COMO DESENVOLVER NOS ALUNOS A CAPACIDADE DE DEMONSTRAR

Elvira Santos, Margarida Rodrigues
Escola Básica 2, 3 de Álvaro Velho
Escola Básica 2,3 de Bocage

elviralazarosantos@gmail.com, mtrodr@gmail.com

Resumo

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico dá um especial destaque à demonstração no 3.º Ciclo, integrando-a numa das capacidades transversais, o raciocínio matemático, e enquadrando-a num processo que se vai desenvolvendo desde os primeiros anos de escolaridade. Pressupõe-se portanto que a sua abordagem deverá ser transversal a todos os domínios temáticos. Nele refere-se que no "fim do 3.º ciclo, os alunos devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração" (p. 8). A investigação desenvolvida por Margarida Rodrigues que contou com a participação de Elvira Santos evidencia a importância do papel do professor na negociação com os alunos da necessidade da demonstração na aula de Matemática e do seu significado. Propomo-nos partilhar alguns resultados dessa investigação, centrando a nossa atenção nos aspectos a atender na acção didáctica do professor em estreita relação com as funções da demonstração.

Palavras-chave: demonstração, currículo de Matemática, aprendizagem matemática, professor.

Introdução

Conhecemo-nos no Curso de Mestrado em Informática e Educação em 1994, onde fomos colegas de turma. Nessa altura, a Elvira colaborou na investigação desenvolvida pela Margarida (Rodrigues, 1997), sendo participante do seu estudo. Mais recentemente, mais uma vez a Elvira se prontificou e disponibilizou para ser participante do estudo conduzido pela Margarida, no âmbito do doutoramento da mesma. Une-nos, pois, a amizade que se tem cimentado há mais de uma década, bem como a convergência de ideias relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Na nossa comunicação, damos a conhecer alguns dos resultados da investigação desenvolvida pela Margarida, no âmbito do doutoramento recentemente concluído (Rodrigues, 2008). Perspectivamos o modo como a demonstração é integrada curricularmente, focando-nos essencialmente no nível de prescrição e no papel que a mesma desempenha no currículo. Ao discutirmos alguns dos resultados, destacamos o papel essencial que a professora teve na negociação com os alunos da necessidade e do significado da demonstração.

Objectivos do Estudo

A investigação apresentada nesta comunicação teve como objectivo analisar as formas de persuasão e convencimento desenvolvidas pelos alunos e o papel da demonstração na aprendizagem matemática no contexto da sua relação com a prática social da aula de Matemática. As questões que orientaram essa análise foram: 1) qual a natureza da demonstração no contexto escolar, 2) qual o papel da demonstração na actividade matemática escolar, e 3) como se relaciona a concretização da demonstração com a prática social desenvolvida na aula de Matemática.

A Integração Curricular da Demonstração

Equacionar a integração curricular da demonstração, leva-nos em primeiro lugar ao conceito de currículo. Embora este seja um conceito com uma natureza polissémica, tendo evoluído ao longo dos tempos, desde o currículo entendido como um produto previamente planificado, traduzido num processo linear, abarcando múltiplas definições, entre as quais, a de conjunto de disciplinas para as quais existe um programa, até uma concepção flexível e aberta partilhada por diversos autores como Pacheco (2001), Sacristán (1991/2000) e Roldão (1999), é esta última concepção que corresponde ao nosso modo de entender o currículo. Concebemos o currículo como um projecto formativo resultando da interacção entre a intencionalidade planificada e as experiências vividas no contexto escolar, traduzido num processo dinâmico que contempla as condições da sua própria implementação. De acordo com Roldão (1999), o currículo é uma construção social e simultaneamente um produto histórico, sendo a necessidade e a intencionalidade características essenciais do currículo. Ou seja, o currículo nasce de necessidades sociais, num dado tempo e contexto e corresponde ao que intencionalmente se espera que a escola faça aprender.

Assim, defender a integração curricular da demonstração é assumir que a demonstração é algo que se espera que a escola faça aprender, objecto da intencionalidade educativa em todas as fases de desenvolvimento do currículo. Os alunos não podem ser deixados entregues a si próprios para construírem os modos de validação aceitáveis em educação matemática (Yackel e Cobb, 1996). Sacristán (1991/2000) propõe um modelo, com várias fases ou níveis, explicativo do currículo, enquanto objecto social e histórico construído na confluência de múltiplas práticas, que é particularmente adequado para uma estrutura de gestão centralizada cujo fluxo de influências se faz numa direcção vertical descendente: (a) *currículo prescrito* (orientação, sancionada pela administração central, do que deve ser o conteúdo do sistema educativo); (b) *currículo apresentado* aos professores (meios, entre os quais, os manuais, que traduzem para os professores o significado do currículo prescrito); (c) *currículo interpretado* pelos professores (planificações feitas pelos professores, seja mentalmente ou por escrito); (d) *currículo em acção* (prática real das propostas curriculares); (e) *currículo realizado* (efeitos da prática); e (f) *currículo avaliado* (impõe critérios para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos; controle do saber inerente à função social estratificadora da educação).

A demonstração tem ocupado, nos últimos tempos, um lugar de reduzida importância no currículo, quer a nível prescritivo quer a nível do currículo em acção. Muitos alunos não chegam a desenvolver a noção do que é uma demonstração matemática, tendo um contacto com um número diminuto de demonstrações. No que respeita ao currículo prescrito, o Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), homologado muito recentemente, e em fase de experimentação, parece ser um ponto de viragem em sentido contrário, valorizando explicitamente o raciocínio matemático e a demonstração, em particular. Efectivamente, a demonstração não era abordada no programa anterior de Matemática do ensino básico. No entanto, é objecto de referência explícita no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (DEB, 2001), onde é descrita como fazendo parte da competência matemática.

No Currículo Nacional do Ensino Básico, a demonstração surge intimamente associada à natureza da matemática, sendo um dos aspectos específicos que a caracteriza.

> A matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar. (DEB, 2001, p. 59).

Esta associação fundamenta um dos motivos invocados na justificação da importância da integração curricular da demonstração: a compreensão pelos alunos da natureza da matemática (de Villiers, 2004; Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1993; 1999; Veloso, 1998). Trata-se de um motivo de ordem epistemológica, já que a demonstração, embora não abarque a globalidade da matemática, é um aspecto essencial que a distingue das outras ciências.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), a demonstração é referenciada explicitamente em várias das suas secções, de carácter geral, e em secções específicas do 3º ciclo dos temas matemáticos *Números e Operações* e *Geometria* e de *Capacidades transversais*. Neste documento, existe uma visão da demonstração como processo evolutivo ao longo da escolaridade, à semelhança de outros documentos curriculares como é o caso de *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Nesta perspectiva, os alunos começam, desde o início da escolaridade, a justificar as suas afirmações, podendo recorrer a exemplos apoiantes das mesmas. “À medida que os alunos progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objectos” (DGIDC, 2007, p. 5).

Em “Temas matemáticos e Capacidades transversais”, são destacadas três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática, sendo o raciocínio matemático, uma delas. Assim, relativamente a esta capacidade, pode ler-se

> O Raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria. No fim do 3.º ciclo, os alunos devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração. (DGIDC, 2007, p. 8)

Na parte do programa relativa ao 3.º Ciclo, nas indicações metodológicas relacionadas com as tarefas e recursos, a demonstração é contextualizada em tarefas de cariz investigativo. A familiarização dos alunos com o processo de demonstração matemática é encarada como decorrente da demonstração das propriedades e relações que os próprios alunos descobrirem na realização de actividades de investigação. Além da construção de demonstrações, é também referida a actividade de validação das demonstrações realizadas pelos colegas: "Também devem ser encorajados a questionar e avaliar a correcção matemática das demonstrações apresentadas pelos colegas e/ou pelo professor" (DGIDC, 2007, p. 52).

Em suma, o actual Programa dá uma grande visibilidade à demonstração no ensino básico, atribuindo-lhe uma notória importância, e enquadrando-a num processo que se vai desenvolvendo gradualmente ao longo dos vários anos de escolaridade, de forma transversal a todos os domínios temáticos e a todas as actividades. Apesar do seu carácter transversal, é no tema da Geometria que a demonstração surge mais explicitamente no 3º ciclo.

Hanna (2000) considera que a geometria é o domínio da matemática que mais se presta para a utilização de demonstrações explicativas, sendo estas as mais adequadas e pertinentes no contexto escolar. A autora refere que as múltiplas funções da demonstração em matemática—verificação, explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual (de Villiers, 2001)—emergem como produto de um longo desenvolvimento histórico e que no contexto de sala de aula, os alunos começam por lidar com a demonstração nas suas duas funções essenciais: verificação e explicação. No entanto, é à segunda função que a autora confere uma importância primordial, visão partilhada por outros autores, como por exemplo Hersh (1993; 1997), e também veiculada em *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Assim, segundo esta perspectiva, a principal função da demonstração na sala de aula é a promoção da compreensão matemática. Por isso, Hanna (2000) considera que o maior desafio dos educadores matemáticos é encontrar modos mais efectivos de utilizar a demonstração para este fim. Hersh (1993; 1997) distingue claramente o papel da demonstração na investigação matemática (o de convencer) do papel da demonstração na sala de aula (o de explicar). Este autor argumenta que, no contexto da aula de Matemática, os alunos ficam facilmente convencidos e que não precisam da demonstração para esse efeito; precisam dela para explicar e compreender por que é que um teorema é verdadeiro.

Metodologia

A metodologia adoptada no estudo conduzido por Rodrigues (2008) tem uma natureza interpretativa. Os participantes no estudo foram uma turma de 9.º ano e a respectiva professora de Matemática.

A análise do estudo incidiu nos processos de ocorrência dos acontecimentos e nos significados dos participantes envolvidos. Foram observados os comportamentos dos alunos a trabalhar em grupo, o modo como desenvolvem a sua actividade matemática, e as suas interacções, em contexto de sala de aula, sendo este ambiente natural a fonte directa dos dados, dada a necessidade de analisar as situações contextualmente.

Os dados foram recolhidos durante o ano lectivo de 2005/06, nas aulas de Matemática em que foram exploradas as tarefas de investigação acordadas com a professora, num total de 30 aulas, correspondendo a 15 blocos de 90 minutos. Foi seleccionado, na turma, um grupo de quatro alunos para constituir o alvo da pesquisa e foi o trabalho desenvolvido pelo mesmo que foi videogravado. Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevista semiestruturada (à professora e ao grupo-alvo) videogravada, observação participante e naturalista, e análise de documentos. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e (b) os trabalhos de todos os alunos da turma escritos. Na análise de dados, é a teoria que orienta os processos de recolha e análise de dados, e por sua vez, são os dados empíricos que ajudam a entender a teoria, e a dar uma resposta às questões impulsionadoras do estudo.

O Contexto do Campo Empírico

O trabalho em sala de aula foi realizado segundo alguns princípios orientadores que têm por base a utilização frequente do trabalho de grupo com o objectivo de proporcionar condições para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemáticas. Assim, a metodologia de trabalho na sala de aula dá ênfase à discussão das diferentes opiniões dos alunos, contribuindo a mesma para a construção dos diversos conceitos abordados e também para o desenvolvimento de competências essenciais à formação do indivíduo, como sejam, a capacidade de comunicar e de cooperar com os outros. Este tipo de trabalho associado ao desenvolvimento de uma cultura em sala de aula onde o erro é encarado como uma das etapas necessárias à compreensão dos conhecimentos, tenta desenvolver nos alunos uma postura mais descontraída e reflexiva acerca do seu próprio trabalho contribuindo, assim, para desenvolver o processo de aprender.

Esta experiência desenvolveu-se com uma turma que a professora não acompanhou ao longo do 3º ciclo, como é hábito na sua prática lectiva. Desta forma, estes alunos não só não revelavam hábitos de trabalho em grupo como não possuíam prazer na aprendizagem da Matemática, mostrando uma reacção muito negativa a todo o processo associado ao trabalho nesta disciplina. Assim, para além de não revelar uma boa relação com a Matemática, a turma era caracterizada, pelo professor anterior, como um grupo que apresentava dificuldades de aprendizagem, de concentração e hábitos de trabalho. A má relação com a Matemática ficou logo patente, no primeiro dia de aulas do ano lectivo, na forma como trabalhavam as tarefas propostas. Deste modo, as características da turma provocaram alguma preocupação à professora relativamente ao empenho que estes alunos colocariam na realização das tarefas que tinham sido seleccionadas para o estudo. Mas o tipo de trabalho realizado em aula, as tarefas, assim como o recurso ao computador que eram situações novas para esta turma foram contribuindo para aumentar o entusiasmo assim como o empenho colocado na realização das tarefas naquele ano lectivo. Relativamente ao trabalho realizado com as tarefas seleccionadas para o estudo verificou-se que os alunos foram, gradualmente, revelando um discurso mais interrogativo e uma preocupação crescente em argumentar uns com os outros mesmo quando se tratava de um exercício com cariz mais procedimental.

Apresentação e Discussão de Alguns Resultados

Nesta secção, é descrito analiticamente um episódio ilustrativo da forma como os alunos evoluem na sua capacidade de demonstrar e da acção da professora nesse sentido. Apesar de os resultados do estudo evidenciarem vários casos de construção de demonstrações narrativas e algébricas bem sucedidas, foi escolhido um episódio em que nenhum dos grupos conseguiu efectivar com sucesso a demonstração para permitir a discussão acerca das dificuldades dos alunos neste domínio.

Episódio

Este episódio ocorreu na aula do dia 20 de Janeiro, sendo a segunda aula observada pela investigadora a essa turma. Os alunos foram confrontados com uma tarefa que incluía três situações diferentes de exploração com números, e cada grupo deveria explorar apenas uma das situações. A ficha apresentava uma tabela com três linhas, com as três situações, e duas colunas, a da esquerda, intitulada *Situação*, com a apresentação dos enunciados das situações, e a da direita, intitulada *Demonstração*, encontrava-se em branco, de modo a ser preenchida pelos alunos. A tarefa visava não só que os alunos chegassem a uma resposta à questão colocada mas também que provassem a sua veracidade para a generalidade dos números em causa. Assim, dois dos grupos da turma, incluindo o grupo-alvo, exploraram a seguinte situação: "Como é a soma de quaisquer números pares?". Após a distribuição das fichas pelos grupos, o Ricardo do grupo-alvo questionou a professora acerca do que se pretendia com a demonstração. Esta era a primeira aula em que os alunos contactavam com este termo e se confrontavam com o pedido explícito de elaborarem uma demonstração. E logo de imediato, a professora fez a leitura das três situações e negociou o sentido de *demonstração.*

> Professora- Eu vou ler as três situações. Vá! Vamos acompanhar. E diz assim. Reparem que tem uma coluna que tem situação e tem outra que diz demonstração. (…), a Actividade I diz assim: "Como é a soma de quaisquer números pares?" Eu estou a falar de um número em especial?
> Alunos - Não.
> Professora- Não. Quaisquer é mesmo isso. Eu posso pensar… Por exemplo, um número par…
> Aluno – Dois.
> Professora- Dois. Posso pensar…
> Alunos –(*dizem exemplos de vários números pares)*
> Professora- Quatro. Posso pensar… Por aí fora, não é? Não interessa aquele em que eu pensei. Interessa é, para quaisquer números pares, como vai ser a soma desses dois?
> Ricardo- Ahhhh! (*imperceptível; dá pulinhos no lugar de contentamento, mostrando ter percebido*)
> Professora- E vão pensar, podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer, tá [sic] bem?
> (…)
> Professora- (*começa a ler a Actividade III)* O que é que se pode dizer—isto é a três—acerca do número que resulta quando se subtrai um do quadrado de um número ímpar?
> Aluna - Dá sempre… par.

> Professora– Não sei. É isso que se pretende. Ela perguntou assim: será que dá sempre um número par? Já está a pensar: isto fez-me lembrar que se calhar vai acontecer dar sempre número par.
> Aluno – Não.
> P- Será verdade? Então, vamos ver. E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem, tá [sic] bem? Então, vá, vamos começar a trabalhar.

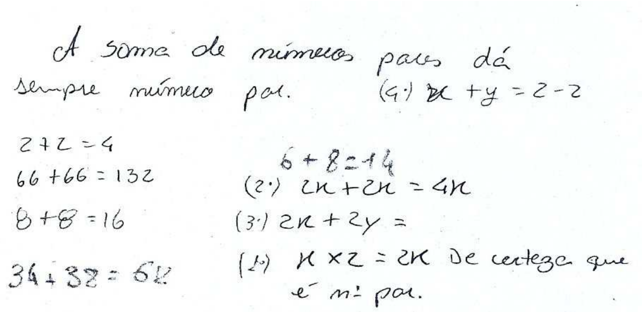
A generalidade, característica essencial da demonstração, foi negociada pela professora através do recurso à leitura da primeira actividade, quando a mesma chama a atenção para o facto de a actividade não colocar a questão em torno de números pares particulares mas sim de quaisquer números pares, o que implica associar inequivocamente a generalização à demonstração. A professora recorre à particularização quando pede exemplos concretos de números pares e quando a aponta como recurso para ajudar a pensar acerca de uma questão geral—"podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer". O processo de conjecturação é também abordado pela professora a propósito da conjectura formulada por uma aluna—"Dá sempre… par"—como resposta à questão da Actividade III, acabada de ler pela professora. A aluna manifesta o que pressentiu ser verdadeiro; a pausa que fez revela a procura nesse instante de um padrão; por outro lado, o seu tom de voz não é revelador de total convicção. A professora mantém a conjectura da aluna com esse estatuto pois demite-se de a validar: "Não sei". Mas, de imediato, reforça a ideia que a tarefa visa que os alunos passem por este processo—"É isso que se pretende"—caracterizado pela expressão de um padrão identificado—"vai acontecer dar sempre número par"—e pela averiguação da veracidade da afirmação expressa—"Será verdade? Então, vamos ver". Por fim, a professora negoceia a função de verificação da demonstração quando coloca a fase de demonstração, como a fase seguinte à da conjecturação e objectivo último da tarefa, pela qual os alunos deverão estabelecer a veracidade das afirmações conjecturadas antes: "E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem".

No entanto, apesar da negociação inicial da professora em torno do significado de demonstração, os alunos da turma dariam o trabalho por concluído sem qualquer tentativa de elaboração de demonstração. Todos os grupos, perante as várias situações gerais que lhes eram colocadas, estudaram-nas através da particularização. Nenhum dos grupos sentiu necessidade de efectuar uma demonstração que estabelecesse a verdade da conclusão geral enunciada para o universo em causa. A abordagem empírica e indutiva da particularização foi suficiente para que os alunos tivessem total convicção acerca das generalizações que formularam. Tal facto levou a uma nova intervenção da professora, ao longo da exploração da tarefa, conforme se pode verificar no seguinte extracto do seu diálogo com o grupo-alvo:

> Ricardo- É sempre, sempre. Sempre. Se é número par, é divisível por dois.
> Professora- Então, vá, vamos lá, uma maneira de provar às outras pessoas que isso seja, quaisquer que forem os números que sejam envolvidos, isso que vocês estão a pensar que vai acontecer… Como é que hão-de provar isso?
> Ricardo – Por exemplo, seis mais seis igual a doze; doze a dividir por dois é seis…
> (…)
> Professora- É sempre específico, não é? É sempre um específico, não é? Quando vocês agarram num número e escrevem cada um já estão a particularizar, não estão? Tentem lá escrever isso, um número que não seja particular, uma maneira de escrever que vocês falem mas que não trate dum caso específico, que fale dos

números todos nessas condições. O que é que nós usamos na Matemática para falar de todos?

A professora negoceia a necessidade da demonstração—“ Como é que hão-de provar isso?”—apelando a uma representação algébrica da situação em causa—“ Tentem lá escrever isso, um número que não seja particular, uma maneira de escrever (…) que fale dos números todos nessas condições”. Como resposta a este apelo, verifica-se uma tentativa de demonstração no trabalho dos dois grupos que resolveram a Actividade I:

<table>
<tr><td rowspan="2">
A soma de números pares dá sempre número par. (4.) x + y = 2 - 2
2+2 = 4
66 + 66 = 132
8+8 = 16
34 + 32 = 66
6 + 8 = 14
(2.) 2x + 2x = 4x
(3.) 2x + 2y =
(1.) x × 2 = 2x De certeza que é nº par.</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}2+2=4\\4+4=8\\8+8=16\\10+10=20\end{array}\right\}$ Vai dar sempre um número par</td></tr>
<tr><td>$\frac{p}{2}$ = números pares divisíveis por 2
$\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{2p}{2}$
Conclusão: a soma de quaisquer números pares vai dar sempre número par, divisível por 2.</td></tr>
<tr><td>Resolução do Grupo D</td><td>Resolução do grupo-alvo</td></tr>
</table>

Nenhum dos dois grupos foi bem sucedido na sua tentativa de construção de demonstração algébrica, o grupo D por dificuldades ao nível da manipulação algébrica e o grupo-alvo por dificuldades ao nível da expressão geral de números pares enquanto expressão funcional geradora dos mesmos. O grupo D, ao registar o último passo, seguinte a “2x+2y”—“x+y=2-2”—aplicou o algoritmo aplicável à resolução das equações através do qual os termos sem parte literal passam para o outro membro da equação com o sinal simétrico para os isolar dos termos com incógnitas que permanecem juntos no mesmo membro da equação. O grupo-alvo optou por uma expressão descritiva. Assumindo *p* como um número par, a expressão $\frac{p}{2}$ parte do número par, descrevendo a sua característica de ser divisível por dois, e consequentemente gera a sequência dos números naturais. A obtenção de uma expressão geradora de número par poderia ter sido facilitada pela explicitação de que ser divisível por dois é o mesmo que ser múltiplo de dois, pelo entendimento da divisão e da multiplicação como inversas uma da outra. Efectivamente, enquanto ser divisível por dois parte do número par para se obter um número natural, o ser múltiplo de dois parte do número natural para se obter um número par.

Algumas Conclusões

Os resultados do presente estudo mostram que os alunos tendem a apoiar-se em exemplos particulares não só para estabelecer as suas conjecturas, como também a verdade acerca dessas afirmações gerais, constituindo para eles um meio de demonstração (esquema demonstrativo empírico indutivo, na terminologia de Harel e Sowder, 2007). Estes resultados são convergentes com o que tem sido vastamente documentado por inúmeros estudos empíricos.

Sendo necessária uma intervenção curricular forte no sentido da introdução e da negociação da importância da demonstração, a professora detém um papel fundamental e decisivo nesse processo. Ao negociar a generalidade como uma das condições para a elaboração de uma demonstração, a professora conduz os alunos ao registo de expressões algébricas. As dificuldades dos alunos neste domínio leva-nos a concluir da importância da ênfase na significância das expressões algébricas de modo a ser possível estabelecer a ponte entre os exemplos trabalhados anteriormente e as expressões gerais.

É a professora que, na qualidade de mediadora cognitiva e cultural, vai negociando, de uma forma progressiva, com os seus alunos, o estatuto de uma conjectura, a necessidade de procederem a uma demonstração, o estatuto da verificação empírica no que respeita à validação das afirmações matemáticas, e o significado de uma demonstração matemática. Ou seja, a professora negoceia normas sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996) que são específicas da actividade matemática dos alunos e da aula de Matemática (Balacheff, 1991). Assim, o que é considerado uma validação aceitável de uma conclusão é uma norma sociomatemática, e embora o processo de constituição da mesma viva da prática da professora e dos alunos, pela interacção das contribuições de uma e de outros, a natureza da contribuição da professora é fundamental, já que a mesma teve que se assumir representante de valores culturais próprios da matemática. Em particular, o hábito de a professora se demitir de validar e legitimar as conclusões dos alunos quando estes ainda se encontram numa fase de exploração da tarefa, acaba por se prender com a norma sociomatemática do que consiste uma validação aceitável, levando a que os alunos não tendam a validar as suas afirmações baseando-se na autoridade da professora.

Referências Bibliográficas

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science,* 397-418.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* ME, Departamento da Educação Básica (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 73-80). Haifa: Israel Institute of Technology.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Pacheco, J. (2001). *Currículo: Teoria e práxis* (2ª ed.). Porto: Porto Editora.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Roldão, M. (1999). *Os professores e a gestão flexível do currículo: Perspectivas e práticas em análise.* Porto : Porto Editora.

Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.