da idade do Dinis, o número de anos que se tinham passado (figura 2).

A aluna estava insegura relativamente à passagem dos 7 para os 8 anos, considerando que apenas deveria contar um ano passado, quando Dinis tivesse 8 anos de idade e não quando ainda tem 7 anos. No entanto, não estava confiante que o seu raciocínio estava correcto, como me explicou quando me aproximei:

> Professora – Como estás a resolver?
>
> Cátia – Eu estou a resolver assim… Eu estou a fazer… Eu não sei bem se este 7 conta ou se não [apontando para o 7 do enunciado do problema]. Eu acho que não. E depois estou a fazer… 8 é 1 ano, depois 9 é 2 anos, depois 10 é 3…
>
> Miguel – Esse é um bocado lento.
>
> Professora – E porque é que estás em dúvida se este 7 conta ou não?
>
> Cátia – Porque… Eu acho que não conta.
>
> Professora – Porquê?
>
> Cátia – Porque os saltinhos é do 7 para o 8.
>
> Professora – Exacto, só passado um ano é que ele faz 8, passado um ano ele não faz 7.

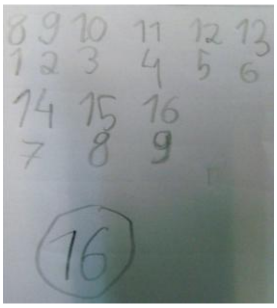


Figura 2. Resolução do problema "Idade do Dinis" – Cátia

"A mana das gémeas" – 5 Fevereiro de 2010

Neste problema, o seu colega Miguel identificou de imediato que teria que calcular "6 mais … mais qualquer coisa…". Cátia, pedindo ao colega que não lhe dissesse a solução do problema, tentou definir uma estratégia:

> Cátia – Então temos que arranjar uma maneira de… Temos que arranjar uma maneira de registar…
>
> (…)
>
> Cátia – Como é que vamos fazer?
>
> Miguel – Espera, deixa-me pensar!
>
> Cátia – Temos de pensar numa ideia!
>
> Miguel – Eu sei…

Cátia – Porque é que não era quanto era 20 mais 6? Era muito mais fácil…

Miguel – É 14!

Cátia – Como é que sabes?

Miguel – Porque sei.

Cátia olhou em redor, pensativa, até que confirmou a Miguel que o resultado seria 14, contudo, sentiu dificuldade em registar o modo como pensou.

Cátia – É 14, é.

Miguel – Espera, 6, depois…

Cátia – Agora, como é que eu faço…

Miguel – Ah, eu não consigo pensar bem… Não consigo registar.

Cátia – Nem eu, eu não consigo arranjar…Isto é muito difícil…

Quando me aproximei do par, enquanto Miguel me explicou a sua estratégia, recorrendo à linha numérica, a Cátia refere que também pensou em utilizá-la. A aluna começou então a fazer o seu registo no caderno.

Cátia – Eu também estava a pensar usar a recta… mas só que depois não sabia se era uma boa ideia.

A aluna começa a fazer a recta numérica sem saber ainda como iria utilizá-la.

Professora – E agora, vais dar saltinhos por aí fora, ou vais fazer saltos maiores para poupar trabalho?

Cátia – Ainda não sei…

Quando me aproximei de novo deste par, a aluna explicou-me como tinha pensado:

Cátia – Eu fiz assim… Fiz como aquela estratégia da Ana de ir para o 10. Sei que 6 mais 4 é 10. Depois dei um salto de 3, que era até ao 13.

Professora – Porque é que deste um salto de 3? E não um de 4 ou de 2…?

Cátia – Porque… eu resolvi dar um de 3 porque pensei que era uma conta boa também para fazer este cálculo. Fiz 4 mais 3 que é 7. Depois dei outro salto de 3, que é como se não houvesse este 1 e não houvesse este 1, que era… 3 e 6, que era como aquela contagem de 3 em 3. E depois fiz o 7 mais 3 que era 10, e depois só era mais 4, e 10 mais 4 é 14.

Quando se refere à "estratégia da Ana" está a referir-se a uma tarefa de cálculo mental que resolvemos na turma, onde era apresentada uma estratégia de cálculo por aproximação ao 10 (por exemplo: 8+5=8+2+3) que os alunos deveriam seguir para resolver os cálculos indicados por mim.

A aluna recorre assim a essa estratégia, isto é, aproxima primeiro ao número 10, adiciona 3 que como a aluna diz, julgou que “era uma conta boa”, talvez por já saber o resultado (facto numérico). Continua a recorrer a factos numéricos ao dar o próximo salto de +3, pois em 13 pensa em 3, e 3+3=6 (como se fosse 16, cujo algarismo das dezenas disse que “é como se não houvesse”). A aluna recorre também a outra actividade já realizada na turma, quando foram descobertas regularidades numa contagem de 3 em 3 (iniciada em 0). Por fim, sabia que do 16 para o 20, faltavam apenas 4.

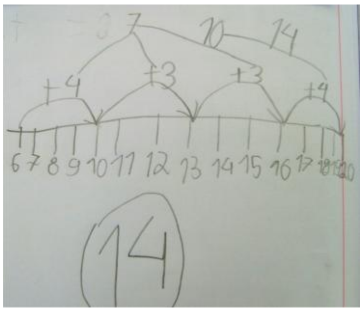


Figura 3. Resolução do problema “A mana das gémeas” – Cátia

“Uma ida ao teatro” – 8 Fevereiro de 2010

Após a leitura do problema em voz alta por um aluno da turma, André, par de Cátia neste problema, compreende qual o cálculo que poderia resolver para o solucionar, contudo, Cátia já tinha definido qual iria ser a sua estratégia.

> André – Ah, então é 15 menos 7… é só pôr o resultado.
>
> Cátia – Não… Então fazemos por exemplo: pomos assim 15… Não…
>
> André – Podemos fazer uma tabela…? Não.
>
> Cátia – Ou então fazemos assim… 15 quadradinhos… assim…

André não compreendeu o que Cátia fez, pelo que a aluna tentou explicar a sua estratégia:

> Cátia – Eu estou a fazer assim. Fiz 15 lugares depois pus 7 bolinhas que eram as pessoas. Depois contei 2… e aqui mais 2 que eram 4. Depois mais 2, que eram 6 e depois mais 2 que eram 8.

A aluna desenha 15 cadeiras e preenche 7 das cadeiras com uma marca que as identifica como ocupadas. Para contar as restantes cadeiras (vazias) efectua uma contagem de 2 em 2. De seguida, Cátia verifica o seu resultado recorrendo a um facto numérico: se 7+7=14, então 7+8=15 (figura 4).

> Professora – Tu fizeste de duas maneiras.
>
> Cátia – Sim, esta é para confirmar. Porque… 7 mais 7 são 14 e tem que dar 15, por isso é só mais 1. E se este é mais 1 [apontando para um 7], este também é mais 1 [apontando para o 14].

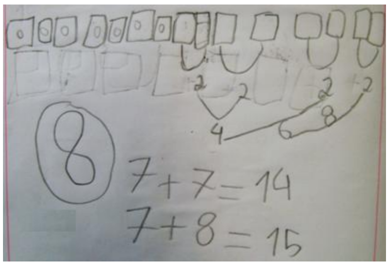


Figura 4. Resolução do problema "Uma ida ao teatro" – Cátia

"A lista de palavras do Vasco" – 10 Fevereiro de 2010

Após lerem o enunciado do problema, Cátia e o seu par, André, reconhecem que podem resolver calculando 16+13.

> André – Ah, então é fácil. É só fazer 16 mais 13.
>
> Cátia – Pois.
>
> André – Então é fácil.

Cátia diz de imediato que já tem uma estratégia para resolver o cálculo. A aluna refere que já tinha utilizado essa estratégia num jogo de revistas que costumava fazer, aos quais chama de "Pirâmides numéricas".

> Cátia – Eu já fiz isto quando fiz pirâmides numéricas.
>
> André – O que é pirâmides numeréticas [*sic*]?
>
> Cátia – Pirâmides numéricas! É uma pirâmide que tem muitos números…
>
> (…)
>
> Cátia – E tem quadrados e nesses quadrados… alguns quadrados têm números. E nós temos que… Por exemplo: está 2 mais 1, temos que pôr lá o 3, para onde vais, que são os mais fáceis. Depois, por exemplo está um 4 em cima e um 1 em baixo, nós temos que pensar o que é que temos de acrescentar ao 1 para dar 4, que é 3.

A aluna estava a referir-se a um jogo como o que está na figura 5.

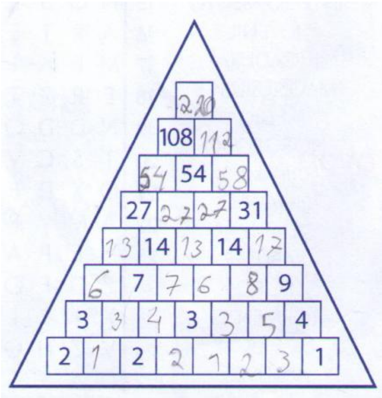


Figura 5. Exemplo de uma pirâmide numérica resolvida por Cátia

Cátia começa assim a explicar a estratégia que utiliza quando resolve este tipo de jogo, surgindo pela primeira vez na turma, uma estratégia do tipo 1010.

Cátia – Quando fiz pirâmides numéricas fiz assim: peguei neste um do 16 e fui juntar aqui ao 13, que é 20.

André – O quê?

Cátia – Este aqui são 20.

André – O que é que são 20?

Cátia – Pomos já um 2 do 20. Não, espera, vamos apagar. Ponho o 16, e aqui o 13. Este com este, são 2. E agora, este com este são… 9.

Neste momento aproximei-me do par e, reconhecendo a estratégia do tipo 1010, procurei compreender como esta tinha surgido.

Professora – E isto… O que é que estão a fazer?

Cátia – Uma maneira que eu fiz quando estava a fazer essas pirâmides numéricas. Fiz que … aqui peguei no 1 do 16 e no 1 do 13, que era 2. Então o 2 dava o 20. E depois 6 mais 3, que eram 9.

Professora – Ah, então este 2 representa 20.

Cátia – Sim. Depois é juntar estes.

André não compreendeu a estratégia da colega e esta tornou a explicar:

Cátia – Este 1 é do 10, e este 1 é do outro 10. E 10 mais 10 são 20. Mas não nos podemos esquecer do 6 e do 3. E 6 mais 3 são 9. E depois é só juntar o 2 com o 9.

André – Agora ponho aqui. Que é 29.

Cátia – Mas temos que confirmar.

André – Vamos pela recta!

Cátia – Sim. Desenhamos uma recta. E começamos no número 13.

Cátia liderou o trabalho, sabendo claramente que estratégia pretendia utilizar. O seu colega acabou por ir seguindo o que Cátia fez.

No momento de discussão, ainda antes de partilhar a sua estratégia de resolução inicial, a aluna explicou como confirmou o resultado:

> Cátia – Eu fiz daquela maneira... De um número até ao 10, mas em vez de ser até ao 10 foi até ao 20. Porque esse número era mais do que 10. Faz de conta que esse 20 era o 10, e tirava o 1 ao 13. Eu já sabia que 3 mais 7 era 10. E dei outro salto de 7, até ao 27.

Refere de novo a tarefa de cálculo mental realizada com a turma, mencionada no problema *"A mana das gémeas"*, onde recorre à aproximação do 20. A aluna conclui que poderá ter como número de referência um múltiplo de 10, neste caso o 20, recorrendo assim a uma estratégia aditiva do tipo A10 para a confirmação do resultado.

A aluna termina explicando que efectuou saltos até atingir o número 29 porque era este o número que considerava correcto. Assim, tinha dois saltos de 7 e um de 2 (7+7+2=16).

> Cátia – E depois só sobrava… eu fiz até ao 29 porque achava que era 29 na outra estratégia. E depois vi que só era mais 2.
>
> Professora – Aqui este 7 mais 7 era 14, com estes 2, era 16.

De seguida, explicou a primeira estratégia. Este foi um momento muito importante na turma. Como já referi, foi a primeira vez que este tipo de estratégia surgiu na turma e os alunos reagiram com surpresa, ficando igualmente admirados com a aparente simplicidade da estratégia.

> Cátia – Nós pusemos 16 e depois pusemos 13. E pegámos no 1 mais 1 que era 2. O 1 era 10 e 10 mais 10…
>
> Professora – Então espera… No 16, eles dividiram… pensaram que o 16 é um 10 mais 6. E o 13 é um 10…
>
> Alunos – mais 3.
>
> Professora – Depois juntaram estes pedacinhos. Estes 10 deu logo 20. Depois juntaram o 6 com o 3 que dá 9.
>
> Cátia – E 20 mais 9, 29.
>
> Guilherme – Ah pois…!

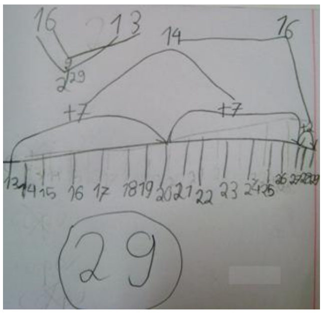


Figura 6. Resolução do problema “A lista de palavras do Vasco” e estratégia de verificação – Cátia

“As leituras da Marta” – 25 Fevereiro de 2010

Após Cátia e o seu par, Guilherme, terem lido o enunciado do problema, a aluna sugeriu a utilização da linha numérica. No entanto, Guilherme insistiu na utilização de outro tipo de suporte.

> Guilherme – Qual é a maneira que vamos fazer?
>
> Cátia – Olha, podemos fazer uma recta…
>
> Guilherme – Mas isto é fácil, não é preciso fazer recta. Arranja uma maneira sem ser a recta.

Contudo, Cátia começa a desenhar a linha numérica no seu caderno e, quando questionada pelo colega, explica o seu raciocínio:

> Cátia – 16, faz de conta que o 16 era o 6, e o 20 era o 10. Eu sei que 6+4 é 10. Depois dei um salto até ao 28 e vi que era um salto de 8. E 8+4 dá o 12, porque 8, 9, 10, 11, 12. [Mostra a Guilherme que 8+4=12, contando um a um, a partir de oito, com os dedos.]

No seu registo, a aluna escreveu apenas os números relativos aos cálculos realizados, 16, 20 e 28. Os números entre estes não são escritos, no entanto, as marcações referentes a cada um são feitas na linha numérica, como se pode observar na figura da página seguinte.

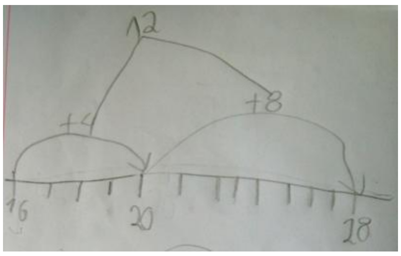


Figura 7. Resolução do problema “As leituras da Marta” – Cátia

A aluna utilizou de novo a estratégia já mencionada, do tipo A10, onde aproximou primeiro o 16 a um número de referência, o 20. Tal como no problema anterior, Cátia pensa apenas no algarismo das unidades, neste caso 6, que aproxima de 10, compensando depois para o 20 (se 6+4=10, então 16+4=20).

O salto seguinte (20+8) é um cálculo que se constitui como um facto numérico. No cálculo 8+4, embora a aluna tenha recorrido à contagem pelos dedos, apenas o fez para ajudar o colega a compreender que o resultado era 12. Este cálculo é também do domínio da aluna, como a mesma me explicou:

> Professora – Como é que tu sabes que são 12?
>
> Cátia – Eu não sei bem explicar… Eu sei… automático. Eu sei contar 4, 8, 12.

A aluna recorre à adição para resolver este problema de subtracção, com o significado de completar, calculando quanto deverá adicionar a 16 para conseguir chegar a 28.

Depois de ter utilizado esta estratégia, quis confirmar o resultado. Para tal, recorre à estratégia, do tipo 1010, que utilizou pela primeira vez no problema anterior (figura 8).

> Cátia – Para confirmar já sei uma maneira: como nós achamos que é 12… 12 mais 16.
>
> Guilherme – Não, vamos à recta! Vamos à recta confirmar!
>
> Cátia – Como nós achamos que é 12, pomos 12 e aqui o 16. E estes dois… pomos aqui um 2, que é do 20.
>
> Guilherme – Sim…
>
> Cátia – 2 mais 6… Pronto.
>
> Guilherme – É 28?!
>
> Cátia – Não!
>
> (…)
>
> Cátia – Não, são 12!

Figura 8. Estratégia para verificação do resultado do problema
"As leituras da Marta" – Cátia

Cátia parece decompor os números com facilidade, sem perder a noção do valor de cada algarismo, como se compreende quando ao adicionar 10+10 (de 12+16) refere "pomos aqui um 2, que é do 20".

Para confirmar, a aluna compreende que se o seu resultado (12) estiver correcto, então o cálculo 12+16 deverá ser igual a 28, o que evidencia um profundo entendimento não só do próprio problema, como da relação entre adição e subtracção.

> Cátia – E tinha que ser o 12 mais o 16. Como achávamos que era 12. Pusemos o 12 e o 16. Depois pegámos no 10 do 12 e no 10 do 6, que era 20. E no 6 mais 2, que era 8.

"Chupa-chupas para todos!" – 3 Março de 2010

Cátia tornou a liderar o trabalho do par, resolvendo o problema através de uma estratégia aditiva do tipo A10.

> Cátia – Então como é que fazemos? Diz uma maneira. Eu já sei uma…
>
> Guilherme – Qual é a maneira?
>
> Cátia – É com a recta.
>
> Guilherme – Ok, vá… [aborrecido]
>
> Cátia – Tu não gostas de fazer… Mas não comeces a fazer os números! Fazemos aqui uma, duas…

Também neste problema, só registou na linha numérica os números necessários aos cálculos a efectuar, deste modo, a sua utilização tornou-se mais rápida.

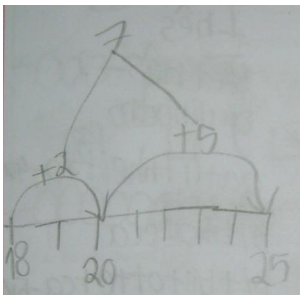


Figura 9. Resolução do problema "Chupa-chupas para todos!" – Cátia

Para confirmar, Cátia utilizou de novo a estratégia do tipo 1010, calculando 18+7, de modo a verificar se o resultado era 25. Contudo, sentiu dificuldade em resolver o cálculo, pois neste um dos números é de dois algarismos e o outro é apenas de um, enquanto que nos cálculos já resolvidos deste modo nos problemas “*A lista de palavras do Vasco”* e “*As leituras da Marta”*, ambos os números tinham dois algarismos.

Cátia – Mas eu não estou a perceber esta maneira.

Guilherme – Porquê?

Cátia – É que esta maneira não está a dar para mim…

Guilherme – Mas porquê?

Cátia – Costuma-me sempre sair bem, mas para mim… Já percebi!

A aluna ultrapassou esta dificuldade, colocando um zero à esquerda do 7 (18+07), facto que causou alguma estranheza ao seu colega:

Guilherme – Isto é quê? É 7?

Cátia – É o 7.

Guilherme – Porque é que tem um zero?

Cátia – Porque sete… eu pus assim.

Guilherme – Mas porque é que puseste um zero?

Cátia – Olha, porque pus!

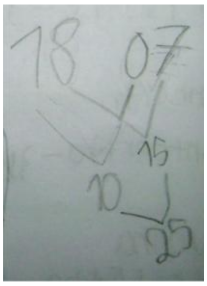


Figura 10. Estratégia para verificação do resultado do problema
“Chupa-chupas para todos!” – Cátia

No momento de discussão, pedi a Cátia que explicasse qual o motivo para colocar o zero à esquerda do 7.

Professora – Porquê um zero e um 7?

Cátia – É que quando… Eu quando faço… eu gosto de fazer o zero porque assim… se eu não puser o zero posso-me enganar e fazer, por exemplo, o 1 mais o 7.

Para calcular 8 + 7, a aluna recorre a um facto numérico básico: 7+7=14

Cátia – Eu pensei… se 8 mais 8 é o 16, menos 1, são 15.

Outro aluno – Ou 7 mais 7 é 14, mais 1 é 15.

Para efectuar a adição 10+15, Cátia recorre a uma contagem de 5 em 5, a partir do 10, levantando um dedo por cada grupo de 5 que vai adicionando:

> Cátia – Eu contei do 10 mais 15 que era 25 porque fiz 10, 15, 20, 25.

Relativamente à verificação do resultado do problema, quando questionada pelo colega, Cátia demonstra, novamente, que compreende as relações numéricas envolvidas no problema.

> Guilherme – Mas porque é que apareceu aqui o 25? Não devia aparecer o 7?
>
> Cátia – Não Guilherme, porque o 7 é o que se tem que juntar ao 18.
>
> Guilherme – Ah!
>
> Cátia – Mas ele tem que provar que 18 mais 7 é 25!
>
> Guilherme – Ok, já percebi.
>
> Cátia – Eu tenho que provar para saber que é! Eu quando é de juntar… por exemplo, 2 mais qualquer coisa que é 7, eu faço esta maneira [saltos através de um múltiplo de 10, recorrendo à linha numérica] e depois esta [estratégia do tipo 1010]. Quando é 7 mais 18, por exemplo, faço desta [estratégia do tipo 1010] e depois desta [saltos através de um múltiplo de 10, recorrendo à linha numérica].

Perante este último excerto, parece evidente que a aluna possui duas estratégias diferentes às quais recorre mediante o tipo de problema que lhe é apresentado. A aluna refere que utiliza a estratégia do tipo 1010 quando tem que adicionar dois valores, descobrindo um terceiro, recorrendo depois à estratégia de saltos através de um múltiplo de 10 para verificar o resultado.

Se, por outro lado, o valor desconhecido não é o resultado mas sim o que deverá ser adicionado a um número para obter o resultado, também este conhecido, a aluna utiliza uma estratégia de saltos através de um múltiplo de 10, confirmando o resultado obtido com uma estratégia do tipo 1010.

É seguindo estas duas últimas estratégias, que a aluna resolve este problema, onde a subtracção está presente com o significado de completar. Estas estratégias foram também utilizadas por Cátia no problema anterior, também este de subtracção enquanto completar.

Síntese

1.ª cadeia de problemas

O quadro seguinte apresenta as estratégias utilizadas por Cátia, nos problemas da primeira cadeia.

Quadro 6 – Estratégias utilizadas por Cátia na resolução dos problemas da primeira cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Combinar	"Gormitis"	Utilização de factos numéricos de adição
	Acrescentar	"Idade do Dinis"	Contagem crescente a partir do primeiro número
Subtracção	Comparar	"A mana das gémeas"	Estratégia aditiva de saltos através do 10, com suporte da linha numérica
	Retirar	"Uma ida ao teatro"	Contagem dos que sobram (a partir de uma representação icónica) Verificação: cálculo com base em factos numéricos
Adição	Acrescentar	"A lista de palavras do Vasco"	Estratégia aditiva do tipo 1010 Verificação: estratégia aditiva A10, com suporte da linha numérica
Subtracção	Completar	"As leituras da Marta"	Estratégia aditiva A10, com suporte da linha numérica Verificação: estratégia aditiva1010
		"Chupa-chupas para todos!"	Estratégia aditiva A10, com suporte da linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010

Na resolução dos diferentes problemas da primeira cadeia, Cátia recorre a estratégias aditivas.

Nos problemas "*Idade do Dinis*" e "*Uma ida ao teatro*", a aluna recorre a estratégias mais elementares do que as utilizadas nos restantes problemas. Em "*Idade do Dinis*", problema de adição com o significado acrescentar, Cátia efectua uma contagem de um em um a partir de oito, facto que, como já referi, pode estar relacionado com a noção temporal presente no problema.

O problema "*Uma ida ao teatro*" era o único desta cadeia com o significado de retirar. O significado da subtracção presente neste problema poderá ter influenciado a estratégia de resolução utilizada por Cátia. Por isso, será interessante analisar a que estratégias recorrerá a aluna na resolução problemas deste tipo nas outras cadeias.

Um dos aspectos que merece especial atenção é a utilização da estratégia do tipo 1010, que surge pela primeira vez na turma. É importante referir que esta estratégia surgiu naturalmente na resolução do problema "*A lista de palavras do Vasco*". Após ter sido utilizada neste problema, a aluna recorre a esta estratégia nos dois últimos problemas como estratégia de verificação do resultado, parecendo mostrar alguma preferência por este tipo de estratégia no cálculo de adições.

Na verificação do resultado do último problema, ao adicionar dois valores com diferente número de algarismos através da estratégia do tipo 1010, Cátia sente a necessidade de colocar um zero na ordem das dezenas do número de apenas um algarismo (figura 10). Contudo, tendo em conta os dados analisados, a aluna não o faz para efectuar uma adição algarismo a algarismo, pois na análise das suas resoluções, revelou ter um entendimento dos números como um todo, fá-lo para evitar possíveis enganos, como a aluna afirma.

Será interessante analisar se Cátia irá continuar a utilizar estratégias do tipo 1010 nas cadeias seguintes, não só em problemas de adição, mas também de subtracção, uma vez que as dificuldades na utilização deste tipo de estratégia em subtracções com empréstimo estão já identificadas na literatura.

Relativamente aos problemas de adição, a aluna recorreu à utilização de factos numéricos, a uma contagem um em um e a uma estratégia aditiva do tipo 1010. Esta diversidade de estratégias talvez se deva quer à grandeza dos números envolvidos, que vai aumentando ao longo da cadeia, quer à situação envolvida em cada problema.

No problema de subtracção com o significado de comparar, "*A mana das gémeas*", Cátia recorre a uma estratégia aditiva de saltos através do 10, e nos dois últimos problemas, ambos com o significado de completar, recorre a estratégias aditivas pertencentes à categoria N10, que me parecem poder designar-se por A10, porque realiza primeiro uma aproximação à dezena exacta e conclui quanto falta para chegar ao número pretendido.

Cátia recorre sempre à linha numérica enquanto suporte da utilização da estratégia do tipo A10. Começa por utilizar a linha numérica traçando todos os números, entre os valores necessários para o cálculo (figura 3 e 6), traçando depois apenas os números necessários aos cálculos a efectuar, marcando a posição dos números entre estes apenas com um traço (figura 7 e 9), o que confere à utilização da linha numérica uma maior rapidez.

Os dados disponíveis permitem afirmar que Cátia utiliza estratégias do tipo 1010 e do tipo A10 de modo flexível, demonstrando uma elevada compreensão das relações numéricas envolvidas. Como foi referido na análise da resolução do último problema, a aluna faz a selecção entre estes dois tipos de estratégias de acordo com o tipo de problema a resolver, o que parece evidenciar que identifica as diferenças existentes entre os vários tipos de problemas, escolhendo depois a estratégia que considera mais adequada à sua resolução.

Resolução dos problemas da 2.ª cadeia

"Tiro ao alvo" – 5 de Maio de 2010

Após compreender que poderia resolver o problema através de uma adição, Cátia decide recorrer a uma estratégia aditiva do tipo 1010.

> Madalena – Ó Cátia, já sei como é que vamos fazer… é pegar nos…
>
> Cátia – Mas é juntando o 35 mais o 12?
>
> Madalena – Juntando…
>
> Cátia – Ah, é juntando… Então podemos fazer da minha maneira.
>
> Madalena – Sim, podemos fazer o 27… é para juntar! E depois o que der o maior resultado, é o que ganha!
>
> Cátia – Pois.

Depois de resolver o primeiro cálculo (12+35), onde as adições envolvidas constituem-se factos numéricos para a aluna, no segundo cálculo (29+27), ao adicionar 9+7, Cátia decompõe 7 em 6+1, juntando 1 a 9, aproximando-se assim de 10, adicionando depois 6, obtendo 16 (figura 11).

> Cátia – 9 mais… Ó Madalena, temos aqui um caso infeliz… Sabes porquê? Porque eu vou fazer de outra maneira isto. Vou pensar assim, o 9 vou dividir em …
>
> Madalena – Mas eu já sei quanto é que é.
>
> Cátia – Mas eu quero fazer assim.
>
> Madalena – Mas eu não sei quanto é 40 mais isto…
>
> Cátia – Qual 40? Ah! Tens que pensar quanto é o 4 mais 1…
>
> Madalena – 40 mais… 50.

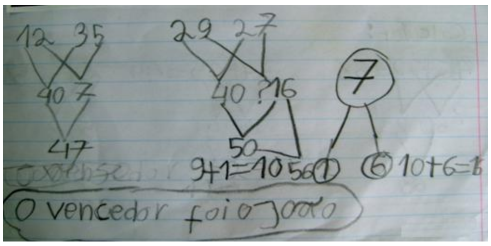


Figura 11. Resolução do problema "Tiro ao alvo" – Cátia

"Os pontos do Daniel" – 7 de Maio de 2010

Cátia e o seu par na resolução deste problema, Miguel, identificam de imediato como poderão resolvê-lo:

> Cátia e Miguel – 32 mais qualquer coisa igual a 55.

Miguel sugere que resolvam o problema utilizando a estratégia do tipo 1010, no entanto, Cátia reconhece que neste problema esse tipo de estratégia será útil na verificação do resultado. Segue assim a sugestão do colega que diz para utilizarem a linha numérica.

> Miguel – Então eu vou fazer da tua maneira…
>
> Cátia – Espera, espera! Primeiro fazemos de outra. Eu acho que a minha… É assim, a minha…
>
> Miguel – Vamos fazer a recta!
>
> Cátia – É mais qualquer coisa… A minha não dá para ser primeiro. Só dá para confirmar.
>
> Miguel – Então… é melhor ser a recta.
>
> Cátia – Sim, a recta.

Cátia traça a linha numérica, onde, tal como fazia nas suas resoluções dos problemas da primeira cadeia, não registou todos os números, mas apenas os que eram resultados das adições que efectuou, para além do número inicial (32).

Primeiro aproximou 32 a um número de referência, múltiplo de 10, o 40. Deu um salto de 10 para o 50 e calculou que saltos já tinha realizado (8+10). Por fim, deu um salto de 5 para o 55, e adicionou 18+5 (figura 12):

> Cátia – Vou pensar…
>
> Miguel – Eu sei que é 23.
>
> Cátia – Não, não, primeiro eu tenho que pensar! Não digas nada! Vou dividir o 5 em 2 mais 3…

A aluna decompõe 5 em 2+3, adicionando o grupo de 2 a 18, obtendo 20 e depois juntou o grupo de 3, resultando 23. Mais uma vez, a aluna demonstra que é capaz de atribuir diferentes representações a um mesmo número, representações essas que utiliza de modo bastante flexível para aproximar os números a valores de referência.

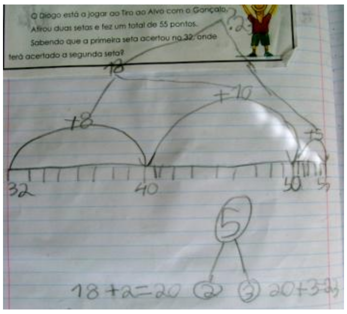


Figura 12. Resolução do problema "Os pontos do Daniel" – Cátia

De seguida, Cátia verificou o resultado obtido, recorrendo a uma estratégia aditiva do tipo 1010:

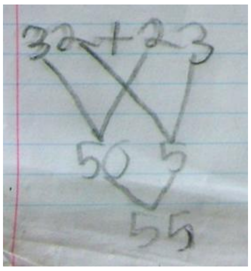


Figura 13. Estratégia para verificação do resultado
do problema "Os pontos do Daniel" – Cátia

"A festa da Cláudia" – 12 de Maio de 2010

Logo após a leitura do enunciado feita por Cátia e pelo seu par naquele dia, Matilde, Cátia sugere que o resolvam através da estratégia do tipo 1010.

É com rapidez que a aluna efectua o cálculo 37+25 (figura 14), confirmando logo de seguida o seu resultado, recorrendo a uma estratégia aditiva do tipo A10, com o suporte da linha numérica (figura 15).

> Professora – Cátia, mostra-me lá como é que tu fizeste.
>
> Cátia – Eu fiz da minha maneira que é o 30 mais o 20, 50. E 7 mais 5 eu pus um ponto de interrogação e dividi o 5 em 3 e em 2. E já sei que 7 mais 3 é igual a 10 e 10 mais 2 é igual a 12.
>
> Professora – Muito bem.
>
> Cátia – Depois fiz o 50 mais o 10, é 60. E 60 mais 2 que é 62.

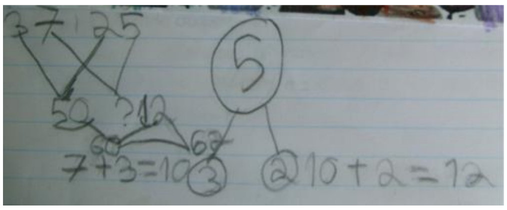


Figura 14. Resolução do problema "A festa da Cláudia" – Cátia

De seguida, explica como confirmou o resultado. De novo, consegue perceber-se que a aluna possui um sistema de números de referência, baseado em múltiplos de 10, que utiliza de modo bastante ágil.

> Cátia – (…) E aqui fiz uma recta…
>
> Professora – E aí confirmaste, é isso?
>
> Cátia – Sim.
>
> Professora – Foste do 37 para o 40, mais 3. Voltaste a pensar daquela maneira, se este fosse 7 e aquele fosse 10?
>
> Cátia – Sim.
>
> Professora – Depois fizeste um salto de 10, outro salto de 10 e mais 2.
>
> Cátia – Depois juntei o 10 mais 10 que é 20, e o 2 mais 3 que é 5. E o 20 mais 5 que é o 25. E o 25 está aqui.

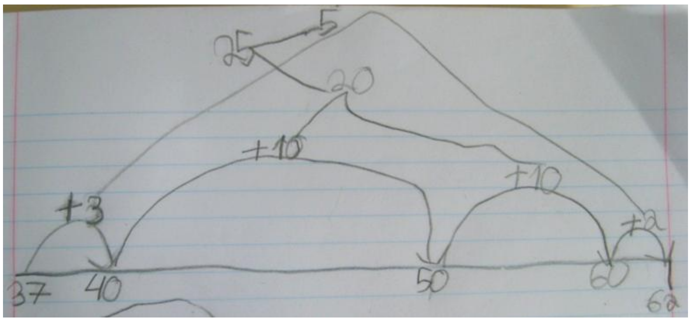


Figura 15. Estratégia para verificação do resultado do problema "A festa da Cláudia" – Cátia

Na linha numérica desenhada, Cátia não marcou os traços relativos à posição de todos os números na linha, ou seja, registou apenas os números envolvidos nos cálculos que efectuou.

Ao calcular o número total dos saltos efectuados, Cátia revela a sua facilidade com os números, pois em vez de ir adicionando os números à medida que estes vão surgindo, a aluna adiciona-os como considera ser mais vantajoso: primeiro 10+10 (20) e depois 3+2 (5) e finalmente 20+5.

"Viagem de autocarro" – 17 de Maio de 2010

Sem dificuldade, Cátia identifica a operação presente neste problema:

> Cátia – Isto nós temos que fazer 49 menos 26! Podemos fazer da minha maneira!

Cátia recorre a uma estratégia subtractiva do tipo 1010, porém, o resultado de 9-6 (de 49-26) não é ainda imediato:

Cátia – 40 menos 20 igual a 20… 9 menos 6… Então ao 9 menos…

Madalena – Menos 6!

Cátia – Sim, quanto é que é? Eu não sei quanto é.

Madalena – Eu sei… E depois eu acho que é 23.

Cátia – Espera aí…

Madalena – Eu acho que é assim, não tenho a certeza…

Cátia – Se nós dividirmos… 9 menos… 3 igual… 9 menos 3 é igual a 6. Já gastei este 3. 6 menos 3…

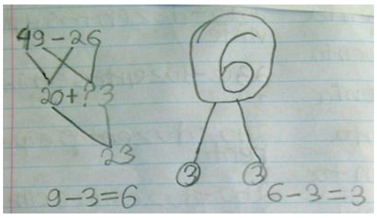


Figura 16. Resolução do problema "Viagem de autocarro" – Cátia

De seguida, e apesar da sua colega na resolução deste problema, Madalena, não manifestar interesse, Cátia verifica o resultado através de uma estratégia subtractiva do tipo A10, suportada pela linha numérica.

Cátia – Eu ainda vou confirmar.

Madalena – Confirmar?

Cátia – Claro, porque é que não haveríamos de confirmar?

Madalena – Porque está certo.

Cátia – Como é que sabes?

Madalena – Se todos dizem que é 23, é 23.

Cátia – Mas e se for outro número? Eu quero confirmar.

Madalena – Mas como é que vamos confirmar?

Cátia – Pela recta.

Tal como no problema anterior, também neste a aluna apenas regista os valores necessários aos seus cálculos na linha numérica, aspecto que reconhece aumentar a rapidez da utilização da linha, tal como explica à sua colega:

Cátia – Nesta recta vamos do 49 até ao 23, porque achamos que é 23. Mas nós temos… temos que dar 26 saltinhos. Deste 23, nós temos que dar 26 saltinhos.

Madalena – 26? Como é que… Ah, pois, claro. Mas não vamos de um em um pois não?

Cátia – Não! Então vamos fazer até ao 40.

Madalena – Sim… Fazemos os tracinhos?

Cátia – Poupamos trabalho.

As alunas começam por retirar 9 a 49, dão depois dois saltos de -10, resultando 20. Por fim, subtraem 3 e, de modo incorrecto, registam 23. Apesar de terem apagado o registo, este era semelhante ao da figura seguinte:

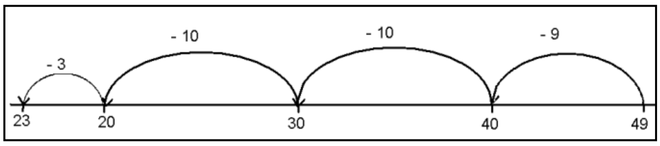


Figura 17. Representação da resolução inicial para verificação do resultado do problema "Viagem de autocarro" – Cátia

O par ficou bastante inseguro com esta resolução, no entanto, nenhuma das alunas conseguia identificar qual o erro.

Cátia – Então, mas isto quer dizer que não é 23! Isto não está a dar certo!

Madalena – Pois não… na recta acho que se… só se for do 23 para o 49! A diferença é a mesma, podemos tentar.

Cátia – Não, é o mesmo Madalena, dá o mesmo. Quando a Cristina chegar ao pé de nós, nós dizemos.

Ao aproximar-me do par, Cátia explicou-me o que tinham feito e tentei ajudar a identificar qual teria sido o erro cometido.

Cátia – É assim, é que não nos está a dar bem aqui. Porque este mais este é 20, mas isto mais isto não é 6!

Professora – Então espera… Tiraram o 9, depois tiraram 10, tiraram outros 10… Mas 20 menos 3 não é 23. Isso é 20 mais 3!

Cátia – Espera aí…

Madalena – Pois! Porque nós fizemos os saltos ao contrário. Porque é daqui… 23 menos 20…

Neste momento, as alunas começam a compreender que o último salto efectuado não estava correcto:

Cátia – Mas 20 menos… mas é assim, é que aqui até dá um número maior do que este…?

Madalena – Espera aí, porque nós fizemos os saltos ao contrário!

Cátia – Mas de menos também dá!

Madalena – De menos também dá, mas de menos é assim!

Madalena fez um movimento do salto para trás na recta que tinha desenhado no seu caderno, tentando mostrar à Cátia que o salto que fizeram foi de adição.

Madalena – Nós fizemos que 20 menos 3 é 23!

Cátia – Sim, não é.

Madalena – Pois!

Cátia – Mas agora como é que nós vamos fazer…

Professora – Reparem, o 23 está atrás do 20 e não devia…

Cátia – Foi isso que eu reparei agora… Então nós temos que apagar e pôr… mais ou menos aqui…

Cátia apontou com o dedo para a sua recta, à direita do 20. A aluna compreende que o salto de subtracção será menor que 10 (salto dado entre 30 e 20). Para identificar qual o salto dado, pensou no que teria de subtrair a 10 para obter 3.

Cátia – É menos… qualquer coisa…

Professora – Menos quanto, agora?

Cátia – Então, se fosse 10 menos 3… 10 menos qualquer coisa para chegar a 3… é 7! Então aqui é 7!

(…)

Cátia – E agora, só temos que juntar estes!

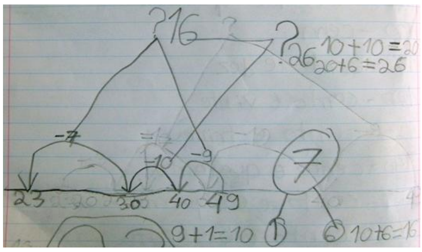


Figura 18. Estratégia para verificação do resultado do problema "Viagem de autocarro" – Cátia

Corrigido o erro, Cátia calcula o número total de saltos, e tal como no problema "*Tiro ao alvo*", para calcular 9+7, decompõe o número 7 em 1+6, de modo a aproximar primeiro 9 de 10, para depois juntar 6, resultando 16. A adição 10+16 também não é ainda imediata, para a resolver adiciona primeiro as dezenas (10+10), juntando depois a esse resultado as unidades em falta (20+6).

"Pai e filho" – 19 de Maio de 2010

O par de Cátia neste problema, Guilherme, sugere que resolvam o problema através de uma estratégia do tipo 1010, no entanto, a aluna prefere utilizar a estratégia A10 recorrendo à linha numérica.

> Guilherme – Dá para fazer da tua maneira? [estratégia 1010]
>
> Cátia – Da recta dá.
>
> Guilherme – E da outra?
>
> Cátia – Eu acho que dá, mas é só para confirmar. Eu acho que não dá para fazer, só para confirmar.
>
> Guilherme – Não, mas para confirmar e para fazer é igual ó Cátia.
>
> Cátia – Não, não é. Mas a recta é melhor…

Provavelmente a aluna terá identificado que para obter o resultado ao problema teria de calcular 14+?=42, assim sendo, sente dificuldade em utilizar a estratégia 1010, recorrendo a esta para a verificação do resultado. Assim, utiliza uma estratégia aditiva A10 tendo como suporte a linha numérica (figura 19):

> Cátia – Do 14 vamos dar um saltito para…
>
> (…)
>
> Guilherme – Espera por mim!
>
> Cátia – Então? Eu estou habituada a fazer… 20… 10 mais 10 é 20, 2 mais 6 é 8…
>
> Guilherme – Hã? Do 20 para… Ah! Desculpa!
>
> Cátia – É 28!
>
> Guilherme – Já sabemos!
>
> Cátia – Mas temos que confirmar!

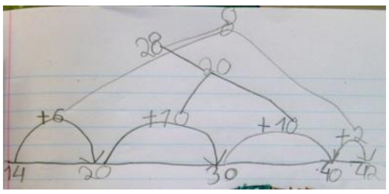


Figura 19. Resolução do problema "Pai e filho" – Cátia

Como já foi referido, para verificar o resultado o par recorre à estratégia do tipo 1010, calculando se 14+28 é igual a 42 (figura 20).

> Cátia – (…) confirmei para ver que 14 mais 28 era igual a 42. Fiz o 10 do 14 mais o 20 do 28 que era igual a 30. Depois o 8 mais 4…
>
> Professora – Como é que calculaste?

Cátia – Eu fiz a dividir. Eu gostava mais de pôr um ponto de interrogação e explicar. Eu não sabia e eu pensei assim, dividi o 4 em 2 mais 2. Depois o 8 mais 2 que é 10, para dar um número redondinho. Então vou registar isto!

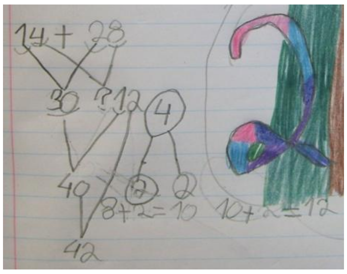


Figura 20. Estratégia para verificação do resultado
do problema “Pai e filho” – Cátia

É com grande clareza e compreensão que Cátia explica como os cálculos efectuados para verificar o resultado. De novo se compreende que a aluna possui um bom conhecimento dos números, operando com estes tomando-os como um todo, tal como se pode perceber quando Cátia diz “Fiz o 10 do 14 mais o 20 do 28 que era igual a 30”.

“Saltos à corda” – 26 de Maio de 2010

Cátia e o seu par neste problema, Miguel, decidem utilizar a linha numérica como suporte à estratégia aditiva A10, resolvendo o problema com grande rapidez (figura 21).

Quando me aproximei, Cátia explicou os cálculos que tinha efectuado, revelando novamente que consegue operar com os números com grande flexibilidade:

Professora – E vocês como é que fizeram?

Miguel – Fizemos uma recta.

Cátia – Eu fiz uma recta do 48 até ao 75. Do 48 para o 50 é mais 2. Porque eu fingi que o 48 era um 8 e o 50 um 10 e já sei que 8 mais 2 é 10. Depois do 50 para o 60 é mais 10. Do 60 para 70 é mais 10. Do 70 para o 75 é mais 5. E 5 mais 2 é 7. O 10 mais 10 é 20. 20 mais 7, 27.

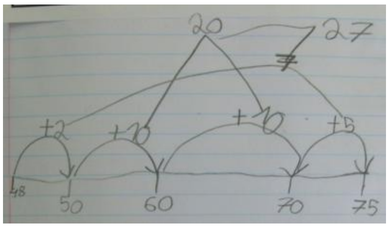


Figura 21. Resolução do problema “Saltos à corda” – Cátia

Embora com uma pequena diferença a nível das adições efectuadas, pois Miguel regista um salto inicial de +12 (48+12=60) e Cátia divide o salto em +2 (48+2=50) e +10 (50+10=60), ambos compreendem os cálculos efectuados pelo colega e verificam se o resultado está correcto.

> Miguel – Olha, eu fiz assim…
>
> Cátia – Mas tu deste logo…
>
> Miguel – Sim, fiz saltos maiores…
>
> (…)
>
> Cátia – Temos que provar que 27 mais 48 é 75.
>
> Miguel – Está bem.

Os alunos recorrem a uma estratégia aditiva do tipo 1010, para a confirmação do resultado (figura 22). Apesar de Cátia ter referido que teriam de calcular 27+48, ao registar o cálculo, escreve primeiro o número maior: 48+27. É sem dificuldade que calcula que 40+20=60, no entanto, a adição 8+7 não se constitui um facto numérico para Cátia. Para resolver esta operação, recorre a factos numéricos, o dobro de 8.

> Cátia – Se 8 mais 8… 16… 8 mais 7… é só menos… 1. Se 8 mais 8 é 16, 8 mais 7 é só… menos 1.
>
> Miguel – Já acabei.
>
> Cátia – É 75.
>
> Miguel – Certo.
>
> Cátia – É mesmo 27.

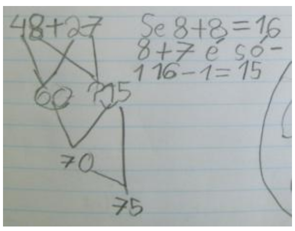


Figura 22. Estratégia para verificação do resultado
do problema “Saltos à corda” – Cátia

“Que azar!” – 31 de Maio de 2010

Cátia e o seu par, novamente Miguel, identificaram sem dificuldade a subtracção envolvida neste problema: 82-36. Após alguma discussão sobre a melhor estratégia de resolução, o par opta por utilizar primeiro uma estratégia subtractiva do tipo 1010 e para confirmação do resultado, Cátia utiliza uma estratégia subtractiva do tipo A10 recorrendo à linha numérica (figura 23) e Miguel segue o mesmo tipo de estratégia, porém, sem o suporte da linha numérica.

Na subtracção inicialmente efectuada (82-36), Miguel ajuda a calcular 80-30, recorrendo ao facto numérico 8-3=5 (então 80-50=30).

> Cátia – 80 menos 30.
>
> Miguel – Eu sei, porque 8 menos 3 é 5.
>
> Cátia – Ah!

Na subtracção 2-6, Miguel referiu de imediato que o resultado seria -4, no entanto, Cátia recorre à decomposição do número 6, em 2+4, que utiliza para comprovar que o resultado é de facto -4, como me explicou:

> Cátia – É assim… eu agora estou a fazer… Eu pus o menos 4, que o Miguel me disse, mas eu agora pensei numa maneira de registar… Dividi o 6 em 2 mais 4. E 2 menos 2 igual a zero… e já gastei este 2. Depois… zero menos 4 igual a menos 4.

Para a confirmação do resultado, Cátia utiliza uma estratégia subtractiva do tipo A10, tendo como suporte a recta numérica, efectuando 82-36, tal como explicou à turma no momento de partilha e discussão das estratégias de resolução:

> Cátia – Comecei do 82 para o 46 porque eu pensava que era 46, e era mesmo. E depois tirei 2 ao 82, para o 80.
>
> Professora – Porque é que quiseste dar este salto de menos 2?
>
> Cátia – Para ficar um número redondinho.
>
> Professora – Exacto, sem dúvida que assim é mais fácil. E depois?
>
> Cátia – 80 menos 10 é 70, 70 menos 10 é 60. 60 menos 10 é 50. 50 menos 4 é 46. E depois juntei 10 mais 10, que era 20. 20 mais 10 que é 30. 4 mais 2 que é 6, 30 mais 6, 36.

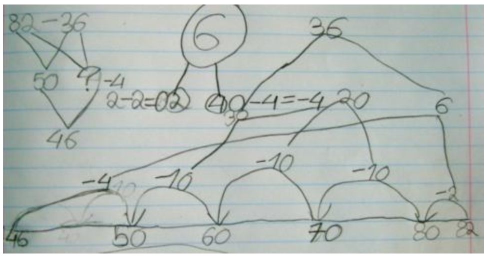


Figura 23. Resolução e estratégia para verificação do resultado do problema “Que azar!” – Cátia

“A caderneta das Winx” – 2 de Junho de 2010

Cátia identifica que, para resolver o problema, terá de calcular o que terá de adicionar a 47 para obter 124. Opta por utilizar a linha numérica como suporte à sua estratégia e revela considerar este problema difícil.

> Cátia – Nós temos que fazer 47 mais qualquer coisa igual a 124.
>
> Madalena – Ah! Ah, já percebi…
>
> Cátia – É difícil…
>
> Madalena – Pois é, é difícil…
>
> Cátia – Pela recta temos que fazer imensas coisas porque…
>
> Madalena – Temos que dar saltos muitos grandes.
>
> (…)
>
> Cátia – Ai, a recta tem que ser gigante…

As alunas parecem reconhecer que o resultado será um número grande, o que parece revelar uma boa estimativa do resultado.

Para resolver o problema, o par utiliza uma estratégia aditiva do tipo A10 (figura 24). Apesar de Madalena efectuar adições de +20, aspecto ao qual chamei a atenção no momento de discussão, por conferir maior rapidez na utilização da linha numérica, Cátia parece preferir dar saltos menores, como descreve:

> Cátia – Eu fiz pela recta, fiz uma recta do 47 para o 124. Depois do 47 para o 50 é mais 3, porque se o 47 fosse 7 e se o 50 fosse 10, 7 mais 3 eu já sei que é 10. 50 mais 10, 60. 60 mais 10, 70. 70 mais 10, 80. 80 mais 10, 90. 90 mais 10, 100. 100 mais 10, 110. 110 mais 10, 120. 120 mais 4, 124. Depois juntei o 10 mais 10 que era 20. 20 mais 10, 30. 30 mais 10, 40. 40 mais 10, 50. 50 mais 10, 60. 60 mais 10, 70. Depois o 3 mais 4 que é 7 e 70 mais 7, 77.

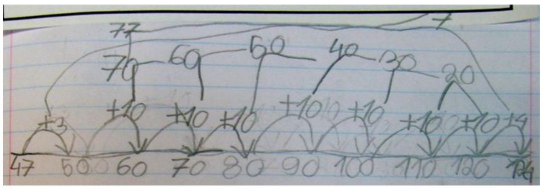


Figura 24. Resolução do problema “A caderneta das Winx” – Cátia

Para confirmar, Cátia utiliza de novo a estratégia 1010, onde verifica se 47+77 é de facto 124 (figura 25), conseguindo explicar de modo bastante claro como efectuou a adição no momento de discussão:

> Cátia – Fiz… eu estava a ver se 47 mais 77 era 124. Fiz 40 mais 70, fiz dividi o 70 em 60 mais o 10 e depois 40 mais 60 igual a 100 e 100 mais 10 é igual a 110.
>
> Professora – Boa e depois?
>
> Cátia – Depois fiz 7 mais 7 que era 14. Depois pus o 110 mais o 10 do 14, 120. 120 mais 4 do 14, 124.

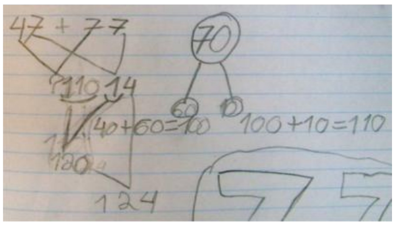


Figura 25. Estratégia para verificação do resultado do problema “A caderneta das Winx” – Cátia

Mais uma vez, é evidente a flexibilidade de Cátia, quer a nível das relações numéricas, quer na operação com os números, que decompõe de modo a aproximar-se dos números de referência, múltiplos de 10, facilitando o cálculo.

Síntese

2.ª cadeia de problemas

Na resolução dos problemas desta cadeia, Cátia recorreu essencialmente a estratégias aditivas (quadro 7). Recorreu a estratégias subtractivas em apenas dois problemas, "*Viagem de autocarro*" e "*Que azar!*", o que parece dever-se ao facto de ambos os problemas de subtracção terem o significado de retirar. Nestes, a aluna utilizou estratégias subtractivas do tipo 1010, pela primeira vez nesta cadeia. A estratégia subtractiva do tipo 1010 foi utilizada sem qualquer dificuldade, mesmo no caso da subtracção com empréstimo em *"Que azar"*. Para a confirmação do resultado destes problemas, utilizou uma estratégia subtractiva do tipo A10.

Quadro 7 – Estratégias utilizadas por Cátia na resolução dos problemas da segunda cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Combinar	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Completar	"Os pontos do Daniel"	Estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010
Adição	Acrescentar	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010 Verificação: estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica
Subtracção	Retirar	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010 Verificação: estratégia subtractiva A10, recorrendo à linha numérica
	Comparar	"Pai e filho"	Estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010
		"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010
	Retirar	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010 Verificação: estratégia subtractiva A10, recorrendo à linha numérica
	Completar	"A caderneta das Winx"	Estratégia aditiva A10, com recurso à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010

Os restantes problemas de subtracção, independentemente do seu significado, foram resolvidos através de estratégias aditivas A10, tendo sempre como suporte a linha numérica. Para a verificação dos resultados, a aluna recorreu a estratégias aditivas do tipo 1010.

Os dois problemas de adição foram resolvidos através de estratégias aditivas do tipo 1010. Cátia parece assim revelar uma clara preferência por este tipo de estratégia para o cálculo de adições.

Resolução dos problemas da 3.ª cadeia (20 de Outubro de 2010)

“Cesto d’Ouro”

Cátia resolve o problema sem dificuldade, utilizando uma estratégia aditiva do tipo 1010 (figura 26).

> Cátia – Eu fiz 134 + 63. Fiz 30 + 60 que era 90 (…) porque sei que 6 + 3 é 9. E 4 + 3 é 7. 90 + 7, 97. 97 + 100, 197.

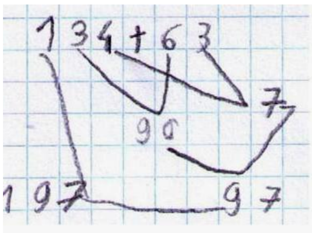


Figura 26. Resolução do problema “Cesto d’Ouro” – Cátia

Como a primeira parcela tem três algarismos e a segunda tem dois, Cátia adiciona primeiro a ordem das dezenas e das unidades e só no fim junta uma centena, demonstrando o seu conhecimento sobre o valor posicional de cada algarismo e a sua flexibilidade na decomposição e recomposição dos números.

Todas as adições intermédias efectuadas constituem-se como factos numéricos para Cátia, que refere várias vezes que “já sabia” o resultado.

“Parar ou Avançar”

A aluna começa por registar 157 (número de pontos de Cláudia) e pára durante alguns instantes, torna a reler o enunciado e regista o sinal de subtracção. Apesar de ter sentido a necessidade de voltar a reler, percebendo-se que releu “o Miguel teve 43 pontos a menos”, repetindo a palavra “menos”, e de inicialmente parecer um pouco insegura, associa a subtracção à situação descrita no problema, registando 157-43.

Cátia efectua a subtracção recorrendo a uma estratégia subtractiva do tipo 1010. Tal como no problema anterior, também neste Cátia começa por subtrair as dezenas, depois unidades e só no fim opera com as centenas, contudo, a 100 subtrai 14. Logo de seguida, sem me colocar qualquer questão, calcula 86+43, obtendo 129. Depois, calculou de novo 157-43, agora adicionando 100 a 14 (terceiro cálculo da figura 27), explicando:

Cátia – É que eu tentei, mas eu não sabia se tinha de fazer neste [primeiro cálculo da figura 27] de menos ou de mais, então fiz de menos mas depois quando eu confirmei não me deu certo. Então eu estou a fazer outra vez.

Quando terminou a adição 114+43 referiu que “agora já deu certo”.

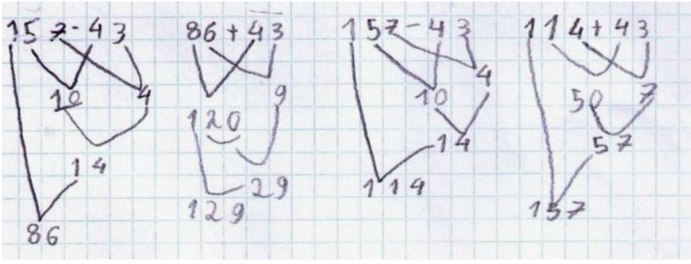


Figura 27. Tentativa e resolução do problema “Parar ou Avançar” – Cátia

Apesar de Cátia revelar dificuldade na correcta recomposição do número após a utilização da estratégia subtractiva do tipo 1010, demonstra grande compreensão relativamente à relação entre as operações de adição e subtracção, à qual recorre de modo a verificar a correcção dos seus resultados.

“Na escola do Mário”

Cátia recorre de novo a uma estratégia aditiva do tipo 1010. Neste problema, ambas as parcelas têm o mesmo número de algarismos e Cátia começa por adicionar as centenas, depois dezenas e por fim, as unidades.

Após ter calculado todas as somas intermédias (200, 90 e 14), decompôs 14 em 10 + 4, e adicionou a dezena de 14 a 90, obtendo 100. De seguida, juntou as 4 unidades de 14 a 100, mas apagou, optando por adicionar primeiro 100 a 200 e no fim então adicionar essas 4 unidades (figura 28).

Tal como já foi referido anteriormente, é possível verificar que Cátia demonstra possuir um sistema de números de referência que utiliza de modo muito eficiente e lhe permite tornar os cálculos a efectuar mais simples.

Quando terminou, explicou o seu raciocínio:

Cátia – Eu fiz 129 mais 175. Fiz 100 mais 100 que é 200. 20 mais 70 era… é 90.

Professora – Como sabes?

Cátia – Eu pensei primeiro se fosse 70 mais 30, e depois como é só 20, é menos 10. E depois também fiz 2 mais 7 que é 9. E 5 mais 9 que deu 14.

Professora – Nesse cálculo como fizeste?

Cátia – Fiz 10 mais 5 que é 15, e depois como é 9, é 14. Depois fiz 9… 90 mais 10 que é 100. Depois… 100 mais 200, 300, mais 4, 304.

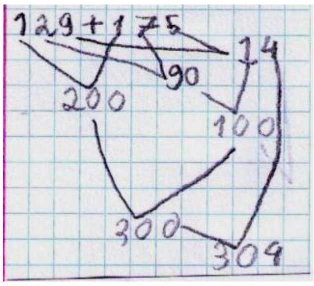


Figura 28. Resolução do problema "Na escola do Mário" – Cátia

"Uma sessão de cinema"

Cátia resolve o problema recorrendo a uma estratégia subtractiva do tipo 1010, confirmando o resultado obtido através de uma adição (figura 29), tal como fez no problema "*Parar ou Avançar*".

Cátia volta a efectuar as adições de cada ordem, começando pelas centenas, como a aluna descreve:

Cátia – Fiz 257 menos 125. Fiz 200 menos 100 que era 100. 50 menos 20, 30. Depois, 7 menos 5, 2. Depois 30 mais 2, 32. Depois 100 mais 32, 132.

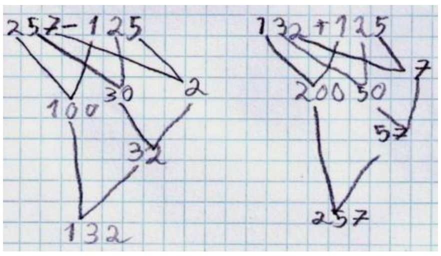


Figura 29. Resolução e verificação do resultado do problema "Uma sessão de cinema" – Cátia

"Concurso na livraria"

Cátia interpreta com facilidade o problema, resolvendo-o através de uma estratégia aditiva do tipo A10. A aluna foi adicionando parcelas intermédias a 135, de modo a aproximar-se de 250, como se pode observar na figura da página seguinte.

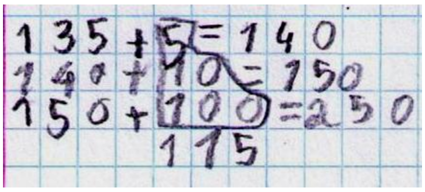


Figura 30. Resolução do problema “Concurso na livraria” – Cátia

Nos cálculos efectuados, Cátia aproxima os resultados intermédios a números de referência.

> Professora – Como é que calculaste?
>
> Cátia – Fiz 135 mais 5, que é 140 (…) 140 mais 10, 150. 150 mais 100, 250. E aqui [valores intermédios] é 115.
>
> Professora – Como fizeste esse cálculo?
>
> Cátia – Eu fiz 100 mais 10, 110. Mais 5, 115. E depois também fiz 10 mais 5, 15. Mais 100, 115.

Síntese

3.ª cadeia de problemas

Analisando as resoluções de Cátia nesta última cadeia de problema (quadro 8), verifica-se que a aluna resolveu quatro dos cinco problemas recorrendo a estratégias do tipo 1010, o que parece indicar a sua preferência por este tipo de estratégia.

Em *"Parar ou Avançar"*, Cátia revelou alguma dificuldade ao efectuar a subtracção com valores com diferente número de algarismos através deste tipo de estratégia, no entanto, devido à sua facilidade em relacionar as operações de adição e subtracção, foi capaz de, sozinha, superar essa dificuldade. Também na primeira cadeia de problemas, Cátia tinha sentido esta dificuldade, o que parece evidenciar como a adição ou subtracção de números com diferente número de algarismos se constitui como um obstáculo na utilização de estratégias do tipo 1010.

Apenas em "*Concurso na livraria*", a aluna recorreu a uma estratégia aditiva do tipo A10, diferente das estratégias escolhidas na resolução dos outros problemas, o que parece sugerir uma possível relação entre o significado de completar, presente neste problema de subtracção, e esta estratégia.

Quadro 8 – Estratégias utilizadas por Cátia na resolução dos problemas da terceira cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Acrescentar	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Comparar	"Parar ou Avançar"	Estratégia subtractiva 1010
Adição	Combinar	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Retirar	"Uma sessão de cinema"	Estratégia subtractiva 1010
	Completar	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10

Síntese global

Os primeiros problemas de adição são resolvidos por Cátia através de factos numéricos do seu domínio, possivelmente devido à ordem de grandeza dos números envolvidos. No problema *"A lista de palavras do Vasco"*, ambos os números a adicionar têm dois algarismos, o que poderá ter influenciado a escolha de um tipo de estratégia diferente. Neste problema, a aluna utiliza pela primeira vez uma estratégia do tipo 1010, a que depois recorre sempre na resolução de todos os problemas de adição seguintes.

Este tipo de estratégia foi utilizado na resolução de grande parte dos problemas de subtracção com o significado de retirar e também no problema *"Parar ou Avançar"*, com o significado de comparar.

Foi com grande facilidade que Cátia utilizou este tipo de estratégia, mesmo nas situações de subtracção com empréstimo que poderiam conduzir a alguns erros. A aluna apenas revelou alguma insegurança na utilização desta estratégia em situações cujos números eram representados por diferente número de algarismos.

Os restantes problemas, com os significados de comparar e completar, foram resolvidos através de estratégias aditivas do tipo A10 (ver quadro 18, no anexo 4).

Após a análise das resoluções de Cátia dos problemas das três cadeias, não há dúvida que a aluna possui grande facilidade no cálculo, revelando um excelente sistema de números de referência, grande conhecimento dos números, sendo capaz de estabelecer relações entre a adição e subtracção.

Miguel e suas estratégias

Miguel é um menino com grande confiança em si próprio, afirma com orgulho que tem muita facilidade na área de Matemática, dizendo "Eu já sei muita coisa sobre a Matemática, mas acho que ainda vou aprender mais qualquer coisa". Com 6 anos, revela grande segurança nas suas ideias e opiniões, sendo por vezes muito difícil ouvir e aceitar ideias diferentes das suas. Por isso, ao trabalhar em pequenos grupos ou a pares, tenta liderar o trabalho, o que nem sempre é bem aceite pelos seus colegas.

Adora ser desafiado, não só na Matemática, mas também nas restantes áreas, manifestando gosto em procurar, descobrir e partilhar o que sabe aos seus colegas.

Na Matemática, é com facilidade que lida com os números. Em Outubro do 1.º ano de escolaridade, dominava a leitura e a escrita de números até à ordem das centenas e calculava com facilidade adições e subtracções com números de um algarismo, recorrendo a factos numéricos como dobros e quase dobros. No cálculo envolvendo números com mais de um algarismo, tinha mais facilidade em adições, que resolvia com base em factos numéricos com números de um algarismo.

Resolução dos problemas da 1.ª cadeia

"Gormitis" – 29 Janeiro de 2010

Após ter recebido e lido o enunciado do problema, Miguel diz de imediato que já tinha resolvido o problema, fazendo depois o registo no seu caderno (figura 31). De facto, em apenas minutos, o aluno leu e resolveu o problema.

Miguel – Problema resolvido, já acabei!

Cátia – Já?

Miguel – Pois já!

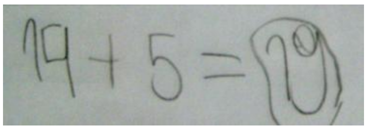


Figura 31. Resolução do problema "Gormitis" – Miguel

Ao ver o seu registo, pedi a Miguel que explicasse como tinha calculado:

Professora – Como é que tu sabes que é 19?

Miguel – Já sabia.

Professora – Como?

Miguel – Contando assim… 14 mais… já sabia! Automaticamente!

Tendo em conta a sua resposta, bem como o facto de Miguel não ter recorrido à contagem pelos dedos, à recta da sala, nem a qualquer outro suporte, torna-se evidente que o cálculo 14+5 constitui-se como um facto numérico para o aluno.

"Idade do Dinis" – 4 Fevereiro de 2010

Após ter lido o enunciado, Miguel diz de imediato que tinha de resolver o cálculo "6+9". O aluno disse 6+9 em vez de 7+9 porque o Dinis, colega da turma, tinha feito os 7 anos no dia anterior.

Miguel – Fácil, 6 mais 9 é fácil de fazer…

É importante referir que, tal como no problema anterior, Miguel reconhece sem qualquer dificuldade, qual a operação que poderá efectuar para obter a solução do problema.

Através da gravação vídeo consegue perceber-se que Miguel começa por pegar, durante breves segundos, na régua que tinha em cima da mesa. Observou-a com atenção sem, no entanto, ser possível perceber como a estaria a utilizar para o ajudar no seu cálculo. De seguida, refere que já sabe o resultado:

Miguel – Eu já sei, é 15!

O aluno refere que o resultado é 15 porque calculou 6+9, ou 9+6. Pedi-lhe que me explicasse como sabia o resultado:

Miguel – Porque contei na cabeça.

(…)

Miguel – Contei saltinhos na cabeça. Pus, por exemplo a recta na cabeça e depois pensei… saltámos de 9 foi 15.

No momento compreendi que Miguel teria dado um salto de 9, mas podia estar a tentar explicar que saltou a partir de 9. Quando questionado sobre o modo como fez esses saltinhos, parece contradizer-se, dizendo depois que contou de 2 em 2, e parece perdido nas suas explicações. Na gravação vídeo vê-se que Miguel encolhe os ombros várias vezes, coloca a mão na cabeça, parecendo desanimado. Subitamente, com grande entusiasmo, recorda-se da cantiga "7 e 7 são 14…":

Professora – Deste logo um salto grande de 9 ou foste dando saltinhos?

Miguel – Um salto grande de 9.

Professora – Mas como é que sabias que ias até ao 15?

Miguel – Porque antes do problema eu fiz outra vez de… contei de 2 em 2…

(…)

Miguel – Não, primeiro eu li, li tudo. E depois, deixa ver para depois já saber para fazer uma maneira e contei de 2 em 2 e calhou-me até 15.

(…)

Miguel – Ah não, não é, é 16!

Professora – Como é que tu estás a pensar?

Miguel – Eu fui rápido, fui àquela canção "7 e 7 são catorze…" e depois com mais 1 é 15, mas 7 e 7 são 14, acrescento 1 e fica 7 e 8 é 15, e depois acrescento mais 1 que é, são 9… é 16.

No registo que tinha feito inicialmente no caderno, alterou o resultado (15) para 16 (figura 32). À semelhança do problema "*Gormitis*", o Miguel acabou por recorrer a um facto numérico do seu domínio, ajudado pela cantiga "7 e 7 são 14…".

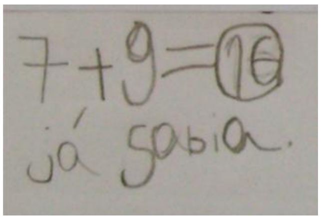


Figura 32. Resolução do problema "A idade do Dinis" – Miguel

"A mana das gémeas" – 5 Fevereiro de 2010

Miguel identifica de imediato como poderá resolver o problema:

Miguel – Que fácil, isto é fácil, não é? Este problema é muito fácil… É só contar…

Cátia – Para ti pode ser…

Miguel – É só contar 6 mais … mais qualquer coisa…

Cátia – 6 mais 20? Será? 6 mais quê?

Miguel – A irmã tem 20 anos, a Leonor e a Rita têm 6… 6 mais qualquer coisa dá 20. Por isso a irmã tem mais… [aproxima-se um colega] Este problema é facílimo.

O aluno refere "6 mais qualquer coisa dá 20", resolvendo através de uma adição este problema de subtracção com o significado de comparar.

Enquanto colam o enunciado do problema no caderno, antes ainda de uma colega o ler em voz alta, Miguel olha para a régua que estava na mesa, dizendo em voz alta:

> Miguel – Ah, é 6 mais 9! Não é… ah… [olha durante alguns segundos em frente, para a parede, pensando] 14!

Após a leitura do problema em voz alta, parece bastante impaciente quando tenta registar como pensou:

> Cátia – Como é que vamos fazer?
>
> Miguel – Espera, deixa-me pensar! [tapa os ouvidos]
>
> Cátia – Temos de pensar numa ideia!
>
> Miguel – Eu sei…

Na gravação vídeo não há evidências sobre o modo como o Miguel estaria a pensar. O aluno regista algo no seu caderno e apaga de seguida. Continua bastante impaciente e a sua colega chega também à conclusão que é 14:

> Cátia – É 14, é.
>
> Miguel – Espera, 6, depois…
>
> Cátia – Agora, como é que eu faço…
>
> Miguel – Ah, eu não consigo pensar bem… Não consigo registar.
>
> Cátia – Nem eu, eu não consigo arranjar…Isto é muito difícil…
>
> Miguel – Já sei.
>
> Cátia – (…) Qual é a tua maneira? Qual é a tua maneira Miguel?
>
> Miguel – Espera…
>
> (Após algum tempo)
>
> Cátia – Diz qual é a tua maneira! [impaciente]
>
> Miguel – Espera!

Miguel pede a minha ajuda e, quando me aproximei, explicou a sua estratégia. No momento em que me explicou, não consegui perceber com clareza qual era o seu raciocínio, no entanto, ao analisar a gravação áudio, é possível perceber a estratégia do aluno, embora este a explique de modo um pouco confuso.

> Miguel – É que eu já pensei uma coisa e depois não dá… Eu pensei assim na cabeça, mas eu não consigo bem registar. É que eu pensei na cabeça assim, este 6 e depois pus logo 10, e 10 mais 10 é vinte, mas como elas têm 6, eu pus esses 10 que ela tem dos 20, e depois pus… mais 4 que ela tem porque é 6, e 6

como tem os 4, porque 6 mais 4 é 10, é estes 4, e depois 4… e como… e depois… como… eu agarrei nos 10, mais 10… nos 20, e depois nos 20 mais 4, 24… ai, eu não sei explicar!

Miguel explicou-me o seu raciocínio sem recorrer a nenhum suporte, pelo que sugeri que uma recta seria útil para registar o seu raciocínio. O aluno decidiu ir buscar a sua régua, mas não sabe como poderá utilizá-la.

Para ajudá-lo, pedi que me explicasse, passo a passo, como tinha pensado. Assim, à medida que fomos conversando, o Miguel foi assinalando os saltos na sua régua, a lápis de carvão.

Professora – Vê lá… Tu começaste por pensar o quê? Em vez de ser 6…
Miguel – Não, eu esqueci estes aqui…
Professora – Começaste aí do 10…
Miguel – Sim, nestes dois… Esqueci estes 4… Estes 6, 7, 8 e o 9…
Professora – Começaste no 10…
Miguel – E depois fiz um salto enorme...
Professora – Então vá, desenha mesmo aqui… Deste um salto enorme…
Miguel – Até ao 20… E depois… aqui já tenho 10.
Professora – Sim…
Miguel – 10 coisas… com mais estes 4… 10 mais 4 é 14!
Professora – Ah, agora percebi muito bem! Mostraste muito bem o teu raciocínio. E não consegues pôr isto que fizeste aqui? [no caderno] É precisamente o que tu fizeste, desenhar a recta. [Miguel começou a apagar o que fez na recta.]
Professora – Deixa estar, não apagues.

De seguida, fez o seguinte registo no seu caderno:

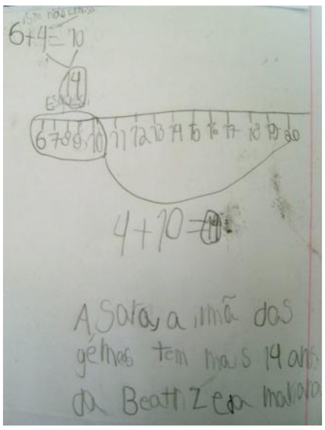


Figura 33. Resolução do problema “A mana das gémeas” – Miguel

No momento de discussão do problema, ao explicar como tinha pensado, o Miguel disse aos colegas que não tinha feito pela recta.

> Miguel – Eu primeiro, eu pensei… não pensei uma recta. Eu pensei assim… esqueci o 6, o 7, o 8, o 9 e o 10. E depois do 10, dei um salto enorme até ao 20.
>
> (…)
>
> Miguel – E depois eu guardei… não esqueci, eu guardei. E depois como neste salto grande já tinha 10, depois com mais estes 4, eu sei que 10 mais 4 é 14. E quando acabei, eu sei que o nome da irmã delas é Sandra e depois disse "A Sandra a irmã das gémeas tem mais 14 anos da Rita e da Leonor".

Uma vez que Miguel refere que não utilizou a recta, terá esta sido apenas o suporte para o registo da sua estratégia? Pelos dados disponíveis, Miguel parece ter resolvido o problema sem recorrer à recta, tendo esta sido utilizada como suporte para o registo da sua estratégia.

Neste problema, ao contrário dos anteriores, Miguel sentiu a necessidade de registar a sua estratégia. Miguel recorre a factos numéricos do seu domínio: se 10+10=20, então a 6 (diferença de 10-4), terá que ser adicionado 14.

"Uma ida ao teatro" – 8 Fevereiro de 2010

Após ter lido o problema, Miguel refere que é "muito fácil" e parece identificar a operação de subtracção presente no problema:

> Miguel – Então quer dizer que é 15 menos…

No entanto, Miguel procura confirmar com a sua colega se a sua ideia está correcta:

> Miguel – Mas é 15 menos 7?
>
> Madalena – Não. É 15 menos 7 e o que é que sobra.

O aluno permanece com dúvidas e coloca o dedo no ar. Contudo, a sua colega começa a resolver o problema, referindo:

> Madalena – Ah, já sei um truque! É assim… se fosse…
>
> Miguel – Deixa-me pensar.

Ao aproximar-me, Miguel coloca a sua questão:

Miguel – Eu estava a pensar… mas não sei se o problema é assim. Mas o problema é 15 menos 7?

Professora – Não sei...

Miguel – Eu acho que é. Mas não sei bem…

Professora – Porque é que não tens a certeza?

Miguel – Se fosse assim, eu punha… se 7… eu pus… 15 mais 7 é 22. Quer dizer que 15 menos 7 é 8.

Professora – Como é que sabes que é 8?

Miguel – Porque daquela maneira era o 7, tem um 5 lá dentro, e depois é mais 2. Eu esqueci os 2 e pus 15 menos 5, é 10. E depois 10 menos 2 eu sei que é 8.

Professora – Ah, então agora tens que arranjar uma maneira de registar isso. Com as frases matemáticas ou como quiseres.

Na sala, chamamos “frases matemáticas” aos cálculos horizontais.

Naquele momento, não perguntei ao Miguel porque calculou 15+7=22, pelo que lhe pedi para explicar no momento de discussão do problema:

Miguel – Eu pus 15 mais 7, eu sei que é 22 e depois pus…

Professora – Mas porque é que quiseste fazer 15 mais 7?

Miguel – Porque assim tinha a certeza que 15 mais 7 é 22. Que… Como no 20 é, temos que acrescentar mais 2 para ser 22. E aqui, o número… que devia ser, por acaso era 8. É 10 menos 2 é 8. Por isso tinha que fazer isso.

Parece-me que Miguel calculou primeiro 15+7=22, por ser mais fácil utilizar para a adição a estratégia que ele tinha pensado em usar para a subtracção. Ou seja, Miguel pensou no 7 enquanto um 5 e um 2, creio que ao pensar na adição, seria mais simples pensar em 15+5=20 e 20+2=22, o que lhe terá permitido verificar que se a sua maneira de pensar no 7 estaria correcta para a adição, poderia fazê-lo também para a subtracção: 15-5=10 e 10-2=8 (figura 34).

Apesar de inicialmente inseguro, Miguel reconhece que este problema, com o significado de retirar, pode ser resolvido através de uma subtracção, utilizando uma estratégia de saltos através do 10 na sua resolução.

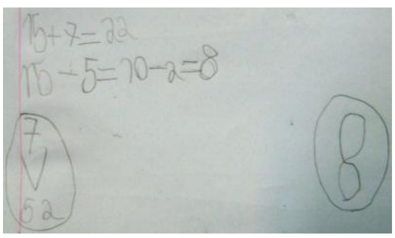


Figura 34. Resolução do problema “Uma ida ao teatro” – Miguel

“A lista de palavras do Vasco” – 10 Fevereiro de 2010

Miguel começa a resolver o problema sozinho, sem o discutir com a sua colega naquele dia, Madalena. Decide resolvê-lo sozinho porque tenta seguir a estratégia de saltos através do 10, utilizada no problema anterior. Após alguma insistência da colega, Miguel procura explicar-lhe a sua estratégia:

> Miguel – É que eu estou a fazer a mesma maneira que fiz no outro dia.
>
> (…)
>
> Miguel – Madalena, eu tenho 13… eu sei o cálculo que é 13 mais 16. Agora no 16 eu dividi este em 6 e …
>
> Madalena – E em 10…
>
> Miguel – E ao 10 dividi-o: numa parte 1 e noutra 9. E agora 13, vamos pôr 13 mais 6 é 16 porque…
>
> Madalena – 13 mais 6 como é que… 13 mais 6 é 16?
>
> Miguel – É 13 mais 6… 3 mais 6 é 9… [vai registando no seu caderno]
>
> Madalena – Então tem que ser 19!
>
> Miguel – Por isso mais… 13 mais 6 igual a 19. Espera… Depois vou tirar do 10, dividi em um e um nove. Depois mais 1 igual a 20, agora…

O aluno continua a registar no seu caderno os cálculos que vai resolvendo em voz alta (figura 35), contudo, a sua colega permanece com dificuldade em compreender o raciocínio de Miguel.

É notório o esforço que faz para que Madalena compreenda a sua estratégia, mas a colega continua com dificuldade em perceber e opta por resolver o problema recorrendo à linha numérica.

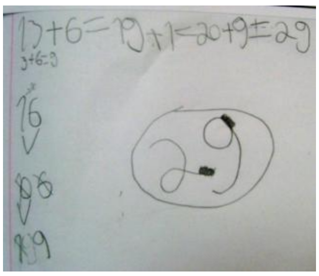


Figura 35. Resolução do problema “A lista de palavras do Vasco” – Miguel

Miguel consegue, de modo bastante claro, registar a sua estratégia do tipo A10: primeiro decompõe 16 em 10+6, e calcula primeiro 13+6 recorrendo a um facto numérico já do seu conhecimento (3+6=9), concluindo que então 13+6=19:

Miguel – Eu sabia que 3 mais 6 era 9, então também tinha que ser 13 mais 6 igual a 19.

Depois, como não consegue juntar de imediato 10, possivelmente por se tratar de uma adição a partir de um número que não é múltiplo de 10, decompõe o 10 em 9+1, adicionando o 1 para alcançar o 20, e depois junta o 9, resultando 29.

Quando tornou a explicar a sua estratégia à colega, refere que aproxima ao 20, para ser mais fácil:

Madalena – É que… eu não percebo. Há uma parte que eu não percebo a maneira dele. Que é aqui, isto deu 19…
Miguel [interrompendo a colega] – Espera! Deixa-me explicar. Primeiro está no 13… E depois eu pus… eu primeiro pus o 16 e dividi-o em 10 e em 6, aqui está escondido um 10. E depois este 10 também dividi-o [*sic*] e depois… espere, esqueça isso [dirigindo-se a mim]. E depois pus 13 mais 6…pus 3 mais 6 é 9, e depois 13 mais 6 tem que ser 19. E depois mais 1, que é este, que eu dividi.
Madalena – Ah!
Miguel – Para ser mais fácil, para ser 20. E depois mais com estes 9 que faltavam eram 29.
(…)
Miguel – Para ser 20. E depois como 20 é muito fácil depois de fazer qualquer uma… eu depois vi que era 29!

O aluno torna a referir como a aproximação a um múltiplo de 10, o 20, é importante para facilitar o cálculo.

Miguel recorre à estratégia utilizada no problema anterior, de saltos através do 10, adaptando-a, pois neste problema tem como referência um múltiplo de 10.

"As leituras da Marta" – 25 Fevereiro de 2010

De novo, foi com grande rapidez que Miguel identificou como poderia resolver o problema:

Miguel – O problema é 16 mais qualquer coisa igual a 28.

O aluno identifica que terá de acrescentar algo a 16 para conseguir atingir o 28, o que reflecte o contexto deste problema de subtracção, com o significado de completar (16+?=28).

Consegue também relacionar este problema com os outros já aplicados no estudo, identificando uma diferença significativa:

> Miguel – Mas este problema é um bocado estranho… Porque nós temos é que adivinhar o resultado não temos de… Porque este coiso [*sic*] é 16 mais qualquer coisa igual a 28. E nós costumamos fazer 16 mais… 20 ou qualquer coisa assim, e depois é que nós temos de adivinhar o resultado…

Antes do enunciado do problema ser lido por um colega à turma, Miguel observou com atenção a cartolina que estava afixada na parede à sua frente e começou a apontar com o dedo, parecendo estar a realizar uma contagem.

Esta cartolina foi o resultado de um trabalho de exploração de regularidades numa contagem de 2 em 2, iniciada em 0, realizada anteriormente pela turma. Foi afixada na parede, com as descobertas realizadas pelos alunos, sendo por vezes utilizada por eles em situações de cálculo mental ou na resolução de problemas.

Após o problema ter sido lido, a Matilde, par do Miguel, parece revelar alguma dificuldade na resolução. Miguel, explica-lhe logo de seguida como conseguiu resolver o problema, começando a registar o seu raciocínio.

> Miguel – Eu fui à contagem de 2 em 2 e vi que o 16 está ali no 2 em 2 e o 28 também está no 2 em 2. Por isso aqui o 16 é… 2, 4, 6, 8, 10, 12. Até ao 28 vai ser 12. Mais… [Miguel aponta para a cartolina e Matilde tenta acompanhar o que o colega vai dizendo.]
>
> Matilde – Então o que é que nós vamos fazer? Como é que vamos pôr?
>
> Miguel – Fomos… [começa a escrever no seu caderno]

Após Matilde ter copiado o registo do Miguel, o aluno teve a iniciativa de verificar a sua estratégia.

> Miguel – Olha, eu vou confirmar. Já sei de uma maneira ainda mais rápida!
>
> Matilde – Nós podemos fazer de duas maneiras…
>
> Miguel – Porque se fosse 6 mais…
>
> Matilde – Eu também posso?
>
> Miguel – Se quiseres. 28… Depois era… Ai, não, não. [Apaga.]

Miguel regista 6+12=28 pois, e apesar do cálculo estar incorrecto, o que o aluno pretende mostrar com este registo é que se 6+2=8, então 16+12=28, ou seja, recorre a um facto numérico do seu domínio (6+2=8) que utiliza para concluir que 16+12=28. Por isso, o aluno escreve o algarismo "1" de 12 de tamanho inferior ao 2. Ao copiar, e sem compreender o motivo desta diferença de tamanho, Matilde diz ao colega:

> Matilde – Ah, aqui é 12, já percebi. O 1 está muito pequenino.
>
> Miguel – Não, não é 12 não! O 1 está pequenino porque aqui é como se estivesse um 1 pequenino escondido, do 12.
>
> Matilde – Ah…

No momento da partilha das diferentes estratégias, Miguel acrescenta:

> Miguel – Pusemos 6 mais 2 e pusemos o 1 para significar o 1 do 12, igual a 8, então era 28.

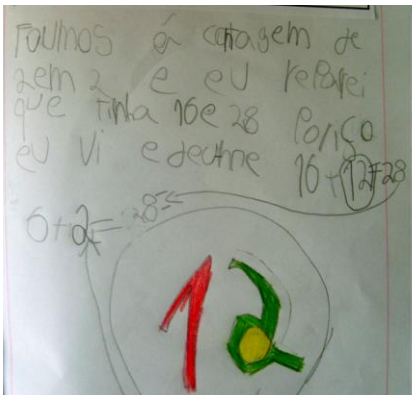


Figura 36. Resolução do problema "As leituras da Marta" – Miguel

"Chupa-chupas para todos!" – 3 Março de 2010

Miguel reconhece neste problema a mesma estrutura do problema anterior, "*As leitura da Marta*", ambos com o significado de completar.

> Miguel – Vês, é fácil. É só 18 mais qualquer coisa igual a 25.
>
> André – Já cá está 25… Não, mas nós temos que pensar numa estratégia.
>
> Miguel – Então… deixa cá ver… Deixa ver como eu pensei no da Marta. [Referindo-se ao problema "*As leituras da Marta*".] No da Marta foi exactamente isso. Como eu pensei… mas eu agora não me estou a lembrar como é que eu pensei… Acho que já sei! [Passados alguns instantes.] Deixa ver se eu encontro o problema da Marta. [Procura a resolução desse problema no caderno.] Problema da Marta… Fomos à contagem de 2 em 2… Então 18,

25… [Olha atentamente para a cartolina da contagem de 2 em 2, afixada na sala.]

De seguida, o problema é lido por um colega em voz alta e eu apenas repito que o Fernando irá oferecer um chupa-chupa a cada amigo e Miguel coloca uma dúvida:

Professora – O Fernando quer dar um chupa-chupa a cada amigo.

Miguel – Mas ao Fernando não?

Professora – Ele também vai ficar com um chupa-chupa para ele.

Miguel – Ah…

Anteriormente, Miguel observou com atenção para a cartolina das contagens de 2 em 2, tentando utilizar a mesma estratégia a que recorreu no problema anterior, pensando que se Fernando não ficasse com um chupa-chupa para ele, seriam necessários 24 chupa-chupas ao todo, número que estaria na cartolina afixada, bem como o número de chupa-chupas que o Fernando já teria (18). Quando André lhe pergunta como irão resolver, Miguel explica isso mesmo:

André –Vá, como é que fazemos Miguel?

(Aproximo-me do par.)

Miguel – Então, acho que era melhor… como é que se faz… é que eu da outra vez fui à contagem de 2 em 2. Mas como não tenho 25 é melhor não ir por esse caminho… Acha que uma tabela ajuda?

Professora – Não sei, o que é que achas? O que ias pôr na tabela?

Miguel – Ah não, não dá muita ajuda…

Afastei-me do par, para que os alunos discutissem como iriam resolver o problema. Miguel sugere o recurso à linha numérica, no entanto, André não está de acordo, dizendo que a utilização da linha numérica é muito demorada. De seguida, Miguel interrompe o colega e partilha a sua estratégia.

André – Vá, diz lá uma maneira…

Miguel – Acho que vamos à recta…

André – Ó Miguel… Demora, olha, os saltinhos… Vamos fazer por contas, assim…

Miguel calcula 18+?=25, saltando através do 20, isto é, primeiro calcula o que é necessário juntar ao 18 para chegar ao 20, para depois, como o próprio aluno diz, ser mais fácil para ver quanto faltaria até chegar ao 25 (18+2=20 e 20+5=25, então 5+2=7).

À medida que Miguel faz o registo da sua estratégia no caderno (figura 37), André vai copiando para o seu. Quando termina, parece não compreender o raciocínio de Miguel.

> André – Mas afinal, qual é que é a nossa maneira?
>
> Miguel – Então, ele tinha 18 não era? É este 18, com mais 2 é 20, para ser mais fácil. Com mais 5…
>
> André – E de onde é que tiraste o 20? Apareceu-te de repente?
>
> Miguel – Não, porque 18 mais 2 é 20.
>
> André – Ah…
>
> Miguel – Depois com mais 5…
>
> André – É 25…
>
> Miguel – É 25, que é a nossa turma. Estes…
>
> André – Quais estes? Disseste "estes", quais?
>
> Miguel – Depois o 5…
>
> André – Com o 2 e o 5 o que é que acontece?
>
> Miguel – Este 5 é o do 25, e este 2 é este 2. É melhor eu explicar-te que não estás a perceber muito bem.

Miguel torna a explicar a sua estratégia ao colega, mas esta acaba por não conseguir compreender, por isso Miguel regista no seu caderno que o cálculo 18+7=25 era para ajudar André.

Miguel – Eu só vou escrever aqui "isto era para o André perceber".

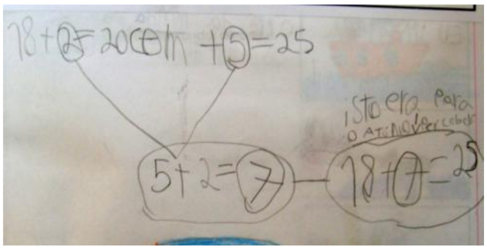


Figura 37. Resolução do problema "Chupa-chupas para todos" – Miguel

Miguel recorre mais uma vez a uma estratégia aditiva do tipo A10, pertencente à categoria das estratégias N10, utilizando como referência o número 20, à semelhança do que tinha feito na resolução do problema "*A lista de palavras do Vasco*".

Síntese

1.ª cadeia de problemas

Miguel recorre sempre a estratégias aditivas, excepto na resolução de um dos problemas (quadro 9). Em "*Uma ida ao teatro*", Miguel recorre a uma estratégia subtractiva, o que sugere que o significado da subtracção presente no problema possa ter influenciado a escolha de uma estratégia subtractiva, uma vez que este é o único problema desta cadeia onde a subtracção tem o significado de retirar.

Quadro 9 – Estratégias utilizadas por Miguel na resolução dos problemas da primeira cadeia

<table>
<tr><th></th><th>Significado da operação</th><th>Problema</th><th>Estratégia de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Adição</td><td>Combinar</td><td>"Gormitis"</td><td>Utilização de factos numéricos de adição</td></tr>
<tr><td>Acrescentar</td><td>"Idade do Dinis"</td><td>Cálculo com base em factos numéricos de adição</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subtracç ão</td><td>Comparar</td><td>"A mana das gémeas"</td><td>Utilização de factos numéricos de adição, com registo na linha numérica</td></tr>
<tr><td>Retirar</td><td>"Uma ida ao teatro"</td><td>Estratégia subtractiva: saltos através do 10</td></tr>
<tr><td>Adição</td><td>Acrescentar</td><td>"A lista de palavras do Vasco"</td><td>Estratégia aditiva A10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subtracção</td><td rowspan="2">Completar</td><td>"As leituras da Marta"</td><td>Contagem de dois em dois (adição)</td></tr>
<tr><td>"Chupa-chupas para todos!"</td><td>Estratégia aditiva A10</td></tr>
</table>

O aluno resolve os três primeiros problemas, "*Gormitis*", "*Idade do Dinis*" e *"A mana das gémeas"* recorrendo a factos numéricos básicos, talvez devido à grandeza dos números envolvidos em cada um dos problemas, que parecem ser do seu domínio. Por isso, nos dois primeiros problemas, o aluno regista apenas o cálculo necessário para a sua resolução, no entanto, em *"A mana das gémeas"*, Miguel faz um registo que reflecte o modo como utilizou factos de adição do seu domínio para a resolução do problema, recorrendo à linha numérica como suporte (figura 33), que surge pela primeira vez. Este foi o único problema em que Miguel recorreu à linha numérica, será por isso interessante analisar se a ela voltará a recorrer na resolução dos problemas nas próximas cadeias.

No problema "*As leituras da Marta*", como referido na sua análise, Miguel identifica a diferença a nível da estrutura entre este e os outros problemas. De facto, foi o primeiro problema de subtracção com o significado de completar da cadeia. À excepção deste, nos últimos problemas da cadeia, o aluno parece preferir estratégias do tipo A10, pertencentes à categoria de estratégias do tipo N10.

Em *"Uma ida ao teatro"*, recorre a uma estratégia de saltos através do 10, estratégia que adapta a outros cálculos, de outros problemas, efectuando saltos tendo como referência um múltiplo de 10. A escolha deste tipo de estratégia poderá estar relacionada com a dificuldade sentida por Miguel na adição de 10, num único passo, a um número não múltiplo de 10. Esta dificuldade, identificada por Beishuizen (1993, 1998, 2009), é revelada por Miguel no problema *"A lista de palavras do Vasco"*, como referido aquando da sua análise.

Resolução dos problemas da 2.ª cadeia

"Tiro ao alvo" – 5 de Maio de 2010

Logo após a leitura do problema, Miguel começa a adicionar os pontos obtidos pela Ana, utilizando uma estratégia do tipo 1010. O aluno não regista nada no seu caderno, mas vai calculando em voz alta:

> Miguel – Acho que ganhou… o Pedro… Acho que empataram… deixa ver, 30 mais coiso [*sic*], 40. 5 mais 2…

O seu par, naquele dia, Guilherme, ficou a observá-lo, até que me aproximei e o colega precipitou-se para me dizer que pensava que era o Pedro quem tinha ganho o jogo do tiro ao alvo.

Ao perguntar como sabiam, foi o Miguel quem explicou, evidenciando mais uma vez a utilização da estratégia 1010, que acabou por ser designada na turma como "a maneira da Cátia".

> Miguel – Porque está mais perto e são números… Ah, ganhou, ganhou! 30 mais este 10 é 40, e 5 mais 2 é 7, é 47. E este 20 mais 20 é 40, 9 mais 7… 9 mais 7 é 16, então…
>
> Guilherme – Estás a fazer da maneira da Cátia!
>
> Miguel – Então é 46…

Para calcular 9+7, Miguel decompõe o 7 de modo a juntar ao 9 uma parte do 7, obtendo 10, de modo a facilitar o cálculo.

> Professora – Como é que tu sabes que 9 mais 7 é 16?
>
> Miguel – Porque do 7 eu posso dividir num 1 e num 6, mais 1 é 10, só me faltam mais 6, é 16.

Ao calcular 29+27, após juntar cada ordem em separado, não adiciona de imediato 40+16. Volta a dividir o 16 em 10+6, para juntar 10 a 40, obtendo 50, adicionando depois o 6 que faltava, resultando 56. O que tenta explicar ao colega:

> Miguel – Tens que pôr a maneira que sabeste [*sic*]! 9 mais 1, para dividir o 7… em 1 e em 6. 9 mais 1, que já gastei este 1, é 10. Mais 6, é 16. Isso é fácil. 16… então o 4 é 40, mas este 1 é 10. 40 mais 10, 50. E 50 mais 6, 56!

O aluno parece demonstrar uma grande compreensão dos números, que consegue decompor facilmente, do modo que considera mais conveniente, sem perder a noção do valor relativo de cada algarismo.

Miguel recorre assim a uma estratégia aditiva 1010, estratégia que utiliza pela primeira vez nos problemas das cadeias deste estudo, revelando bastante agilidade ao decompor e adicionar números.

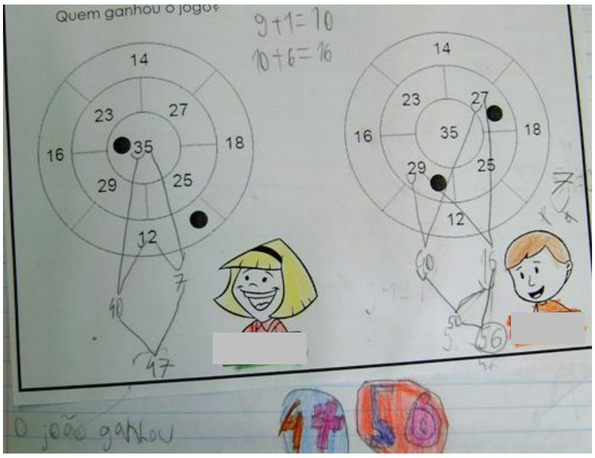


Figura 38. Resolução do problema “Tiro ao alvo” – Miguel

“Os pontos do Daniel” – 7 de Maio de 2010

Miguel e o seu par naquele dia, Cátia, identificam sem dificuldade como poderão resolver o problema:

> Cátia e Miguel – 32 mais qualquer coisa igual a 55.

Miguel sugere que utilizem a estratégia do tipo 1010, no entanto a colega refere que será melhor recorrer a uma estratégia do tipo A10.

> Miguel – Então eu vou fazer da tua maneira…
>
> Cátia – Espera, espera! Primeiro fazemos de outra. Eu acho que a minha… É assim, a minha…
>
> Miguel – Vamos fazer a recta!
>
> Cátia – É mais qualquer coisa… A minha não dá para ser primeiro. Só dá para confirmar.
>
> Miguel – Então… é melhor ser a recta.

Miguel começa por registar os números 32, 50 e 55 na linha numérica. Tenta primeiro calcular o salto de adição entre 32 e 50, que julga ser 28. Procura a confirmação da sua colega, mas como Miguel não está a efectuar os mesmos cálculos que Cátia, este pede-lhe para corrigir.

> Miguel – 32… Então para o 50. 55…
>
> (…)

Miguel – Daqui [32] para o 50. Do 32 para o 50 eu acho que sei que é mais 28. É mais 28? Sim é. Han? Eu dei logo um salto grande do 32 para o 50.

Cátia – Mas não é esse salto!

Miguel apagou o que tinha registado e traça as marcas dos números entre 32 e 50 na linha numérica.

Miguel – Ah, pois! Espera lá. Ai sou tão tolo! Vá, então 32… 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40. Agora do 40 mais 8… 40… 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

(…)

Miguel – Mais 10… 51, 52, 53, 54, 55, 56… Ah, não, 55! Agora mais… 5. Então, agora… isto é 15, 15 mais 8 é 22! 15 mais 8… não, 23!

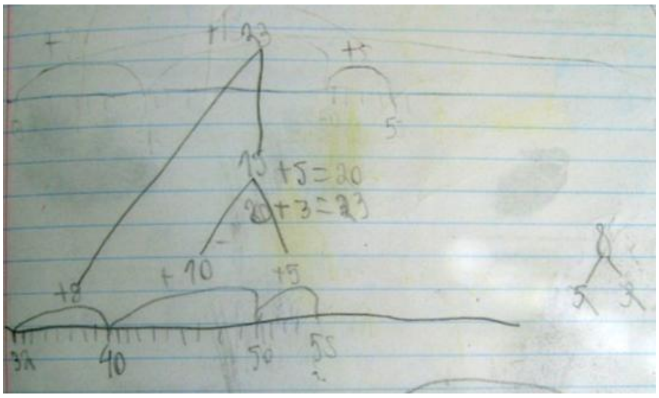


Figura 39. Resolução do problema "Os pontos do Daniel" – Miguel

Como se pode ver no trabalho do aluno, para calcular 15+8, decompôs o 8 em 5+3, calculando primeiro 15+5=20, obtendo um número de referência, a que o aluno chama de "número redondinho", juntando depois 3, 20+2=23. Tal como me explicou quando me aproximei do par:

Miguel – Então 32 mais… temos que chegar ao 55. Do 32 mais 8... já sabemos que é 40. 40 mais 10 já sabemos que é 50. Mais 5, 55. Era o que tínhamos de chegar. Então depois fizemos 10 mais 5, 15. E para saber eu dividi este 8 em 5 e em 3. 15 mais 5 é 20, para ser número redondinho, já gastei este 5. 20 mais 3, 23.

Após ter obtido o resultado, Miguel torna a contar todos os tracinhos e saltos registados na linha numérica, para verificar a correcção dos seus cálculos. Quando terminou, recorreu à estratégia aditiva do tipo 1010, para calcular 32+23.

Miguel – Já sei que é 23! Já está, agora para confirmar se é 23… Vou confirmar tudo, vou fazer tudo de novo.

(…)

Miguel – Vá, agora para confirmar vamos lá.

Cátia – Eu já confirmei.

Miguel – Então o 32 mais 23… vamos ver se é igual a 55. Não sabemos. 30 mais 20, 50. 5… mais… [continua a calcular em silêncio]

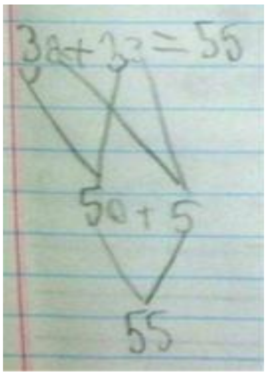


Figura 40. Estratégia para verificação do resultado do problema “Os pontos do Daniel” – Miguel

No momento de discussão, Miguel explicou à turma os cálculos realizados para a confirmação do resultado, através da estratégia do tipo 1010:

Miguel – Depois para confirmar foi a mesma [estratégia] da Cátia. Fizemos 32 mais 23 igual a 55. Nós já sabíamos, era só para confirmar. O 3 do 32 mais o 2 do 23 era 50. O 2 do 32 e o 3 do 23 era 5. E 50 mais 5, 55.

“A festa da Cláudia” – 12 de Maio de 2010

Miguel volta a recorrer à estratégia 1010, como fez no primeiro problema desta cadeia, e calcula rapidamente e sem qualquer registo, 27+35.

Miguel – Ah, isto é fácil… Vou fazer da maneira da Cátia.

Madalena – Vou fazer da maneira da Cátia…

Miguel – Eu já sei qual é o resultado.

Madalena – Já?

Miguel – Já fiz, sei. Eu fiz muito rápido, fiz da maneira da Cátia, já acabei. Mas não te vou dizer.

Madalena – Sim, claro. Mas tens que fazer no caderno.

Miguel faz o registo do seu raciocínio no caderno (figura 41). A sua colega Madalena, que também utilizou a estratégia 1010, não registou 50+12 como 50+10=60 e 60+2=62, como fez Miguel.

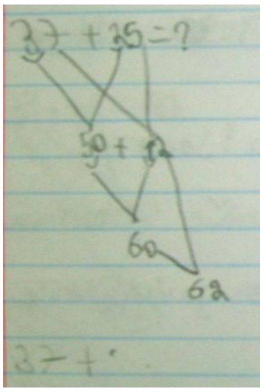


Figura 41. Resolução do problema "A festa da Cláudia" – Miguel

Quando me aproximei, Miguel disse-me que Madalena tinha calculado de modo diferente, considerando a maneira que ele tinha seguido como mais simples.

> Miguel – Ela fez diferente, eu é que fiz daquela mais simples.
>
> Professora – E ela como é que fez? Ah, e tu não sabias aqui que 50 mais 12 era 62.
>
> Miguel – Posso confirmar?
>
> Professora – Podes, podes.
>
> Madalena – Eu já sabia que 50 mais 10 era 60, mais 2 era 62.

Pela primeira vez, Miguel sente a necessidade, ou a vontade, de verificar o seu resultado. Talvez devido ao facto de, no problema anterior, o ter feito com Cátia, que geralmente verifica os seus resultados.

No entanto, a sua colega Madalena fica um pouco aborrecida por Miguel não lhe explicar como iria confirmar e este acaba por desistir da verificação do resultado.

> Madalena – Mas tens que me explicar primeiro qual é que é a maneira.
>
> Miguel – Mas tu tens de confirmar…
>
> Madalena – Ó Miguel… porque é que tu não me… tu és sempre assim, fazes primeiro da tua maneira e depois é que fazes com o grupo.
>
> Miguel – Está bem… Pronto, eu não vou confirmar, esquece.
>
> Madalena – Eu acho que está bem a maneira, eu acho que tenho a certeza.
>
> Miguel – Eu também tenho.
>
> Madalena – Por isso acho melhor não confirmar.
>
> Miguel – Pois…

No seu registo nota-se que apagou “37+”, pelo que não se consegue compreender se o aluno de facto teria uma estratégia diferente para confirmar o resultado, ou se iria tornar a resolver o cálculo do mesmo modo.

No momento de discussão do problema, Miguel explicou à turma como ele e a colega o resolveram, onde, mais uma vez, o aluno revela bastante flexibilidade com os números.

> Miguel – Fizemos a maneira da Cátia. Ela fez um bocadinho diferente, mas eu fiz da maneira mais fácil. Eu fiz 37 mais 25 igual a ponto de interrogação. O 3 do 37 é um 30, mais 20 é 50. O 7 mais 5 eu sei que é 12 e pus aqui um mais.
>
> Professora – Cada um deles tem uma maneira de calcular 7+5 diferente. E é muito mais rápida do que ir pelos dedos.
>
> Miguel – Eu pensei no 7… eu dividi na cabeça, eu pus em 5 e 2. Mais 5 é 10 e mais 2 é 12.
>
> Professora – A Madalena já pensou de outra maneira.
>
> Madalena – Eu já sabia que o 7 mais 3 era 10 e só faltava 2 que era 12.
>
> Professora – Vamos continuar a vossa maneira.
>
> Miguel – Deste 10 mais 50 é 60, mais o 2 é 62.

“Viagem de autocarro” – 17 de Maio de 2010

Embora inicialmente Miguel não tenha compreendido o problema, assim que este foi lido em voz alta, o aluno identifica a operação que poderá efectuar para resolvê-lo (49-26).

> Miguel – Ah… é 49 menos 26…
>
> Guilherme – É, é 49 menos 26. Fazemos a maneira da Cátia?
>
> Miguel – Sim, então vá…

Os alunos utilizam uma estratégia subtractiva do tipo 1010, pela primeira vez nesta cadeia de problemas. Porém, após ter calculado as diferenças parciais, Miguel hesita quanto à operação a realizar, ou seja, não sabia se devia adicionar (20+3) ou subtrair (20-3). Rapidamente, o seu par neste problema, tenta ajudá-lo:

> Miguel – Ó Cristina, mas eu não estou a perceber muito bem… eu acho que aqui é menos ou é mais?
>
> Guilherme – Aí é mais! É mais… sabes porquê? Só é menos, por exemplo, se fosse… 4 menos… 5, quanto é que era?

Miguel – Era menos 1…

Guilherme – Era menos 1, então se era menos 1, tinha que ser menos. Aí tem que ser mais.

Miguel – Então é… é 18.

Guilherme – 23!

Miguel – 23, pois é!

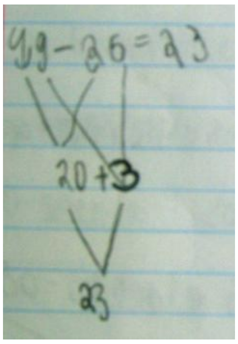


Figura 42. Resolução do problema "Viagem de autocarro" – Miguel

Embora o colega tivesse ajudado Miguel a perceber que deveria adicionar as diferenças parciais e não subtrair, fica a dúvida se este par terá compreendido de facto o motivo de, neste caso, se efectuar uma adição.

"Pai e filho" – 19 de Maio de 2010

Miguel decide resolver o problema recorrendo à linha numérica, dizendo que a maneira da Cátia (estratégia 1010) "não ajuda muito…":

Miguel – Ah… vamos fazer na recta. Acho que este problema fica bem na recta…

André – Não…

Miguel – A maneira da Cátia também não ajuda muito… na recta é melhor.

Cátia, que estava próxima do par, ouviu e acenou ao Miguel, gesto que lhe deu maior confiança para resolver através da linha numérica, como tinha pensado.

Miguel – Eu vou fazer na recta. A Cátia também vai fazer na recta. (…) Eu já sei como hei-de fazer.

A estrutura deste problema de subtracção, com o significado de completar, poderá ter influenciado a decisão de Miguel. Na estratégia 1010, o cálculo a efectuar seria 42-14, o que, de certo modo, não parece reflectir o contexto do problema. Talvez por este motivo, o aluno tenha afirmado que "a maneira da Cátia…não ajuda muito" e que “este problema fica bem na recta”, uma vez que a linha numérica parece traduzir os passos necessários para efectuar 14+?=42.

Miguel começou por traçar a linha numérica vazia no seu caderno e escreveu todos os números de que iria necessitar para os seus saltos, ou seja, 14, 20, 30, 40 e 42. O aluno provavelmente teria já calculado, sem a necessidade de qualquer registo, através dos saltos que depois iria registar na recta.

> Miguel – Eu vou fazer na recta. Aqui é o 14… aqui é o 20… Aqui é o 30… Aqui é o 30 e aqui é o 40… Agora, menos 2… aqui menos… menos 10…

Curiosamente, o aluno regista os números de modo crescente, isto é, de 14 até 42, mas ao registar os saltos, assinala saltos de subtracção, a partir de 42 (figura 43).

> Professora – Como é que tu estás a fazer?
>
> Miguel – Eu estou a fazer da recta. Eu sei que o Tomás, está ali a dizer que o Tomás que tem 14 anos, então é do 14 até ao 42 que é os anos do pai. Depois eu fiz a recta nos números redondinhos. E depois para ser mais fácil… eu fiz… eu fiz o menos 2 para dar um número redondinho, é 40. Depois para dar outro número redondinho é 30. Depois para dar outro número redondinho é 20. E depois menos 6, que eu sei que 4 mais 6 é 10. Então é como se fosse este… é 10, mas aqui é o 20. Menos 6 é 4. Então depois juntei e deu-me 28.

Miguel recorre com frequência a números de referência, a que chama de “números redondinhos”, utilizando-os de modo ágil nos seus cálculos.

Neste problema, recorre a uma estratégia pertencente à categoria N10, a estratégia A10. Miguel começa por registar por ordem crescente os números na linha numérica de 14 a 42 (14, 20, 30, 40 e 42), no entanto, para calcular a diferença entre 14 e 42 efectua saltos de subtracção. Ou seja, o aluno recorre a uma estratégia aditiva para marcar na recta o que falta do 14 até ao 42, quantificando esta diferença através de subtracções.

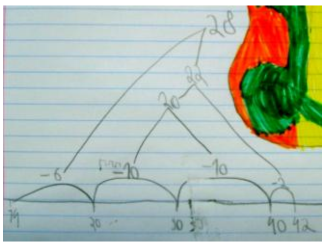


Figura 43. Resolução do problema “Pai e filho” – Miguel

Na resolução deste problema, Miguel recorre de novo à linha numérica, como fez na sua resolução anterior. Registou primeiro todos os valores na recta (48, 50, 60, 70 e 75), assinalando depois os saltos, que nesta resolução foram de adição.

De novo, Miguel identifica números de referência, utilizados como marcos na linha numérica, para os saltos de adição. No seu registo (figura 44), o aluno assinala um salto de 48 para o 60, no entanto, manteve a marca relativa ao número 50, explicando:

> Miguel – Porque mais 2, 50, mais 10, 60. Eu dei logo um salto de 12 porque 48 mais 2, 50. Mais 10, 60…

Por estar a trabalhar com Cátia, que sugere sempre a verificação do resultado, os alunos utilizam a estratégia aditiva 1010, para confirmar que 48+27=75.

> Cátia – Temos que provar que 27 mais 48 é 75.
>
> Miguel – Está bem.

Miguel resolve o cálculo com rapidez e demonstra grande compreensão das relações numéricas envolvidas:

> Miguel – 48 mais 27 igual a… Então, 40 mais 20… 60. 8… vou dividir o 8 em 1 e em 7… então…
>
> Cátia – Eu não estou a fazer assim.
>
> Miguel – Eu quero… então 7 mais 7 igual a 14… se fosse mais 8, igual a 15… 10 [de 15] mais 60 igual a 70. E 5 mais 70, 75. Está certo.

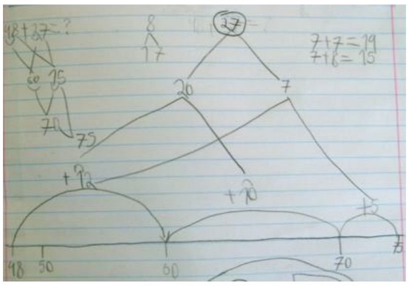


Figura 44. Resolução do problema "Saltos à corda" – Miguel

Tal como já foi referido na análise da resolução de Cátia deste problema, a aluna recorreu ao dobro de 8 para adicionar 8+7, e Miguel recorreu também a um dobro, mas de 7. Esta diferença foi identificada pelo aluno, que no momento de discussão do problema referiu "Eu juntei e ela tirou", referindo-se à compensação efectuada por cada aluno a partir do resultado do dobro de 8 ou do dobro de 7.

"Que azar!" – 31 de Maio de 2010

É com rapidez que Miguel reconhece a subtracção presente no problema:

> Miguel – Ah, é 82 menos 36.

Inicialmente, Miguel sugeriu que resolvessem o problema recorrendo à linha numérica, no entanto, Cátia insiste que utilizem a estratégia 1010. Ainda antes de começarem a resolver, o par decide que estratégias irão utilizar não só para resolver o problema mas também para verificarem o resultado:

> Cátia – Então vamos… 82 menos 36…
>
> Miguel – Eu acho que era melhor a recta.
>
> Cátia – Não… com a minha maneira e depois a recta.
>
> Miguel – Acho que… primeiro fazer com a tua maneira e depois vamos confirmar com aquela de pôr muitos números.
>
> Cátia – Não, com a recta.
>
> Miguel – Está bem, tu fazes a recta e eu não faço.

Quando Miguel diz que para a confirmação do resultado prefere utilizar a "de pôr muitos números", refere-se a uma estratégia do tipo A10 que um par da turma, não participante no estudo, costuma utilizar. Miguel identifica-a como sendo diferente, uma vez que os colegas não a utilizam com o suporte da linha numérica, como ele faz.

O par resolve a subtracção 82-36, em conjunto:

> Cátia – 80 menos 30.
>
> Miguel – Eu sei, porque 8 menos 3 é 5.
>
> Cátia – Ah!
>
> Miguel – 50…

O aluno calcula 80-30 recorrendo a um facto numérico da subtracção (8-3). De seguida, calculam 2-6. Esta subtracção, que se poderia julgar ser um obstáculo ou oferecer alguma dificuldade, é resolvida rapidamente pelo par:

> Cátia – 2 menos 6? 2 menos 6 é…
>
> Miguel – Menos 4.
>
> Cátia – Então é 50 menos 4!
>
> Miguel – Então 50 menos 4 igual a cinquenta… Ah não! 46!
>
> Cátia – É 46!

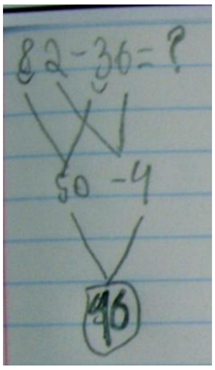


Figura 45. Resolução do problema "Que azar!" – Miguel

Quando me aproximei do par, pedi para que Miguel me tentasse explicar como sabia que 2-6=-4.

> Professora – Como é que tu sabes que 2 menos 6 é menos 4?
>
> Miguel – Porque sei. [risos]
>
> Professora – Como? Tenta lá explicar o teu raciocínio.
>
> Miguel – Porque… como… eu fiz assim… como 4 mais 2 é 6, quer dizer que isto é 4.

O aluno relaciona as duas operações, recorrendo a um facto numérico de adição para calcular a subtracção.

É importante referir que, na sala de aula, são várias as tarefas de contagem realizadas na turma, onde muitas vezes, em contagens decrescentes, se continua a contar os números menores que zero.

O par termina, verificando o resultado. Cátia recorre à linha numérica, como disse no início, e Miguel segue uma estratégia subtractiva do tipo A10, sem o suporte da linha numérica como habitualmente faz (figura 46).

> Miguel – Do 82… 22… eu vou pôr menos 22 que sei qual é o resultado. (…) Igual a 60… Já tirei 22… 60 menos 10… 50… Então já estão aqui… 32. Então tenho que… 50 menos… 4… igual a 46. E aqui está…

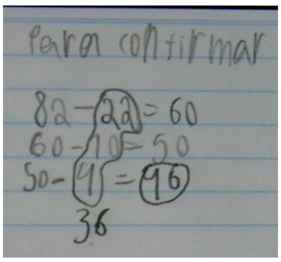


Figura 46. Estratégia para verificação do resultado
do problema "Que azar!" – Miguel

"A caderneta das Winx" – 2 de Junho de 2010

Miguel compreende sem qualquer dificuldade o enunciado deste problema, no entanto, para os restantes alunos da turma, este foi um dos problemas mais difíceis a nível da compreensão do enunciado.

> Miguel – Só faltam… Ah, vamos fazer o caminho ao contrário, 124 menos 47… na maneira da Cátia, boa?

O par, liderado por Miguel, começa a resolver utilizando a estratégia subtractiva 1010, no entanto, o facto de os dois valores da operação terem um número diferente de algarismos, oferece alguma dificuldade a Miguel.

> Miguel – 124 menos 47… igual a ponto de interrogação.
>
> (…)
>
> Miguel – Espera, vou esquecer este 100… Não… Eu não sei se esqueça ou não… Então… este 124, o 20 do… 124 menos 40 do 47… então 20 menos… Ui, isto é difícil.

Durante alguns momentos, Miguel fica pensativo, até que apaga o que tinha escrito, acabando por não conseguir calcular através da estratégia 1010. De seguida, traduz numa adição a situação do problema.

> Miguel – É que eu não sei como é que hei-de fazer… Já sei! Então é… [escreve no caderno ?+47=124]
>
> André – Ah, então já percebi! Então já sei… Pela recta?
>
> Miguel – É assim… qualquer coisa mais 47 é igual a todos os cromos! Qualquer coisa mais… 47, igual a 124. Então… 4 mais 2, do 24…
>
> André – Mas o 24 [124] é o resultado!

Miguel estava a calcular qual o resultado de 47+124, recorrendo de novo a uma estratégia 1010, mas desta vez aditiva, porém, rapidamente compreende que não poderá resolver o problema desse modo.

> Miguel – Sim, nós… espera aí… Já sei, vamos fazer na recta. Apaga.
>
> (…)
>
> Miguel – Vá lá cerebrozinho… Ah já sei, vamos fazer de menos, mas na recta. Não é preciso fazermos todos os risquinhos! 124…
>
> André – Ah, então não fazemos os risquinhos…
>
> (…)

Miguel – Agora temos de tirar 47… eu já tirei 24 menos… 100 menos 20… menos 20… é igual a 80. 100 menos 20 igual a 80. Então… aqui já tenho 20 e 20, 40. 44. Já tenho 44 só preciso de tirar menos… menos 3. Já sei quanto é… São 77.

O aluno resolve o problema utilizando uma estratégia subtractiva A10, com recurso à linha numérica (figura 47), onde os números de referência (múltiplos de 10) assumem de novo um importante papel na eficiência e rapidez dos cálculos.

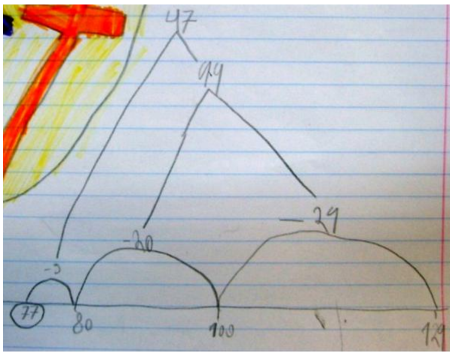


Figura 47. Resolução do problema “A caderneta das Winx” – Miguel

Síntese

2.ª cadeia de problemas

Um dos aspectos bastante relevantes da análise da resolução dos problemas desta cadeia é a utilização de estratégias do tipo 1010, a que Miguel não tinha recorrido na primeira cadeia. Uma vez que Cátia utilizou esta estratégia pela primeira vez, na primeira cadeia de problemas, é possível identificar-se a influência que a estratégia teve junto de Miguel.

Miguel recorreu a esta estratégia nos dois problemas de adição propostos, bem como em ambos os problemas de subtracção, com o significado de retirar. Também optou por esta estratégia para a resolução do problema de subtracção com o significado de completar, *"A caderneta das Winx"*, contudo, quando confrontado com a dificuldade em utilizar esta estratégia para a subtracção dos valores do problema, com diferente número de algarismos, decidiu recorrer a uma estratégia subtractiva do tipo A10.

Na resolução dos dois problemas de subtracção, com o significado de retirar, Miguel revelou alguma dificuldade na utilização da estratégia 1010, pois, após obtidas as diferenças parciais, tinha dúvida se estas seriam adicionadas ou subtraídas. Em *"Viagem de autocarro"* foi o seu par quem o ajudou a compreender como poderia utilizar esta estratégia para a subtracção.

Em *"Que azar"*, ao contrário do que refere a literatura, foi com facilidade que Miguel utilizou a estratégia do tipo 1010 na resolução de uma subtracção com empréstimo. O aluno calculou sem dificuldade 2-6, sem transformar o cálculo em 6-2, efectuando a correcta recomposição do resultado.

Apesar desta relativa facilidade na utilização da estratégia subtractiva do tipo 1010, é necessário analisar se voltará a recorrer a esta estratégia e como a utilizará de modo a concluir se, de facto, Miguel a utiliza com compreensão.

Nos restantes problemas de subtracção, com os significados de completar e comparar, o aluno recorreu a estratégias aditivas do tipo A10, com excepção do problema "*A caderneta das Winx*", onde utilizou uma estratégia do mesmo tipo, mas subtractiva. Relativamente à cadeia de problemas anterior, é possível identificar-se uma maior utilização da linha numérica enquanto suporte das estratégias do tipo A10.

Em *"Pai e filho"*, com o significado de comparar, Miguel parece utilizar a estratégia A10 primeiro de forma aditiva, quando marca a diferença entre a idade do filho e do pai, bem como os números de referência existentes entre eles, e depois de modo subtractivo quando calcula os saltos de subtracção entre a idade do pai e do filho.

Miguel selecciona esta estratégia para resolver o problema em detrimento de uma estratégia do tipo 1010, que reconhece não ser útil ao contexto do problema.

No último problema, o facto de os números envolvidos possuírem diferente número de algarismos, influenciou a selecção da estratégia a utilizar. Como foi referido na análise da resolução, Miguel começa por utilizar uma estratégia do tipo 1010 para calcular 124-47, contudo, perante a dificuldade em efectuar o cálculo com valores com diferente número de algarismos, decide, após algumas tentativas, utilizar uma estratégia do tipo A10. Será interessante analisar de que modo irá Miguel resolver os problemas da próxima cadeia cujos números apresentem as mesmas características.

Em resumo, e como se pode observar no quadro 10, nesta cadeia Miguel utilizou dois tipos de estratégias, 1010 e A10. Recorreu a estratégias aditivas 1010 em ambos os problemas de adição e nos problemas de subtracção com o significado de retirar utilizou estratégias subtractivas 1010. Nos restantes problemas de subtracção, com os significados de completar e comparar, recorreu a estratégias A10, com clara utilização de números de referência, a que Miguel e os restantes alunos da turma chamam de "números redondinhos", que conferem grande rapidez e eficiência aos seus cálculos.

Quadro 10 – Estratégias utilizadas por Miguel na resolução dos problemas da segunda cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Combinar	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Completar	"Os pontos do Daniel"	Estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010
Adição	Acrescentar	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Retirar	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010

(continua)

Quadro 10 (continuação)

Subtracção	Comparar	"Pai e filho"	Estratégia aditiva A10 para marcação da diferença entre 14 e 42 na linha numérica e estratégia subtractiva A10, para calcular a diferença entre estes números.
		"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10, recorrendo à linha numérica Verificação: estratégia aditiva 1010
	Retirar	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010 Verificação: estratégia subtractiva A10 (sem recurso à linha numérica)
	Completar	"A caderneta das Winx"	Estratégia subtractiva A10, com recurso à linha numérica

Resolução dos problemas da 3.ª cadeia (19 de Outubro de 2010)

"Cesto d'Ouro"

Miguel leu o enunciado e, quanto à estratégia de resolução, referiu que:

Miguel – Eu estou indeciso entre a maneira da Cátia ou contas…

"Por contas" Miguel refere-se a uma estratégia do tipo A10, sem o recurso à linha numérica.

Miguel começa por resolver o problema seguindo uma estratégia do tipo 1010. Após registar os números, perante o facto de um dos números possuir três algarismos (134) e outro dois algarismos (62) explica qual a sua dúvida:

Miguel – Estou a pensar agora se eu junto 100 ao 60 ou o 30 ao 60…

Professora – Achas que alguma dessas maneiras está errada?

Miguel – Não… Então começo pelo 100.

Miguel fez um registo, que depois apagou, como o que apresento de seguida:

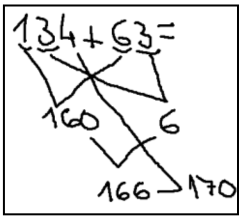


Figura 48. Resolução inicial do problema "Cesto d'Ouro" – Miguel

O aluno calcula 100+60=160. Depois, ao juntar 30+3, calcula 3+3=6, engano que reconheceu rapidamente:

Professora – Então fizeste 100 mais 60, 160. E depois como é que fizeste?

Miguel – 3 mais… Ah! Era 30!

Miguel apagou o que tinha feito e corrigiu:

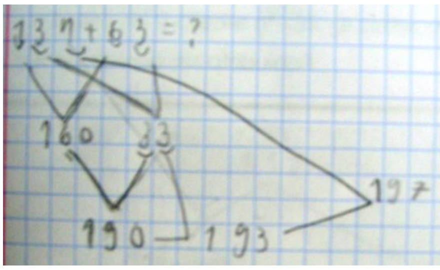


Figura 49. Resolução final do problema "Cesto d'Ouro" – Miguel

De seguida, explicou como calculou:

> Miguel – Primeiro fiz 100 mais, isto a Cristina já sabe. Depois pus 30 mais 3, 33. Depois como achei mais difícil, para arredondar, pus 160 mais 30 igual a 190, mais 3 igual a 193, e depois mais 4 é 197.

Miguel recorreu a uma estratégia 1010, que utilizou com facilidade. O facto de os números a adicionar possuírem um número diferente de algarismos, ofereceu alguma dificuldade inicial, contudo, Miguel reconheceu o seu erro que corrigiu rapidamente. Miguel começou por adicionar as maiores ordens de ambas as parcelas (100+60), de seguida adicionou as dezenas da primeira parcela com as unidades da segunda (30+3), e só no fim acrescentou as unidades da primeira parcela, o que demonstra mais uma vez que o aluno possui uma grande agilidade com os números, que decompõe e recompõe com facilidade.

“Parar ou Avançar”

Após ter lido o problema, Miguel começa por traçar a linha numérica, torna a reler o enunciado e diz “Tenho de juntar…”. De seguida, perguntei-lhe como estava a pensar resolver o problema:

> Miguel – Eu agora vou juntar o… mais 43.
>
> Professora – Então tu fizeste 43 pontos a mais, é isso?
>
> Miguel – Sim… A menos!
>
> Professora – Ah… Então fizeste mais ou menos pontos que a Cláudia?
>
> Miguel – Eu fiz menos, menos pontos.
>
> Professora – Pois, fizeste menos pontos do que a Cláudia. Então será que vais ter mais ou menos que 157 pontos?
>
> Miguel – Tenho que ter menos… Então tem que ser menos! Tenho que apagar. Já percebi.

Começa por registar que 157-40=107, contudo, corrige rapidamente:

> Professora – Como é que sabes que menos 40 é…
>
> Miguel – Ah não, é 117, porque senão era menos 50. Agora menos 3, este já é mais fácil. Menos 3… igual… (…) Já está… 115.

Miguel corrige o resultado de 157-40 reconhecendo que 107 seria se subtraísse 50, como queria subtrair 40 sabe que deve adicionar 10 a 107, obtendo 117.

Perguntei como tinha pensado no último salto (117-3) e Miguel identificou rapidamente o seu engano.

> Miguel – Porque 5 mais 3 é 7 e 7… Ah não! Eu estou sempre a enganar-me com o 3, do 7 penso que é 8, aqui penso que o 7 é… 5 mais 3, mas é mais 2!

Miguel apaga 115 e regista 114.

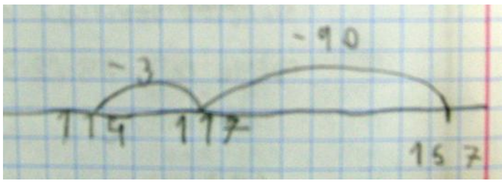


Figura 50. Resolução do problema "Parar ou Avançar" – Miguel

Miguel recorre a uma estratégia subtractiva do tipo N10, recorrendo à linha numérica. Apesar de cometer alguns erros, facilmente os identifica, sendo capaz de corrigi-los.

"Na escola do Mário"

Após ter lido o enunciado do problema, identificou que poderia resolvê-lo através da adição 129+175, que decide calcular utilizando a estratégia do tipo 1010.

> Miguel – Vou fazer da maneira da Cátia, também me dá jeito.

Após calcular 100+100=200, diz:

> Miguel – Agora já não me engano! 20 mais 70 vou pôr 70 mais 20. [regista o número 90]
>
> Professora – E como sabes que é 90?
>
> Miguel – Porque 7 mais 2 é 9.

Referindo-se aos erros cometidos na resolução do problema anterior, Miguel decide adicionar 20 ao 70, juntando o menor número ao maior, e para tal recorreu a um facto numérico do seu domínio: 7+2=9.

Tendo as somas parciais 200 e 90, decide adicioná-las para, como Miguel afirma, "não complicar".

Como resultado de 9+5, Miguel regista 11 e explica:

> Miguel – Porque 5 mais 5 do 9… Ah não, é 14.
>
> Professora – Continua a explicar como estavas a fazer.

Miguel – Porque 5 mais 5 do 9 era 10. Mas pensava que isto era 6, assim é que dava 11. Agora mais 10, duzentos… 300 certos. Mais 4, 304.

Novamente, Miguel revela bastante agilidade com os números, que decompõe com facilidade, de diferentes maneiras, de modo a tornar os cálculos que pretende efectuar mais simples.

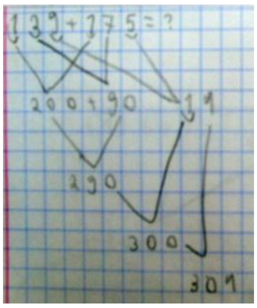


Figura 51. Resolução do problema “Na escola do Mário” – Miguel

“Uma sessão de cinema”

Quando terminou de ler o enunciado do problema, disse que conseguia resolvê-lo sem qualquer registo:

Miguel – Então… Este acho que consigo fazer logo pela minha cabeça…

Professora – Como?

Miguel – Então… Tem de ser cento e qualquer coisa… Mas não sei é como é que hei-de mostrar no papel.

Professora – Então vai dizendo oralmente como estás a pensar.

Miguel – Era 200 mais 100… não, tem de ser menos, não é?

Professora – Não sei.

Miguel começa por estimar que o resultado será “cento e qualquer coisa”, o que revela uma boa estimação do resultado. Volta a reler o enunciado e continua inseguro quanto à estratégia de resolução que irá seguir e procura no seu caderno a resolução de um problema, que não faz parte deste estudo, já resolvido na sala de aula.

Miguel – Ui não sei mesmo como é que… Só se eu for pela recta outra vez.

(…)

Miguel – Vou ver aqui [caderno] para ver se me ajuda. Sim, talvez…

De seguida, Miguel traça a linha numérica e explica os cálculos efectuados à medida que resolve o problema através de uma estratégia subtractiva N10 (figura 52):

Miguel – Ah já sei, vou fazer dos 257, menos 125, o que me der tem de ser o resultado. Menos 100… igual a 157. Menos 20… igual a cento… cento e trinta e sete. Só me falta tirar 5. Menos… Agora vou-me lembrar é 5 mais 2. Menos 5… igual a 132.

Professora – Como é que fizeste este salto 157 menos 20?

Miguel – Porque 5 menos 2, igual a 3. Agora ia, estava quase a fazer pelos dedos, mas lembrei-me na cabeça. Então era 5 menos 2, igual a 30. Por isso este [7] continuava e o 100 continuava só podia mudar o que estava no meio.

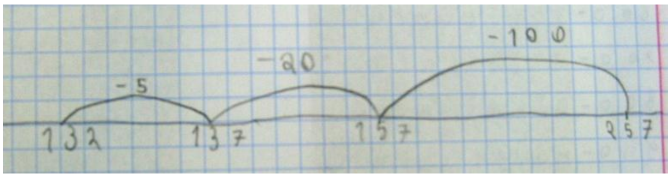


Figura 52. Resolução do problema "Uma sessão de cinema" – Miguel

"Concurso na livraria"

Miguel teve grande dificuldade em compreender o problema.

Miguel – Não percebi muito bem…

(…)

Professora – Quantos clientes é que ainda faltam entrar até o prémio ser dado a alguém. Porque só o cliente n.º 250 é que vai ter esse prémio.

Miguel – Se isto pelo menos dissesse quantos concorrentes é que concorriam.

Professora – O cliente n.º 250 ganha e eles vão entrando. A Leonor foi a cliente n.º 135. E agora quantos é que ainda faltam entrar até chegar até ao cliente que vai ter o prémio.

Miguel – Ah! É 135 mais qualquer coisa igual a 250!

Apesar de Miguel parecer ter identificado que podia calcular o que faltava adicionar a 135 para obter 250, não é o que começa a tentar resolver. Tenta calcular 250+135 e procuro ajudá-lo de novo a compreender o problema.

Miguel – Ah, então nesta vou fazer contas… 250 mais 30… igual a 280. 280 mais… Ai não, podia começar já pelo 100.

(…)

Professora – O 250 é o número do cliente que recebe o prémio e o 135 é o número da Leonor. Agora queremos saber quantos clientes faltam entrar até o prémio ser dado.

Miguel – Ah… então vou fazer pela recta.

Miguel apaga a sua resolução inicial, mas continua com dificuldade em compreender como poderá resolver o problema. O aluno relê o enunciado:

> Miguel – Ah! Do 135… agora vou juntar aos bocadinhos para me dar isto [250]. Então posso juntar já… para dar já 200, depois só me falta juntar 50. Eu é que não percebi bem, afinal é fácil.

Porém, Miguel calcula 135+50=185 e 185+100=285. Após discutirmos o enunciado, Miguel diz que não sabe como o pode resolver. O aluno permanece alguns instantes bastante pensativo, voltando a reler o enunciado, até que percebe os cálculos que poderá corrigir na sua recta de modo a obter o resultado.

> Miguel – Ah não… (…) Então vou juntando aos bocadinhos para me dar… [olha para o enunciado] Ah! Já percebi! Então posso juntar 100, que já me dá 200. Agora para me dar isto [250] tenho de juntar 25.
>
> Professora – Como sabes?
>
> Miguel – Porque 5 mais 5… Eu já sabia que tinha que dar qualquer coisa 5. 5 mais 5, isto 235 mais 5, igual a 240… Ah, é 15. (…) Agora vou juntar isto e é o resultado. 115.

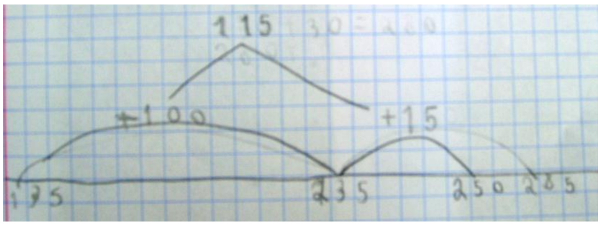


Figura 53. Resolução do problema "Concurso na livraria" – Miguel

Dos cinco problemas que constituem esta última cadeia, este foi aquele que Miguel teve maior dificuldade em compreender. Acabou por resolvê-lo utilizando uma estratégia do tipo A10, tendo como suporte a linha numérica.

Síntese

3.ª cadeia de problemas

Os problemas desta cadeia foram resolvidos por Miguel com bastante facilidade, à excepção do último, "*Concurso na livraria*", em que teve dificuldade em interpretar. Tal poderá dever-se à situação descrita no problema.

Miguel recorreu a estratégias aditivas do tipo 1010 para resolver ambos os problemas de adição. Na resolução inicial do problema *"Cesto d'Ouro"* (figura 48), Miguel comete um erro na adição das ordens, devido ao facto de os valores envolvidos neste problema terem diferente número de algarismos. No entanto, ao explicar-me o seu raciocínio consegue corrigir o seu erro, evidenciando uma compreensão dos números como um todo, e não como dígitos com os quais opera em separado. Neste problema, corrigiu o cálculo, sem dificuldade.

Este facto reflecte uma evolução relativamente à cadeia anterior. Nesta, apesar de Miguel ter seleccionado uma estratégia subtractiva do tipo 1010 para a resolução de um problema, acabou por alterar a sua estratégia devido à dificuldade em operar com valores com diferente número de algarismos.

Nos problemas de subtracção com os significados de comparar e retirar, Miguel utilizou estratégias subtractivas do tipo N10, tendo como suporte a linha numérica. Nestas resoluções, Miguel decompôs o subtractivo nas suas ordens, que foi subtraindo ao aditivo.

No problema "*Concurso na livraria*", com o significado de completar, utilizou uma estratégia aditiva, do tipo A10, tendo como suporte, mais uma vez, a linha numérica. Este foi o único problema de subtracção desta cadeia que foi resolvido recorrendo a uma estratégia aditiva.

Como se pode observar no quadro 11, apresentado a seguir, há diferença entre o tipo de estratégias a que Miguel recorre perante problemas de adição e problemas de subtracção. Nos problemas de adição, Miguel utiliza estratégias do tipo 1010 e, na resolução dos problemas de subtracção, recorre a estratégias do tipo N10 ou A10.

Quadro 11 – Estratégias utilizadas por Miguel na resolução dos problemas da terceira cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Acrescentar	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Comparar	"Parar ou Avançar"	Estratégia subtractiva N10, recorrendo à linha numérica
Adição	Combinar	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Retirar	"Uma sessão de cinema"	Estratégia subtractiva N10, recorrendo à linha numérica
	Completar	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10, com recurso à linha numérica

Síntese global

Na resolução dos primeiros problemas, Miguel revela o domínio de factos numéricos, utilizando estratégias onde recorre a esses conhecimentos, demonstrando também uma utilização de números de referência, ao recorrer a estratégias de saltos através do 10 ou de um múltiplo de 10.

Os problemas de adição das cadeias seguintes são resolvidos por estratégias aditivas do tipo 1010. Como referi, a utilização deste tipo de estratégia surge por influência de Cátia, que a utiliza pela primeira vez e partilha-a com a turma na resolução do problema da primeira cadeia *"A lista de palavras do Vasco"*.

Embora Miguel efectue adições com facilidade através de estratégias do tipo 1010, é importante referir que, na terceira cadeia, o facto dos valores envolvidos no primeiro problema da última cadeia possuírem diferente número de algarismos conduz a um erro de cálculo.

Nos problemas de subtracção, Miguel depara-se com o mesmo obstáculo, em *"A caderneta das Winx"*, decidindo mudar para uma estratégia do tipo A10, que passa a utilizar com frequência na resolução dos problemas com os significados de comparar e completar.

Utiliza a estratégia subtractiva do tipo 1010 em dois problemas, ambos com o significado de retirar. Os restantes problemas foram resolvidos, na sua maioria, através de estratégias aditivas A10 (ver quadro 19, no anexo 4). As excepções são os problemas *"A caderneta das Winx"* e *"Parar ou Avançar"*, com os significados de completar e comparar, respectivamente. Na sua resolução, Miguel também recorreu a estratégias subtractivas. Por terem sido os únicos problemas com estes significados a serem resolvidos através da operação de subtracção, é possível que os enunciados dos problemas tenham influenciado a operação escolhida para a sua resolução.

Miguel recorre a estratégias do tipo 1010 na resolução dos problemas de adição e em problemas de subtracção com o significado de retirar. No entanto, quando o cálculo a efectuar envolve valores com diferente número de algarismos, prefere utilizar uma estratégia do tipo A10, estratégia que parece privilegiar na resolução de problemas com os significados de comparar e completar.

André e suas estratégias

André, com 6 anos, tem alguma dificuldade em exprimir-se oralmente, faz longas pausas no seu discurso e parece distrair-se, acabando por perder o seu raciocínio. No início do 1.º ano, esta distracção reflectia-se quando, por exemplo, contava um pequeno número de objectos (menos que dez), começando por contá-los um a um, parando a meio dessa contagem para contar de dois em dois. Recomeçava a contar tentando dividir os objectos em vários grupos, chegando a representar as quantidades nos dedos, para depois contar um a um. André dominava a leitura e a escrita de números até cem e, no cálculo, tinha alguma dificuldade em adições e subtracções com números de um algarismo, embora por vezes fosse capaz de recorrer a alguns factos numéricos do seu domínio, como o dobro de 2, 3 ou 5.

André é muito brincalhão, com grande gosto em aprender, muito persistente nas suas ideias quando confiante, mas inseguro perante situações em que sente dificuldade, no entanto, gosta de as superar sozinho.

Resolução dos problemas da 1.ª cadeia

"Gormitis" – 29 Janeiro de 2010

Após ter lido o enunciado, André pareceu considerar o problema de fácil resolução.

> André – Ah, isto é muito fácil, este problema é muito fácil.
> (…)
> Matilde – Então é … 5 mais 14… [a aluna olha para a recta numérica afixada na sala]
> André – Não… é melhor… Vamos fazer a régua.
> Matilde – Ah, régua até ao quê… ao 14?

André começou por traçar uma linha no seu caderno, para a linha numérica, parou e, levantando os dedos um a um, contou de 14 até 18 e parou novamente. Contou mais uma vez, levantando cinco dedos, um de cada vez, contando desta vez de 14 até 19. Continuou então a traçar as marcas dos números na recta, começando no número 1. No entanto, parou e disse ao seu par naquele dia, Matilde, para resolverem de outro modo, apagando o que já tinha registado.

Matilde insistiu que tinha uma maneira de resolver o problema, contudo, André pediu-lhe que resolvesse como ele.

> André – Olha, este era Guilherme, nós vamos por um G, este era o André, vamos pôr um A.
>
> Matilde – Não! Nós pomos 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11… (…)
>
> André – Pois, vá, põe um G de Guilherme. Tu não apagues, tu não apagues, deixa assim! No G de Guilherme pões 5 bolinhas. E no André põe 14.

André escreve um G e desenha 5 marcas que vai contando uma a uma. Depois desenha um A e começa a desenhar as 14 marcas.

> Matilde – Então é isto tudo!
>
> André – Sim.

Quando me aproximei do par, os alunos tentaram explicar por que abandonaram a linha numérica.

> Professora – Mas queria perguntar-vos uma coisa: vocês começaram por fazer uma recta. Porque é que deixaram a recta de lado?
>
> André – Porque eu achei que …
>
> Matilde – Era um bocadinho difícil.
>
> Professora – Era difícil porquê?
>
> André – É que a recta… é uma maneira…
>
> Matilde – É porque nós não sabemos até… o número onde é que vai.

De seguida, após ter-me afastado do par, André apagou o seu registo e tornou a traçar a linha numérica. Acabou assim por registar na linha a sua contagem de um em um inicial, onde tinha recorrido aos dedos, que levantou um a um, para calcular 14+5:

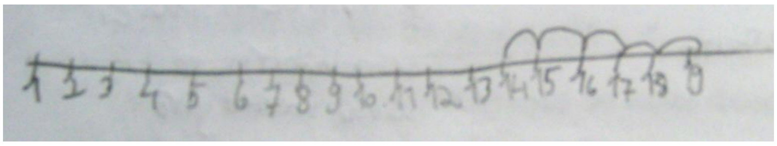


Figura 54. Resolução do problema "Gormitis" – André

"Idade do Dinis" – 4 Fevereiro de 2010

Após a leitura do enunciado do problema, o par de André, de novo Matilde, sugeriu que o resolvessem seguindo a mesma estratégia utilizada no problema anterior, sugestão que André recusa, resolvendo o problema recorrendo de novo à linha numérica.

André – Ah, então é fácil… [Parece dizer “É 7 mais 9”]

Matilde – É assim, sabes como é que é?

André – Eu sei…

Matilde – Vamos pôr um D de Dinis…

André – Não… Porque é que fazemos sempre assim? Há muitas maneiras! Não é só essa.

(…)

André – Vamos fazer de recta…

André traçou a linha numérica e, começando no número 7, traçou e registou todos os números, até chegar a 18. Depois, contou os saltos, um a um, partindo de 7, dando nove saltos.

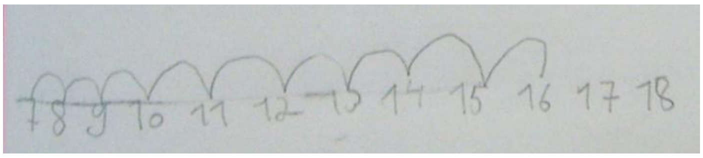


Figura 55. Resolução do problema “Idade do Dinis” – André

No problema anterior, André recorreu à linha numérica como suporte da sua contagem um a um através dos dedos (14+5), onde registou todos os números a partir de 1. Neste problema, André não efectuou uma contagem através dos dedos. Apoiando-se na linha numérica para resolver o cálculo 7+9, deu nove saltos +1, a partir de 7. Talvez devido à proximidade entre os números (7 e 9) o aluno não começou os saltos a partir do número maior, pois no problema anterior, o aluno calculou 14+5 em vez de 5+14.

Na linha numérica (figura 55), André não assinalou os números anteriores a 7, o que torna a sua resolução mais rápida.

“A mana das gémeas” – 5 Fevereiro de 2010

Após a leitura do problema, André revelou alguma incerteza relativamente à sua resolução. André parece ter compreendido que, partindo da idade das irmãs, deveria alcançar a idade da irmã mais velha, no entanto, o facto de serem duas irmãs com 6 anos parece colocar-lhe algumas dúvidas.

André – Mas elas têm as duas 6 anos, 6 mais 6, depois o número que for, vamos até ao 20…

Professora – Porque é que tens de juntar as idades delas?

André – É a minha pergunta!

Professora – Pensa só numa, pensa só na Leonor. A Leonor tem 6 anos, a irmã dela tem 20, quantos anos a mais tem a irmã?

Tentei ajudar André dando como exemplo a diferença de idade entre ele (6 anos) e a irmã mais nova (4 anos). Rapidamente, respondeu que tinha dois anos a mais:

Professora – Como é que tu calculaste que eram 2?

André – 4, 5, 6.

Professora – Ah, foste do 4 até ao 6… Então aqui… elas têm 6, a irmã tem 20…

André pareceu ter compreendido esta comparação, contudo, quando me afastei do par, continua confuso, levantando os dedos contando um a um, sem se compreender que cálculo estaria a tentar resolver. Na gravação vídeo, consegue ver-se André levantar três dedos e passados alguns instantes, cinco dedos, um de cada vez. Esta contagem parece reflectir-se na linha numérica que o aluno apagou no seu caderno. Inicialmente, desenhou uma linha numérica onde deu um salto do 6 para o 9 (+3), depois deste para 14 (+5), sendo possível distinguir mais um salto de 14 para o 16 (+2), o resto é imperceptível.

André continuou com dificuldade em resolver o problema e quando me aproximei de novo, o aluno tinha feito três saltos de +2 a partir do número 20.

André – Dei saltos de 2.

Professora – A partir do 20?

André – Sim.

Professora – Então ao 20 acabaste por juntar quanto?

André – 6 e de 2 em 2.

(…)

Professora – Então quer dizer que 26… Ela é 26 anos mais velha que as irmãs? Oh coitada, ela só tem 20 anos! E é 26 anos mais velha?

André – Não… Ah! É que eu fiz os saltos para a frente, mas era para trás!

André contou, por ordem decrescente, de 20 até 14, levantando um dedo por cada número dito, até ter levantado um total de seis dedos. Contudo, o seu registo não reflecte esta contagem decrescente, de um em um (figura 56). André traça três saltos de -2, a partir de 20. Talvez tenha feito saltos de -2 por ter efectuando, anteriormente, saltos de +2, e também porque André tem manifestado a vontade de dar saltos maiores do que um.

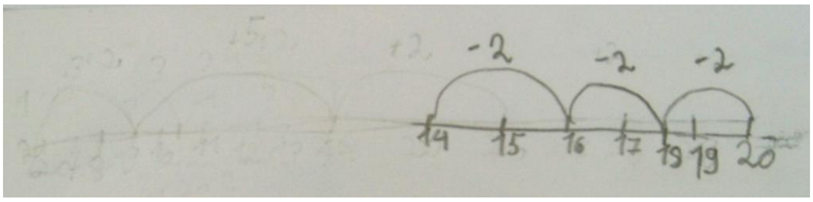


Figura 56. Resolução do problema “A mana das gémeas” – André

“Uma ida ao teatro” – 8 Fevereiro de 2010

Como já referi, inicialmente André não compreendeu o enunciado do problema tendo sido ajudado pela colega, Cátia. Após ter compreendido, identifica a subtracção presente no problema:

André – Ah, então é 15 menos 7… é só pôr o resultado.

Cátia começou a desenhar 15 quadrados, um por cada cadeira. André sugeriu que em vez de quadrados, desenhassem cruzes e tentou explicar como pensava resolver o problema.

André – Oh Cátia, já sei uma maneira muito rápida!

Cátia – Qual?

André – Oh… apaga. Já sei uma maneira. É… olha, púnhamos, olha assim… 15 cruzes.

Cátia – Sim, e depois?

André – Vai pondo e depois…

Cátia – Eu não vou pondo, senão ainda tenho que apagar tudo.

André – Está bem… Então é assim… Oh Cátia, pomos 15 cruzes e depois de menos. Com tracinhos pomos de menos. Percebes?

Cátia – Não muito.

André – Está bem, mas já vais perceber.

Quando me aproximei, André ainda não tinha terminado a sua resolução, contudo, parecia ter compreendido e estar seguro no que pretendia fazer.

André – Eu estava a tentar fazer: punha 15 cruzes e depois dava os saltos.

Professora – Essas 15 cruzes o que é que representam?

André – Quer dizer os lugares…

(…)

André – E vou dar os saltinhos… 15, 14, 13, 12, 11…

Professora – Quantos saltinhos é que vais dar?

André – Sete.

André olhou para a recta numérica da sala e deu sete saltos -1, apontando cada um com o lápis, registando depois algo que não se consegue compreender, no seu caderno. Parece ter recorrido à recta numérica da sala para calcular 15-7, onde contou os saltos um a um, por ordem decrescente, e, sabendo que o resultado era 8, terá depois registado no seu caderno um salto de -3 e outro de -5, talvez para dar saltos diferentes de 1 (figura 57).

Relativamente ao primeiro salto, de -3, não existem evidências que permitam compreender qual o erro cometido pelo aluno. Poderá ter sido um engano devido a uma distracção, ou poderá ter contado os números entre 15 e 13, incluindo 15, contando "15, 14, 13", a que fez corresponder um salto de -3.

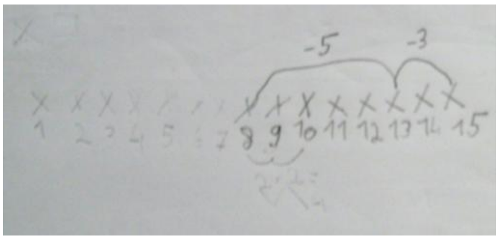


Figura 57. Resolução do problema "Uma ida ao teatro" – André

"A lista de palavras do Vasco" – 10 Fevereiro de 2010

André identifica de imediato o cálculo a efectuar para resolver o problema e afirma saber como o poderá fazer.

André – Ah, então é fácil. É só fazer 16 mais 13.

Cátia – Pois.

André – Então é fácil.

Cátia – Eu tenho uma maneira.

André – Eu também tenho.

Acaba por não partilhar como iria resolver o problema porque a sua colega, Cátia, começa a explicar a sua estratégia, que costuma utilizar quando resolve tarefas a que chama "pirâmides numéricas".

Cátia procura explicar a André o seu raciocínio na estratégia já identificada anteriormente, do tipo 1010. No entanto, o aluno não compreende os cálculos efectuados. Quando esta calcula 10+10 (de 16+13) regista 2, mas André compreende "2" como sendo a quantidade de números envolvidos.

> Cátia – Quando fiz pirâmides numéricas fiz assim: peguei neste um do 16 e fui juntar aqui ao 13, que é 20.
>
> André – O quê?
>
> Cátia – Este aqui são 20.
>
> André – O que é que são 20?
>
> Cátia – Pomos já um 2 do 20. Não, espera, vamos apagar. Ponho o 16, e aqui o 13. Este com este, são 2. E agora, este com este são… 9.
>
> (…)
>
> André – Isto são dois números [16 e 13] e já está aqui o 2.

A colega tornou a explicar a André e este copiou o registo para o seu caderno, apesar de não o compreender, pois ele ainda não consegue decompor os números com facilidade, de modo a adicionar cada ordem em separado voltando depois a reagrupá-las, tal como é possível perceber-se quando me aproximei do aluno.

> André – Acho que é… isto são 2, este 1 e este 1 são 2. E depois este 6 … este 6 mais 3 é 9.
>
> Professora – Então aqui… posso só fazer-te aqui uma coisa?

Naquele momento, comecei a fazer um pequeno esquema no caderno do aluno para decompor cada número, 16 e 13.

> Professora – Há bocado, no nosso cálculo mental, lembras-te que eu dividi assim: o 16 eu consigo dividir em 10 mais quanto?
>
> André – Ah… 6.

A partir de 10, o aluno contou até 16, levantando os dedos um a um. Voltou a recorrer aos dedos para calcular que 13 é igual a 10+3, tendo mais uma vez contado a partir de 10, um a um, até 13.

> Professora – E o 13, consigo pôr também aqui um 10 e do outro lado? Um grupinho de quanto?
>
> André – 3.
>
> Professora – Então o que é que a Cátia fez… Ela juntou este e este, estes dois 10.
>
> André – Que são 20.
>
> Professora – São 20. E juntou o 6 com o 3.
>
> André – Que é 9.

Professora – E 20 mais 9, 29, estás a ver?

André – Ah…

Na verificação do resultado, André sugere que utilizem a linha numérica.

Cátia – Mas temos que confirmar.

André – Vamos pela recta! [Aponta para a linha numérica da sala.]

Cátia – Sim. Desenhamos uma recta. E começamos no número 13.

André – Sim, 13.

O aluno traçou a recta numérica, que numerou até 29, uma vez que seria este o resultado correcto, e deu dezasseis saltos, um a um, de 13 até 29, dizendo à colega que o resultado inicial (29) estava correcto.

André – Gostas da minha recta? É gira… Mais 1… Mais 1… Mais 1… Olha Cátia, está a ficar giro!

(…)

Cátia – Oh André, se queres saber eu não estou a dar saltinhos de 1, estou a dar saltinhos maiores.

André apaga os seus saltos de +1 e tenta fazer os mesmos saltos que Cátia, mas parece revelar alguma dificuldade em realizar os saltos, pois conta os números e não o salto de um número para o outro, isto é, no salto de +7, por exemplo, o aluno conta 7 números e não 7 saltos entre os números.

André –Tu deste um de 7…

Cátia – E depois dei mais 7.

André – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [Conta 7 números na recta: 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19]… vais até ao 19. Isto é 19…

Cátia – Não, não, não! Isso é de mais 6.

André – Ah, de mais 6.

Cátia – É até ao 20.

(…)

André – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. [Conta na linha numérica do seu caderno.] Isto é de mais 8.

Cátia – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. [Conta na linha numérica que traçou.] É de mais 7.

André – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8!

Cátia – Não são os números, são os saltos! 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Cátia mostrou a André, na linha numérica que este traçou, como conta os saltos, apontando para cada salto à medida que os ia contando um a um.

No problema anterior, André tinha assinalado um salto de 15 para 13 como um salto de -3. Após a análise deste último problema, parece confirmar-se que, de facto, o aluno terá contado os números (15, 14, 13).

André foi capaz de resolver este problema, utilizando a recta numérica que numerou a partir de 13 e dando 16 saltos de +1, obtendo 29. Contudo, apagou o que tinha feito e copiou o que a colega fez, ficando a dúvida se o aluno terá realmente compreendido o que registou no seu caderno.

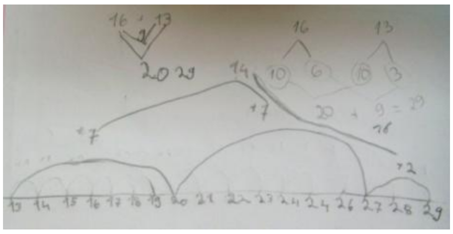


Figura 58. Resolução do problema "A lista de palavras do Vasco" – André

"As leituras da Marta" – 25 Fevereiro de 2010

André e a colega na resolução deste problema, Madalena, consideraram-no de fácil resolução. Madalena identifica o cálculo a efectuar e André sugere como o podem fazer.

> Madalena – Sei que temos de saber quanto é do 16 para o 28.
>
> (…)
>
> André – Olha, qual é a maneira que tu queres fazer? Olha, eu acho que já sei uma.
>
> Madalena – Diz lá, para ver se eu concordo.
>
> André – (…) Começamos no 16. Depois 16 mais 2…
>
> Madalena – Mais 2. Ah! É sempre mais 2. Mas se não sabemos quanto é que é mais 2, fazemos mais um, mais outro. E é dois num. Isso é como se fosse a recta com saltinhos de 1 em 1, depois de 2 em 2…

Os alunos procuram encontrar o valor a adicionar a 16 para obter 28, contudo, André quer utilizar a estratégia de Cátia, do tipo 1010. Talvez por isso, regista 28+16 no seu caderno, e os dois alunos, que inicialmente compreenderam o problema, acabam por se focar na estratégia 1010, sem a relacionar com a situação descrita no problema.

> André – Mas podemos fazer… 16 mais 20… sabes quanto é que é?
>
> (…)

Madalena – 20 mais 16? 20 mais 6 é 26… É 36… eu acho que é 36… 36, 37, 38. Acho que é 38 André. 38? Não pode ser 38 se o livro tem 28.

André – Ah, já sei. Pomos aqui 28 mais 16…

Madalena – 28 mais 16?

André – Olha Madalena, vamos tentar aquilo de dividir por 10. Lembras-te?

Madalena – O quê?

André – Aquilo que dividimos o 10…

Na discussão entre os alunos, é possível perceber-se que os alunos não compreendem o raciocínio envolvido na estratégia do tipo 1010.

Madalena – Vamos tentar fazer como no outro problema, mas é difícil… [referindo-se à estratégia 1010] Assim… fazemos aqueles tracinhos de dividir. Pomos, é 16 mais 20, depois quanto é que é, depois…

André – Ó Madalena, o que é que tu queres saber? Já pusemos 28 mais 16, agora vamos dividir por 10.

Quando conversei com o par, Madalena parece compreender que o cálculo 28+16 não resolve o problema, uma vez que o livro tem no total 28 páginas. Mas André tem dificuldade em perceber o enunciado.

André – Então, ela já leu 28 e faltam 16.

Madalena – Não.

Professora – Ela já leu 28? Assim já teria lido o livro todo! O livro todo tem 28.

André – Já leu 16 e faltam 28.

Professora – Não, 28 são as páginas do livro. Se faltassem 28 ela ainda não tinha lido nada! Ela já leu 16.

André – Ela já leu 16, então já não é 28…

Professora – Já não lhe faltam 28 não… Porque ela já leu, dessas 28, ela já leu 16.

André – 28 menos 16.

Professora – Boa.

Madalena – Ah, 28 menos 16!

O aluno sugere que resolvam através da linha numérica onde começa por traçar o número 16, contudo, ambos começam a efectuar saltos de subtracção, tentando retirar 28 a 16 (16-28).

Professora – Vocês ao 16 o que é que estão a tirar?

Madalena – Estamos…

Professora – O que é que é o 16?

Madalena – É 10 mais 6.

Professora – Mas no problema o que é que significa?

Madalena – É uma parte do 28.

André – É o que a Marta já leu [referindo-se ao 16]

Professora – Ela já leu 16 páginas, agora ao 16 estão a tirar!

André – E temos que tirar 18 [referindo-se a 28]

André parece continuar com dificuldade em compreender o problema, por isso continuei a discutir o problema com ele.

Professora – Então ela já leu 16 páginas e vão-lhe tirar páginas?

André – Ai, faltam 28.

(…)

André – A Marta já leu 16 páginas e falta 28.

Professora – (…) ela já leu 16, não lhe faltam 28! O que diz no problema é que o livro tem 28 páginas, então quanto é que ainda lhe falta ler…

André – Então é do 28 até ao 16.

André retorna à linha numérica e, a partir de 28, efectua saltos de -1. À medida que ia dando um salto, registava na linha numérica o valor em que ficava e em cima registava quantos saltos já tinha dado, mas os saltos dados na linha numérica não estavam alinhados com o registo do número de saltos já efectuados (figura 59). Por este motivo, o aluno não sabia quantos saltos já tinha dado. Ajudei-o assinalando cada número na linha numérica com uma marca, para André poder contar correctamente o número de saltos efectuados.

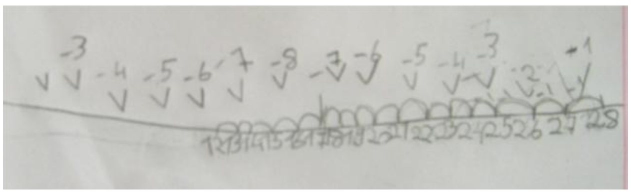


Figura 59. Resolução do problema "As leituras da Marta" – André

"Chupa-chupas para todos!" – 3 Março de 2010

Neste problema, André trabalhou com Miguel que liderou a resolução, tal como já foi referido.

Tal como no problema anterior, também neste André tentou utilizar a estratégia do tipo 1010, sem procurar compreender se este tipo de estratégia poderia ajudar na resolução do problema.

> André – Olha, queres fazer aquilo, que dividimos? [referindo-se à estratégia 1010]
>
> Miguel – Dividir números?
>
> André – Sim.
>
> Miguel – Boa! Eu adoro isso! Então espera… não, isto não vai ajudar. 25 a dividir por nós, não percebemos.

Miguel compreende “dividir número” como uma divisão e não como a decomposição do número. Logo de seguida, Miguel partilha a sua estratégia, do tipo A10, cujo registo André vai copiando para o seu caderno.

> André – Mas afinal, qual é que é a nossa maneira?
>
> Miguel – Então, ele tinha 18 não era? É este 18, com mais 2 é 20, para ser mais fácil. Com mais 5…
>
> André – E de onde é que tiraste o 20? Apareceu-te de repente?
>
> Miguel – Não, porque 18 mais 2 é 20.
>
> André – Ah…
>
> Miguel – Depois com mais 5…
>
> André – É 25…

Mas André permanece com dificuldade em compreender esta estratégia.

> André – Com o 2 e o 5 o que é que acontece?
>
> Miguel – (…) É melhor eu explicar-te que não estás a perceber muito bem. Não é verdade que 18 mais 2 é 20?
>
> André – Sim.
>
> Miguel – E este 2 é o do 20.
>
> André – Ah…
>
> Miguel – É como… tu estás a ver… este 5 vem deste 5 do 25. Então 5, isto é como se fosse o 25, isto é como se fosse um 25 mas nós dizemos 5 mais 2 é 7.

Miguel regista no seu caderno “18+7=25” para tentar ajudar André a compreender que 7, resultado de 2+5, é o que deveriam juntar a 18 para obter 25.

> André – Eu não estou a perceber bem esta maneira!
>
> Miguel – É 7! Estes dois [2 e 5] dão 7, então é o que faltava… faltava 7 para ser 25. Então 18 mais 7…

André – Tu dizes isso muito rápido.

Miguel – Então e aqui André… 18 mais 7… igual a 25.

André – 18 mais 7, igual a 25. Pronto. Já acabei.

Miguel – Eu só vou escrever aqui “isto era para o André perceber”.

André – Boa!

No entanto, o aluno permanece com dificuldade em compreender a estratégia de Miguel.

Miguel – Tu não percebeste nada, pois não?

André – Eu percebi!

Miguel – Percebeste pois…

André – Ao 18 juntei… 2, 20. Com mais… 20 mais 2…

Miguel – 20 mais 2?

André – Eu é que sei. [risos] Ó Miguel, tu sabes quanto é mil mais mil? Eu sei.

Perante estas evidências, parece poder concluir-se que o André não compreendeu esta estratégia de resolução, ficando também a dúvida se o aluno terá compreendido o problema.

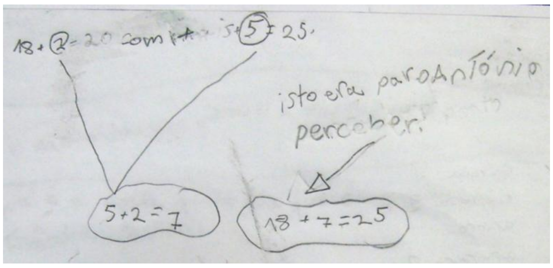


Figura 60. Resolução do problema “Chupa-chupas para todos!” – André

Síntese

1.ª cadeia de problemas

Na resolução dos problemas desta cadeia, André recorreu a estratégias elementares para o cálculo de adições e subtracções (quadro 12), caracterizadas por contagens de um em um, recorrendo aos dedos ou à linha numérica.

Quadro 12 – Estratégias utilizadas por André na resolução dos problemas da primeira cadeia

<table>
<tr><th></th><th>Significado da operação</th><th>Problema</th><th>Estratégia de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Adição</td><td>Combinar</td><td>“Gormitis”</td><td>Contagem crescente a partir do número maior, recorrendo aos dedos</td></tr>
<tr><td>Acrescentar</td><td>“Idade do Dinis”</td><td>Contagem crescente a partir do primeiro número, recorrendo à linha numérica (adição)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subtracção</td><td>Comparar</td><td>“A mana das gémeas”</td><td>Contagem para trás a partir de um número (20)</td></tr>
<tr><td>Retirar</td><td>“Uma ida ao teatro”</td><td>Contagem para trás a partir de um número (15), recorrendo à recta numérica da sala</td></tr>
<tr><td>Adição</td><td>Acrescentar</td><td>“A lista de palavras do Vasco”</td><td>Contagem aditiva a partir do primeiro número (13), recorrendo à linha numérica
(Inicialmente copia estratégia aditiva do tipo 1010 do seu par, Cátia, que parece não compreender)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subtracção</td><td rowspan="2">Completar</td><td>“As leituras da Marta”</td><td>Contagem para trás a partir de um número (28), recorrendo à linha numérica</td></tr>
<tr><td>“Chupa-chupas para todos!”</td><td>Não há evidências que permitam concluir que compreendeu o problema. Segue a estratégia aditiva do tipo A10 utilizada pelo seu par, Miguel.</td></tr>
</table>

À excepção do último problema, cujas evidências parecem sugerir que não o compreendeu, André recorreu sempre a estratégias aditivas para a resolução dos problemas de adição e a estratégias subtractivas no caso dos problemas de subtracção, independentemente do significado da operação em cada problema. Este facto sugere que André parece identificar a operação envolvida em cada situação.

O trabalho realizado a pares com Cátia, em *“A lista de palavras do Vasco”*, teve grande influência em André. Como já referi, Cátia utiliza pela primeira vez uma estratégia aditiva do tipo 1010, que André, embora a copie para o seu caderno, não compreende. No entanto, nos problemas seguintes, o aluno procura sempre resolvê-los utilizando esta estratégia, descurando a situação descrita em cada problema.

Por um lado, André parece reconhecer a eficiência deste tipo de estratégia, e por isso manifesta grande vontade em utilizá-la na resolução de qualquer problema, por outro lado, não é ainda capaz de a usar com compreensão uma vez que ainda não domina outro tipo de estratégias, recorrendo a factos numéricos básicos, consideradas fundamentais para o desenvolvimento de estratégias mais complexas e eficientes.

Uma vez que as estratégias do domínio de André são essencialmente de contagens de um em um, será muito interessante analisar de que modo estas irão evoluir ao longo das próximas cadeias.

Resolução dos problemas da 2.ª cadeia

"Tiro ao alvo" – 5 de Maio de 2010

É com facilidade que André reconhece que terá de adicionar os pontos obtidos por cada jogador e para isso sugere ao seu par, Matilde, que utilizem uma estratégia aditiva do tipo 1010.

> André – Então vamos juntar!
> (…)
> André – Vamos fazer a maneira da Cátia para sabermos quanto…

Apesar de Matilde não perceber os cálculos envolvidos neste tipo de estratégia, André revela alguma compreensão ao efectuar a adição, pois corrige a colega quando esta se refere a 30+10 como 3+1.

> André – Então agora fazemos… 35 mais… 12… Agora… eu vou tentar fazer da maneira da Cátia [estratégia do tipo 1010]. 30…
> Matilde – Não! É … 3 mais 2 é cinco.
> André – Não! Isto é 30 e este 1 é 10! Então 30 mais 10 que é 40!
> Matilde – 30… Han?
> André – Aqui é 40. Porque este 3 é 30 e este 1 é de 10. Agora… 40 mais 2… 42…
> Matilde – Ainda falta o 5!
> André – Sim, agora podemos fazer. 42… mais 5…

Para calcular 42+5, o aluno parece contar um a um, recorrendo aos dedos, contudo, não é possível concluí-lo com certeza. André acaba por não registar o resultado final. Quando me aproximei, procurei compreender se os alunos compreendiam os cálculos que estavam a realizar:

> André – Porque isto [40]… é o 30 e 30 mais 10 é 40.
> Matilde – Pois.
> Professora – E depois o que fizeram?
> Matilde – Depois juntámos o 2 ao 5 e deu-nos 45.
> Professora – 2 mais 5?
> André – Não. Depois juntámos… o 40 ao 2.
> Professora – E deu 42, mas ainda têm este 5 ali.
> André – Não, mas este 2…

Matilde – Mas ele estava a dizer que o 3… eu não sei se está certo, o 3 e o 2 dá 5.

André – Não!

André foi interrompido quando estava a tentar explicar por que motivo não juntou as unidades (2 e 5), de seguida a sua colega diz que 5+2 é igual a 7 e André refere "Depois juntamos ao 40… Então é 47!". Contudo, pelo que André referiu, transcrito acima, parece ter utilizada uma estratégia aditiva do tipo 10S, onde após ter adicionado as dezenas, iria adicionar as unidades a esse resultado, ou seja, parecia querer efectuar a adição do seguinte modo: 35+12=; 30+10=40; 40+2=42 e 42+5=47.

No cálculo seguinte, 29+27, a sua colega, demonstrando que não compreende nem a estratégia nem as relações numéricas envolvidas, começa por calcular 20+7. De novo, André revela o seu entendimento dos números:

André – Não, Matilde! Porque isto é o 40, isto é o 20 e isto é o 20, então dá 40!

Matilde – Ah!

André – 20 mais 20 é 40. Espera, agora… 40 mais 9, 49. E agora… 49… espera…

(…)

André – 49… 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56. 56… É o Pedro! Eu acho que é o Pedro.

Para calcular 49+7, André recorre à contagem pelos dedos, que levanta um a um.

Uma vez que, neste segundo cálculo, adicionou a ordem das dezenas em separado, juntando a esse resultado as unidades da primeira parcela e depois as unidades da segunda parcela, parece poder concluir-se que seria esta a estratégia que tentou utilizar no primeiro cálculo.

Inicialmente, André tentou utilizar uma estratégia aditiva do tipo 1010, ou como o aluno referiu, "a maneira da Cátia", no entanto, acaba por recorrer a uma estratégia do tipo 10S. Talvez tenha seguido este tipo de estratégia por ter compreendido que na estratégia do tipo 1010 os números eram decompostos, sem ter percebido na totalidade os passos envolvidos, acabando por utilizar uma estratégia do tipo 10S que parece ter compreendido.

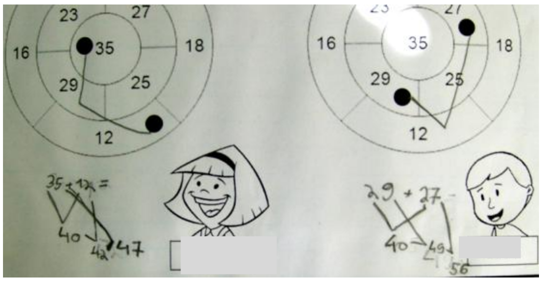


Figura 61. Resolução do problema “Tiro ao alvo” – André

“Os pontos do Daniel” – 7 de Maio de 2010

André e o seu par na resolução deste problema, Guilherme, tiveram dificuldade em compreender o enunciado. Analisaram o enunciado de novo e julgaram poder resolver o problema calculando 32+55. Quando me aproximei do par, tentei ajudar os alunos estabelecendo uma comparação entre este problema e o anterior, mas permaneceram as suas dúvidas.

O par parece ter atribuído maior importância ao facto de quererem resolver o problema utilizando a estratégia do tipo 1010, que associam a adições. Por isso, enquanto tentavam compreender o problema, procuraram números que lhes permitissem efectuar uma adição.

Tentei voltar a ajudar o par.

> Professora – O 32 é uma das setas onde acertou, falta a outra.
>
> Guilherme – Ah!
>
> André – Ah! No 32 o que é que falta para o 55!
>
> Guilherme – Então é… dá para fazer da maneira da Cátia!
>
> André – Dá?
>
> Guilherme – Não sei… Espera, uma seta acertou no 32. Agora do 32 para chegar ao cinquenta.
>
> André – E cinco!
>
> Guilherme – É fácil! Mas… dá para fazer da maneira da Cátia?

Os alunos voltam a discutir como poderão utilizar a estratégia do tipo 1010 e André parece sugerir que tentem calcular qual a diferença entre 32 e 55, mas não consegue explicitar completamente a sua opção.

> Guilherme – Então… vamos fazer como?

André – Ah espera aí… Eu não sei se dá, mas é assim. Eu sei que do 30 até ao 50…
Guilherme – Do 30 para o 50 são 20. Ah é fácil! Então vamos pôr: do 30 para chegar… do 30 para chegar…
André – Do 32!
Guilherme – Não, calma. Primeiro vamos fazer do 30. Do 30 para chegar ao… do 30 para chegar ao 50 são quantos? São 20! Então são 20… Depois… quanto é 5 mais 2…
André – 5 mais 2 é 7.

Guilherme parece querer seguir uma estratégia do tipo 1010, decompondo 32 em dezenas e unidades que procura aproximar a 55. Porém, em vez de calcular 2+?=5, efectua 5+2=7.

André volta a tentar calcular 32+55, no entanto, Guilherme sugere uma estratégia de resolução:

Guilherme – Eu não sei se dá…Nós ainda não fizemos. Eu não sei se dá. Nós… do 30 para chegar ao 50 é 20, e do 5 mais 2… ou do 5 para chegar ao 2…?

(…)
Professora – Tu não queres partir do 32 para chegar ao 55?
Guilherme – Sim, mas primeiro faço do 30…
(…)
Professora – E agora tens este 2, e partes daqui outra vez.
Guilherme – Então e agora deste 2 parto para onde?
Professora – Qual é o outro número?
Guilherme – É o 5. Então mas depois… mas agora do 2 para chegar ao 5 são 3.
Professora – Sim.
Guilherme – Então são… são 23?
Professora – Não sei.
Guilherme – Então… Eu não sei se é 23. Mas primeiro como é que nós fazemos na folha como nós pensámos?

É Guilherme quem lidera o trabalho e André acaba por copiar o que o colega vai registando no caderno, sem compreender:

Guilherme – Nós escrevemos 30 para… chegar… ao… 50… é mais… 20. E depois…

André – Não! Ó Guilherme, nós queremos…

Guilherme – Calma! Isto vai dar bom resultado, queres ver? Nós pomos assim, do 30 para chegar ao 50…

André – Do 32!

Guilherme – Não! Calma, nós ainda não estamos a juntar o 32. Do 30 para chegar ao 50 são 20. Depois do 2 para chegar ao 5, são 3! Depois juntamos esse 20 com o 3!

André – Ah, boa!

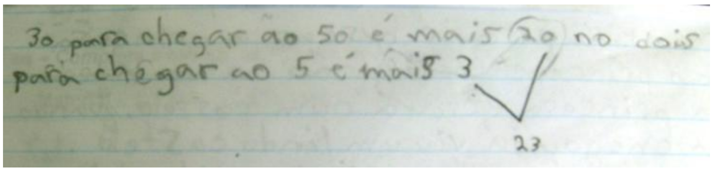


Figura 62. Resolução do problema "Os pontos do Daniel" – André

Como o par teve dificuldade na resolução deste problema, sugeri que confirmassem o resultado. André sugere que utilizem a recta numérica mas Guilherme, certo que o resultado estaria correcto, prefere não confirmar e André acaba por apagar o que fez.

André pareceu pouco envolvido na resolução do problema e o seu colega acabou por liderar o trabalho. Embora inicialmente André tenha procurado descobrir a diferença entre 32 e 55, depressa voltou a tentar calcular 32+55, podendo concluir-se que o aluno não terá compreendido o problema e, consequentemente, também não terá percebido a resolução do seu colega. Quando tentou confirmar o resultado na recta numérica, começou por numerá-la de 5 em 5, talvez por querer seguir uma contagem de 5 em 5 para resolver o problema "no 30 até ao 35 é 5 (…) depois 55… até ao 60". Não acabou de verificar o resultado e apagou o que fez, o que pode ter acontecido devido ao facto de não ter conseguido compreender o problema.

"A festa da Cláudia" – 12 de Maio de 2010

André trabalhou de novo com Guilherme, e mais uma vez o par quis utilizar a estratégia do tipo 1010, por isso, assim que terminaram a leitura do enunciado do problema, concluíram que neste problema poderiam utilizar essa estratégia.

Guilherme – Já sei! Vamos fazer da Cátia! Dá para fazer da maneira da Cátia?

Professora – Estás-me a perguntar se dá? Porque é que tens dúvida?

André – Dá! Porque isto é 37 mais 25!

Guilherme – Pois, eu acho que dá.

É sem dificuldade que começam a calcular recorrendo à estratégia aditiva 1010. Para efectuar 30+20, André explicou-me que adicionou a 30 dois grupos de 10, levantando um dedo por cada dezena que adicionou. Na adição 7+5, o aluno recorre também aos dedos, levantando-os um a um, a partir de 7. Por fim, no cálculo 50+12, começou por calcular 50+10, que se constitui como um facto numérico, e por fim, adiciona as duas unidades, uma a uma.

André – (…) 61, 62… é 62!

(…)

André – É tão fácil…

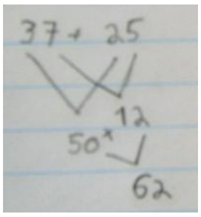


Figura 63. Resolução do problema "A festa da Cláudia" – André

Embora no problema *"Tiro ao alvo"*, André tivesse utilizado uma estratégia do tipo 10S, neste, juntou de imediato as dezenas e depois as unidades, recompondo o resultado no fim.

"Viagem de autocarro" – 17 de Maio de 2010

Embora um pouco inseguro, André reconhece a subtracção presente no problema: 49-26.

André – 49 menos 26? Ó meninas, podem-me dizer se é 49 menos 26? [dirigindo-se a outro par] Ai, eu não sei…

Matilde – Vamos fazer da maneira da Cátia…

André – Ah como é que sabes… não sabemos…

Matilde ouve a discussão que eu estava a ter com um par de alunos e confirma que poderão resolver o problema calculando 49-26. Embora tenha sido a colega a sugerir que seguissem uma estratégia subtractiva do tipo 1010, talvez André a tivesse utilizado mesmo sem a sua sugestão, uma vez que nos últimos problemas procurou sempre utilizá-la.

André liderou o trabalho, efectuando sem dificuldade o cálculo. Parece decompor com facilidade ambas as parcelas nas suas ordens, efectuando com rapidez as subtracções. À medida que vai registando no seu caderno os resultados das subtracções, ajuda Matilde a copiar para o seu caderno, que parece não compreender o raciocínio envolvido nesta estratégia.

André – Agora põe… Vá, também tens que pensar pela cabeça! 40 menos 20 igual a 20.

Matilde – Han? Ponho 9…

André – Não! Põe assim e assim… o 2 com o 4, põe 20.

Matilde – Ponho 20 aqui?

André – Sim.

Matilde – E agora?

André – Pões 9, 6… e põe 3. Depois põe aqui o mais, e põe 23. 23…

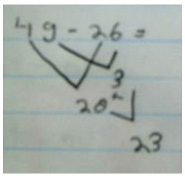


Figura 64. Resolução do problema "Viagem de autocarro" – André

Quando me aproximei do par, André explicou-me como tinha efectuado as subtracções das dezenas e das unidades.

Professora – Como é que sabes que 40 menos 20 é 20?

André – 40, 30, 20.

À medida que dizia cada número, ia levantando um número por cada dezena que contava.

Professora – E 9 menos 6?

André – Fiz 6, 7, 8, 9.

De novo, André levantou um dedo por cada número que dizia, a partir de 6. Contudo, André não recorreu à contagem pelos dedos, em nenhuma das subtracções, tendo registado de imediato o resultado. Talvez me tenha explicado deste modo apenas para me mostrar uma maneira de calcular.

"Pai e filho" – 19 de Maio de 2010

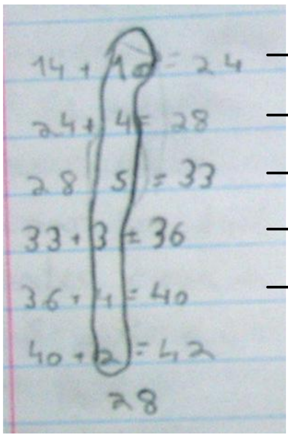
André compreendeu o problema e seguiu uma estratégia diferente da que o seu colega nesse dia, Miguel, utilizou.

Para resolver o problema, André calculou quando deveria juntar à idade do filho, 14, de modo a atingir a idade do pai, 42 (figura 65).

André pareceu seguir uma estratégia A10, no entanto, a aproximação não foi feita a múltiplos de 10. O aluno foi adicionando números cujo resultado já era do seu conhecimento e também juntou valores que seleccionou aleatoriamente.

Quando me explicou os cálculos que efectuou, o seu colega Miguel perguntou-lhe porque não tinha adicionado determinados números, de modo a obter um múltiplo de 10. André encolhia os ombros, dizendo "porque eu queria".

A partir do trabalho do aluno, procurarei evidenciar o modo como este efectuou as adições:



→ "Fiz 14 mais 10 igual a 24"

→ "Eu sabia que 24 mais 4 era 28 porque 4 mais 4 eu já sabia…"

→ "Fiz pelos dedos" [a partir de 28].

→ "Porque 3 mais 3 é 6"

→ "Porque 6 mais 4 é 10 e como era 36 tinha que ser 40"

Figura 65. Resolução do problema "Pai e filho" – André

Para juntar todos os valores que tinha adicionado a 14 até obter 42, André foi também recorrendo a factos numéricos e à contagem pelos dedos.

> Professora – E depois como é que juntaste isto tudo por aqui fora?
>
> André – Fiz 10 mais 4, 14. Mais 5, 19.
>
> Professora – Como é que sabias que 14 mais 5 era 19?
>
> André – Porque 4 mais 5 é 9.
>
> Professora – Ok, já vais no 19, e depois mais 3…
>
> André – 22…
>
> Professora – Como é que sabias?

(…)

André – Contei pelos dedos.

Professora – E depois, mais 4… Fizeste isso assim, seguidinho?

André – Fiz. 26…

Professora – Fizeste como?

André – Fiz pelos dedos. E 26 mais 2, 28.

À medida que André ia explicando como calculou, eu e Miguel sugeríamos o cálculo que poderia ter efectuado de modo a aproximar o resultado de um múltiplo de 10, para facilitar o cálculo.

"Saltos à corda" – 26 de Maio de 2010

André compreendeu com facilidade o problema, identificando a estrutura 48+?=75, como tentou explicar à sua colega na resolução deste problema, Madalena.

Madalena – Han? Não percebi nada!

André – Do 48 até ao 75…

(…)

Madalena – É que eu não estou a perceber nada…

André – Eu estou a perceber lindamente.

André e Madalena utilizam uma estratégia do tipo A10, mas trabalham de modo individual. Madalena recorre à linha numérica mas André opta por não a utilizar.

André – Vá… 48 mais 2, igual a 50… Vamos fazer com números… Dá na recta? Eu não faço pela recta.

Madalena – Eu faço pela recta!

André – 50 mais 9… igual a 59…

André segue uma estratégia semelhante à que seguiu no problema anterior (figura 66). Mas, neste problema, André tentou aproximar os resultados que ia obtendo a múltiplos de 10, o que não fez na sua resolução do problema anterior, uma diferença importante que o aluno reconhece:

André – Eu fiz com os números mais redondinhos…

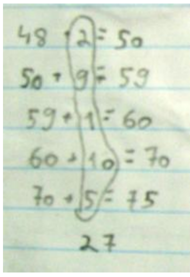


Figura 66. Resolução do problema “Saltos à corda” – André

O primeiro cálculo constituía-se já como facto numérico para o aluno. De seguida, perguntei porque não tinha adicionado 10 em vez de 9, mas André parece ainda inseguro:

Professora – Porque é que escolheste depois 9?
André – Para depois ir… ir…
Professora – Diz lá…
André – Para depois ser mais rápido.
Professora – Porque não logo o 10?
André – Não sei… [encolhendo os ombros]
Professora – 50 mais 10, 60. Tinhas poupado trabalho. Mas fizeste 50 mais 9, como sabias que era 59?
André – Já sabia logo.
(…)
Professora – E depois fizeste 59 mais 1 porquê?
André – Para dar um número redondinho.

Quando perguntei como sabia que 60+10=70, André explicou-me que era semelhante ao cálculo anterior:

Professora – Depois fizeste 60 mais 10… como sabias que era 70?
André – Porque… 50 mais 9 é 59, aqui era diferente… mas tinha que ser 60.
Professora – Mas como?
André – Como aqui estivesse… o 60… porque 50 mais 9 é 59, então 50 mais 10 é 60.

O último cálculo, 70+5, constitui-se também como facto numérico para o aluno.

Quando calculou tudo o que tinha juntado a 48, foi adicionando a partir do primeiro cálculo até ao último, sem ter em consideração os números que poderia adicionar de modo a obter um múltiplo de 10 para facilitar o cálculo.

Professora – Como é que fizeste este cálculo todo por aqui abaixo?

(…)

André – 9 mais 2, 11. 11 mais 1, 12. 12 mais 10, 22. E 22 mais 5, 27.

Professora – Aqui porque é que não juntaste logo 9 mais 1? Ficava logo o 10.

André – Não sei.

Existe uma evolução entre esta resolução e a utilizada no problema anterior. Neste problema André reconheceu que poderia aproximar os resultados intermédios a múltiplos de 10, facilitando o cálculo.

"Que azar!" – 31 de Maio de 2010

André e Guilherme, o seu par neste problema, compreenderam com facilidade o enunciado do problema. André identificou de imediato a subtracção presente e o par decide utilizar uma estratégia subtractiva do tipo 1010.

André – Xi, muito fácil! É 82 menos 36.

Guilherme – Podemos fazer da maneira da Cátia.

André – Pois.

André calcula 80-30, decompondo 30 em três grupos de 10, que vai retirando a 80. Levantou três dedos, um de cada vez, à medida que retira uma dezena a 80.

André – 80 menos 30 já sabes quanto é que é.

Guilherme – 80 menos 30 é fácil, é 50. Agora é 2 menos 6.

André – É fácil. Eu faço essa parte.

Guilherme – 2 menos 6 é fácil.

André – 2…

Guilherme – 2, 1, 0…

André – -1…

Guilherme – -1, -2, -3! Agora 50 menos 3 é fácil. 50 menos 3 é fácil.

Ambos levantam um dedo por cada número que vão contando, a partir de 2, contudo, Guilherme levanta um dedo ao dizer o número 2, por isso afirma que o resultado é -3. Como o aluno foi mais rápido a contar do que André, este acaba por copiar esse resultado para o seu caderno.

Ao aproximar-me do par, questiono-os sobre esse cálculo:

Professora – 2 menos 6 é -3?

Guilherme – Sim!

Professora – Ao 2 eu consigo tirar 2.

André – Mas, ele contou com o zero!

André julga que o colega está errado ao contar com o número zero, na sua contagem. Para ajudar, desenhei uma linha numérica no caderno de Guilherme, onde registei os saltos, a partir de 2, um a um, até retirar 6.

Professora – Olha aqui, menos 1, 1. Menos outro, zero, menos outro, -1. -2…

Vamos ver quantos já temos. 1, 2, 3, 4. 5… 6… [traço os últimos dois saltos]

Guilherme – Ah, é -4.

André – É -4?

Professora – Então vejam lá, ao 2 eu consigo tirar 2, mas eu quero é tirar 6, quantos é que ainda faltam tirar? Dos 6 já tirei 2, quantos é que ainda faltam tirar?

André – Ah!

Os alunos parecem ter compreendido que o resultado de 2-6 é -4 e André copia a linha numérica que desenhei no caderno do seu colega. De seguida, parece bastante confuso quanto ao cálculo a efectuar. Guilherme fica em dúvida se o resultado final (50-4) será 47 ou 46, e procura a minha ajuda. André afirma que é 43, no entanto, não é possível compreender-se como terá concluído que seria este o resultado.

Guilherme acaba de efectuar o cálculo e André, após copiar a linha numérica relativa a 2 – 6, pergunta ao colega o que deverá fazer de seguida.

André – -4, -3, -2… -1… 0… 1… 2. Agora o que é que eu faço?

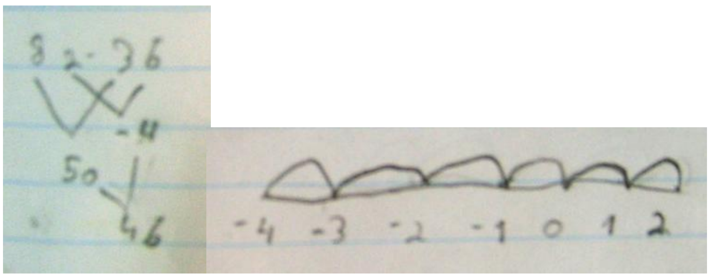


Figura 67. Resolução do problema “Que azar!” – André

Inicialmente, André parece compreender a estratégia escolhida para a resolução do problema, no entanto, parece ficar bastante inseguro quando confrontado com o cálculo 50-4.

Se até ao momento as diferenças e somas parciais, utilizando este tipo de estratégia, foram sempre adicionadas, o facto de agora se deparar com um número negativo, poderá ter sido um obstáculo para André.

"A caderneta das Winx" – 2 de Junho de 2010

De início, André parece não compreender o problema, e começa por seguir a estratégia do seu colega nesse dia, Miguel.

> Miguel – Então vá… 124…
>
> André – Eu não estou a perceber isso…
>
> Miguel – 124 menos 47… igual a ponto de interrogação.
>
> André – 124 menos 47, igual a ponto de interrogação.

Contudo, André pára e fica pensativo, observando o que Miguel ia fazendo, até que afirma que já sabia como poderia resolver:

> André – Ah, então já percebi! Então já sei… Pela recta?
>
> Miguel – É assim… qualquer coisa mais 47 é igual a todos os cromos! Qualquer coisa mais… 47, igual a 124. Então… 4 mais 2, do 24…
>
> André – Mas o 24 [124] é o resultado!

O seu colega decide recorrer à linha numérica e André, após permanecer algum tempo bastante pensativo, opta por seguir uma estratégia aditiva do tipo A10, onde a partir de 47 vai adicionando valores até alcançar 124 (figura 68).

À medida que regista os cálculos no caderno, percebe-se na gravação vídeo que André coloca a mão esquerda debaixo da mesa e, quando a retirava, anotava algo no seu caderno, o que parece indicar que talvez tenha feito alguns dos cálculos recorrendo à contagem pelos dedos.

> André – 54… 54 mais 10…50 mais 20… é 70… 74. 30… mais 24. É 74, 75, 76, 77. [conta pelos dedos]
>
> Miguel – Ya [*sic*], eu disse-te.
>
> André – Mas eu não fiz pela recta.
>
> Miguel – Eu sei, mas a recta era mais rápida.
>
> André – Não, por acaso até não era.

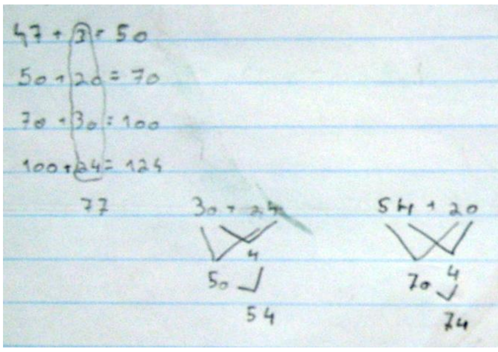


Figura 68. Resolução do problema “A caderneta das Winx” – André

Quando me aproximei do par, André referiu que tinha aproximado os resultados a “números redondinhos”:

> André – Eu fiz com números redondinhos.
>
> Professora – Ah, pois é! Explica lá como é que fizeste.
>
> André – Eu fiz 47 mais 3, 50.
>
> Professora – Como é que tu sabes que 47 mais 3 é 50?
>
> André – Porque 7 mais 3 é 10. Depois 50… é que como eu achava que aquilo ia demorar tirei logo o 20.
>
> Professora – Tiraste?
>
> André – Não, juntei… fiz 50 mais 20 igual a 70. 70 mais 30 igual a 100.

André, reconhecendo que de 50 para 124 era uma diferença grande, decidiu adicionar 20, mais do que habitualmente juntava. Na adição seguinte, deu igualmente um salto maior, de +30. Deste modo, André tornou esta estratégia mais eficiente.

Para calcular 50+20 e 70+30, o aluno recorre de novo a uma contagem por dezenas, levantando um dedo por cada grupo de 10 adicionado. Na última adição, é imediato para André que a 100 terá que juntar 24 para obter 124.

Ao adicionar todos os valores que foi juntando a 47, utilizou uma estratégia do tipo 1010.

> Professora – E depois como calculaste isto tudo?
>
> André – Depois eu fiz assim 30 mais 24, dá 50… Mas o 20 mais 3 eu não fiz, que eu já sabia que era 23.
>
> Professora – Então 30 mais este 24…
>
> André – Que está aqui.

André calculou 30+24 e 54+20 utilizando a estratégia do tipo 1010, até obter 74. Por fim, como seria apenas adicionar 3, André disse que já sabia que o resultado de 74+3 seria 77.

André parece ter utilizado a estratégia do tipo 1010 sem ter analisado os números em questão, pois para adicionar 30 a 24 ou 20 a 54 talvez o conseguisse fazer de outro modo. O gosto pelo aluno deste tipo de estratégia sobrepõe-se ao facto de esta não ser a mais indicada para utilizar. Talvez André tente utilizar este tipo de estratégia por ser um aluno bastante inseguro.

Síntese

2.ª cadeia de problemas

As estratégias utilizadas por André na resolução dos problemas desta cadeia são bastante mais complexas do que as identificadas na primeira cadeia, como se pode observar no quadro seguinte:

Quadro 13 – Estratégias utilizadas por André na resolução dos problemas da segunda cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Combinar	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 10S
Subtracção	Completar	"Os pontos do Daniel"	Parece não ter compreendido o problema, tendo copiado o registo do seu colega, Guilherme
Adição	Acrescentar	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Retirar	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010
	Comparar	"Pai e filho"	Estratégia aditiva do tipo A10, contudo, não aproxima os resultados de múltiplos de 10
		"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10 (aproximando os resultados intermédios a múltiplos de 10)
	Retirar	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010 (que parece não ter compreendido completamente)
	Completar	"A caderneta das Winx"	Estratégia aditiva A10 e estratégia aditiva 1010 (para adicionar valores intermédios)

Embora na cadeia anterior André tenha procurado utilizar estratégias do tipo 1010, sem a compreender completamente, nesta cadeia, recorre a estratégias da categoria 1010 na resolução de ambos os problemas de adição. No primeiro, *"Tiro ao alvo"*, utiliza uma estratégia do tipo 10S, variante da estratégia 1010. Por não voltar a recorrer a este tipo de estratégia, parece-me possível concluir que a utilizou numa tentativa de se aproximar da estratégia 1010, que em *"A festa da Cláudia"* utiliza sem qualquer dificuldade. André decompõe com facilidade os números nas suas ordens, sem perder a noção do valor relativo de cada algarismo.

Recorre a estratégias subtractivas 1010 em apenas dois problemas de subtracção, facto que poderá estar relacionado com o significado de retirar presente em ambos. Em *"Que azar!"*, o facto de o cálculo a efectuar se constituir como uma subtracção com empréstimo ofereceu alguma dificuldade a André. O resultado da subtracção 2-6 não foi imediato para o aluno, ficando a dúvida se compreendeu este cálculo. Por se tratar da primeira subtracção com empréstimo que André resolveu recorrendo a uma estratégia do tipo 1010, não é claro se o aluno realmente compreendeu todos os passos que efectuou.

Os restantes problemas da cadeia foram resolvidos através de estratégias aditivas do tipo A10. É possível identificar-se uma evolução na utilização deste tipo de estratégia, ao longo da cadeia. Inicialmente, no problema *"Pai e filho"*, André utiliza-a sem a preocupação de aproximar as somas intermédias a números de referência, seleccionando valores de modo aleatório ou cujo resultado fosse do seu domínio. Contudo, reconhecendo a importância de aproximar os cálculos a um número de referência, em *"Saltos à corda"*, começa a revelar uma escolha cuidada dos números a adicionar. Até que em *"A caderneta das Winx"*, e por ter um sentido crítico relativamente ao número que deveria adicionar a 47 para obter 124, opta por adicionar múltiplos de 10, tornando a utilização deste tipo de estratégia bastante rápida e eficiente.

Apesar da grande evolução a nível da complexidade das suas estratégias, André continua com algumas inseguranças na resolução dos problemas e, quando isso acontece, acaba por seguir as estratégias dos seus colegas, sendo difícil de perceber se seria capaz de compreender e resolver o problema de outro modo ou mesmo sozinho.

Resolução dos problemas da 3.ª cadeia (21 de Outubro de 2010)

"Cesto d'Ouro"

Inicialmente, André não compreendeu o problema e após tê-lo lido novamente afirmou:

> André – Então, 63.
>
> Professora – Incluindo aqueles que fez no mês passado.
>
> André – Então 134.
>
> Professora – Ele fez no mês passado 134, e agora já fez 63. Ao todo quanto é que já fez.
>
> André – Ah! Então 134 mais 63. Fácil.

André regista 134-63, calculando 30-60=-30. Ao registar este resultado, apercebe-se que estava a subtrair. Apagou o que fez e começou a efectuar a adição.

André recorreu a uma estratégia aditiva do tipo 1010, adicionando primeiro as dezenas, depois as unidades, e só no fim adicionou a centena. Provavelmente terá começado por adicionar as dezenas uma vez que a primeira parcela tinha três algarismos e a segunda apenas dois.

Ao calcular 30+60, André troca as parcelas, efectuando 60+30, dizendo em voz alta "60… 70, 80, 90", à medida que levanta um dedo por cada dezena que vai adicionando. Os restantes cálculos foram resolvidos com rapidez.

Quando terminou, pedi que explicasse como tinha resolvido o problema (figura 69):

> André – Fiz 30 mais 60 igual a 90.
>
> Professora – Como é que pensaste?
>
> André – Porque 6 mais 3 é 9.
>
> Professora – Mas eu vi-te fazer 60… 70, 80, 90. [levantando um dedo por cada dezena]
>
> André – Sim, e depois para corrigir fiz… 4 mais 3, 7. E não me esqueci do 100. 100 mais 90, 190 e 190 mais 7, 197.

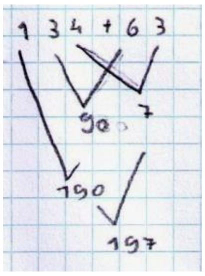


Figura 69. Resolução do problema "Cesto d'Ouro" – André

"Parar ou Avançar"

Após ter lido o enunciado, André revela que não compreendeu bem o problema:

> André – Ah, então é quantos pontos é que teve a menos que a Cláudia.
>
> Professora – A menos eu já sei, sei que são 43 pontos a menos. Quero saber então os pontos do Miguel.
>
> André – Ah, então…

Nesse momento registou 157-43, que começou a resolver recorrendo a uma estratégia subtractiva do tipo 1010. Começou por subtrair as dezenas, depois as unidades e no fim subtraiu 10 a 100, em vez de adicionar 10 ao 100.

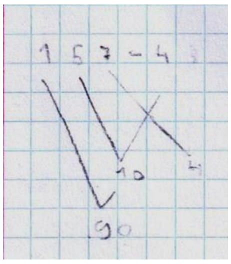


Figura 70. Resolução inicial do problema "Parar ou Avançar" – André

Quando terminou, observou o cálculo durante alguns instantes e apagou-o.

> Professora – Estás a apagar?
>
> André – É que eu acho que isto está mal. É porque… Estava-me a dar… Não sei, estava-me a dar um resultado que eu acho que estava errado.
>
> Professora – Porque é que achaste que estava errado?
>
> André – Porque, eu fiz 157 menos 43… Quando eu digo 50 é um bocado… é mais do que 40… Eu acho que estava mal porque como do 40 para 50 é 10, no problema estava a sair o 90. Se vamos tirar 50 e depois… É que eu não sei explicar muito bem.

Embora de modo um pouco confuso, é possível perceber que André foi capaz de rever os dados e o resultado obtido revelando um sentido crítico perante o resultado, relacionando-o com os dados em questão. André procurou explicar que se 50 é maior que 40, então ao efectuar 157-43, não poderia obter um resultado menor que 100.

O aluno tenta resolver o problema novamente, recorrendo agora a uma estratégia aditiva do tipo A10. O aluno aproximou 43 de um valor de referência, o 50, tentando depois aproximá-lo de 157.

Calculou a soma dos valores que foi adicionando a 43, sem qualquer registo (figura 71) e disse inseguro:

> André – Agora deu 114, não sei porquê… Se juntar isto, 114.
>
> Professora – Como é que juntaste?
>
> (…)
>
> André – Fiz 50… Este 5 [50] para este 5 [de 57] é 100. Depois este 7 e este 7 [de 57] é 14. Então é 114.
>
> Professora – E estás em dúvida?
>
> André – É que agora acho que sim… porque se nós estamos a tirar… Eu já percebi que estamos a tirar.

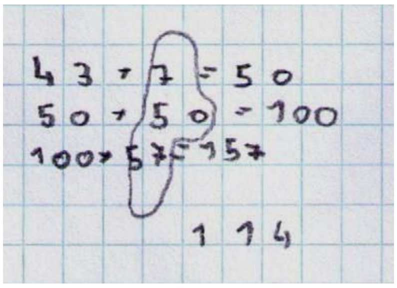


Figura 71. Resolução do problema "Parar ou Avançar" – André

André reconhece neste problema uma situação subtractiva, pois para além da sua resolução inicial ter sido através de uma estratégia subtractiva, depois de o tornar a resolver utilizando uma estratégia aditiva, refere "porque nós estamos a tirar".

"Na escola do Mário"

Após ter lido o problema André diz que não o percebe:

> André – Não estou a perceber. [lê o problema em voz alta]
>
> Professora – De todos os alunos que almoçaram, 129 escolheram laranja e…

André – E quantos é que almoçaram?

Professora – Dos que almoçaram, de todos os que almoçaram, 129 escolheram a laranja e 175 escolheram pêra.

André – Ah, então se nós juntarmos dá!

Resolve 129+175 utilizando uma estratégia aditiva do tipo 1010. Na adição, as duas parcelas têm igual número de algarismos e André adicionou primeiro as centenas, depois as dezenas e no final as unidades. Obtidas as somas intermédias, junta 200+90 e depois decompõe 14 em 10+4, para juntar 10 a 290, aproximando-o de 300.

André – Eu fiz 100 mais 100 que é 200. E depois 70 mais 20 que é 90. 9 mais 5, 14.

Professora – Como sabes que 9 mais 5 é 14?

André – Porque 10 mais 5 é 15. E depois 200 mais 90 é 290. Depois fiz 290 mais 10, 300 e 300 mais 4, 304.

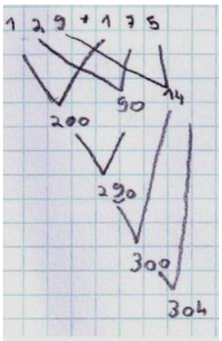


Figura 72. Resolução do problema "Na escola do Mário" – André

"Uma sessão de cinema"

André não demonstrou qualquer dificuldade a nível da interpretação do problema, começando a resolvê-lo logo após a sua leitura.

Utilizou uma estratégia aditiva do tipo A10, começando por adicionar 5 a 125. Depois efectua 130+30, recorrendo a um facto numérico do seu domínio: se 30+30=60, então 130+30=160. No cálculo seguinte, André efectua 160+30, dizendo em voz alta "70, 80, 90" à medida que vai levantando um dedo por cada dezena adicionada. Adiciona depois uma dezena a 190 e por fim junta 57, alcançando 257. De seguida, observa durante alguns instantes as adições realizadas, tentando calcular o total dos valores adicionados a 125.

Professora – Queres fazer isso em voz alta? Ou não te dá jeito?

André – Sim, 57 mais 10, 67. 67 mais 30, 97. 97 mais 30… [levanta três dedos] Acho que é 207.

Professora – Se quiseres vai fazendo por partes.

André volta a observar com atenção a sua resolução. Levanta dois dedos, no entanto não se compreende que cálculo tentou realizar. Após alguns momentos, embora inseguro, refere que o resultado é 163.

Professora – Como é que fizeste?

André – Eu agora fiz, 57 mais 10, 67. 67 mais 5… [conta pelos dedos, a partir de 67] é 72. Ah não…

O aluno fica de novo bastante pensativo, pelo que lhe digo para ir fazendo alguns registos ao lado, para não se perder. André escreve “67+5=”, decompondo o 5 em 2+3. De seguida, de modo seguro, confirma que é 72. Volta a observar a sua resolução e, passados alguns instantes, afirma:

André – Eu acho que é 132.

Professora – Estavas no 72, e depois o que fizeste?

André – Juntei 30. (…) Fiz 70 depois mais 30 que é 90.

Professora – 70 mais 30 é 90?

André – Ah não, é 100. Deu 102. E depois fiz 102 mais 30 que é 132.

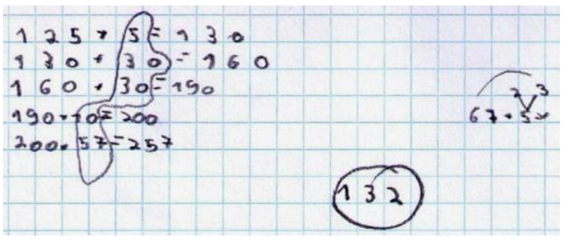


Figura 73. Resolução do problema “Uma sessão de cinema” – André

“Concurso na livraria”

André compreendeu com facilidade o enunciado do problema e resolveu-o através de uma estratégia aditiva do tipo A10, como se pode ver na figura da página seguinte.

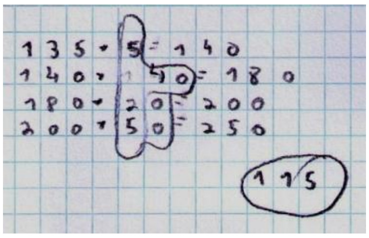


Figura 74. Resolução do problema “Concurso na livraria” – André

Foi com rapidez que efectuou as adições, levantando os dedos para calcular 180+20. Como já fez em resoluções anteriores, levantou um dedo por cada dezena adicionada, à medida que ia dizendo “190, 200”. Nos restantes cálculos, não recorreu a esta contagem. Talvez tenha sentido necessidade de o fazer nesta adição por se tratar da alteração do número de centenas.

Ao adicionar todos os valores a 135, reparou que colocara 140 em vez de 40 e apagou o algarismo da ordem das centenas.

Inicialmente, André rodeou apenas os algarismos da esquerda dos números cuja soma queria calcular, perguntei-lhe se o tinha feito por algum motivo específico, pensando que o aluno o tivesse feito para adicionar os números como se de unidades se tratassem. Mas André parece tê-lo feito por distracção, apagando e rodeando todos os números.

André – Acho que é 205.

Professora – Como é que fizeste?

André – Foi assim 50 mais 40, 90, porque 40 mais 40 é 80. 90 mais 20, 200.

Professora – 90 mais 20 é 200? Porquê?

André – Ah, não. É 110 acho eu.

Professora – Como é que fizeste agora?

André – Eu fiz 90 mais 10 é 100, e mais outros 10 é 110. E 110 mais 5 é 115.

Síntese

3.ª cadeia de problemas

No quadro seguinte, identificam-se as estratégias de resolução utilizadas por André nesta cadeia:

Quadro 14 – Estratégias utilizadas por André na resolução dos problemas da terceira cadeia

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Acrescentar	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Comparar	"Parar ou Avançar"	Tentou utilizar uma estratégia subtractiva 1010, mas perante uma análise crítica do resultado, optou por uma estratégia aditiva do tipo A10
Adição	Combinar	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Subtracção	Retirar	"Uma sessão de cinema"	Estratégia aditiva A10
	Completar	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10

Como se pode observar, André recorreu a estratégias do tipo 1010 na resolução dos dois problemas de adição. Em *"Cesto d'Ouro"*, o facto dos valores a adicionar terem diferente número de algarismos não dificultou o cálculo a André, que começou por adicionar a ordem das dezenas, depois das unidades, tendo adicionado a centena apenas no fim.

Esta foi também a estratégia que André seleccionou inicialmente para resolver o problema de subtracção, com o significado de comparar, *"Parar ou Avançar"*. Mais uma vez, tal como na situação descrita anteriormente, por se tratar de uma subtracção com diferente número de algarismos, André começa por subtrair a ordem das dezenas e das unidades, contudo, no fim, subtrai a centena em vez de a adicionar. Neste problema André revela grande sentido crítico e uma boa estimação do resultado, tendo optado depois por seguir uma estratégia aditiva do tipo A10.

André recorreu a este tipo de estratégia na resolução dos restantes problemas de subtracção. E tal como já tinha demonstrado na cadeia anterior, também nestas resoluções, o aluno utiliza esta estratégia com bastante agilidade.

É importante referir que André demonstra um maior domínio de factos numéricos, embora continue a recorrer à contagem pelos dedos em algumas situações, utiliza com frequência factos numéricos para efectuar os cálculos.

Importa também recordar que, na resolução dos problemas da cadeia anterior, André revelou por vezes alguma insegurança, sendo por vezes difícil perceber se de facto o aluno compreendia as estratégias que utilizava. Nesta cadeia estas dúvidas dissipam-se, pois André resolve com confiança os diferentes problemas, sendo possível perceber que o seu conhecimento dos números, operações e suas relações evoluiu de modo considerável.

Síntese global

Na resolução dos problemas de adição, das três cadeias aplicadas, identifica-se uma evolução das estratégias utilizadas por André (ver quadro 20, no anexo 4). Começou por recorrer a estratégias elementares de cálculo, onde utilizava uma contagem de um em um, a partir de determinado número, usando os dedos ou a linha numérica como suporte dessa contagem. Contudo, o trabalho com a sua colega Cátia, em *"A lista de palavras do Vasco"*, influenciou André na escolha de estratégias do tipo 1010, sempre que estava perante adições. Embora inicialmente não compreenda o raciocínio envolvido neste tipo de estratégia, na segunda cadeia o aluno começa a revelar um entendimento dos números como um todo, decompondo e recompondo o resultado final com compreensão. Na terceira cadeia, continua a demonstrar preferência por este tipo de estratégia na resolução dos problemas de adição, a que recorre sem dificuldade, mesmo perante valores com diferente número de algarismos.

Nas resoluções de André dos problemas de subtracção, identifica-se também uma evolução na complexidade das estratégias utilizadas. André parece não ter compreendido os problemas "*Chupa-chupas para todos!*", "*Os pontos do Daniel*" e "*Que azar!*", pelo que estes não serão considerados nesta análise. Tal como nas estratégias utilizadas nos problemas de adição, André começou por resolver os problemas de subtracção recorrendo a estratégias de contagem. A influência da estratégia do tipo 1010 reflecte-se na resolução dos problemas da segunda cadeia, com o significado de retirar. Contudo, André sente dificuldade ao utilizá-la numa subtracção com empréstimo. Este aspecto poderá justificar a preferência de André pela estratégia do tipo A10, pertencente à categoria N10, a que recorreu na maioria dos problemas de subtracção.

Como já foi referido, André utilizou a estratégia A10 com progressiva agilidade. Nas suas resoluções iniciais os números são seleccionados de modo praticamente aleatório, até que, nas últimas resoluções, André utiliza esta estratégia aproximando os resultados intermédios a números de referência, facto que permite uma maior rapidez na sua utilização e reflecte a evolução do seu sentido de número.

Na resolução dos problemas das três cadeias, recorre com frequência a estratégias do tipo 1010 na resolução dos problemas de adição, independentemente do seu significado. Quanto às estratégias utilizadas nos problemas de subtracção, existe uma preferência por estratégias aditivas do tipo A10 quando estes têm o significado de comparar ou completar. Nos problemas com o significado de retirar, não é possível concluir se André tem preferência por algum tipo de estratégia, uma vez que recorre tanto a estratégias do tipo 1010 como A10.

Capítulo V

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES DO ESTUDO E RECOMENDAÇÕES

Síntese do estudo

Com este estudo pretendo compreender de que modo os alunos do 1.º ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção. Para isso, procurei identificar as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtracção, o modo como estas evoluem, procurando também compreender qual a influência do significado da operação presente no problema na estratégia de cálculo mental utilizada na sua resolução.

Dada a problemática do estudo, segui uma metodologia qualitativa com carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), com o *design* de estudo de caso (Yin, 2009).

O trabalho de campo foi iniciado no ano lectivo de 2009/2010, com a minha turma do 1.º ano de escolaridade, de onde seleccionei três alunos, tendo sido concluído no início do ano lectivo de 2010/2011, quando os alunos frequentavam o 2.º ano de escolaridade.

Foram planificadas e realizadas três cadeias de problemas de adição e subtracção, contemplando os diferentes significados que estas operações podem assumir. As primeiras duas cadeias foram realizadas a pares, não fixos, por toda a turma na sala de aula, no 2.º e 3.º períodos do 1.º ano de escolaridade. Os problemas da última cadeia foram resolvidos apenas pelos três alunos seleccionados em Outubro do 2.º ano de escolaridade, de modo individual e fora da sala de aula.

Para a recolha de dados recorri à gravação áudio e vídeo, à observação participante, notas de campo e fotografias dos trabalhos dos alunos.

Na identificação das estratégias de cálculo mental utilizadas na resolução dos problemas de adição e subtracção, segui a categorização das estratégias já apresentada para o cálculo com números menores que 20 (Thompson, 1999, 2009; Treffers, 2008) e com números superiores a 20 (Beishuizen, 1993, 1997, 2001, 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998).

As conclusões apresentadas resultaram da análise de todos os problemas resolvidos ao longo das três cadeias, considerando as sínteses realizadas no final da resolução de cada cadeia e a síntese global feita no final das três cadeias, relativamente a cada aluno seleccionado para este estudo.

Conclusões

Para conseguir dar resposta às questões que orientaram este estudo, apresentarei as conclusões organizadas segundo três aspectos: i) relação entre o significado presente em cada problema e a operação utilizada na sua resolução; ii) relação entre o significado dos problemas de adição e os tipos de estratégias utilizadas na sua resolução; e iii) relação entre o significado dos problemas de subtracção e os tipos de estratégias utilizadas na sua resolução.

Terminarei com uma análise sobre a minha própria aprendizagem, resultante deste estudo, e qual o seu reflexo na minha prática.

Relação entre o significado presente em cada problema e a operação utilizada na sua resolução

Todos os problemas de adição propostos, com os significados de combinar e acrescentar, foram sempre resolvidos recorrendo a estratégias aditivas.

Nos problemas de subtracção (ver quadro 15) verifica-se uma preferência pela operação da subtracção na resolução dos problemas com o significado de retirar, o que parece sugerir a influência deste tipo de problemas na utilização da subtracção. Nos problemas com os significados de comparar e completar, é usada principalmente a adição.

Estes resultados estão de acordo com as conclusões do estudo apresentado por Cooper, Heirdsfield e Irons (1995), onde alunos de 2.º e 3.º ano recorreram, principalmente, a estratégias subtractivas na resolução de problemas com o significado de retirar e a estratégias aditivas em problemas com o significado de completar (Heirdsfield & Cooper, 1996).

Quadro 15 – Operações utilizadas pelos três alunos na resolução dos problemas de subtracção das três cadeias

			Operação usada na resolução do problema		
Significado	Cadeia	Problema	Cátia	Miguel	André
Retirar	1	*"Uma ida ao teatro"*	Adição	Subtracção	Subtracção
	2	*"Viagem de autocarro"*	Subtracção	Subtracção	Subtracção
	2	*"Que azar"*	Subtracção	Subtracção	*
	3	*"Uma sessão de cinema"*	Subtracção	Subtracção	Adição
Comparar	1	*"A mana das gémeas"*	Adição	Adição	Subtracção
	2	*"Pai e filho"*	Adição	Adição	Adição
	2	*"Saltos à corda"*	Adição	Adição	Adição
	3	*"Parar ou Avançar"*	Subtracção	Subtracção	Adição (subtracção inicial)
Completar	1	*"As leituras da Marta"*	Adição	Adição	Subtracção
	1	*"Chupa-chupas para todos!"*	Adição	Adição	*
	2	*"Os pontos do Daniel"*	Adição	Adição	*
	2	*"A caderneta das Winx"*	Adição	Subtracção	Adição
	3	*"Concurso na livraria"*	Adição	Adição	Adição

É importante salientar que não existe uma unanimidade na operação utilizada em todos os problemas com o mesmo significado, o que sugere, tal como Fuson (1992) refere, "que há uma importante distinção a fazer entre o tipo de problema e a operação (de adição ou subtracção) necessária para descobrir a quantidade desconhecida" (p. 245).

Também Fosnot e Dolk (2001) sublinham que apesar do professor ter um determinado significado em mente quando planifica os seus problemas, os alunos poderão interpretá-los de modo diferente. Mas este aspecto evidencia também como as operações de adição e subtracção se encontram intimamente relacionadas e, por isso, a

* Como já foi referido, este problema não foi compreendido pelo aluno, pelo que não foi considerado nesta análise.

necessidade de propor aos alunos vários problemas com diferentes significados das operações (Fosnot & Dolk, 2001; Ponte & Serrazina, 2000).

Relação entre o significado dos problemas de adição e os tipos de estratégias utilizadas na sua resolução

Para melhor se compreender e comparar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos em todos os problemas de adição, estas foram organizadas no quadro 16, de acordo com o significado de cada problema.

Quadro 16 – Estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas de adição das três cadeias

			Estratégia utilizada na resolução do problema		
Significado		Problema	Cátia	Miguel	André
Combinar	1	*"Gormitis"*	Utilização de factos numéricos de adição	Utilização de factos numéricos de adição	Contagem crescente a partir do número maior
	2	*"Tiro ao alvo"*	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 10S
	3	*"Na escola do Mário"*	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010
Acrescentar	1	*"A idade do Dinis"*	Contagem crescente a partir do primeiro número	Utilização de factos numéricos de adição	Contagem crescente a partir do primeiro número
	1	*"A lista de palavras do Vasco"*	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva A10	Contagem crescente a partir do primeiro número
	2	*"A festa da Cláudia"*	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010
	3	*"Cesto d'Ouro"*	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010	Estratégia aditiva 1010

Os dados recolhidos parecem-me insuficientes para concluir sobre a influência do significado de cada problema de adição na estratégia utilizada. Por um lado, as estratégias mais utilizadas na resolução dos problemas com ambos os significados foram do mesmo tipo (1010), estando de acordo com as conclusões de Carpenter e

Moser (1984, em De Corte & Verschaffel, 1987) quando referem que, geralmente, os alunos não distinguem estes dois significados da adição.

Por outro lado, ao analisar o quadro 16 em pormenor, verifica-se que André recorreu a uma contagem a partir do número maior no problema "*Gormitis*", com o significado de combinar, e efectuou uma contagem a partir do primeiro número (que nos problemas era o menor) em "*A idade do Dinis*" e "*A lista de palavras do Vasco*", ambos com o significado de acrescentar. Esta diferença poderá sugerir a possível influência do significado dos problemas nas estratégias utilizadas por André, o que está de acordo com os resultados da investigação realizada por De Corte e Verschaffel (1987) que, contrariando Carpenter e Moser, afirmam que existe influência entre o tipo de problema e a estratégia utilizada pelos alunos.

Analisando as estratégias usadas pelos alunos, identifica-se, na primeira cadeia, a utilização de estratégias de cálculo assentes em contagens e na utilização de factos numéricos de adição, o que poderá estar relacionado com a ordem de grandeza dos números envolvidos. Este é um dos aspectos que Fuson (1992) considera poder alterar a estratégia de resolução, referindo que as crianças aprendem primeiro factos numéricos com números mais pequenos, por isso é provável que os utilizem na resolução de problemas que envolvam esse tipo de números.

O domínio de factos numéricos, como é referido por vários autores (por exemplo, Baroody, 2006; Beishuizen & Anghileri, 1998; Fosnot & Dolk, 2001; Sowder, 1992), é essencial para o desenvolvimento de estratégias cada vez mais eficientes, sendo a partir destas estratégias elementares que outras mais complexas são desenvolvidas, essas sim características do cálculo mental (Fuson *et al.*, 1997). De facto, à medida que os problemas de adição foram resolvidos, identificou-se uma evolução das estratégias utilizadas pelos três alunos baseadas em factos numéricos para as do tipo 1010. Estas evidências coincidem também com a análise de Beishuizen (1993) que refere que existe uma preferência natural e espontânea das crianças pela utilização da estratégia do tipo 1010.

Estes resultados estão igualmente de acordo com as conclusões do estudo realizado por Thompson e Smith (1999), onde a estratégia do tipo 1010 foi a mais utilizada na resolução de adições. É importante referir que se estão a comparar resultados entre alunos com idades compreendidas entre os 8 e os 10 anos, participantes no estudo de Thompson e Smith, e alunos do 1.º ano de escolaridade participantes neste estudo. Estas semelhanças não são apenas ao nível das estratégias utilizadas na resolução de adições, mas também a nível dos cálculos de adição efectuados, que no estudo de Thompson e Smith envolviam números de dois algarismos.

A preferência pela utilização de estratégias do tipo 1010 na resolução de adições poderá também dever-se à dificuldade, identificada por Beishuizen (1993, 2009), em adicionar múltiplos de dez a partir de qualquer número, que foi sentida pelos alunos do estudo aquando da resolução dos problemas. Tal como esta autora refere, a agilidade neste tipo de cálculos não é necessária na utilização de estratégias do tipo 1010, uma vez que os números a adicionar são sempre dezenas exactas (ou outra ordem), o que simplifica o cálculo. Para além disso, na utilização de estratégias do tipo 1010 os cálculos a efectuar baseiam-se em factos numéricos já adquiridos, por exemplo, se 4+2=6 então 40+20=60 (Beishuizen, 1993), bastante utilizados pelos três alunos deste estudo, cujas evidências foram já apresentadas na análise da resolução dos problemas.

É ainda importante reflectir sobre a influência que o trabalho a pares e a discussão dos problemas em colectivo teve na utilização deste tipo de estratégia. Tal como referido na análise da resolução dos problemas, Cátia utilizou pela primeira vez esta estratégia na primeira cadeia. Por tê-la usado no seu trabalho a pares com André, também ele a procurou utilizar nos problemas seguintes, e no momento de discussão em grande grupo, Miguel teve a oportunidade de conhecer esta estratégia partilhada por Cátia, a que recorreu com frequência nos restantes problemas de adição. Estas evidências vêm reforçar as conclusões de César (2000) e César *et al.* (1999), que referem que neste modo de trabalho os alunos:

> “são confrontados com outras estratégias de resolução, o que os incita a descentrarem-se das suas posições iniciais e a terem de compreender outras formas de abordar o mesmo problema, que conduzem a raciocínios diferentes dos seus. Este percurso interactivo, que os leva a discutirem em conjunto o que cada um pensou e fez, fá-los apreender mais conhecimentos e adquirir mais competências matemáticas” (César *et al.*, 1999, pp. 86-87).

Relação entre o significado dos problemas de subtracção e os tipos de estratégias utilizadas na sua resolução

De um modo geral, os alunos recorreram a dois tipos de estratégias na resolução dos problemas de subtracção: estratégias subtractivas do tipo 1010 e estratégias aditivas do tipo A10. As primeiras foram utilizadas com maior frequência na resolução dos problemas com o significado de retirar. Os restantes problemas, com os significados de comparar e completar, foram geralmente traduzidos pelos alunos por uma expressão do tipo a+?=b, resolvida principalmente através de estratégias aditivas do tipo A10 (quadro 17). Carpenter *et al.* (1998) e De Corte e Verschaffel (1987) apontam este tipo de estratégias como das mais utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de subtracção (também em Serrazina, 1994), nomeadamente nos que envolvem o significado de completar, como concluído no estudo apresentado por Cooper, Heirdsfield e Irons (Heirdsfield & Cooper, 1996), já mencionado.

Quadro 17 – Estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas de subtracção das três cadeias

			Estratégia utilizada na resolução do problema		
Significado	Cadeia	Problema	Cátia	Miguel	André
Retirar	1	*"Uma ida ao teatro"*	Contagem dos que sobram (a partir de uma representação icónica)	Estratégia subtractiva de saltos através do 10	Contagem para trás a partir de um número
	2	*"Viagem de autocarro"*	Estratégia subtractiva 1010	Estratégia subtractiva 1010	Estratégia subtractiva 1010
	2	*"Que azar!"*	Estratégia subtractiva 1010	Estratégia subtractiva 1010	*
	3	*"Uma sessão de cinema"*	Estratégia subtractiva 1010	Estratégia subtractiva N10	Estratégia aditiva A10
Comparar	1	*"A mana das gémeas"*	Estratégia aditiva de saltos através do 10	Utilização de factos numéricos de adição	Contagem para trás a partir de um número
	2	*"Pai e filho"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10 seguida de estratégia subtractiva A10	Estratégia aditiva A10 (sem aproximação a números de referência)

* Este problema não foi compreendido pelo aluno, pelo que não foi considerado nesta análise.

Quadro 17 (continuação)

Comparar	2	*"Saltos à corda"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10 (com aproximação a números de referência)
	3	*"Parar ou Avançar"*	Estratégia subtractiva 1010	Estratégia subtractiva N10	Estratégia aditiva A10 (tentativa inicial com estratégia subtractiva 1010)
Completar	1	*"As leituras da Marta"*	Estratégia aditiva A10	Contagem crescente de dois em dois	Contagem para trás a partir de um número
	1	*"Chupa-chupas para todos!"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10	*
	2	*"Os pontos do Daniel"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10	*
	2	*"A caderneta das Winx"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia subtractiva A10	Estratégia aditiva A10
	3	*"Concurso na livraria"*	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10	Estratégia aditiva A10

É então possível concluir que as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos são fortemente influenciadas pelo tipo de problema. Os resultados do presente estudo apontam para diferenças ao nível do tipo de estratégias utilizadas nos problemas com o significado de retirar e as que são utilizadas nos problemas com os significados de comparar e completar.

Parece-me ser ainda possível relacionar o tipo de estratégia utilizada com a operação identificada na resolução dos diferentes tipos de problemas. Anteriormente foi possível verificar que os alunos usam a subtracção principalmente nos problemas com o significado de retirar. Este facto sugere que os alunos, ao identificarem a operação da subtracção envolvida no problema, parecem preferir a utilização de uma estratégia subtractiva do tipo 1010 para a sua resolução.

* Este problema não foi compreendido pelo aluno, pelo que não foi considerado nesta análise.

Em diferentes investigações (Beishuizen, 2001; Carpenter *et al.*, 1998; Thompson & Smith, 1999), os alunos parecem privilegiar a utilização de estratégias pertencentes à categoria N10 na resolução de subtracções. No entanto, os resultados obtidos neste estudo contrariam essas conclusões, uma vez que os três alunos, perante uma subtracção, preferiram estratégias subtractivas do tipo 1010. Ao contrário do que refere a literatura (por exemplo, Beishuizen, 2009; Fuson *et al.*, 1997; Thompson, 2000; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), de um modo geral, a utilização deste tipo de estratégia em situações de subtracção com empréstimo não trouxe dificuldades para os alunos, o que indica a compreensão que estes possuem sobre a subtracção, particularmente a nível da direccionalidade desta operação, ou seja, da sua falta de comutatividade, e a nível do conhecimento e domínio dos números negativos (Fuson *et al.*, 1997) que Thompson (2000) atribui aos alunos com maior facilidade de cálculo. Estes resultados são surpreendentes quando comparados com as conclusões do estudo apresentado por Macintyre e Forrester (2003), onde alunos do 7.º ano revelaram grande dificuldade no cálculo de subtracções com empréstimo, com números de dois algarismos, cometendo os erros geralmente associados à utilização de estratégias do tipo 1010 na subtracção.

No entanto, uma das fragilidades deste tipo de estratégia foi identificada no meu estudo no cálculo de diferenças de números representados com um diferente número de algarismos, conduzindo a uma recomposição incorrecta do resultado final. Apesar dos alunos terem ultrapassado esta dificuldade – através do seu sentido crítico perante o resultado, recorrendo a uma relação entre a adição e subtracção para confirmação do resultado, ou optando por outro tipo de estratégia – a utilização da estratégia do tipo 1010 nesta situação evidencia a fraqueza que Beishuizen (2001) associa a este tipo de estratégia, nomeadamente na perda do sentido de número durante o procedimento de cálculo.

O uso de estratégias pertencentes à categoria N10, em particular de estratégias do tipo A10, foi geralmente acompanhado pela utilização da linha numérica vazia. Thompson (2000) reforça a importância deste suporte, especialmente no uso da estratégia do tipo A10, através do qual os alunos conseguem controlar os cálculos efectuados, constituindo-se também como um suporte privilegiado para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental progressivamente mais eficientes, a partir de estratégias inicialmente informais (Beishuizen, 2009; Klein, Beishuizen & Treffers, 1998).

Os resultados deste estudo mostram que os alunos recorreram com facilidade à linha numérica vazia para apoiarem os seus cálculos, cuja utilização foi agilizada ao longo da resolução dos problemas das três cadeias, reflectindo-se na utilização de estratégias cada vez mais complexas, confirmando a importância da linha numérica vazia para a aprendizagem de estratégias de cálculo mental mais complexas e eficientes, particularmente a nível de estratégias do tipo N10.

Neste estudo, não foi seguida uma trajectória de aprendizagem das diferentes estratégias de cálculo mental, como a que é proposta, por exemplo, por Buys (2001). Até ao início da recolha de dados, as estratégias utilizadas pelos alunos da turma baseavam-se principalmente em factos numéricos. Por isso, foi possível identificar as primeiras utilizações de estratégias do tipo 1010 e N10 na resolução dos problemas das cadeias propostas, sem que estas tenham sido formalmente ensinadas aos alunos, o que vem ao encontro a Beishuizen (2001) e Carpenter *et al*. (1998) quando referem que os alunos são capazes de desenvolver estratégias informais de cálculo sem que estas lhes sejam ensinadas, e o facto de serem capazes de o fazer reflecte o seu entendimento dos números, ou seja, o seu sentido de número (Carpenter *et al.*, 1998).

Em resumo, através deste estudo foi possível concluir que:

i. as estratégias usadas pelos alunos evoluíram de estratégias assentes em contagens e utilização de factos numéricos para estratégias do tipo 1010 e N10, sem que estas lhes tenham sido formalmente ensinadas;
ii. os alunos mostraram preferência pela utilização de estratégias do tipo 1010 na resolução de adições;
iii. as estratégias de resolução dos problemas de subtracção parecem estar relacionadas com o significado neles presente, sendo privilegiadas estratégias do tipo 1010 na resolução de problemas com o significado de retirar e estratégias aditivas do tipo A10, pertencentes à categoria N10, em problemas com os significados de comparar e completar;
iv. a utilização de estratégias do tipo 1010 ofereceu dificuldades aos alunos em situações de subtracção com números representados com diferente número de algarismos;

v. o ambiente de sala de aula, onde o trabalho a pares e a discussão em colectivo foram modos de trabalho privilegiados, parece ter influenciado a utilização de estratégias de cálculo mental mais eficientes, nomeadamente a nível da estratégia do tipo 1010;

vi. os alunos utilizaram estratégias de cálculo mental geralmente referidas na literatura em alunos mais velhos.

De referir a relevância deste último aspecto, particularmente na nossa prática enquanto professores. O facto de, habitualmente, se associarem estratégias de cálculo mental mais complexas a alunos mais velhos (ver, por exemplo, Beishuizen, 1993; 2001; Buys, 2001; Cooper, Heirdsfield & Irons, 1995; Thompson & Smith, 1999), parece reflectir-se nas práticas de sala de aula dos primeiros anos, onde, muitas vezes, é dada uma atenção quase em exclusivo a estratégias de cálculo elementares. Contudo, este estudo apresenta evidências de que, num bom ambiente de aprendizagem, como o que é defendido, por exemplo, por Cobb *et al.* (1988), Fuson (1992) e Yackel *et al.* (1991), os alunos de 1.º ano são capazes de desenvolver as suas estratégias de cálculo, evoluindo para estratégias de cálculo mental cada vez mais complexas e eficientes, à medida que desenvolvem a sua compreensão dos números e operações, fundamental para um bom sentido de número.

A minha aprendizagem como professora

Enquanto professora, procuro reflectir sobre a minha prática, tentando melhorar aspectos relacionados com áreas específicas de Matemática e relativos ao ambiente que desejo promover em sala de aula.

Segundo Serrazina e Oliveira (2002) "desenhar e conduzir investigação torna-se um novo modo de reflectir sobre os alunos, a mudança e nós próprios" (p. 285). De facto, este estudo constituiu-se como a primeira oportunidade de estudar e compreender determinados aspectos envolvidos na minha prática, proporcionando-me um olhar crítico sobre os meus alunos e sobre mim própria. Mas este olhar traz alguns receios. A fase da recolha de dados foi particularmente desafiante, questionando-me constantemente: Será que os problemas foram bem construídos? Terei colocado as questões correctas? Será que soube dinamizar a troca de ideias entre os alunos?

Também na análise dos dados, ao transcrever a gravação áudio com a ajuda da gravação vídeo, me deparei com o tipo de questões colocadas, o modo como tentava auxiliar os alunos nas suas dúvidas ou como orientava a discussão em grande grupo. De entre os aspectos que me surpreenderam e motivaram uma mudança do meu comportamento, destaco a minha preocupação em explicar o modo como os alunos pensaram, após terem partilhado as suas estratégia à turma, em vez de permitir que fossem os próprios alunos a tentar explicar aos seus colegas. Destaco também o curto período de tempo dado para a resposta dos alunos às minhas questões, quando os tentava auxiliar na resolução dos problemas. Ao escutar a gravação áudio era possível perceber que, em algumas situações, os alunos provavelmente seriam capazes de explicar melhor o seu raciocínio ou responder à questão colocada se lhes tivesse sido dado mais tempo.

O duplo papel de professora e investigadora não é de todo fácil, pois dentro da sala de aula é muito difícil gerir estas duas facetas: por um lado senti uma grande preocupação em compreender de que modo os três alunos seleccionados para este estudo resolviam cada problema, procurando obter o máximo de dados possível, mas, por outro lado, como apoiar os restantes 22 alunos da turma?

Contudo, o facto de ser a professora da turma facilitou muitos outros aspectos, nomeadamente a nível do ambiente vivido em sala de aula, que em nada se alterou, e que poderia ter impacto nos resultados obtidos, e a nível da relação já existente com os alunos, que me permitiu compreender aspectos como as suas expressões faciais ou corporais ou entoações nos seus discursos, que para uma pessoa exterior, poderiam ser difíceis de interpretar.

Ao realizar este estudo, confrontei-me com algumas questões cuja resposta não era tão clara quanto julgava: O que é o cálculo mental? Que estratégias são características deste tipo de cálculo? Que aspectos do sentido de número lhes são inerentes?

Antes de realizar este trabalho, apesar de valorizar o cálculo mental, as tarefas que propunha aos meus alunos tinham como objectivo respostas imediatas e, geralmente, sem qualquer tipo de registo para além do resultado. Analisando agora este tipo de tarefas, apercebo-me que estas, na sua maioria, apenas promoviam o desenvolvimento de estratégias baseadas em factos numéricos básicos que, embora importantes, deviam depois evoluir para estratégias mais complexas.

Ao estudar os diferentes tipos de estratégias, bem como as vantagens e possíveis dificuldades na sua utilização, consegui, no trabalho diário em sala de aula, começar a identificar o tipo de estratégias usadas pelos alunos, assim como propor determinadas tarefas aos alunos de modo a que estes fossem confrontados com as fragilidades de cada tipo de estratégia. Ao fazê-lo, recolhi importantes evidências sobre a compreensão de cada aluno dos cálculos envolvidos na estratégia que utilizava.

Outro aspecto que teve particular impacto na minha prática foi a importância da resolução de problemas com os diferentes significados das operações de adição e subtracção. Embora estes fossem do meu conhecimento, nem sempre eram considerados na planificação dos problemas. Neste estudo identifiquei determinados problemas que, pelo significado envolvido ou pela construção do enunciado, eram por vezes de difícil interpretação para os alunos, o que reforça a importância da realização de problemas diversificados, com diferentes contextos, atentando também ao tipo de enunciado.

Com este estudo tive também a oportunidade de compreender a dinâmica existente no trabalho a pares. Sempre valorizei o trabalho a pares ou em pequenos grupos e, embora consiga perceber como funcionam, o modo como os alunos falam entre si acaba por se alterar com a minha presença no grupo. Ao ter a possibilidade de ouvir o discurso entre cada par na gravação áudio, confirmei a importância que este modo de trabalho tem para o desenvolvimento dos alunos, não só no domínio da matemática, mas também no domínio das suas atitudes.

A concluir, posso afirmar que este trabalho possibilitou-me analisar os meus alunos, o ambiente da minha sala de aula e a minha própria prática, de um modo profundo e crítico, como até então nunca tinha feito.

Limitações do estudo e Recomendações

Através deste estudo foi possível compreender que estratégias de cálculo mental foram desenvolvidas pelos alunos, num contexto de resolução de problemas de adição e subtracção. Identificaram-se quais os tipos de problemas que parecem promover a utilização de determinadas estratégias de cálculo mental e, relativamente às estratégias do tipo 1010, quais as suas fragilidades. Concluiu-se que o ambiente de aprendizagem poderá ter influenciado a evolução das estratégias de cálculo mental, particularmente a nível da estratégia do tipo 1010. Para além disso, uma importante conclusão foi a de que estes alunos do 1.º ano, foram capazes de usar estratégias de cálculo mental mais complexas, associadas na literatura a alunos mais velhos.

Embora consciente da especificidade deste estudo – com três alunos da turma da qual sou professora, na escola onde lecciono, também ela com características próprias – as conclusões que dele emergem são, na minha opinião, de grande interesse para o ensino da matemática nos primeiros anos. As evidências mostram a ligação existente entre o desenvolvimento do sentido de número e o cálculo mental, cujo entendimento nem sempre é claro para nós professores. Os dados obtidos reafirmam a necessidade de propor situações diversificadas de adição e subtracção, envolvendo os seus diferentes significados, possibilitando assim que os alunos estabeleçam relações entre as operações.

As conclusões conduzem também à reflexão sobre o melhor modo de possibilitar aos alunos o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental cada vez mais eficientes. Apesar dos alunos serem capazes de desenvolver as suas próprias estratégias de cálculo, o professor tem a responsabilidade de promover um desenvolvimento dessas estratégias para outras progressivamente mais complexas. Mas é importante salientar que essa evolução resulta de um equilíbrio entre o conhecimento dos alunos e o que é ensinado pelo professor, pois "se estas estratégias [de cálculo mental] fossem objecto de ensino, haveria o perigo de as crianças as aprenderem como procedimentos de rotina, tal como acontece quando aprendem algoritmos usuais" (Carpenter *et al.*, 1998, p. 19).

As condições em que foi realizado este estudo constituem-se como uma das suas limitações. Se, por um lado, o facto de ser professora e investigadora me permitiu fazer a recolha de dados sem alterar o ambiente habitual em sala de aula, nem perturbar o comportamento dos próprios alunos, por outro lado a relação já estabelecida com cada um dos alunos, bem como o meu entendimento de cada um deles relativamente às suas aptidões na área de Matemática, poderá ter condicionado a análise dos dados. Apesar da minha tentativa de distanciamento enquanto professora destes alunos, será que uma análise dos mesmos dados realizada por outro investigador levaria às mesmas conclusões?

Outra limitação está relacionada com os problemas propostos ao longo do estudo. Foram resolvidos por cada aluno 20 problemas, organizados em três cadeias e de acordo com os cinco significados das operações de adição e subtracção, definidos por

Ponte e Serrazina (2000), cujos números envolvidos foram criteriosamente escolhidos. Contudo, ao analisar os dados, este número de problemas pareceu-me, por vezes, insuficiente de modo a contemplar todas as possíveis variáveis que poderão influenciar as estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos. Dado o tempo disponível para a realização da recolha de dados, e para a realização do estudo, seria difícil conseguir recolher e analisar dados de mais problemas, contudo, na minha opinião, seria pertinente elaborar um conjunto de problemas que para o mesmo significado incluíssem:

i. o cálculo com números representados por igual número de algarismos e por diferente número de algarismos;
ii. no enunciado de cada problema, primeiro a apresentação do número maior e depois o menor, e vice-versa;
iii. o cálculo de adições com e sem transporte e subtracção com e sem empréstimo.

Relativamente à relação entre o significado presente em cada problema e a estratégia de cálculo mental utilizada na sua resolução, existe ainda outro aspecto que poderia complementar ou acrescentar novas evidências ao presente estudo. Apesar de Fuson (1992) apresentar uma categorização diferente dos vários significados dos problemas de adição e subtracção do que a que foi seguida neste estudo, a autora descreve, para cada um dos significados, três sub-tipos de problemas. Uma vez que em cada situação de adição ou subtracção existem três quantidades, qualquer uma delas pode ser desconhecida, resultando assim três sub-tipos de problemas. Este aspecto não foi considerado por mim, no entanto, seria interessante analisar se estes sub-tipos de problemas, para cada um dos significados das operações, teria alguma influência nas estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos.

A resolução de problemas constitui-se como o contexto para a identificação de estratégias de cálculo mental, mas será que perante um cálculo sem qualquer contexto, os alunos utilizariam os mesmos tipos de estratégias de cálculo mental? Será que o contexto influencia a estratégia de cálculo mental usada pelos alunos? Na literatura existem várias investigações, aqui abordadas, onde foram identificadas as estratégias de cálculo mental utilizadas perante problemas numéricos (isto é, sem palavras), julgo que seria pertinente a realização de um estudo em que a esta problemática se aliasse o contexto, dado pelos problemas.

A recolha dos dados foi realizada entre o final de Janeiro e Outubro de 2010, acompanhando os alunos do 1.º para o 2.º ano de escolaridade, para melhor se compreender a evolução das estratégias de cálculo mental usadas, e permitiu a análise das primeiras utilizações das estratégias de cálculo mental mais complexas. No entanto, parece-me que seria interessante a realização de um estudo longitudinal cuja recolha de dados fosse feita desde o início do 1.º ano, promovendo assim uma caracterização em pormenor do desenvolvimento das estratégias de cálculo mental, a partir de estratégias mais elementares.

Uma vez que este estudo se centrou em problemas de adição e subtracção, operações privilegiadas nos primeiros anos, seria igualmente interessante a realização de um estudo onde se procurasse identificar as estratégias de cálculo mental utilizadas nas operações de multiplicação e divisão.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação Matemática*, 8, pp.7-10 e 35.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Albergaria, I. S. & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), pp. 22-31.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), pp. 294-323.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer & E. C. D. M. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: Freudenthal Institute.

Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching – Innovative Approaches for the Primary Classroom*, pp. 119–130. Buckingham: Open University Press.

Beishuizen, M. (2009). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 157–168. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Beishuizen, M. & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), pp. 519-538.

Boavida, A.,M.,R., Paiva, A.,L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97–115). Lisboa: Escolar Editora.

Buys, K. (2001). Progressive mathematization: sketch of a learning strand. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching – Innovative Approaches for the Primary Classroom* (pp. 107–118). Buckingham: Open University Press.

Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-146) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), pp. 3-20.

Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008) O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-133). Lisboa: Escolar Editora.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de* *investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp.257-273). Lisboa: SEM-SPCE.

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália - Actas da Escola de Verão em Educação Matemática - 1999* (pp. 5-46). Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática.

César, M., Torres, M., Caçador, F., & Candeias, N. (1999). E se eu aprender contigo? A interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. In M. V. Pires, C. M. Morais, J. P. da Ponte, M. H. Fernandes, A. M. Leitão, & M. L. Serrazina (Eds.), *Caminhos para a investigação em educação matemática em Portugal* (pp. 73-89). Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática / APM.

Christou, C. & Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), pp. 436-442.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1988). Creating a problem-solving atmosphere. *Arithmetic Teacher, 36*(1), pp. 72-74.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. & Irons, C. J. (1995). Years 2 and 3 children's strategies for mental addition and subtraction. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.) *Proceedings of 18th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 195-202). Darwin: Mathematics Education Group of Australasia.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), pp. 363-381.

Equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número (2005, 2007). *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares* (Vols. 1 e 2). Lisboa: APM.

Ferreira, E. (2008). A adição e a subtracção no contexto do sentido de número. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática.* pp. 135-157. Lisboa: Escolar Editora.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work – Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction.* Portsmouth NH: Heinemann.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan Publishing Company.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), pp. 130-162.

Heirdsfield, A. M. & Cooper, T. J. (1996). The "Ups" and "Downs" of subtraction: Young children's additive and subtractive mental strategies for solutions of subtraction word problems and algorithmic exercises. In P. Clarkson (Ed.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 261-268). Melbourne: Deakin University Press.

Klein, A. S., Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998). The empty number line in dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), pp. 443-464.

Macintyre, T. & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23*(2), pp. 49-54.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8. British Columbia: Canada.

McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2*(5), pp. 322-327.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.(Trabalho original publicado em inglês em 2000)

Noteboom, A., Bokhove, J. & Nelissen, J. (2008). Glossary Part I. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 89-91) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Pires, M. I. V. (1992). *Processos de resolução de problemas: Uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário.* Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Ponte, J. P. (1987). A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. *Educação e Matemática,* 4, pp. 5-6 e 26.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante, 3*(1), pp. 3-18.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Reys, R. E., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), pp. 225-237.

Ribeiro, D., Valério, N. & Gomes, J. T. (2009). *Cálculo Mental*. Brochura – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Escola Superior de Educação de Lisboa.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Serrazina, M. L. (1994). Aprendizagem da subtracção - Uma revisão de literatura. *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 73-89). Lisboa: APM.

Serrazina, L. (2002). Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, 69, pp. 57-60.

Serrazina, L. & Ferreira, E. (2005). Competência de cálculo? Sim! E também… colaborando a distância. In *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares* (Vol. 1, pp. 29-39). Lisboa: APM.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa: APM.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan Publishing Company.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 1. *Mathematics in School, 28*(5), pp. 2-5.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in School, 29*(1), pp. 24-26.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 145–156. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Thompson, I. & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction of 2-digit numbers* (Report for the Nuffield Foundation), Department of Education, University of Newcastle upon Tyne.

Treffers, A. (2008). Grade 1 (and 2) – Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 43-60) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2008). Big lines. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 95-99) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Varol, F. & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1), pp. 89-94.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Wheatley, G. H. (1999). Effective learning environments for promising elementary and middle school students. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing Mathematically Promising Students* (pp. 71-80). Reston, VA: NCTM.

Wood, T., Merkel, G. & Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre a matemática. *Educação e Matemática*, 40, pp. 39-43.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. & Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática*, 18, pp. 17-21.

Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: Design and Methods* (4th ed.) California: Sage Publications.

ANEXOS

ANEXO 1

Informação à Direcção da Escola

__________________, 9 de Setembro de 2009

Exmo. Sr. Director Pedagógico,

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado na área da Didáctica da Matemática, onde procuro estudar as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, pretendo realizar a recolha de dados na minha turma, de 1.º ano de escolaridade.

A recolha de dados irá decorrer ao longo de todo o ano lectivo, e será realizada apenas por mim e implicará a realização de entrevistas aos alunos, a gravação áudio e vídeo do trabalho realizado pelos alunos, bem como fotografias dos seus cadernos. Os nomes dos alunos serão alterados, de modo a preservar a sua identidade.

Obrigada pela atenção dispensada, sempre ao dispor,

(Cristina Morais)

ANEXO 2

Informação aos Encarregados de Educação

__________________, 22 de Setembro de 2009

Exmo. (ª) Sr. (ª) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado na área da Didáctica da Matemática, onde procuro estudar as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, pretendo realizar a recolha de dados na nossa turma.

Para o desenvolvimento do estudo será necessário realizar entrevistas a alguns alunos e registar em áudio e vídeo o trabalho realizado ao longo do ano lectivo, pelo que solicito e agradeço desde já a sua compreensão. Acrescento ainda que a recolha de dados será efectuada apenas por mim e que os nomes das crianças serão alterados, preservando a sua identidade.

Caso necessite de mais esclarecimentos, não hesite em contactar-me.

Obrigada pela atenção.
Com os melhores cumprimentos,

(Cristina Morais)

ANEXO 3

Enunciados dos problemas constituintes das três cadeias

1.ª cadeia de problemas

"Gormitis" – 29 de Janeiro de 2010

O Guilherme tem 5 cromos dos Gormitis e o André tem 14.

Quantos cromos têm os dois juntos?

"A idade do Dinis" – 4 de Fevereiro de 2010

O Dinis tem 7 anos.

Que idade terá daqui a 9 anos?

"A mana das gémeas" – 5 Fevereiro de 2010

A irmã da Leonor e da Rita tem 20 anos.

Quantos anos a mais tem a irmã?

(Leonor e Rita, duas irmãs gémas alunas da turma, têm 6 anos.)

"Uma ida ao teatro" – 8 de Fevereiro de 2010

A Mafalda foi ao teatro. Sentou-se numa fila que tinha 15 lugares e contou que havia 7 lugares ocupados.

Quantos lugares estavam vazios?

"A lista de palavras do Vasco" – 10 de Fevereiro de 2010

O Vasco fez uma lista com 13 palavras e já conseguiu acrescentar 16 palavras novas.

Quantas palavras tem agora a sua lista?

"As leituras da Marta" – 25 de Fevereiro do 2010

A Marta está a ler um livro. Já leu 16 páginas e o livro tem 28.

Quantas páginas lhe falta ler?

“Chupa-chupas para todos!” – 3 Março de 2010

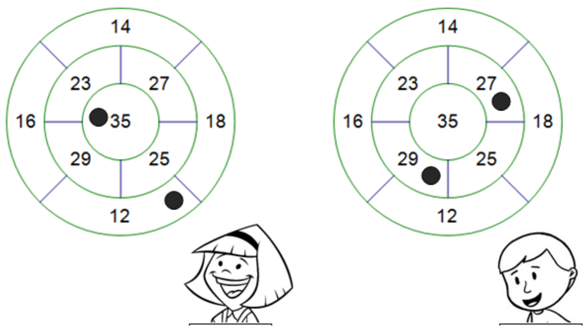
O Fernando quer trazer chupa-chupas para partilhar com todos os amigos da nossa turma mas só tem 18 chupa-chupas.

Quantos é que ainda lhe faltam para poder dar um a cada amigo?

2.ª cadeia de problemas

“Tiro ao alvo” – 5 de Maio de 2010

O Pedro e a Ana adoram jogar “Tiro ao alvo”. Fizeram um jogo e cada um atirou duas setas que estão marcadas nos alvos. Quem ganhou o jogo?



“Os pontos do Daniel” – 7 de Maio de 2010

O Daniel está a jogar ao Tiro ao Alvo com o Guilherme.

Atirou duas setas e fez um total de 55 pontos.

Sabendo que a primeira seta acertou no 32, onde terá acertado a segunda seta?

“Os balões da Cláudia” – 12 de Maio de 2010

Para a sua festa de anos, a Cláudia pediu aos pais que enfeitassem a casa com muitos balões. Ela tem 37 balões, mas acha pouco, por isso pediu aos pais para comprarem mais um saco de 25 balões.

Com quantos balões irá ficar a Cláudia?

“Viagem de autocarro” – 17 de Maio de 2010

No Largo da Luz entraram 49 pessoas num autocarro, inicialmente sem passageiros. O autocarro seguiu para o Colombo, e quando lá chegou saíram 26 pessoas.

Quantos passageiros seguiram viagem?

“Pai e filho” – 19 de Maio de 2010

O Tomás tem 14 anos e o seu pai tem 42 anos. Quantos anos é o Tomás mais novo?

“Saltos à corda” – 26 de Maio de 2010

No intervalo da manhã, a Rita saltou à corda e a Patrícia contou 48 saltos. No intervalo da tarde a Rita fez 75 saltos.
Quantos saltos a mais fez a Rita?

“Que azar!” – 31 de Maio de 2010

A Leonor e o Simão estão a jogar ao Jogo da Glória. A Leonor foi até à casa número 82. Nesta casa ela leu “Que azar! Anda 36 casas para trás.”
Em que casa está agora?

“A caderneta das Winx” – 2 de Junho de 2010

A Sandra tem uma caderneta das Winx. Viu que toda a caderneta tinha 124 cromos e disse:
– Ainda me faltam 47 cromos para ter a caderneta completa.
Quantos cromos tem a Sandra?

3.ª cadeia de problemas

“Cesto d’Ouro”

O Vasco anda a contar o número de pontos que faz no Cesto d’Ouro. No mês passado conseguiu fazer 134 pontos e neste mês já fez 63 pontos.
Até agora, quantos pontos já fez o Vasco?

“Parar ou Avançar”

O Miguel e a Cláudia jogaram o “Parar ou Avançar”. No final, a Cláudia teve 157 pontos e o Miguel teve 43 pontos a menos.
Quantos pontos teve o Miguel?

“Na escola do Mário”

Ontem, na escola do Mário, os alunos podiam escolher entre laranja e pêra, como sobremesa ao almoço.
129 alunos escolheram laranja e 175 escolheram pêra.
Quantos alunos almoçaram ontem no refeitório?

“Uma sessão de cinema”

No cinema do Colombo está em exibição o filme *“Sininho salva as fadas”*, numa sala com 257 lugares.
Para a sessão da tarde já foram vendidos 125 bilhetes.
Quantos lugares há ainda para esta sessão?

“Concurso na livraria”

A Leonor foi a uma livraria que estava a fazer um concurso: o cliente n.º 250 a entrar na loja recebia uma colecção de livros à sua escolha!

A Leonor foi a cliente n.º 135. Quantos clientes faltam entrar para o prémio ser atribuído?

ANEXO 4

Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas das três cadeias

Quadro 18 - Estratégias utilizadas por Cátia na resolução dos problemas das três cadeias

Significado	Cadeia	Problema	Estratégia utilizada por Cátia
Combinar	1	"Gormitis"	Utilização de factos numéricos de adição
	2	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 1010
	3	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Acrescentar	1	"A idade do Dinis"	Contagem crescente a partir do primeiro número
	1	"A lista de palavras do Vasco"	Estratégia aditiva 1010
	2	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010
	3	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Retirar	1	"Uma ida ao teatro"	Contagem dos que sobram (a partir de uma representação icónica)
	2	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010
	2	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010
	3	"Uma sessão de cinema"	Estratégia subtractiva 1010
Comparar	1	"A mana das gémeas"	Estratégia aditiva de saltos através do 10
	2	"Pai e filho"	Estratégia aditiva A10
	2	"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10
	3	"Parar ou Avançar"	Estratégia subtractiva 1010
Completar	1	"As leituras da Marta"	Estratégia aditiva A10
	1	"Chupa-chupas para todos!"	Estratégia aditiva A10
	2	"Os pontos do Daniel"	Estratégia aditiva A10
	2	"A caderneta das Winx"	Estratégia aditiva A10
	3	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10

Quadro 19 – Estratégias utilizadas por Miguel na resolução dos problemas das três cadeias

Significado	Cadeia	Problema	Estratégia utilizada por Miguel
Combinar	1	"Gormitis"	Utilização de factos numéricos de adição
	2	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 1010
	3	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Acrescentar	1	"A idade do Dinis"	Utilização de factos numéricos de adição
	1	"A lista de palavras do Vasco"	Estratégia aditiva A10
	2	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010
	3	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Retirar	1	"Uma ida ao teatro"	Estratégia subtractiva de saltos através do 10
	2	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010
	2	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010
	3	"Uma sessão de cinema"	Estratégia subtractiva N10
Comparar	1	"A mana das gémeas"	Utilização de factos numéricos de adição
	2	"Pai e filho"	Estratégia aditiva A10 para marcação da diferença entre 14 e 42 na linha numérica e estratégia subtractiva A10, para calcular a diferença entre estes números
	2	"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10
	3	"Parar ou Avançar"	Estratégia subtractiva N10
Completar	1	"As leituras da Marta"	Contagem crescente de dois em dois
	1	"Chupa-chupas para todos!"	Estratégia aditiva A10
	2	"Os pontos do Daniel"	Estratégia aditiva A10
	2	"A caderneta das Winx"	Estratégia subtractiva A10
	3	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10

Quadro 20 – Estratégias utilizadas por André na resolução dos problemas das três cadeias

Significado	Cadeia	Problema	Estratégia utilizada por André
Combinar	1	"Gormitis"	Contagem crescente a partir do número maior
	2	"Tiro ao alvo"	Estratégia aditiva 10S
	3	"Na escola do Mário"	Estratégia aditiva 1010
Acrescentar	1	"A idade do Dinis"	Contagem crescente a partir do primeiro número
	1	"A lista de palavras do Vasco"	Contagem aditiva a partir do primeiro número (13), recorrendo à linha numérica (Inicialmente copia estratégia aditiva do tipo 1010 do seu par, Cátia, que parece não compreender.)
	2	"A festa da Cláudia"	Estratégia aditiva 1010
	3	"Cesto d'Ouro"	Estratégia aditiva 1010
Retirar	1	"Uma ida ao teatro"	Contagem para trás a partir de um número
	2	"Viagem de autocarro"	Estratégia subtractiva 1010
	2	"Que azar!"	Estratégia subtractiva 1010 (que parece não ter compreendido completamente)
	3	"Uma sessão de cinema"	Estratégia aditiva A10
Comparar	1	"A mana das gémeas"	Contagem para trás a partir de um número
	2	"Pai e filho"	Estratégia aditiva A10 (sem aproximação a números de referência)
	2	"Saltos à corda"	Estratégia aditiva A10 (com aproximação a números de referência)
	3	"Parar ou Avançar"	Estratégia aditiva A10 (após tentativa inicial com estratégia subtractiva 1010)
Completar	1	"As leituras da Marta"	Contagem para trás a partir de um número
	1	"Chupa-chupas para todos!"	Parece não ter compreendido o problema
	2	"Os pontos do Daniel"	Parece não ter compreendido o problema
	2	"A caderneta das Winx"	Estratégia aditiva A10
	3	"Concurso na livraria"	Estratégia aditiva A10