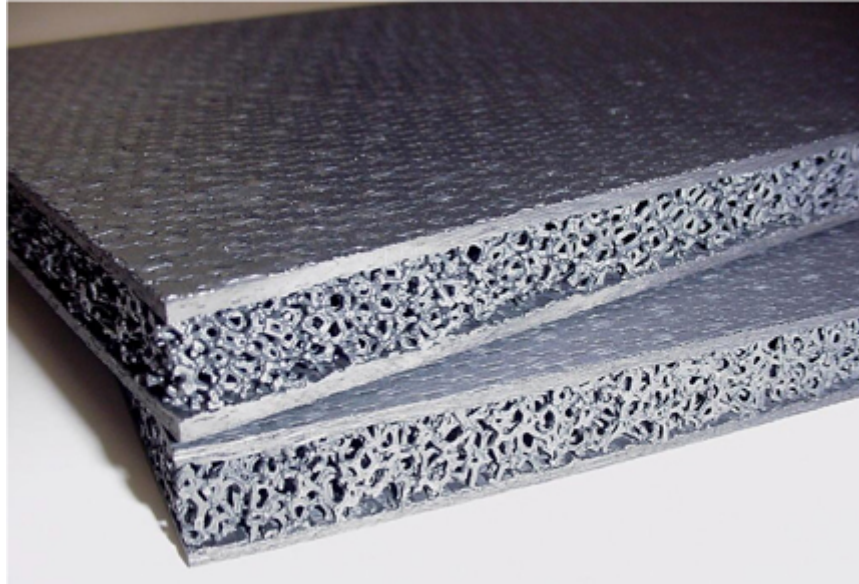




ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica



Análise estática de vigas em Materiais Compósitos usando Computação Simbólica

LUÍS FERNANDO DA SILVA PERDIGÃO
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Professor Doutor João Carlos Quaresma Dias

Vogais:

Professor Doutor José Eugénio Semedo Garção
Professora Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Dezembro de 2010

Resumo

Na presente dissertação estuda-se o comportamento mecânico em vigas construídas em materiais compósitos, abordando diferentes teorias de base. Foram desenvolvidos dois elementos Lagrangeanos de viga-barra, baseados na teoria ao corte de primeira ordem e na teoria ao corte de ordem superior, quadráticos e cúbicos, respectivamente. Os modelos foram implementados na aplicação de computação simbólica MAPLE e comparados com soluções alternativas. Foram realizados estudos em análise estática linear e nesse contexto foi estudada a influência dos refinamento da malha bem como a influência da variação dos ângulos de orientação das fibras e do número de camadas de empilhamento do laminado. Foi iniciado um estudo sobre o comportamento de materiais FGM.

Palavras-chave

Método de Elementos Finitos, teoria de deformação de corte de primeira ordem, teoria de deformação de corte de ordem superior, computação simbólica, FGM e materiais compósitos e materiais funcionais.

Abstract

In the present dissertation one studies the beam mechanical behavior, of composite materials, in several theories. Two beam elements were developed, based in FSDT and HSDT, quadratic and cubic, respectively. The models were implemented in MAPLE software and were compared with alternate solutions. Static analyses were made. The mesh refinement influence was studied as well as the fiber orientation and the number of layers of the laminated. A study about FGM behavior was also started.

Key-words

Finite Element Method, First-Order Shear Deformation, High-Order Shear Deformation, symbolic computation, FGM, composite materials and functionally materials.

Nomenclatura

u_x, u_y, u_z	Deslocamentos nas direcções x,y,z
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotações sobre x,y,z
FSDT	First-order shear deformation theory
HSDT	High-order shear deformation theory
CLT	Classical laminate theory
RMZC	Reissner-Mindlin Zig Zag Continuity
CPT	Classical Plate Theory
HOST	High-Order Shear Theory
FGM	Functionally Graded Materials
l	Comprimento
h	Espessura
b	Largura
P	Carga
3-D	Três dimensões
NL	Número de camadas

E_1, E_2, E_3	Módulos de Elasticidade longitudinal Segundo as direcções materiais 1,2 e 3
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Módulo de distorção associadas aos planos 12, 13 e 23.
C_{ij}	Coefficientes Elásticos
ρ	Massa volúmica
n	Expoente
V	Volume
A	Área
F	Força
\mathbf{M}	Matriz de Massas
\mathbf{K}	Matriz de Rigidez
\mathbf{q}	Vector de deslocamentos
w	Frequência natural da estrutura
$\det J$	Determinante Jacobiano
U_c	Energia cinética
U_d	Energia elástica de deformação

Agradecimentos

Aos meus pais pela possibilidade que me proporcionaram em frequentar um curso superior.

A todos os meus amigos e colegas de curso que sempre me apoiaram nos bons e maus momentos, e que sempre me compreenderam por não poder estar a seu lado nos dias de diversão.

À minha orientadora pela paciência e disponibilidade ao longo desta caminhada.

Índice

INTRODUÇÃO	2
CAPÍTULO UM – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
Caracterização dos materiais compósitos	5
Teoria de deformação de corte de primeira ordem	6
Teoria da deformação ao corte de ordem superior.....	10
Functionally Graded Materials (Materiais Multifuncionais)	17
CAPÍTULO DOIS – MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS.....	21
Formulação de modelo baseado na teoria de deformação ao corte de primeira ordem.....	21
Formulação de modelo de elementos finitos baseado numa teoria de ordem superior	28
Equações de Equilíbrio	34
Implementação dos modelos.....	37
CAPÍTULO TRÊS – APLICAÇÃO NUMÉRICAS	38
3.1-Validação do algoritmo	38
3.2-Estudo de vigas laminadas.....	50
3.3-Estudo de vigas construídas em materiais multifuncionais	77
CAPÍTULO QUATRO – CONCLUSÕES.....	83
CAPÍTULO CINCO – DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	84
BIBLIOGRAFIA	85
ANEXOS	88

Índice de Figuras

Figura 1- Peças construídas em materiais compósitos no U.S. Air Force B-2[ASM Metals Handbook Volume 21]	6
Figura 2 Placa laminada estudada [Qi e Knight Jr. 1996].....	7
Figura 3 Esquema representativo para comparação entre CPT, FSDT e CFSDT [Qi and Knight Jr. 1997].....	8
Figura 4- Representação esquemática de viga utilizada por Vinayak et al (1994).....	10
Figura 5- Condições de fronteira e carga distribuída [Vinayak et al (1994)].....	11
Figura 6- Lâmina compósita com ângulos de orientação de fibra [Vinayak et al (1994)]	11
Figura 7- Geometria de placa laminada (Latheswary et al 2004)	12
Figura 8- Geometria de um laminado com N camadas (Pervez et al 2005).....	15
Figura 9- Geometria da placa, cargas e distribuição de material (Della Croce et al 2004).....	18
Figura 10- Geometria da viga FGM e possível distribuição de material (Kadoli et al 2007)	19
Figura 12- Viga encastrada numa extremidade e com carga transversal na extremidade oposta (Caso 3).....	38
Figura 13- Viga simplesmente apoiada com carga transversal a meio (Caso 1).....	39
Figura 14- Exemplo da viga estudada por Wennestrom e Backlund 1986	50
Figura 15-Exemplo da viga estudada após redução da espessura do núcleo	52
Figura 16-Exemplo da viga estudada após redução do núcleo em 75%	53
Figura 17-Variação da espessura do deslocamento máximo com a espessura do núcleo	53
Figura 18-Exemplo de viga após redução da lâmina superior em 50%	54
Figura 19- Exemplo da viga estudada por Dipak et al 1994	55
Figura 20-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação das fibras	56
Figura 21-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	57
Figura 22-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	57
Figura 23-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	58
Figura 24-Desvio obtido com a variação da razão l/h	59
Figura 25-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	60
Figura 26-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	60
Figura 27-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	61

Figura 28-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação	62
Figura 29- Desvio obtido com a variação da razão l/h	62
Figura 30-Exemplo da viga estudada.....	63
Figura 31- Variação do deslocamento máximo com a variação do material e do ângulo de orientação.....	64
Figura 32-Deslocamento obtido com a variação dos ângulos de orientação dos laminados.....	66
Figura 33-Variação do deslocamento máximo com a variação do ângulo de orientação do empilhamento.....	67
Figura 34-Variação do deslocamento com a variação do ângulo de orientação do empilhamento.....	68
Figura 35-Variação do deslocamento máximo com o ângulo de orientação.....	69
Figura 36-Variação do deslocamento com o ângulo de orientação.....	70
Figura 37-Variação do deslocamento com o ângulo de orientação.....	71
Figura 38-Variação do deslocamento adimensional com a sequência de empilhamento.....	72
Figura 39- Variação do deslocamento adimensional com a sequência de empilhamento.....	73
Figura 40-Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos pelas duas teorias em função da sequência de empilhamento	73
Figura 41- Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos em função da sequência de empilhamento (anti-simétrico)	74
Figura 42- Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos em função da sequência de empilhamento (anti-simétrico)	75
Figura 43-Comparação entre o deslocamento adimensional obtido pela teoria FSDT e HSDT.....	76
Figura 44 - Exemplo de viga estudada.....	77
Figura 45 - Variação do módulo de elasticidade através da espessura da viga FGM	78
Figura 46 - Exemplo da viga estudada.....	79
Figura 47 - Deslocamento transversal adimensional máximo para $L/h = 4$, para a teoria HSDT	80

Índice de tabelas

Tabela 1-Deslocamentos e desvios obtidos	39
Tabela 2-Deslocamentos e desvios obtidos	40
Tabela 3-Deslocamentos e desvios obtidos	41
Tabela 4-Deslocamentos e desvios obtidos	42
Tabela 5-Deslocamentos e desvios obtidos	43
Tabela 6-Deslocamentos e desvios obtidos	44
Tabela 7-Deslocamentos e desvios obtidos	45
Tabela 8-Deslocamentos e desvios obtidos	46
Tabela 9-Deslocamentos e desvios obtidos	47
Tabela 10-Deslocamentos e desvios obtidos	48
Tabela 11-Deslocamentos e desvios obtidos	48
Tabela 12-Deslocamentos e desvios obtidos	49
Tabela 13- Deflexão obtida por Wennerstrom e Backlund e pelas teorias FSDT e HSDT estudadas	51
Tabela 14- Deflexão obtida pelas duas teorias após a redução da espessura do núcleo em 50%	52
Tabela 15- Deflexão obtida pelas duas teorias após a redução da espessura do núcleo em 75%	53
Tabela 16- Deflexão obtida para uma viga sandwich com as lâminas externas da mesma espessura	54
Tabela 17- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=5$).....	56
Tabela 18- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=10$).....	56
Tabela 19--Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=20$)	57
Tabela 20- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=60$).....	58
Tabela 21- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=5$).....	59
Tabela 22- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=10$).....	60
Tabela 23- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=20$).....	61
Tabela 24- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=60$).....	61
Tabela 25-Varição do deslocamento máximo com a variação do material e do ângulo de orientação	63
Tabela 26-Propriedades do material aplicado no estudo anterior	65
Tabela 27-Empilhamentos simétricos utilizados no estudo do deslocamento máximo.	66

Tabela 28-Empilhamentos simétrico utilizados no estudo do deslocamento máximo	67
Tabela 29-Empilhamento anti-simétrico utilizado no estudo do deslocamento máximo.....	67
Tabela 30- Empilhamentos simétricos utilizados no estudo do deslocamento máximo.	68
Tabela 31-Sequência de empilhamento estudada	69
Tabela 32-Sequência de empilhamento estudada	70
Tabela 33-Empilhamento simétrico estudado por Dipak et al	72
Tabela 34-Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria HSDT	72
Tabela 35- Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria FSDT	74
Tabela 36- Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria HSDT	75
Tabela 37 - Comparação do deslocamento adimensional obtido para um diferente número de elementos	77
Tabela 38 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 4$ e para a teoria FSDT	79
Tabela 39 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 4$ e para a teoria HSDT.....	80
Tabela 40 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 16$ e para a teoria FSDT	81
Tabela 41 – Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 16$ e para a teoria HSDT	82

Introdução

Um material compósito resulta de uma combinação macroscópica de materiais, os quais diferem na forma, composição química e propriedades. Para além das suas propriedades estruturais, os materiais compósitos são também caracterizados pela versatilidade que possuem, podendo ser utilizados em aplicações de indústria aeronáutica, naval, mecânica, automóvel, biomecânica e/ou civil. Possuem boas propriedades térmicas, tribológicas e estruturais. Actualmente, os materiais compósitos, são otimizados para atingir uma combinação específica de propriedades, para uma certa gama de aplicações [ASM Metals Handbook Volume 21].

A grande vantagem dos materiais compósitos, é que quando projectados correctamente, possuem as melhores características/qualidades dos seus constituintes ou componentes e, por vezes, algumas qualidades que nenhum constituinte/componente possui [Reddy e Jones,1999]. Algumas das principais propriedades que podem ser melhoradas quando se constituem materiais compósitos, são:

- Rigidez;
- Resistência à corrosão;
- Resistência ao desgaste;
- Peso;
- Vida à fadiga;
- Condutividade térmica.

Um material compósito é concebido para corresponder às características necessárias para desempenhar uma tarefa específica. Os compósitos, são hoje, e cada vez mais, utilizados em aplicações de engenharia. Estão presentes nos mais variados equipamentos e estruturas, e podemos encontrá-los por exemplo, numa raquete de ténis, num taco de golfe ou de hóquei, num quadro de bicicleta, partes da carroçaria e estrutura do nosso automóvel, as

paredes translúcidas, feitas de fibra de vidro, de uma casa ou divisão, uma ponte pedonal em compósitos; não falando do seu enorme e cada vez maior uso em aeronáutica e desporto automóvel, como os carros de Fórmula 1, etc. [Leite, 2008].

Podemos pensar que os materiais compósitos são uma inovação da indústria, no entanto, já eram utilizados pelos nossos antepassados há centenas de anos, apesar de não nos apercebermos de tal. Por exemplo, os Israelitas usavam a palha para dar maior resistência aos tijolos de lama, os Egípcios utilizavam várias camadas de madeira de modo a atingirem uma maior resistência aos esforços e também para evitar a expansão térmica devido às humidades e condensações [Jones,1999]. As espadas e armaduras medievais eram construídas com diversas camadas de diferentes materiais [Gay,2003].

As grandes desvantagens dos materiais compósitos são o custo, ausência de métodos de fabricação produtivos (em massa), regras de projecto de imediata aplicação (ao contrário dos metais), fenómeno da delaminação e a tendência para perderem propriedades mecânicas, por acção da temperatura e humidade.

A disseminação dos materiais compósitos, está relacionada principalmente com a possibilidade de obtermos baixas relações de redução de peso, resistência/rigidez dos materiais.

Aliando este facto à procura incessante pela indústria de novos materiais, os compósitos tornam-se assim num objecto de estudo bastante cobiçado. Num mundo em que se deseja produtos cada vez mais leves, ecológicos e económicos, aliando o design ao elevado desempenho mecânico, os materiais compósitos aparecem na liderança. Foi essa uma grande motivação que levou à elaboração do trabalho que conduziu à escrita desta dissertação.

Enquadramento:

No capítulo Um, é feita a revisão bibliográfica, onde são localizados no tempo artigos sobre projecto de vigas em material compósito e “sandwich”, bem como as diferentes teorias utilizadas nessas abordagens, quais as evoluções sofridas e quais as novas tendências.

No capítulo Dois, apresenta-se a teoria HSDT (High-order Shear Deformation Theory) e FSDT (First-order Shear Deformation Theory), que irão ser base, respectivamente, do desenvolvimento de dois modelos, Lagrangeanos, cúbico e quadrático.

No capítulo Três são efectuados diversos estudos comparativos, de que se destacam designadamente:

- a) Estudos comparativos com soluções alternativas.
- b) Influência do refinamento h .
- c) Influência da variação dos ângulos de orientação das fibras em cada camada de material compósito.
- d) Influência do número de camadas no contexto das características das sequências de empilhamento.

A Generalização para “Functionally Graded Materials”, FGM, é também feita no capítulo Três.

Por último, no Capítulo Quatro, apresentam-se as conclusões desta dissertação e no Capítulo Cinco apontam-se directrizes possíveis de desenvolvimento futuros.

Capítulo Um – Revisão Bibliográfica

Caracterização dos materiais compósitos

Compósitos, tal como o nome indica, são uma combinação de materiais. Existem poucas aplicações para materiais no estado puro (ex. na electrónica), mas quase todos os materiais existentes no mercado, resultam de algum tipo de combinação. Como exemplo, as ligas de metais que são utilizadas há diversos anos ou os polímeros que são misturados de modo a melhorar certas propriedades ou reduzir custo ou peso. No caso dos materiais compósitos que incorporam fibras a resina e as fibras são combinadas, de modo a constituírem um só material. As fibras desempenham a função de carregar os esforços e a resina (matriz) tem a função de manter as fibras juntas e de as proteger do meio ambiente.

Podemos classificar os compósitos em dois níveis diferentes. O primeiro nível aborda a constituição da matriz. A maior classe de materiais compósitos inclui compósitos de matriz orgânica (CMOs), compósitos de matriz metálica (CMMs) e compósitos de matriz cerâmica (CMCs). Geralmente, a classe de compósitos de matriz orgânica, inclui duas sub-classes de materiais compósitos, sendo elas, compósitos de matriz polimérica (CMPs) e compósitos de matriz de carbono (usualmente denominadas de matrizes carbono-carbono).

Como já foi referido, as principais funções das matrizes são “ligar” os vários reforços, em virtude das suas características adesivas e coesivas, transferir cargas para e entre os reforços, e para proteger os reforços do meio ambiente e do manuseamento. A matriz confere uma forma sólida ao material compósito, o que é particularmente importante em materiais compósitos de fibras não longas. A matriz controla a resistência interlaminar, as propriedades transversais e a resistência às elevadas temperaturas. A resistência dos reforços é máxima, transferindo a matriz as forças externas para os mesmos. Como a matriz restringe e fixa os reforços, as forças externas conseguem ser divididas, pelos reforços. Além do mais, a matriz, como possui uma capacidade de resposta inelástica, as concentrações de tensões são bastante mais reduzidas e as concentrações internas

redistribuídas pelos reforços. Como os reforços são mais fortes e com maior rigidez que a matriz, esta é normalmente o “elo mais fraco”, numa perspectiva estrutural.

O segundo nível de classificação refere-se à forma de reforço dos materiais – fibras longas, fibras curtas, fibras em partículas ou fibras entrelaçadas.

Teoria de deformação de corte de primeira ordem

Devido à boa relação rigidez/peso, os materiais compósitos são os preferidos para a indústria aeroespacial. No entanto, esse tipo de estruturas está caracterizado pela fraca rigidez quando submetidos a corte transversal.

Além disso, quando se desenvolve um projecto na área da aviação, alguns dos componentes estruturais (fuselagem, asas, painéis estabilizadores), são projectados para ter uma resistência pós-encurvadura.

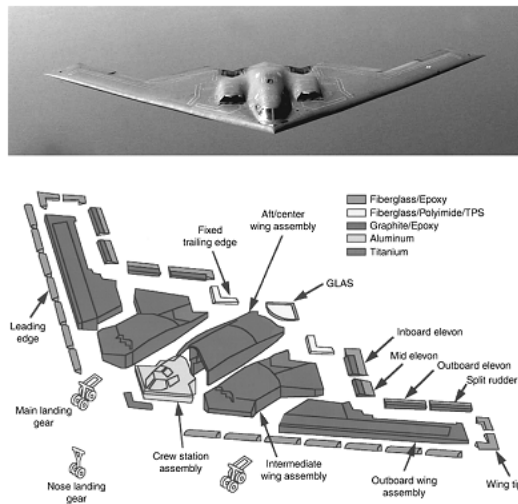


Figura 1- Peças construídas em materiais compósitos no U.S. Air Force B-2[ASM Metals Handbook Volume 21]

A teoria de deformação ao corte de primeira ordem é das teorias mais utilizadas para placas laminadas anisotrópicas em aplicações de engenharia devido à sua simplicidade e baixo custo computacional. Com factores de correcção ao corte apropriados consegue-se determinar com precisão suficientes deflexões, frequências naturais, encurvaduras e tensões.

Knight Jr e Qi (1996), desenvolveram uma teoria refinada de primeira ordem, onde estudaram o problema da flexão no plano, de uma placa laminada simplesmente suportada, com empilhamento cross-ply simétrico.

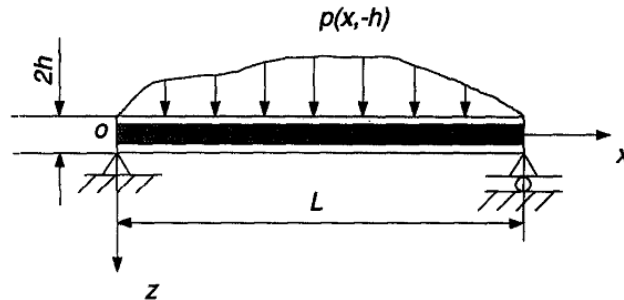


Figura 2 Placa laminada estudada [Qi e Knight Jr. 1996]

O campo de deslocamentos utilizado foi:

$$u_x(x, z) = z\theta(x)$$

$$u_z(x, z) = w(x)$$

(1.01)

Onde u_x e u_z representam os deslocamentos nas direcções X e Y , respectivamente e θ é a rotação em torno do eixo do Y . W é o deslocamento transversal.

A teoria refinada apresentada por Knight Jr. e Qi (1996), permitia uma distribuição variável da deformação de corte transversal, o que a teoria tradicional de Reissner-Mindlin não conseguia.

Mais tarde (1997), os mesmos autores reafirmam a teoria ao corte de primeira ordem mas interpretando as variáveis e aplicando equações elásticas de uma forma diferente. A reafirmação está centrada dos seguintes pontos:

- A placa assume-se como inextensível em espessura
- O deslocamento no plano é assumido como sendo uma distribuição linear, função da espessura da placa

- A deformação no plano é obtida a partir do campo de deslocamentos e das relações deslocamento-deformação
- A tensão de corte transversal está relacionada com a deformação de corte transversal, através da espessura, por uma lei constitutiva.

Esta teoria da deformação ao corte de primeira ordem possuía as vantagens da teorias de camada única e de *layerwise*. Não requeria o uso de um factor de correcção e contabilizava uma distribuição variável da deformação ao corte transversal (ao nível das HSDT).

Knight Jr. e Qi (1997), voltaram a formular uma teoria consistente de primeira ordem (CFSDT), comparando-a com a teoria clássica dos laminados e com a teoria da deformação ao corte de primeira ordem.

A teoria clássica de Kirchoff impunha dois constrangimentos para suprimir a flexibilidade ao corte transversal – uma linha inicialmente recta e normal ao plano médio antes da aplicação da carga permanece recta e normal depois de aplicação de carga, ou sem rotação relativa para a normal, tal como é indicado pela linha AOB na figura 3.

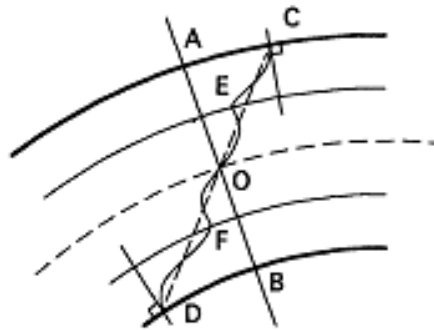


Figura 3 Esquema representativo para comparação entre CPT, FSDT e CFSDT [Qi and Knight Jr. 1997]

A FSDT desenvolvida por Reissner-Mindlin permitia uma deformação ao corte transversal uniforme por relaxação de um dos dois constrangimentos. A linha inicialmente recta e normal ao plano médio continua recta mas não necessariamente normal depois da deformação e por isso é permitida rodar em relação à normal do plano médio, como representado na figura 3, pela linha tracejada COD.

Qi and Knight Jr., admitem que a linha inicialmente recta e normal ao plano médio pode-se tornar curva e por isso não normal depois da deformação, como ilustrado pela linha CEOFD na figura 3. A linha através da espessura é permitida rodar relativamente à normal do plano médio ficando então deflectida (ligeiramente curvada) à volta da linha rodada, de maneira, a permitir que a deformação ao corte transversal seja consistente com a tensão ao corte transversal, nos termos da lei constitutiva em cada ponto através da espessura. No entanto, o raio da linha curva é tão grande que o deslocamento no plano continuava aproximado como uma função linear através da espessura, e a sua derivada era a rotação média em relação à posição não deformada original. A diferença entre a curva CEOFD e a linha tracejada COD representa a perturbação do deslocamento local que permite que a deformação de corte transversal varie com a extensão que é compatível com a tensão de corte transversal e a relação constitutiva.

CFSDT (consistent first order shear deformation theory) conseguia com sucesso prever o parâmetros de resposta local tais como a deformação de corte transversal através da espessura enquanto que o método normal (FSDT) não o conseguia.

Carrera e Kroplin (1997), deram um importante contributo neste campo, ao estudarem os efeitos de deformação ao corte em placas multicamada nos campos da deflexão e pós-encurvadura. O campo de deslocamentos foi baseado no modelo de Reissner-Mindlin mas adicionando dois termos “zig zag”.

$$\begin{aligned}
 u_1^k(x, y, z) &= U_1^0(x, y) + \frac{h}{2} \zeta U_1^1(x, y) + \zeta_k (-1)^k D_1(x, y) \\
 u_2^k(x, y, z) &= U_2^0(x, y) + \frac{h}{2} \zeta U_2^1(x, y) + \zeta_k (-1)^k D_2(x, y) \\
 u_3^k(x, y, z) &= U_3^0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.02}$$

O modelo foi estendido às não linearidades geométricas de Von-Karman. Estudaram-se placas espessas e finas. Comparou-se a teoria RMZC (Reissner-Mindling Zig Zag

Continuity), FSDT e CLT no que diz respeito a deformação ao corte, zig zag, efeitos de equilíbrio interlaminar.

Os autores concluíram que para as análises FSDT e CLT, as avaliações mais exactas das tensões de corte transversal foram do modelo RMZC. Aliás, a resposta no plano melhorou bastante no caso de placas espessas anisotrópicas. Para placas finas, as investigações mostraram que os resultados FSDT foram razoavelmente precisos (considerando as análises RMZC).

Teoria da deformação ao corte de ordem superior

Vinayak et al (1994) utilizou a teoria desenvolvida por Lo et al[1977-a e 1977-b], para estudar a precisão de um modelo de elementos finitos baseados na mesma. Para isso, analisou uma viga de secção rectangular com um comprimento l , espessura h , e largura b (figura 4).

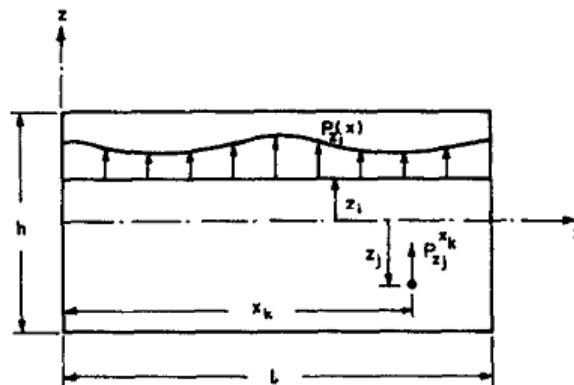


Figura 4- Representação esquemática de viga utilizada por Vinayak et al (1994)

O campo de deslocamentos utilizado foi:

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= u_0(x) + z\theta_x(x) + z^2u_0^*(x) + z^3\theta_x^*(x) \\
 w(x, z) &= w_0(x) + z\theta_z(x) + z^2w_0^*(x)
 \end{aligned}$$

(1.03)

Foram utilizados elementos lineares, quadráticos e cúbicos com dois, três e quatro nós, respectivamente.

Vinayak et al (1994) estudou uma viga de materiais compósitos simplesmente apoiada de material ortotrópico (epoxy/grafite), submetida a uma carga sinusoidal.

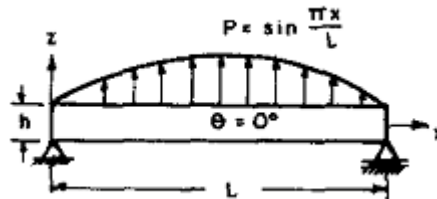


Figura 5- Condições de fronteira e carga distribuída [Vinayak et al (1994)]

Os diferentes casos estudados foram:

- Viga ortotrópica com fibras orientadas na direção x
- Laminado com duas camadas com a direção 2 e 1 alinhado paralelamente a x no topo e na base das camadas, tendo estas a mesma espessura
- Viga ortotrópica com três camadas simétrica com a direção 1 a coincidir com o x nas camadas exteriores, enquanto 2 é paralelo a x na camada central, tendo estas a mesma espessura

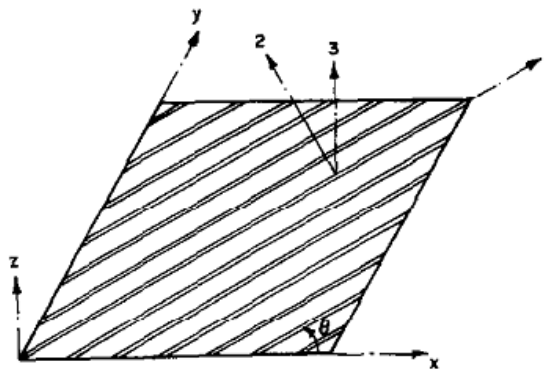


Figura 6- Lâmina compósita com ângulos de orientação de fibra [Vinayak et al (1994)]

Para isso, Vinayak et al, comparou várias soluções com o seu próprio algoritmo, sendo elas: Teoria clássica dos laminados, teoria da elasticidade, Teoria de deformação ao corte de ordem superior e modelos de elementos finitos 3-D.

Latheswary et al (2004) desenvolveu uma teoria de ordem superior, para aplicação em placas laminadas finas e/ou espessas. A geometria do laminado utilizado por Latheswary et al é mostrada na figura 7. x,y,z são os eixos da placa e 1,2,3 os eixos principais do material.

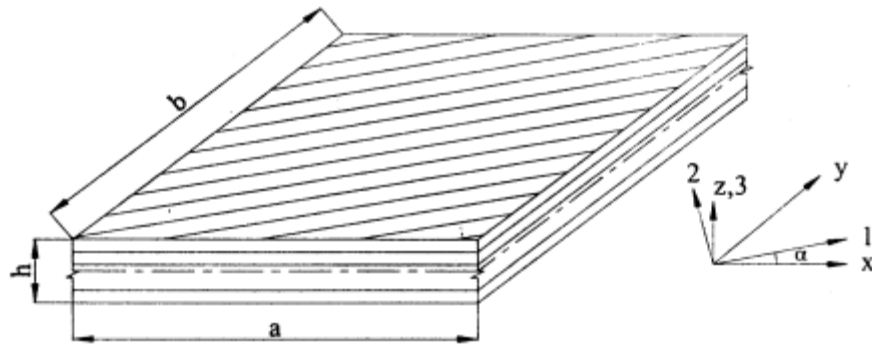


Figura 7- Geometria de placa laminada (Latheswary et al 2004)

Um elemento de quatro nós e com sete graus de liberdade por nó ($u_0, v_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}, \theta_x, \theta_y$) foi usado para análise. As funções de forma utilizadas para o elemento isoparamétrico quadrilátero bilinear para a interpolação de u_0, v_0, θ_x e θ_y e a função de interpolação Hermitiana é usada para interpolar o deslocamento, w , tal que:

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{8} [(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2)] + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{8} [(\xi_i(1 + \xi\xi_i)^2(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i - 1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_i +$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{b_i}{8} [\eta_i(1 + \eta\eta_i)^2(1 + \xi\xi_i)(\eta\eta_i - 1)_i] \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_i$$

(1.04)

A variação dos deslocamentos através da espessura da placa foi assumida, pela seguinte expressão, satisfazendo a condição de tensão de corte transversal e igual a zero, nas superfícies inferior e superior:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \left[\theta_x + \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \left[\theta_y + \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

(1.05)

Latheswary et al (2004), considerou laminados de arestas a x a e simplesmente apoiados. Utilizou duas relações aresta/espessura diferentes, ($a/h=10$ e $a/h=100$).

Submetendo uma placa laminada com quatro configurações diferentes “angle-ply” e “cross-ply” simétricas e anti-simétricas, aplicou-se uma carga distribuída.

Latheswary et al, concluiu que o efeito da deformação ao corte começa a ser significativa quando a relação entre a aresta e espessura é menor que 20. A partir desse valor, a deformação ao corte passa a ser praticamente constante.

Para camadas de fibras simétricas a deflexão é menor do que para camadas anti-simétricas, no caso de “cross-ply” com um quociente a/h maior que 20.

No caso de laminados “angle-ply”, a deflexão é praticamente a mesma para camadas com orientação simétrica ou anti-simétrica, para qualquer valor de a/h . Isso acontece porque a rigidez à flexão efectiva é a mesma para camadas orientadas simétricas e anti-simétricas. Sendo assim, para placas finas, uma teoria de ordem superior é necessária para análise mais rigorosa dos resultados.

Os valores da tensão normal para arranjos quer simétricos quer anti-simétricos são maiores para empilhamentos (0/90) do que para (45/-45). O autor conclui que o valor para a deflexão central é mínimo para uma orientação de fibras a 45 graus.

Para estudar o efeito da orientação das fibras, Latheswary et al (2003), considerou laminados quadrados com quatro camadas, simplesmente apoiados e submetidos a uma carga distribuída para ($a/h=10$ e $a/h=100$). Foram analisados arranjos simétricos ($\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha$) e anti-simétricos($\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha$) variando de 0 a 45 graus.

A deflexão decresce para um mínimo quando α se aproxima de 45 graus, o que significa que um laminado angle-ply com fibras orientadas a 45 graus em relação aos eixos da placa é o melhor arranjo.

Para camadas anti-simétricas, a deflexão é menor quando comparada com as camadas simétricas.

Latheswary et al (2004), aumentou o número de camadas de laminados quadrados, com a espessura de cada camada constante. Foram estudadas placas espessas ($a/h=100$) e placas finas ($b/h=10$), com arranjos simétricos e anti-simétricos. Para arranjos simétricos, a deflexão era praticamente constante, para o caso das placas finas. Para placas espessas, a deflexão diminuía com o aumento do número de camadas.

No caso dos laminados angle-ply, a deflexão diminui com o aumento do número de camadas, para os arranjos simétricos e anti-simétricos. Existia uma mudança drástica, nas placas laminadas com arranjos anti-simétricos, entre o número de camadas de dois a quatro.

Latheswary et al, aplicou a sua teoria no estudo de laminados quadrados de quatro camadas (0/90/90/0), sujeitos a uma carga distribuída, com diferentes condições de fronteira; simplesmente suportada e encastrada em ambos os lados.

Havia uma queda abrupta na deflexão para valores b/h menores que 20. A redução da deflexão para valores de b/h acima de 20, eram praticamente constantes.

A tensão normal era praticamente constante com a variação de a/h .

Estudando a tensão de corte e variando o cociente a/h , o autor conclui que para uma placa simplesmente apoiada, a tensão de corte era constante para valores $a/h \geq 20$. Para vigas encastradas em ambas as extremidades, a tensão de corte aumentava rapidamente.

Pervez et al (2005) apresentou um modelo de elementos finitos a duas dimensões para demonstrar a análise estática linear de placas compósitas ortotrópicas laminadas, baseadas numa teoria refinada HSDT. A teoria considera distribuições parabólicas de esforços de corte transversal e não requer factores de correcção ao corte. Foi desenvolvido um elemento com sete graus de liberdade por nó. A teoria prevê com exactidão os deslocamentos e os esforços ao corte transversal. Os autores compararam as suas soluções com as obtidas pela teoria de elasticidade tridimensional e de outros autores, tais como Reddy (1997).

Pervez et al (2005) considerou uma placa rectangular laminar com dimensões no plano de placa ' a ' e ' b ', e espessura ' h '.

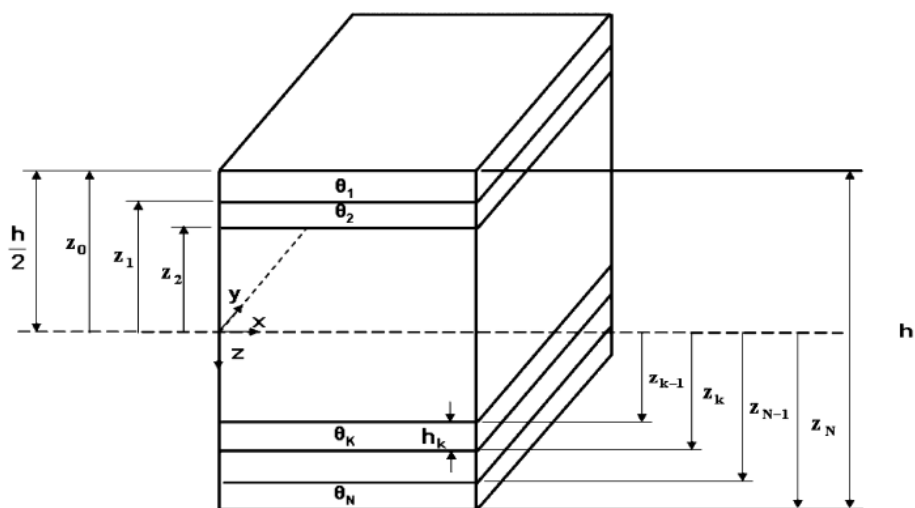


Figura 8- Geometria de um laminado com N camadas (Pervez et al 2005)

A placa laminada analisada é composta por lâminas ortotrópicas perfeitamente ligadas entre si (figura 8). O eixo principal do material de cada lâmina é orientado arbitrariamente em

função do eixo da placa. Pervez et al basearam a sua formulação no seguinte campo de deslocamentos:

$$u = u_0(x,y,0) - z\psi_x + z^3\alpha_x$$

$$v = v_0(x,y,0) - z\psi_y + z^3\alpha_y$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, 0)$$

(1.06)

Onde (u, v, w) são os deslocamentos de um ponto arbitrário na placa laminada, (x_0, y_0, w_0) são os deslocamentos de um ponto arbitrário num plano de referência. ψ_x, ψ_y são rotações das normais ao plano médio em redor do eixo do y e x , respectivamente, e α_x e α_y são as variáveis das deformadas nos planos $x-z$ e $y-z$, respectivamente. Os autores utilizaram cargas transversas sinusoidais distribuídas em todos os casos de estudo. Os resultados da deflexão máxima normalizada e das tensões para uma placa quadrada simplesmente apoiada com orientação (0/90/90/0) foram comparados com a teoria de terceira ordem de Reddy e com a teoria de elasticidade tridimensional. Nessa comparação fez-se variar o quociente entre a largura e a espessura (a/h). Os resultados obtidos foram idênticos aos das teorias com os quais foram comparados.

Functionally Graded Materials (Materiais Multifuncionais)

Os materiais multifuncionais são usados em inúmeras estruturas. Nas estruturas compósitas laminadas convencionais, as lâminas estão ligadas umas às outras, de forma a obter melhores propriedades, designadamente propriedades térmicas e mecânicas. O principal inconveniente dessa junção é o aparecimento de concentração de tensões ao longo das interfaces, mais especificamente, quando temperaturas altas estão envolvidas. Isso pode conduzir ao fenómeno da delaminação, falhas na matriz, e outras falhas que alteram abruptamente as propriedades mecânicas da interface entre as camadas. Uma maneira de resolver este problema é usar materiais gradualmente funcionais ou multifuncionais, FGM (functionally graded materials), nos quais as propriedades variam continuamente. Num FGM a superfície pode ter elevadas propriedades mecânicas e na outra superfície, elevadas propriedades térmicas. O gradiente de variação destas propriedades pode ser na direcção horizontal e/ou vertical.

Existem na natureza algumas estruturas que exemplificam os FGM tais como: ossos, dentes, cocos, conchas e bambu.

O aparecimento dos FGM, em 1984, deveu-se à necessidade da indústria aeroespacial, construir um material que possuísse propriedades externas tais que superasse altas temperaturas (1700°C) mas que conseguisse também suportar grandes forças e diferenciais de temperatura na ordem dos 1000°C. Foi projectado um material, constituído por cerâmico na parte externa e por um material condutor térmico na parte interna. Em 1992, os FGM foram considerados uma das dez maiores tecnologias no Japão.

Neste momento os FGM são utilizados na indústria aeronáutica, indústria de materiais, indústria de biomateriais e outras. São vitais para construções de foguetões e estações espaciais, no corte a seco de materiais de alta rigidez, já que se combina o diamante e o aço e na substituição de ossos humanos devido à rigidez, características anti-corrosão, resistência e durabilidade.

Em 2003, Lucia Della Croce e Paolo Venini, elaboraram um estudo onde abordam o comportamento de FGM quando comparados com os seus dois constituintes na forma pura.

Foi feita uma análise do comportamento à variação de temperatura variando a temperatura e a espessura para volumes diferentes de materiais constituintes no FGM. Os autores concluíram que a temperatura numa placa FGM era sempre inferior à temperatura dum material puro, para a mesma espessura.

Consideraram uma placa FGM (figura 9), simplesmente apoiada, com a parte inferior de alumínio e a parte superior de zircónio, sujeita a uma carga distribuída na topo. A placa foi submetida a um campo de temperatura, onde o topo superior estava sujeito a 300°C (cerâmico) e o inferior a 20°C (metal).

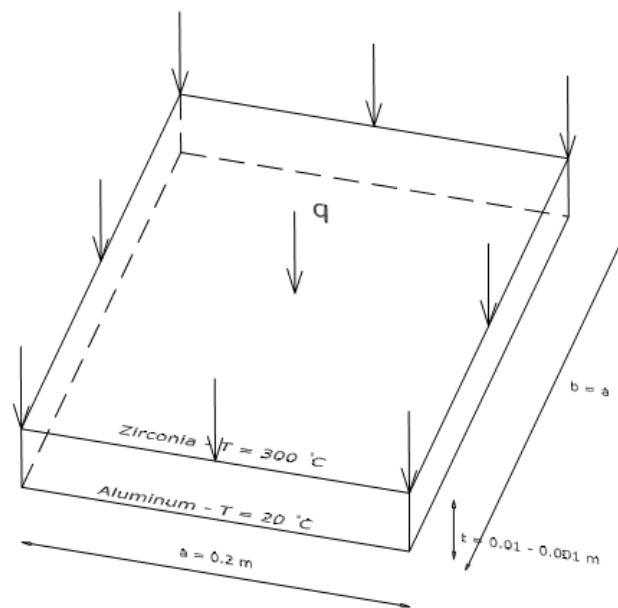


Figura 9- Geometria da placa, cargas e distribuição de material (Della Croce et al 2004)

Compararam a resposta dada pelo FGM em relação ao material formado pelos constituintes no estado puro. As placas com propriedades FGM tinham valores intermédios de deflexão. A placa constituída apenas por cerâmico apresentava o melhor resultado e a placa constituída apenas por alumínio o pior resultado, comparando as duas. Submeteram a placa à temperatura e concluíram que a deflexão central para placas metálicas e cerâmicas era maior do que para placas FGM.

Analysaram as tensões da placa quando esta era submetida a cargas mecânicas e/ou termomecânicas. Para cargas termomecânicas os materiais FGM tiveram um melhor comportamento enquanto que para cargas mecânicas as tensões já tinham valores mais semelhantes em todas as placas.

Estudaram também o ponto óptimo de gradiente para que a deflexão central fosse mínima no caso de cargas termomecânicas.

Concluíram assim que as placas FGM tinham melhor desempenho em situações de variação de carga e temperatura.

Kadoli, Akhtar e Ganesan (2007) estudaram várias configurações de FGM, fazendo variar o volume de material dos constituintes.

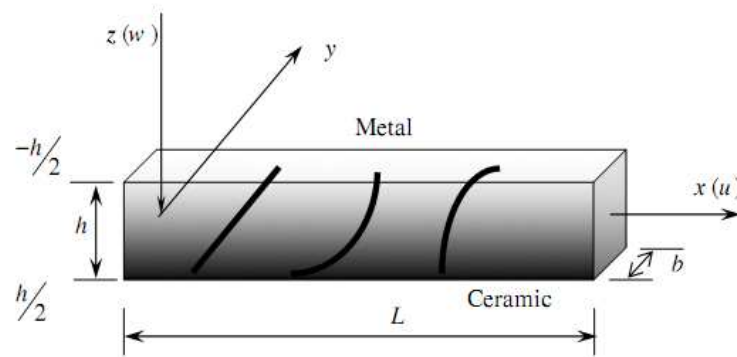


Figura 10- Geometria da viga FGM e possível distribuição de material (Kadoli et al 2007)

A figura 10 mostra uma viga FGM composta por cerâmico e metal de comprimento \$L\$, largura \$b\$ e espessura \$h\$. As propriedades do material variam na direcção \$z\$. O topo da viga consiste em metal e a base em cerâmico. A fracção de volume de cerâmico e metal é dada por:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n$$

$$V_m = 1 - V_c$$

(1.07)

Onde z é a distância desde a superfície média do laminado e n representa o expoente (lei da variação), um número real positivo. Para $n=0$, a viga fica composta apenas por material cerâmico. Quando o valor de n aumenta, a quantidade de metal na viga, também aumenta.

O módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e o módulo de rigidez são, respectivamente, dados por:

$$E_{eff} = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m$$

$$v_{eff} = (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + v_m$$

$$G_{eff} = (G_e - G_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + G_m$$

(1.08)

Os autores concluíram que quando a aplicação da carga é trocada da superfície com metal para a superfície com cerâmico, as derivadas ou a curvatura da tensão axial alteram-se. A distribuição da tensão de corte transversal depende da combinação metal-cerâmico. As deflexões, tensões e localização das superfícies neutras estão altamente dependentes do expoente n .

Capítulo Dois – Modelos de Elementos Finitos

Neste capítulo foram desenvolvidos os elementos baseados em teorias de deformação de corte de primeira e ordem superior.

Formulação de modelo baseado na teoria de deformação ao corte de primeira ordem

Para a implementação do modelo baseado na teoria de deformação de corte de primeira ordem, utilizou-se um elemento finito viga-barra Lagrangeano, quadrático, com três nós e três graus de liberdade por nó.

Este elemento, baseado na teoria de Mindlin-Timoshenko, será referenciada neste contexto, por FSDT.

O campo de deslocamentos é portanto dado por:

$$u(x, y) = u^0(x) + z\theta_x$$

$$w(x, z) = w^0(x)$$

(2.01)

De acordo com as relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade para pequenas deformações, e conforme se pode observar também em Oden (1981) e Reddy (2004) refere que as componentes das deformações num ponto arbitrário do laminado são dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{2.02}$$

Tendo em consideração estas relações e o campo de deslocamentos da equação (2.01), teremos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\theta_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right)
\end{aligned}
\tag{2.03}$$

Que poderemos escrevemos de forma alternativa,

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_{xx}\} &= \left\{ \frac{\partial u^0}{\partial x} \right\} + z \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right\} \\
\{\gamma_{xz}\} &= \left\{ \theta_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right\}
\end{aligned}
\tag{2.04}$$

Definindo um vector ε_{af}^* que inclui os termos das deformações relativos a flexão e esforço axial e um vector ε_s^* contendo os termos das distorções associadas ao corte transversal,

$$\varepsilon_{af}^* = \left\{ \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right\}^T
\tag{2.05}$$

$$\varepsilon_s^* = \left\{ \theta_x + \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right) \right\}^T$$

(2.06)

As deformações generalizadas nas equações (2.04) podem então ser escritas como

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{xx}\} &= Z_{af} \varepsilon_{bm}^* \\ \{\gamma_{xz}\} &= Z_s \varepsilon_s^* \end{aligned}$$

(2.07)

Onde as matrizes auxiliares Z_{af} e Z_s são definidas de acordo com os campos de deslocamentos sendo dadas, respectivamente, por

$$Z_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.08)

$$Z_s = [1]$$

(2.09)

Os deslocamentos definidos na superfície de referência são obtidos através da expressão

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = Z_m \{u_0 \ w_0 \ \theta_x\}^T$$

(2.10)

Sendo a matriz Z_m dada por:

$$Z_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.11)

Os deslocamentos generalizados no âmbito de um elemento são descritos pela combinação linear:

$$\{u^0 \ w^0 \ \theta_x\}^T = \sum_{i=1}^3 N_i q_i^e$$

(2.12)

Sendo N_i as funções de forma de Lagrange para o ponto nodal i dadas por (Hughes, T. J. R., 1987)

$$N_1 = -\frac{1}{2} \zeta(\zeta - 1)$$

$$N_2 = (1 - \zeta^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \zeta(\zeta + 1)$$

(2.13)

em que q_i^e representa o vector dos deslocamentos generalizados nodais para o ponto nodal i .

$$q^e = \{\dots \dots q_i^e \dots \dots \dots\}^T, \quad i = 1, \dots, 3$$

(2.14)

Os vectores das deformações generalizadas, das equações (2.05) podem ser representados pela expressão

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{af}^* \\ \varepsilon_s^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{af} \\ B_s \end{Bmatrix} q^e \quad (2.15)$$

Onde B_{af} e B_s são as matrizes de transformação deformações-deslocamentos, para flexão e esforço axial e para o corte transversal, respectivamente, relacionando os deslocamentos nodais do elemento com as componentes das deformações, dadas por

$$B_{af}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad em\ que\ i = 1, \dots, 3 \quad (2.16)$$

$$B_s^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \end{bmatrix} \quad em\ que\ i = 1, \dots, 3 \quad (2.17)$$

A matriz de rigidez do elemento é obtida através da expressão

$$K_{af}^e = \int_{-1}^{+1} \left\{ B_{af}^T \left[\sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_{af}^T \cdot \bar{Q}_{af} \cdot Z_{af}^T \right] B_{af} \right\} dz \cdot \det J \quad (2.18)$$

$$K_s^e = \int_{-1}^{+1} \left\{ B_s^T \left[\sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_s^T \cdot \bar{Q}_s \cdot Z_s^T \right] B_s \right\} dz \cdot \det J \quad (2.19)$$

Em que NL representa o número de lâminas que constituem o laminado, h_k a distância da superfície média de referência do laminado à face superior da lâmina k , $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação do sistema de coordenadas natural (ζ) do elemento para o sistema de eixos coordenados (x,y,z) e \bar{Q}_{af} e \bar{Q}_s são as sub-matrizes constitutivas, no sistema de eixos do laminado (x,y,z) para a lâmina k , correspondentes aos efeitos de esforço axial e flexão e corte transversal, respectivamente dadas por

$$\bar{Q}_{af} = [\bar{Q}_{11}] \quad (2.20)$$

$$\bar{Q}_s = [\bar{Q}_{55}] \quad (2.21)$$

As matrizes D_k^{af} e D_k^s para a lâmina k são, respectivamente, dadas por

$$D_k^{af} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_{af}^T \cdot \bar{Q}_k^{af} \cdot Z_{af} dz =$$

$$D_k^{af} = \begin{bmatrix} H_1 Q_{11} & H_2 Q_{11} \\ H_2 Q_{11} & H_3 Q_{11} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$D_k^s = \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_s^T \cdot \bar{Q}_k^s \cdot Z_s dz =$$

$$D_k^s = [H_1 Q_{55}] \quad (2.23)$$

A integração numérica na equação (2.18) é efectuada utilizando integração exacta para as componentes de esforço axial e flexão e integração reduzida (2.19) para a componente de corte transversal, no sentido de evitar o efeito de bloqueio “locking”.

No contexto dos termos associados ao corte, é ainda considerado um factor de correcção desse efeito que no presente trabalho, foi $k=5/6$.

Uma vez resolvido o problema estático e obtido o valor da resposta mecânica, \mathbf{q} , as tensões num ponto de integração de um elemento arbitrário, na k -ésima lâmina, na ausência de efeitos térmicos ou de variação de humidade, são calculadas através das relações constitutivas, obtendo-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{15}^* \\ \bar{Q}_{51}^* & \bar{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{15}^* \\ \bar{Q}_{51}^* & \bar{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \{Z_{af} B_{af} q^e\} \quad (2.25)$$

Formulação de modelo de elementos finitos baseado numa teoria de ordem superior

Para o desenvolvimento do modelo baseado na teoria de ordem superior de Lo et al (1977-a, 1977-b), foram utilizados elementos finitos Lagrangeanos cúbicos, com quatro nós e sete graus de liberdade por nó, também utilizados por Vinayak, Prathap e Naganarayana (1994).

Este modelo será referenciado, neste contexto, HSDT.

De acordo com o campo de deslocamentos de Lo et al (1977-a e 1977-b), os deslocamentos na direcção u , são descritos como uma função cúbica da espessura, z e truncando a uma ordem imediatamente inferior o deslocamento transversal w , é igualmente função da coordenada espessura. Isto conduz-nos a uma definição consistente de interpolação para o esforço de corte transversal em relação à espessura z .

$$u(x, y) = u^0(x) + z\theta_x + z^2u^{0*}(x) + z^3\theta_x^*(x)$$

$$w(x, z) = w^0(x) + z\beta_z(x) + z^2w^{0*}(x)$$

(2.26)

De acordo com as relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade para pequenas deformações Oden (1981) e Reddy (2004) refere que as componentes das deformações num ponto arbitrário do laminado são dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Tendo em consideração o campo de deslocamentos e as relações da equação anteriores, teremos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} + z^2 \frac{\partial u^{0*}}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w^0}{\partial z} + z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} + \frac{z^2 \partial w^{0*}}{\partial z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\theta_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) + z \left(2u^{0*} + \frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right) + z^2 \left(3\theta_x^* + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{2.28}$$

Resultando assim,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \beta_z \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 2w^{0*} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^{0*}}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{2.29}$$

$$\{\gamma_{xz}\} = \left\{ \theta_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right\} + z \left\{ 2u^{0*} + \frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right\} + z^2 \left\{ 3\theta_x^* + \frac{\partial w^0}{\partial x} \right\}\tag{2.30}$$

Definindo um vector ε_{af}^* que inclui os termos das deformações relativos a flexão e esforço axial e um vector ε_s^* contendo os termos das distorções associadas às deformações de corte transversal, tais que

$$\varepsilon_{af}^* = \left\{ \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} \right), \beta_z, \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), 2w^{0*}, \left(\frac{\partial u^{0*}}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right) \right\}^T\tag{2.31}$$

$$\varepsilon_s^* = \left\{ \theta_x + \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right), 2u^{0*} + \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right), 3\theta_x^* + \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x} \right) \right\}^T \quad (2.32)$$

As deformações generalizadas nas equações (2.29) e (2.30) podem então ser escritas como

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} &= Z_{af} \varepsilon_{bm}^* \\ \{\gamma_{xz}\} &= Z_s \varepsilon_s^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

Onde as matrizes Z_{af} e Z_s são definidas, respectivamente, por

$$Z_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 & z^3 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$Z_s = [1 \quad z \quad z^2] \quad (2.35)$$

Os deslocamentos definidos na superfície de referência são obtidos através da expressão

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = Z_m \{u_0 \ w_0 \ \theta_x \ \beta_z \ u_0^* \ w_0^* \ \theta_x^*\}^T \quad (2.36)$$

Sendo a matriz Z_m dada por:

$$[Z_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & z^2 & 0 & z^3 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Os deslocamentos generalizados no elemento são dados por

$$\{u^0 \ w^0 \ \theta_x \ \beta_z \ u^{0*} \ w^{0*} \ \theta_x^*\}^T = \sum_{i=1}^4 N_i q_i^e \quad (2.38)$$

Sendo N_i as funções de forma de Lagrange para o ponto nodal i dadas por (Loja et al 1997)

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{9}{14} \left(\zeta + \frac{1}{3}\right) \left(\zeta - \frac{1}{3}\right) (\zeta - 1) \\ N_2 &= \frac{27}{16} (\zeta + 1) \left(\zeta - \frac{1}{3}\right) (\zeta - 1) \\ N_3 &= -\frac{27}{16} (\zeta + 1) \left(\zeta + \frac{1}{3}\right) (\zeta - 1) \\ N_4 &= \frac{9}{16} (\zeta + 1) \left(\zeta + \frac{1}{3}\right) \left(\zeta - \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

q_i^e representa o vector de deslocamentos nodais generalizados do elemento para o ponto nodal i . O vector de deslocamento do elemento é dado por:

$$q^e = \{\dots \dots q_i^e \dots \dots \dots\}^T, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.40)$$

Os vectores das deformações nas equações (2.31) e (2.32) podem ser representados pela expressão

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{af}^* \\ \varepsilon_s^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{af} \\ B_s \end{Bmatrix} q^e \quad (2.41)$$

Onde B_{af} e B_s são as matrizes de transformação deformações-deslocamentos, para flexão e esforço axial e para o corte transversal, respectivamente, relacionando os deslocamentos nodais do elemento com as componentes das deformações, dadas por

$$B_{af}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial Ni}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ni & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2Ni & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.42)$$

$$B_s^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} & Ni & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} & 2Ni & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Ni}{\partial x} & 3Ni \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.43)$$

A matriz de rigidez dos elementos é obtida através da expressão

$$K_{af}^e = \int_{-1}^{+1} \left\{ B_{af}^T \left[\sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_{af}^T \cdot \bar{Q}_{af} \cdot Z_{af}^T \right] B_{af} \right\} dz \cdot \det J \quad (2.44)$$

$$K_s^e = \int_{-1}^{+1} \left\{ B_s^T \left[\sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_s^T \cdot \bar{Q}_s \cdot Z_s^T \right] B_s \right\} dz \cdot \det J \quad (2.45)$$

Em que NL representa o número de lâminas que constituem o laminado, h_k a distância da superfície média de referência do laminado à face superior da lâmina k , $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação do sistema de eixos natural (ζ) do elemento para o sistema de eixos coordenados (x, y, z) e \bar{Q}_{af} e \bar{Q}_s são as sub-matrizes

constitutivas, no sistema de coordenadas do laminado (x,y,z) para a lâmina k , correspondentes aos efeitos de esforço axial e flexão e corte transversal, respectivamente dadas por

$$\bar{Q}_{af} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\bar{Q}_s = [\bar{Q}_{55}] \quad (2.47)$$

As matrizes D_k^{af} e D_k^s para a lâmina k são, respectivamente, dadas por

$$D_k^{af} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_{af}^T \cdot \bar{Q}_k^{af} \cdot Z_{af} dz = \begin{bmatrix} H_1 Q_{11} & H_1 Q_{13} & H_2 Q_{11} & H_2 Q_{13} & H_3 Q_{11} & H_4 Q_{11} \\ H_1 Q_{13} & H_1 Q_{33} & H_2 Q_{13} & H_2 Q_{33} & H_3 Q_{13} & H_4 Q_{13} \\ H_2 Q_{11} & H_2 Q_{13} & H_3 Q_{11} & H_3 Q_{13} & H_4 Q_{11} & H_5 Q_{11} \\ H_2 Q_{13} & H_2 Q_{33} & H_3 Q_{13} & H_3 Q_{33} & H_4 Q_{13} & H_5 Q_{13} \\ H_3 Q_{11} & H_3 Q_{13} & H_4 Q_{11} & H_4 Q_{13} & H_5 Q_{11} & H_6 Q_{11} \\ H_4 Q_{11} & H_4 Q_{13} & H_5 Q_{11} & H_5 Q_{13} & H_6 Q_{11} & H_7 Q_{11} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$D_k^s = \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_s^T \cdot \bar{Q}_k^s \cdot Z_s dz = \begin{bmatrix} H_1 Q_{55} & H_2 Q_{55} & H_3 Q_{55} \\ H_2 Q_{55} & H_3 Q_{55} & H_4 Q_{55} \\ H_3 Q_{55} & H_4 Q_{55} & H_5 Q_{55} \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$H_n = \frac{1}{n} (h_k^n - h_{k-1}^n) \quad (2.49)$$

A integração numérica na equação (2.44) é efectuada utilizando integração exacta para as componentes de esforço axial e flexão e integração reduzida para a componente de corte transversal (2.45), pelos motivos já referidos no contexto da secção anterior.

Uma vez resolvido o problema estático e obtido o valor da resposta mecânica, \mathbf{q} , as tensões num ponto de integração de um elemento arbitrário, na k ésima lâmina, na ausência de efeitos térmicos ou de variação de humidade, são calculadas através das relações constitutivas, obtendo-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{13}^* & 0 \\ \bar{Q}_{13}^* & \bar{Q}_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{13}^* & 0 \\ \bar{Q}_{13}^* & \bar{Q}_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \{Z_{af} B_{af} q^e\} \quad (2.51)$$

Equações de Equilíbrio

Recorrendo ao princípio de *Hamilton* para obter as condições de equilíbrio do laminado e assumindo a ausência de amortecimento,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_c - \delta U_d + \delta W) dt = 0 \quad (2.52)$$

Sendo U_c a energia cinética, U_d a energia elástica de deformação e W é o trabalho realizado pelas forças aplicadas ao sistema. O termo correspondente à energia cinética é dado por:

$$\delta U_c = \int_V \rho \delta \dot{q}^T \dot{q} dV = \int_A \delta \dot{q}^T \left(\int_z \rho dz \right) \dot{q} dA \quad (2.53)$$

Em que q representa o vector dos deslocamentos generalizados, i.e. $q = \{u, w\}$, $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$ são as velocidades generalizadas e ρ a massa por unidade de volume. V e A são o volume e a área, respectivamente, da estrutura laminada. A energia elástica de deformação é dada por:

$$\delta U_d = \int_V \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dV = \int_A \int_z \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{Q} \bar{\varepsilon} dz dA \quad (2.54)$$

Em que $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xz}\}^T$ e $\bar{\sigma} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xz}\}^T$. O trabalho das forças externas aplicadas é dado por:

$$\delta W = \int_A p \delta w dA \quad (2.55)$$

Substituindo as equações (2.27, 2.28 e 2.29) na nesta

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(\delta q^T \left(\int_z \rho dz \right) \ddot{q} - \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{Q} \bar{\varepsilon} dz + p \delta w \right) dA dt = 0 \quad (2.56)$$

Integrando o primeiro termo por partes, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_A (\delta q^T \left(\int_Z \rho dz \right) \ddot{q} + \int_Z [\delta \bar{\varepsilon}^T \bar{Q} \bar{\varepsilon}] dz - p \delta w) dA dt = 0 \quad (2.57)$$

Dividindo o domínio da estrutura laminada num número finito de domínios elementares, A_e , contidos no domínio global, A , tal que a equação possa ser escrita sob a forma,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^{NE} \int_{A_e} \left\{ \int_A (\delta) q^{eT} \left(\int_Z \rho dz \right) \ddot{q}^e + \int_Z \left[(\delta) \bar{\varepsilon}^T \bar{Q}^e \bar{\varepsilon} \right] dz - p^e \delta w \right\} dA dt = 0 \quad (2.58)$$

Em que NE é o número de elementos em que o domínio global foi dividido e o índice e se refere ao elemento, escreve-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{e=1}^{NE} \left(\int_A \delta q^{eT} M^e \ddot{q}^e + \delta q^{eT} K^e q^e - \delta q^{eT} F^e \right) \right\} dt = 0 \quad (2.59)$$

K^e e M^e são, respectivamente, as matrizes de rigidez e de massas elementares correspondentes a cada um dos NE elementos finitos em que a estrutura foi dividida e q^e é o vector dos deslocamentos para o elemento. Montando todas as matrizes K^e e M^e obtêm-se as matrizes K e M , que são respectivamente, a matriz de rigidez e a matriz de massas da estrutura global.

A matriz de massas do elemento é calculada por:

$$M^e = \int_{-1}^1 N^T \left(\sum_{k=1}^{NL} \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z_m^T Z_m dz \right) N det J d\zeta \quad (2.60)$$

Em que N é a matriz das funções de forma de Lagrange e ρ_k a massa por unidade de volume associado à constituinte a lâmina k .

Numa situação de análise estática linear:

$$Kq = F \tag{2.61}$$

Em que q é o vector de deslocamentos globais da estrutura e F o vector de forças.

Para vibrações livres e harmónicas:

$$Kq_n - \omega_n^2 Mq_n = 0 \tag{2.62}$$

Onde ω_n representa a frequência natural da estrutura correspondente ao modo n e q_n é o vector modal correspondente ao referido modo. O vector de forças correspondente ao ponto nodal i , para um elemento arbitrário e , devido a uma força transversal uniformemente distribuída no laminado, pode ser calculado para o elemento HSDT através da expressão:

$$F_i^e = \int_{-1}^1 N_i \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ h \\ \frac{h}{2} \\ 0 \\ \frac{h^2}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} \{f_z^+ f_z^-\} \det J d\zeta \tag{2.63}$$

Implementação dos modelos

Os modelos desenvolvidos no âmbito deste trabalho foram implementados na aplicação de computação simbólica MAPLE e são apresentados no Anexo 1.

Capítulo Três – Aplicação Numéricas

3.1-Validação do algoritmo

Numa fase inicial de validação dos algoritmos desenvolvidos foram considerados três situações distintas, designadamente:

1. Viga isotrópica encastrada numa extremidade e com carga axial na extremidade oposta



Figura 11-Viga encastrada numa extremidade e com carga axial na extremidade oposta (Caso2)

2. Viga isotrópica encastrada numa extremidade e com carga transversal na extremidade oposta



Figura 12- Viga encastrada numa extremidade e com carga transversal na extremidade oposta (Caso 3)

3. Viga isotrópica simplesmente apoiada com carga transversal a meio

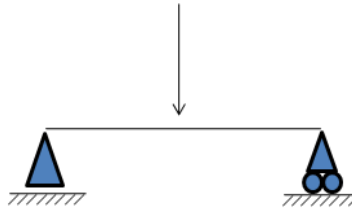


Figura 13- Viga simplesmente apoiada com carga transversal a meio (Caso 1)

No contexto destes casos foram analisadas diferentes relações entre comprimento e espessura, bem como as características de convergência dos modelos.

O material utilizado foi o alumínio, com um módulo de elasticidade de 73GPa. Foi aplicada uma carga concentrada de 500N. A viga tem dimensões L de um metro, e uma largura de 20 mm.

Utilizando a teoria FSDT:

Para $l/h=100$

Tabela 1-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %
1	0,064225	0,085616	24,985	0,000034	0,000034	0,000
2	0,085634	0,085616	0,020	0,000034	0,000034	0,000
4	0,085634	0,085616	0,020	0,000034	0,000034	0,000
10	0,085634	0,085616	0,020	0,000034	0,000034	0,000
20	0,085634	0,085616	0,020	0,000034	0,000034	0,000
40	0,085634	0,085616	0,020	0,000034	0,000034	0,000

Tabela 2-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %
1	1,369932	1,369863	0,005
2	1,369932	1,369863	0,005
4	1,369932	1,369863	0,005
10	1,369932	1,369863	0,005
20	1,369932	1,369863	0,005
40	1,369932	1,369863	0,005

De acordo com a tabela 1 e 2, apresentam-se os valores obtidos e respectivos desvios relativamente aos resultados obtidos utilizando as expressões (caso1, caso2 e caso3 respectivamente):

$$1. y_{m\acute{a}x} = \frac{-P.L^3}{48.E.I}$$

$$2. y_{m\acute{a}x} = \frac{-P.L}{A.E}$$

$$3. y_{m\acute{a}x} = \frac{-P.L^3}{3.E.I}$$

Neste caso, como se trata de uma viga fina, os efeitos das deformações de corte transversal ainda não é evidente. Os resultados mantêm-se constantes com o aumento do número de elementos. O desvio entre o valor obtido pela teoria FSDT e o valor da expressão é baixo.

Para $l/h=50$:

Tabela 3-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %
1	0,008033	0,010702	24,940	0,000017	0,000017	0,000
2	0,010711	0,010702	0,080	0,000017	0,000017	0,000
4	0,010711	0,010702	0,080	0,000017	0,000017	0,000
10	0,010711	0,010702	0,080	0,000017	0,000017	0,000
20	0,010711	0,010702	0,080	0,000017	0,000017	0,000
40	0,010711	0,010702	0,080	0,000017	0,000017	0,000

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio %
1	0,171267	0,171233	0,020
2	0,171267	0,171233	0,020
4	0,171267	0,171233	0,020
10	0,171267	0,171233	0,020
20	0,171267	0,171233	0,020
40	0,171267	0,171233	0,020

Com a diminuição da razão l/h , existem um aumento do desvio no caso1 e caso3, devido às deformações de corte transversal.

Para $l/h=20$

Tabela 4-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT (m)	Expressão(m)	Desvio %	FSDT (m)	Expressão (m)	Desvio (%)
1	0,000516	0,000685	24,625	0,000007	0,000007	0,000
2	0,000688	0,000685	0,500	0,000007	0,000007	0,000
4	0,000688	0,000685	0,500	0,000007	0,000007	0,000
10	0,000688	0,000685	0,500	0,000007	0,000007	0,000
20	0,000688	0,000685	0,500	0,000007	0,000007	0,000
40	0,000688	0,000685	0,500	0,000007	0,000007	0,000

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT (m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,010973	0,010959	0,013
2	0,010973	0,010959	0,013
4	0,010973	0,010959	0,013
10	0,010973	0,010959	0,013
20	0,010973	0,010959	0,012
40	0,010973	0,010959	0,012

O desvio para o caso1 e caso3 aumenta em relação às razões de l/h anteriores.

Para $l/h=10$

Tabela 5-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,000065	0,000086	23,500	0,000003	0,000003	0,000
2	0,000087	0,000086	2,000	0,000003	0,000003	0,000
4	0,000087	0,000086	2,000	0,000003	0,000003	0,000
10	0,000087	0,000086	2,000	0,000003	0,000003	0,000
20	0,000087	0,000086	2,000	0,000003	0,000003	0,000
40	0,000087	0,000086	2,000	0,000003	0,000003	0,000

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,001377	0,001370	0,500
2	0,001377	0,001370	0,500
4	0,001377	0,001370	0,500
10	0,001377	0,001370	0,500
20	0,001377	0,001370	0,500
40	0,001377	0,001370	0,500

Existe um aumento do desvio, em relação às razões de l/h anteriores.

Para $l/h=5$

Tabela 6-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,000009	0,000011	19,000	0,000002	0,000002	0,000
2	0,000012	0,000011	8,000	0,000002	0,000002	0,000
4	0,000012	0,000011	8,000	0,000002	0,000002	0,000
10	0,000012	0,000011	8,000	0,000002	0,000002	0,000
20	0,000012	0,000011	8,000	0,000002	0,000002	0,000
40	0,000012	0,000011	8,000	0,000002	0,000002	0,000

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,000175	0,000171	2,000
2	0,000175	0,000171	2,000
4	0,000175	0,000171	2,000
10	0,000175	0,000171	2,000
20	0,000175	0,000171	2,000
40	0,000175	0,000171	2,000

A tendência de aumento do desvio é natural que se mantenha e acentue, dado que se trata de uma viga já espessa, e o efeito das deformações de corte transversal começa a ser mais relevante. O valor do desvio é constante a partir de dois elementos na viga.

Para $l/h=2,5$

Tabela 7-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,000001	0,000001	1,000	0,000001	0,000001	0,000
2	0,000002	0,000001	32,000	0,000001	0,000001	0,000
4	0,000002	0,000001	32,000	0,000001	0,000001	0,000
10	0,000002	0,000001	32,000	0,000001	0,000001	0,000
20	0,000002	0,000001	32,000	0,000001	0,000001	0,000
40	0,000002	0,000001	32,000	0,000001	0,000001	0,000

N. Elementos	Caso 3		
	FSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
1	0,000023	0,000021	8,000
2	0,000023	0,000021	8,000
4	0,000023	0,000021	8,000
10	0,000023	0,000021	8,000
20	0,000023	0,000021	8,000
40	0,000023	0,000021	8,000

Como já foi referido anteriormente, o valor do desvio teria tendência em aumentar para o caso1 e caso3, conforme o aumento da espessura. Já para a situação de solicitação axial, continua-se a obter a solução exacta.

Utilizando a teoria HSDT:

Para $l/h=100$

Tabela 8-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,085637	0,085616	0,024	0,000034	0,000034	0,013
4	0,085637	0,085616	0,024	0,000034	0,000034	0,026
8	0,085637	0,085616	0,024	0,000034	0,000034	0,052
10	0,085637	0,085616	0,024	0,000034	0,000034	0,065

N. Elementos	Caso 3		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	1,369945	1,369863	0,006
4	1,369945	1,369863	0,006
8	1,369945	1,369863	0,006
10	1,369945	1,369863	0,006

Para o caso1 e caso3 os desvios são constantes, em contraste com o que acontece na viga encastrada com aplicação de força axial na extremidade oposta (caso 2). Para esse caso, o desvio apresentado vai aumentando conforme o aumento do número de elementos.

Para $l/h=50$

Tabela 9-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	HSDT (m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,010712	0,010702	0,095	0,000017	0,000017	0,052
4	0,010712	0,010702	0,096	0,000017	0,000017	0,104
8	0,010712	0,010702	0,096	0,000017	0,000017	0,208
10	0,010712	0,010702	0,096	0,000017	0,000017	0,260

N. Elementos	Caso 3		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,171274	0,171233	0,024
4	0,171274	0,171233	0,024
8	0,171274	0,171233	0,024
10	0,171274	0,171233	0,024

Com o aumento da espessura torna-se evidente o aumento do desvio.

Para $l/h=20$

Tabela 10-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,001343	0,001338	0,380	0,000007	0,000007	0,324
4	0,001343	0,001338	0,382	0,000007	0,000007	0,651
8	0,001343	0,001338	0,384	0,000007	0,000007	1,250
10	0,001343	0,001338	0,385	0,000007	0,000007	1,480

N. Elementos	Caso 3		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,010975	0,010959	0,015
4	0,010975	0,010959	0,015
8	0,010975	0,010959	0,015
10	0,010975	0,010959	0,015

Para $l/h=10$

Tabela 11-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,000088	0,000086	2,390	0,000003	0,000003	1,301
4	0,000088	0,000086	2,408	0,000004	0,000003	2,499
8	0,000088	0,000086	2,432	0,000004	0,000003	3,731
10	0,000088	0,000086	2,438	0,000004	0,000003	3,927

N. Elementos	Caso 3		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,001378	0,001370	0,597
4	0,001378	0,001370	0,599
8	0,001378	0,001370	0,601
10	0,001378	0,001370	0,601

O desvio para o caso2 continua a aumentar com o número de elementos e com a redução da razão l/h. O caso3, viga encastrada numa extremidade com carga transversal na outra extremidade, mantém um desvio constante a partir dos oito elementos.

l/h=5

Tabela 12-Deslocamentos e desvios obtidos

N. Elementos	Caso 1			Caso 2		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,000012	0,000011	9,736	0,000002	0,000002	4,998
4	0,000012	0,000011	9,854	0,000002	0,000002	7,462
8	0,000012	0,000011	9,982	0,000002	0,000002	8,161
10	0,000012	0,000011	10,000	0,000002	0,000002	8,194

N. Elementos	Caso 3		
	HSDT(m)	Expressão(m)	Desvio %
2	0,000175	0,000171	2,393
4	0,000175	0,000171	2,406
8	0,000175	0,000171	2,415
10	0,000175	0,000171	2,416

Neste caso, como já se trata de uma viga espessa, é natural que os desvios sejam bastante acentuados, já que se compara um modelo HSDT, a soluções alternativas menos refinadas.

3.2-Estudo de vigas laminadas

1. *Análise estática de uma viga em sandwich com materiais isotrópicos [Wennerstrom e Backlund 1986].*

A análise apresentada por Wennerstrom e Backlund (1986) contemplava uma viga com as seguintes propriedades:

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E_f = 124 \text{ GPa}$$

$$G_c = 22 \text{ MPa}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h = 24,71 \text{ mm}$$

$$t_b = 0,2875 \text{ mm}$$

$$t_t = 0,5750 \text{ mm}$$

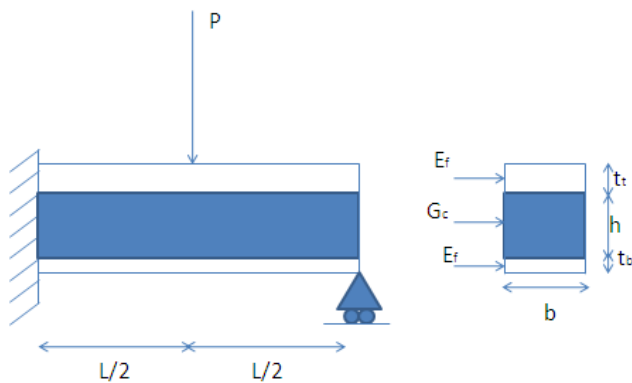


Figura 14- Exemplo da viga estudada por Wennestrom e Backlund 1986

Tabela 13- Deflexão obtida por Wennerstrom e Backlund e pelas teorias FSDT e HSDT estudadas

	Wennerstrom e Backlund (1986)	FSDT	HSDT
Deslocamento máximo (m)	0.055436	0.056311	0.056355

Os resultados obtidos pelas duas teorias, para uma deflexão máxima, localizada em $L/2$ foram similares aos obtidos pelos autores. Foram utilizados 10 elementos neste cálculo.

a) *Redução para 50% da espessura do núcleo*

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E_f = 124 \text{ GPa}$$

$$G_c = 22 \text{ MPa}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h = 12,335 \text{ mm}$$

$$t_b = 0,2875 \text{ mm}$$

$$t_t = 0,5750 \text{ mm}$$

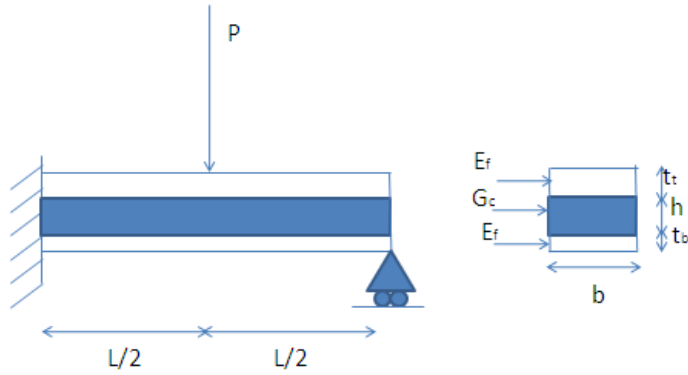


Figura 15-Exemplo da viga estudada após redução da espessura do núcleo

Tabela 14- Deflexão obtida pelas duas teorias após a redução da espessura do núcleo em 50%

	FSDT	HSDT
Deslocamento máximo (m)	0.169409	0.169776

Para melhor compreender a influência da espessura do núcleo, reduziu-se a mesma para metade ($h = 12,335 \text{ mm}$). A deflexão em $L/2$ subiu, como se observa na tabela 14.

b) Redução para 25% da espessura do núcleo

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E_f = 124 \text{ GPa}$$

$$G_c = 22 \text{ MPa}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h = 6,1775 \text{ mm}$$

$$t_b = 0,2875 \text{ mm}$$

$$t_t = 0,5750 \text{ mm}$$

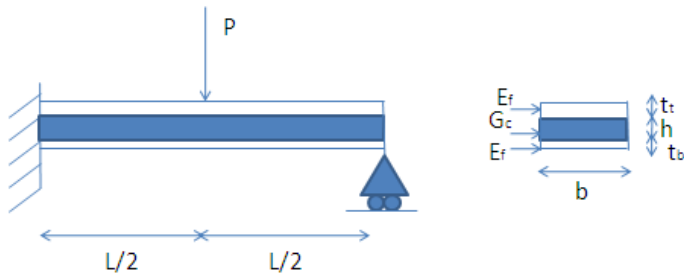


Figura 16-Exemplo da viga estudada após redução do núcleo em 75%

Tabela 15- Deflexão obtida pelas duas teorias após a redução da espessura do núcleo em 75%

	FSDT	HSDT
Deflexão (m)	0.563578	0.545980

Reduziu-se a espessura do núcleo em 75%, $h = 6,1775 \text{ mm}$, e como esperado a deflexão aumenta (tabela 3).

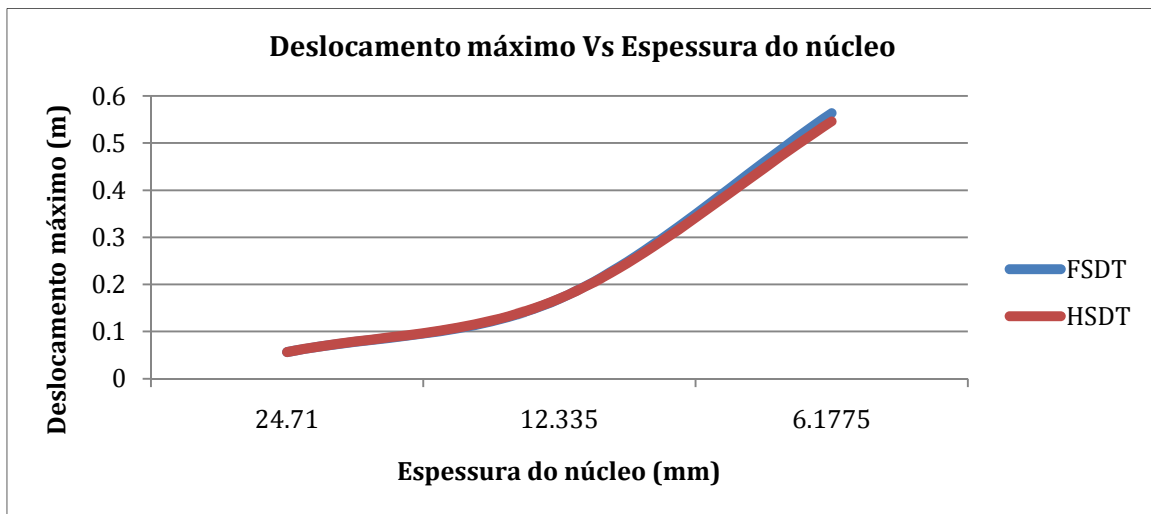


Figura 17-Variação da espessura do deslocamento máximo com a espessura do núcleo

Os resultados obtidos começam a ter uma maior discrepância para vigas mais espessas, menores l/h , explicação que pode ser dada, pelo facto das deformações de corte serem mais significativas.

c) *Espessuras iguais para ambas as lâminas exteriores*

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E_f = 124 \text{ GPa}$$

$$G_c = 22 \text{ MPa}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h = 24,71 \text{ mm}$$

$$t_b = 0,2875 \text{ mm}$$

$$t_t = 0,2875 \text{ mm}$$

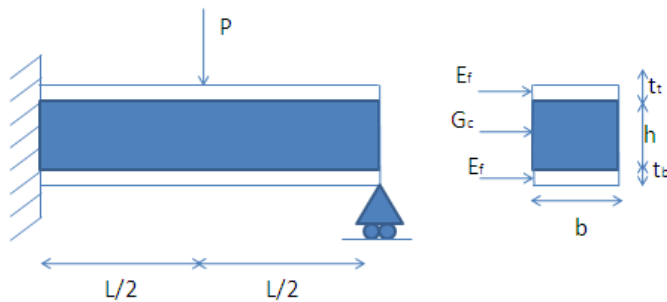


Figura 18-Exemplo de viga após redução da lâmina superior em 50%

Tabela 16- Deflexão obtida para uma viga sandwich com as lâminas externas da mesma espessura

	FSDT	HSDT
Deslocamento máximo (m)	0.066953	0.066971

Mantendo a espessura original do núcleo, e utilizando a mesma espessura para ambas as lâminas (reduzindo em 50% a lâmina superior e por consequente, aumentar o l/h), a

deflexão obtida foi superior à deflexão originalmente obtida por Wennerstrom e Backlund (1986).

2. *Estudo do deslocamento máximo para diferentes razões l/h e ângulos de orientação das fibras para uma viga encastrada numa extremidade e com carga transversal na outra extremidade [Dipak et al, 1994].*

A viga estudada por Dipak et al (1984) tinha as seguintes configuração e propriedades:

$$P = 10000 \text{ N}$$

$$L = 0.1905 \text{ m}$$

$$E_1 = 129,207 \text{ GPa}$$

$$E_2 = E_3 = 9,42512 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,15658 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 4,3053 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 2,5414 \text{ GPa}$$

$$b = 0.0127$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = 0.3$$

$$\nu_{13} = 0.218837$$

Expressão para deslocamento adimensional $\bar{w} = \frac{10 \cdot E_3 \cdot b \cdot h^2 \cdot w(l, 0)}{P \cdot l^3}$



Figura 19- Exemplo da viga estudada por Dipak et al 1994

FSDT:

a) $l/h=5$

Tabela 17- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=5$)

Ângulos	Dipak et al	FSDT	Desvio %
0°	3,9547	3,9686	0,3514
30°	18,6453	19,3412	3,7323
45°	29,9324	31,5794	5,5023
60°	37,6717	38,7712	2,9186
90°	41,8707	41,7801	0,2163

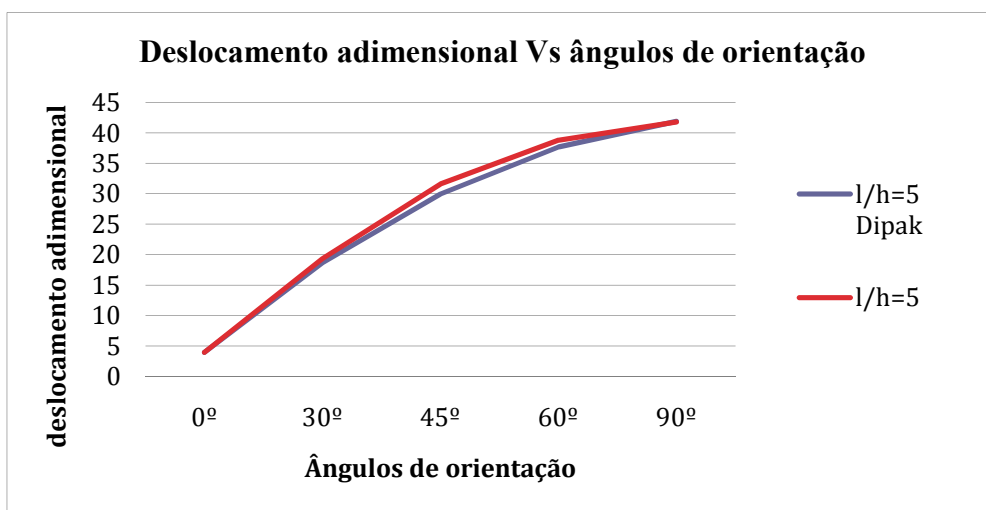


Figura 20-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação das fibras

b) $l/h=10$

Tabela 18- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=10$)

Ângulos	Dipak et al	FSDT	Desvio %
0°	3,1782	3,1805	0,0723
30°	17,6532	18,4164	4,3232
45°	28,8415	30,5178	5,8121
60°	36,4723	37,5729	3,0176
90°	40,5133	40,445	0,1685

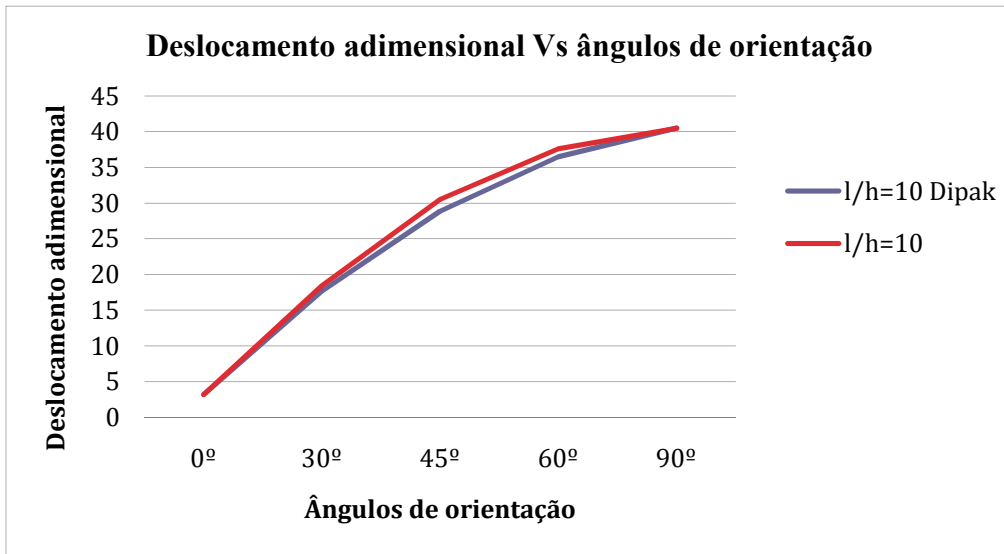


Figura 21-Varição do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

c) $l/h=20$

Tabela 19--Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=20$)

Ângulos	Dipak et al	FSDT	Desvio %
0°	2,984	2,9835	0,0167
30°	17,3219	18,185	4,9827
45°	28,5228	30,252	6,0625
60°	36,1626	37,273	3,0705
90°	40,1845	40,111	0,1829

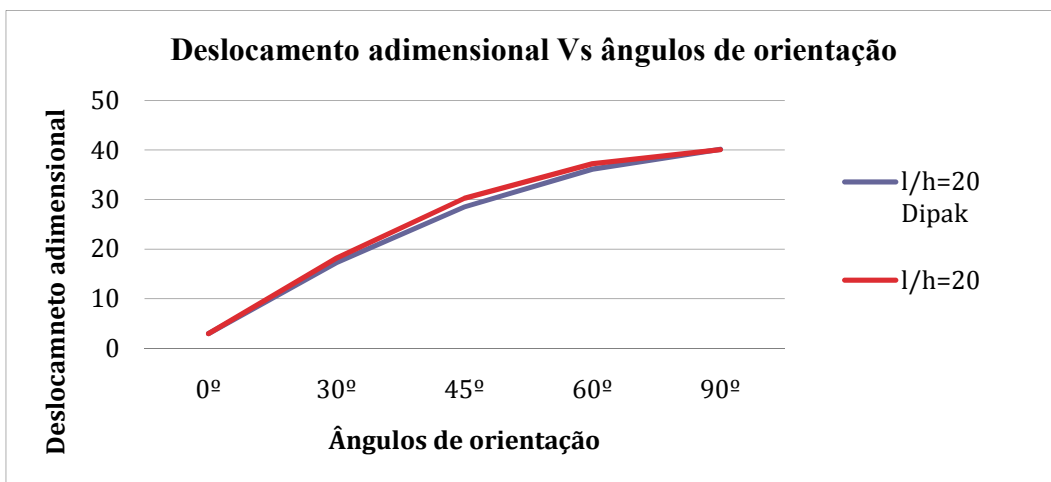


Figura 22-Varição do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

d) $l/h=60$

Tabela 20- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria FSDT ($l/h=60$)

Ângulos	Dipak et al	FSDT	Desvio %
0°	2,9265	2,9251	0,047838715
30°	17,1231	18,1127	5,779327341
45°	28,362	30,1737	6,387772371
60°	36,0543	37,1845	3,134716247
90°	40,0831	40,0123	0,176633045

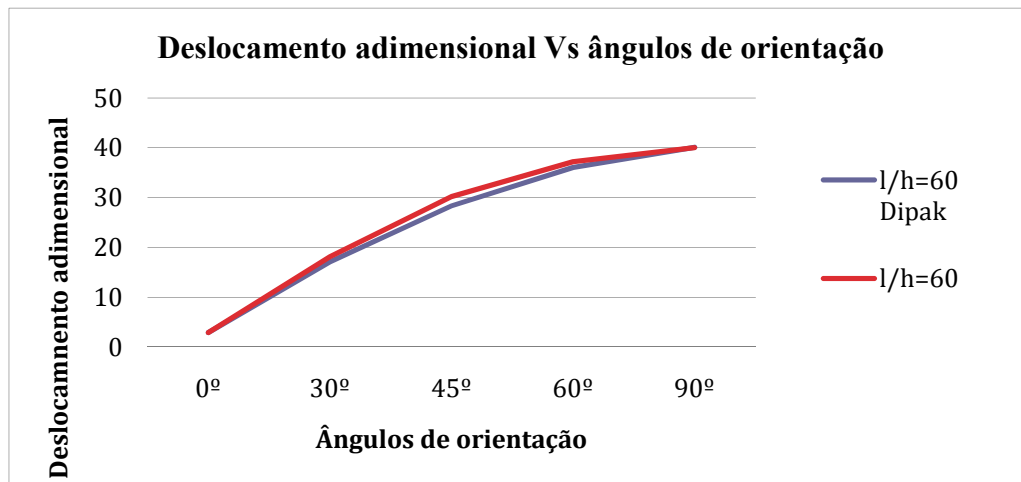


Figura 23-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

Para os ângulos de 30, 45 e 60° (valores intermédios), os resultados obtidos apresentaram alguma discrepância em relação aos obtidos pelo autor, com o valor de 45° a ser o mais afectado.

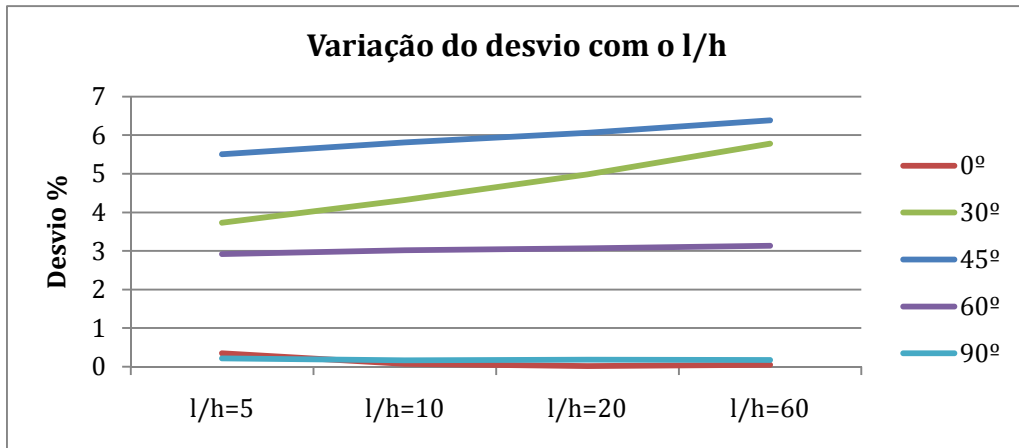


Figura 24-Desvio obtido com a variação da razão l/h

O desvio nos valores da deflexão para 30° e 45° foram proporcionais à relação l/h.

HSDT:

a) l/h=5

Tabela 21- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT (l/h=5)

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
0°	3,9547	3,9803	0,6475
30°	18,6453	19,2319	3,1463
45°	29,9324	31,3250	4,6525
60°	37,6717	40,2683	6,8929
90°	41,8707	46,0635	10,0138

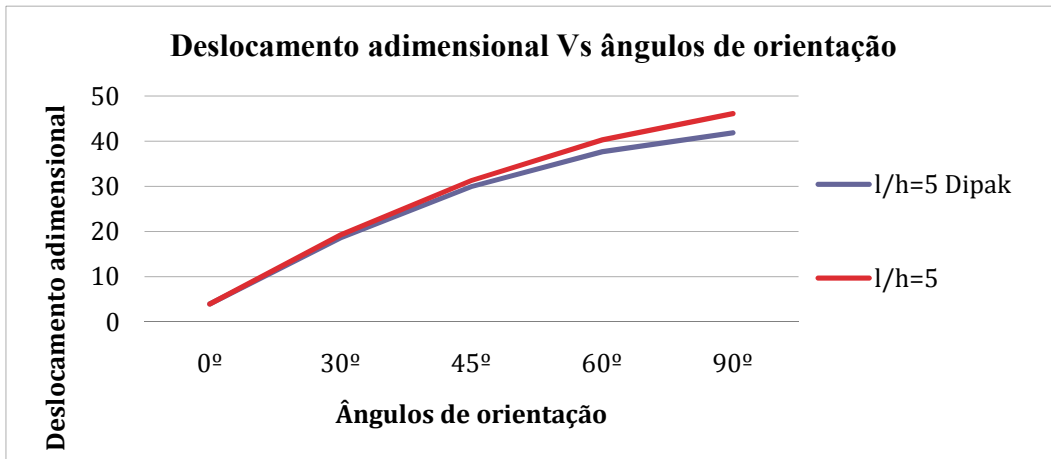


Figura 25-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

b) $l/h=10$

Tabela 22- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=10$)

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
0°	3,1782	3,2018	0,7434
30°	17,6532	18,3216	3,7864
45°	28,8415	30,2968	5,0459
60°	36,4723	39,1287	7,2834
90°	40,5133	44,8174	10,6241

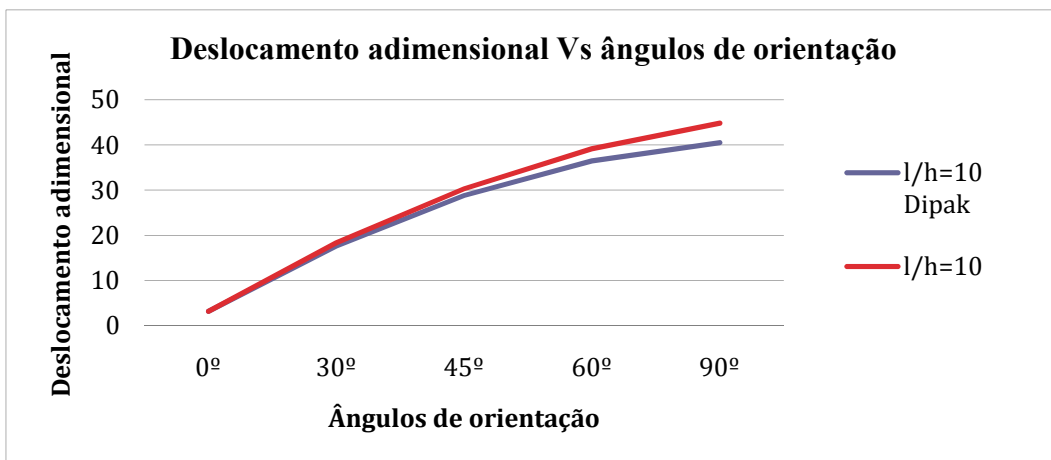


Figura 26-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

c) $l/h=20$

Tabela 23- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=20$)

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
0°	2,984	3,006	0,7556
30°	17,3219	18,0951	4,4638
45°	28,5228	30,0419	5,3261
60°	36,1626	38,8470	7,4232
90°	40,1845	44,5099	10,7640

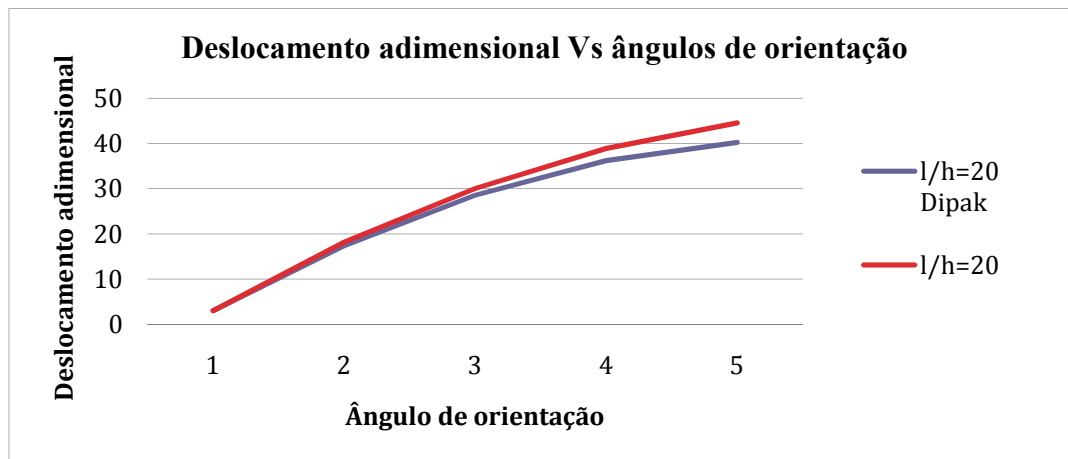


Figura 27-Variação do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

d) $l/h=60$

Tabela 24- Comparação entre os valores de Dipak et al e os obtidos pela teoria HSDT ($l/h=60$)

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
0°	2,9265	2,9485	0,7540
30°	17,1231	18,0280	5,2849
45°	28,362	29,9663	5,6566
60°	36,0543	38,7630	7,5128
90°	40,0831	44,4172	10,8129

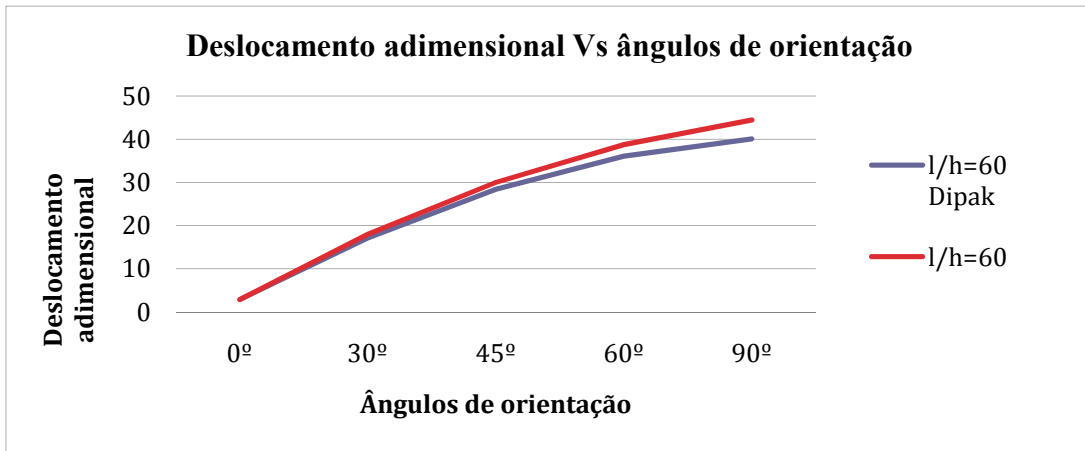


Figura 28-Varição do deslocamento adimensional com os ângulos de orientação

Para a teoria HSDT, os resultados obtidos apresentam um erro superior aos obtidos na teoria FSDT, previamente apresentados. O desvio mais elevado foi para a viga com um ângulo de orientação das fibras de 90°.

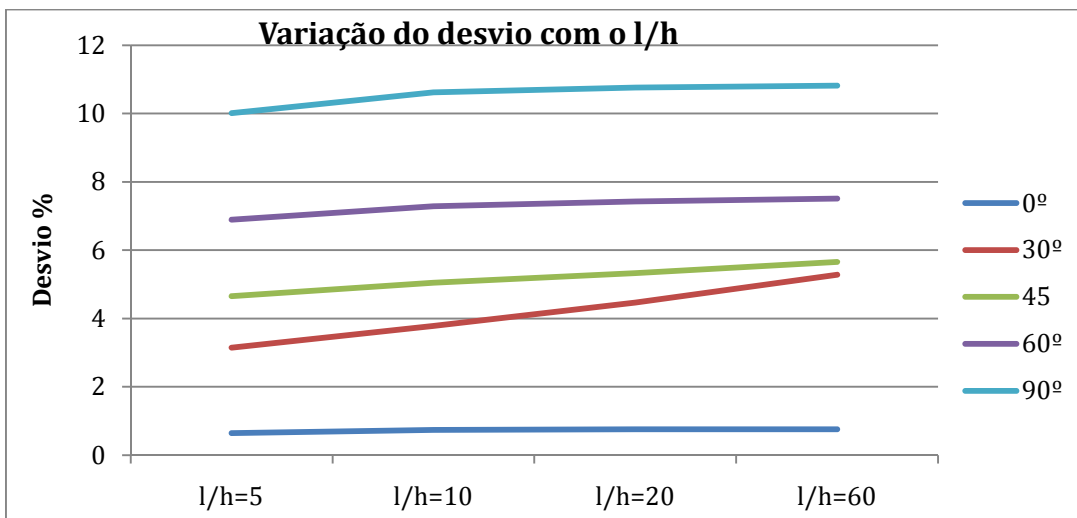


Figura 29- Desvio obtido com a variação da razão l/h

A viga que apresentava um ângulo de 30°, teve um aumento mais evidente do desvio, proporcional com o l/h, ao contrário de todas as outras com ângulos de orientação diferentes, que apesar de apresentarem erros consideráveis, estes eram mais constantes ao longo das relações l/h estudadas.

3. *Influência da variação dos ângulos de orientação, numa viga com uma camada de material ortotrópico, simplesmente apoiada.*

A viga ensaiada tinha a seguinte configuração:

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$b = 50 \text{ mm}$$

$$\frac{L}{h} = 10$$

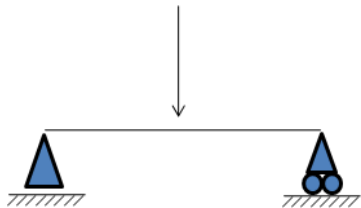


Figura 30-Exemplo da viga estudada

FSDT:

Tabela 25-Varição do deslocamento máximo com a variação do material e do ângulo de orientação

Ângulo	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	Material
Deslocamento (m)	1,64E-05	1,81E-05	2,47E-05	4,26E-05	8,38E-05	1,23E-04	1,27E-04	Boron - Epoxy
	1,81E-05	2,00E-05	2,76E-05	4,58E-05	7,44E-05	8,65E-05	8,50E-05	Graphite
	2,22E-05	2,46E-05	3,38E-05	5,96E-05	1,29E-04	2,42E-04	2,84E-04	AS/3501

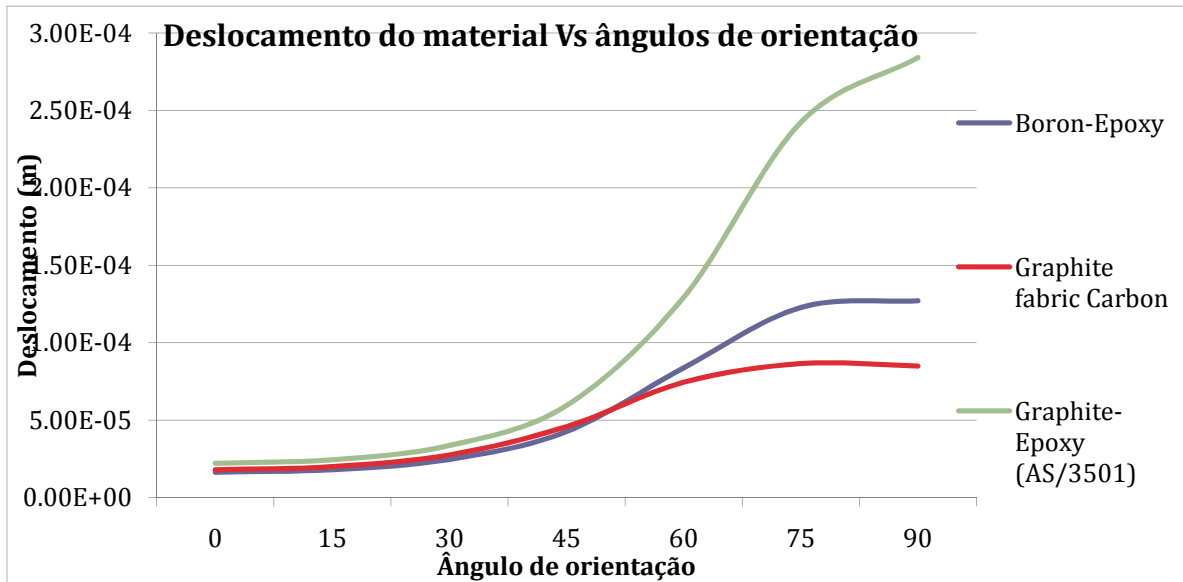


Figura 31- Variação do deslocamento máximo com a variação do material e do ângulo de orientação

Estudaram-se três vigas constituídas por materiais ortotrópicos com diferentes propriedades. O resultado esperado seria que com o aumentar do valor do ângulo de orientação da fibra, a deflexão máxima ($l/2$), aumentasse. Com o material boron-epoxy e com a graphite-epoxy (AS/3501), verificou-se esse aumento da deflexão máxima com o aumento do ângulo de orientação das fibras.

Tanto o boron-epoxy como a graphite-epoxy possuem um igual módulo de elasticidade na direcção 2 e 3, enquanto que a graphite-fabric carbon possui um módulo de elasticidade diferente na direcção 1, 2 e na 3.

Tabela 26-Propriedades do material aplicado no estudo anterior

	Graphite-Fabric Carbon	Graphite-Epoxy (AS/3501)	Boron- Epoxy
E_1	1,73E+11	1,38E+11	2,06E+11
E_2	3,30E+10	8,90E+09	2,07E+10
E_3	5,71E+09	8,90E+09	2,07E+10
G_{12}	9,38E+09	7,10E+09	6,89E+09
G_{13}	8,27E+09	7,10E+09	6,89E+09
G_{23}	3,24E+09	6,20E+09	4,13E+09
ν_{12}	0,036	0,3	0,3
ν_{13}	0,25	0,3	0,25
ν_{23}	0,171	0,49	0,25

4. Sequência de empilhamento para viga simplesmente apoiada com carga transversal concentrada

$$P = 500 \text{ N}$$

$$L = 1.5 \text{ m}$$

$$b = 50 \text{ mm}$$

$$\frac{L}{h} = 10$$

O material utilizado foi o Boron-Epoxy.

a)

Tabela 27-Empilhamentos simétricos utilizados no estudo do deslocamento máximo.

0/15/0		0/30/0		0/45/0	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
1,68478E-05	1,69644E-05	1,71095E-05	1,73236E-05	1,73134E-05	1,7679E-05

0/60/0		0/75/0		0/90/0	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
1,74628E-05	1,79841E-05	1,75506E-05	1,81843E-05	1,75793E-05	1,8253E-05

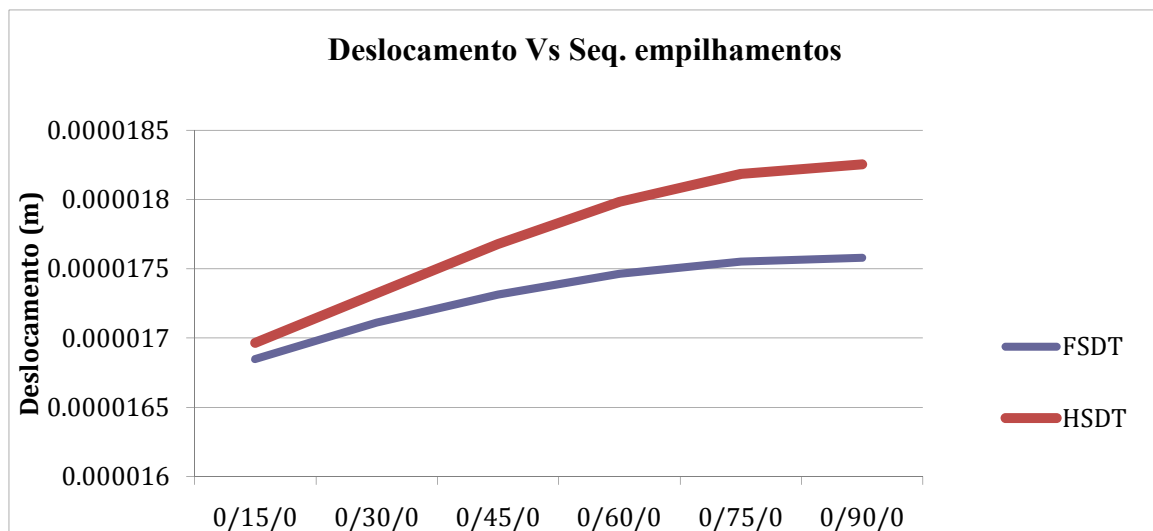


Figura 32-Deslocamento obtido com a variação dos ângulos de orientação dos laminados

O deslocamento máximo da viga foi aumentando sempre que aumentava o ângulo de orientação das fibras (neste caso, lâmina central). A discrepância entre os valores obtidos pela teoria FSDT e pelos obtidos pela teoria HSDT, foram aumentando conforme o ângulo de orientação das fibras aumentava.

Tabela 28-Empilhamentos simétrico utilizados no estudo do deslocamento máximo

30/0/30		60/0/60		90/0/90	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
7,71E-05	7,27E-05	1,11E-04	1,07E-04	9,67E-05	1,02E-04

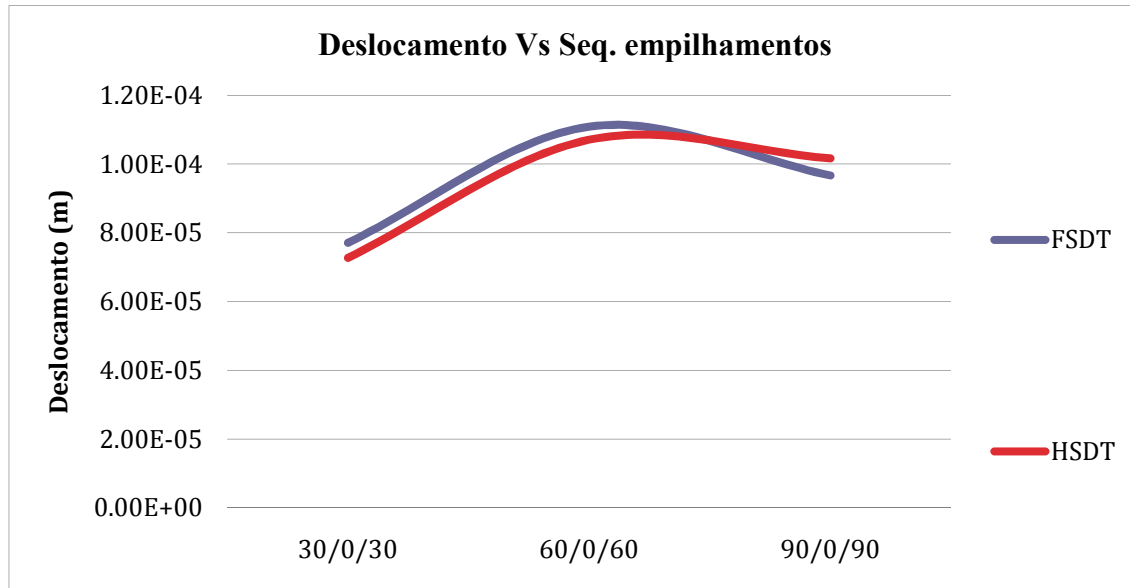


Figura 33-Varição do deslocamento máximo com a variação do ângulo de orientação do empilhamento

O deslocamento da viga foi máximo para o empilhamento [60/0/60]. Tendo como exemplo a análise anterior, seria de prever que esse valor fosse máximo para o empilhamento [90/0/90]. A discrepância entre os valores obtidos pelas duas teorias é constante.

b)

Tabela 29-Empilhamento anti-simétrico utilizado no estudo do deslocamento máximo

30/0/-30		60/0/-60		90/0/-90	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
7,71E-05	7,27E-05	1,11E-04	1,07E-04	9,67E-05	1,02E-04

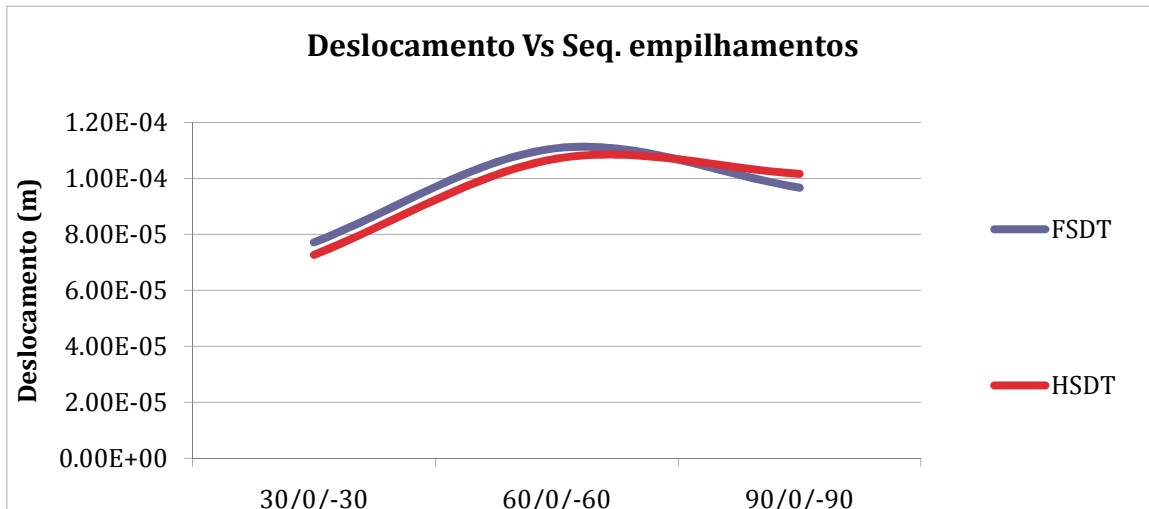


Figura 34-Varição do deslocamento com a variação do ângulo de orientação do empilhamento

Tal como na análise anterior, o deslocamento volta a ser máximo para o empilhamento com ângulo de orientação das fibras intermédio [60/0/-60]. O resultados obtidos pelas duas teorias são constantes.

5. Sequência de empilhamento para viga simplesmente apoiada com carga distribuída

Para esta análise, aplicou-se uma carga distribuída de 333 N. A configuração da viga é a mesma bem como o material estudado.

a)

Tabela 30- Empilhamentos simétricos utilizados no estudo do deslocamento máximo.

0/15/0		0/30/0		0/45/0	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
9,96219E-06	1,00545E-05	1,01062E-05	1,02503E-05	1,02113E-05	1,04369E-05
0/60/0		0/75/0		0/90/0	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
1,02861E-05	1,05961E-05	1,03293E-05	1,07004E-05	1,03433E-05	1,07362E-05

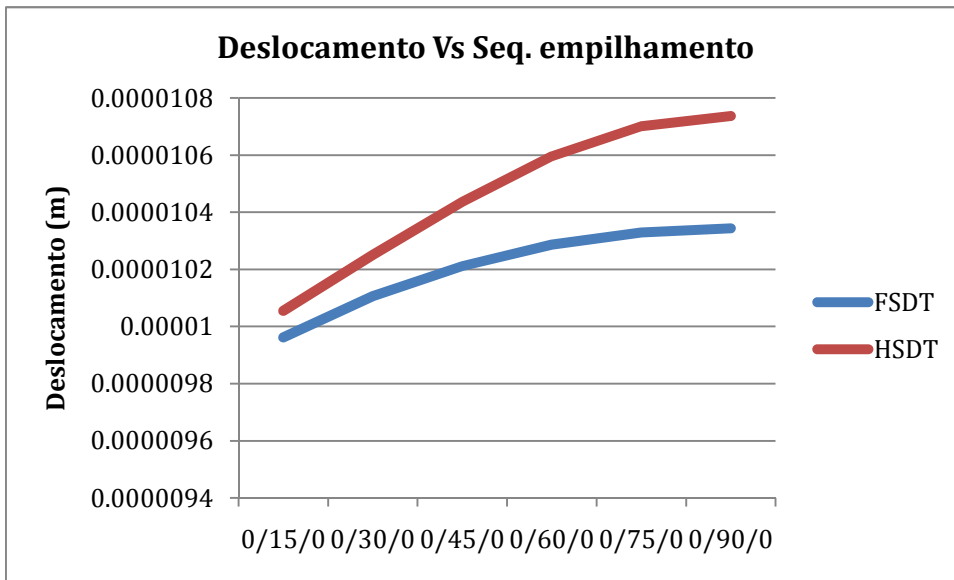


Figura 35-Varição do deslocamento máximo com o ângulo de orientação

Tal como tinha surgido para a análise com carga concentrada, existe um aumento do deslocamento máximo da viga, à medida que o ângulo de orientação das fibras aumenta. A discrepância entre os valores obtidos pelas duas teorias aumenta, à medida que o ângulo de orientação das fibras também aumenta. Isto deve-se à teoria HSDT ser mais precisa para situações onde o efeito ao corte transversal começa a ser mais relevante.

b) .

Tabela 31-Sequência de empilhamento estudada

30/0/30		60/0/60		90/0/90	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
4,75E-05	4,48E-05	6,85E-05	6,62E-05	5,96E-05	6,27E-05

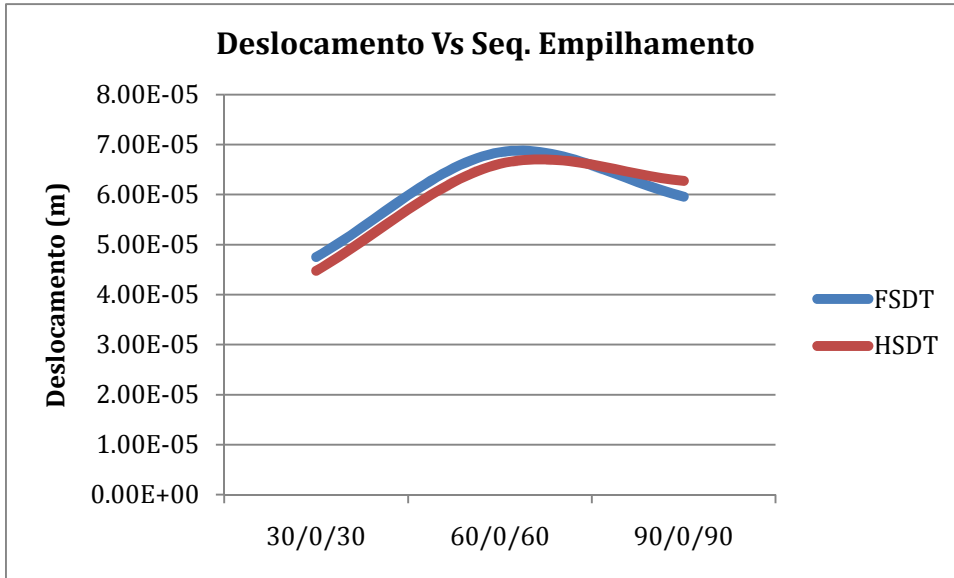


Figura 36-Varição do deslocamento com o ângulo de orientação

Tal como sucedeu para o estudo com carga concentrada, o empilhamento [60/0/60] apresentou um maior deslocamento máximo que o empilhamento [90/0/90]. A discrepância entre os resultados obtidos pelas duas teorias são constantes.

c)

Tabela 32-Sequência de empilhamento estudada

30/0/-30		60/0/-60		90/0/-90	
FSDT	HSDT	FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
4,75E-05	4,48E-05	6,85E-05	6,62E-05	5,96E-05	6,27E-05

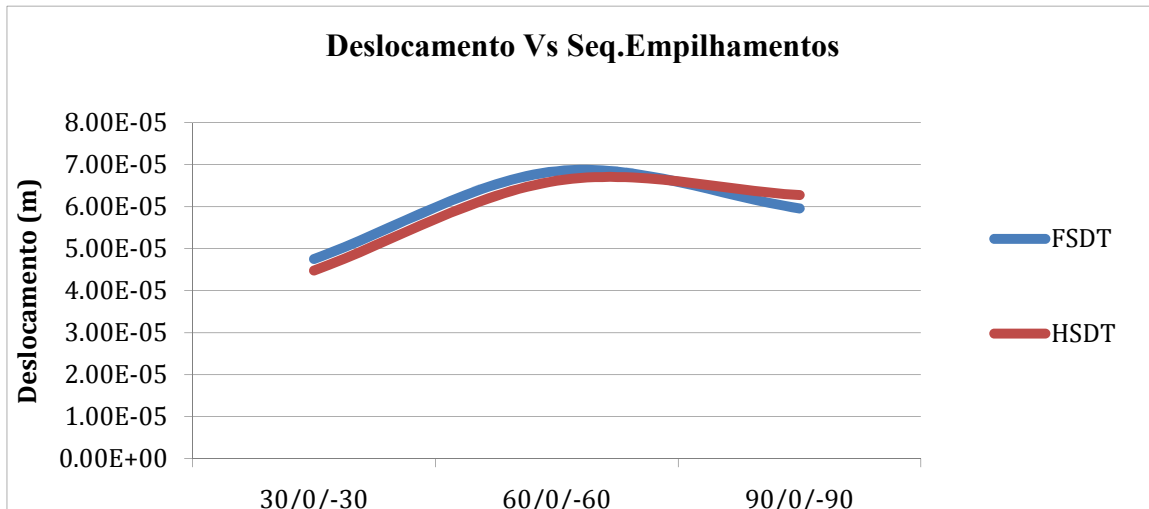


Figura 37-Varição do deslocamento com o ângulo de orientação

O deslocamento é máximo para o empilhamento [60/0/-60]. Os resultados obtidos pelas duas teorias são constantes.

6. *Estudo da influência da sequência de empilhamento para uma viga encastrada numa extremidade e com carga transversal concentrada na outra extremidade.* [Dipak et al 1994]

$$P = 10000 \text{ N}$$

$$L = 0.1905 \text{ m}$$

$$E_1 = 129,207 \text{ GPa}$$

$$E_2 = E_3 = 9,42512 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,15658 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 4,3053 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 2,5414 \text{ GPa}$$

$$b = 0.0127$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = 0.3$$

$$\nu_{13} = 0.218837$$

$$\frac{L}{h} = 5$$

- a) Foi utilizada uma viga com as características e propriedades atrás mencionadas, e com um laminado simétrico.

Expressão para deslocamento adimensional $\bar{w} = \frac{10 \cdot E_3 \cdot b \cdot h^2 \cdot w(l, 0)}{P \cdot l^3}$

Tabela 33-Empilhamento simétrico estudado por Dipak et al

Seq. Empilhamento	Dipak et al	FSDT	Desvio %
[0/30/0]	4,0592	4,1167	1,416152111
[0/45/0]	4,1330	4,1684	0,855472554
[0/60/0]	4,1856	4,2071	0,513915311
[0/90/0]	4,2211	4,2386	0,414577119

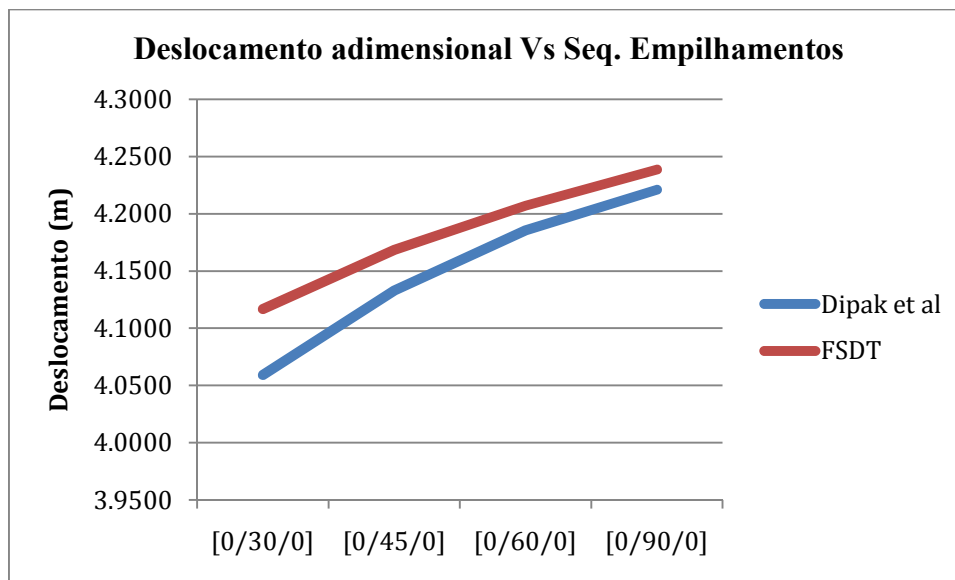


Figura 38-Varição do deslocamento adimensional com a sequência de empilhamento

O deslocamento adimensional foi aumentando conforme o aumento do ângulo de orientação das fibras.

Tabela 34-Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria HSDT

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
[0/30/0]	4,0649	4,1549	2,2129
[0/45/0]	4,1694	4,2433	1,7730
[0/60/0]	4,2536	4,3189	1,5360
[0/90/0]	4,3359	4,3860	1,1563

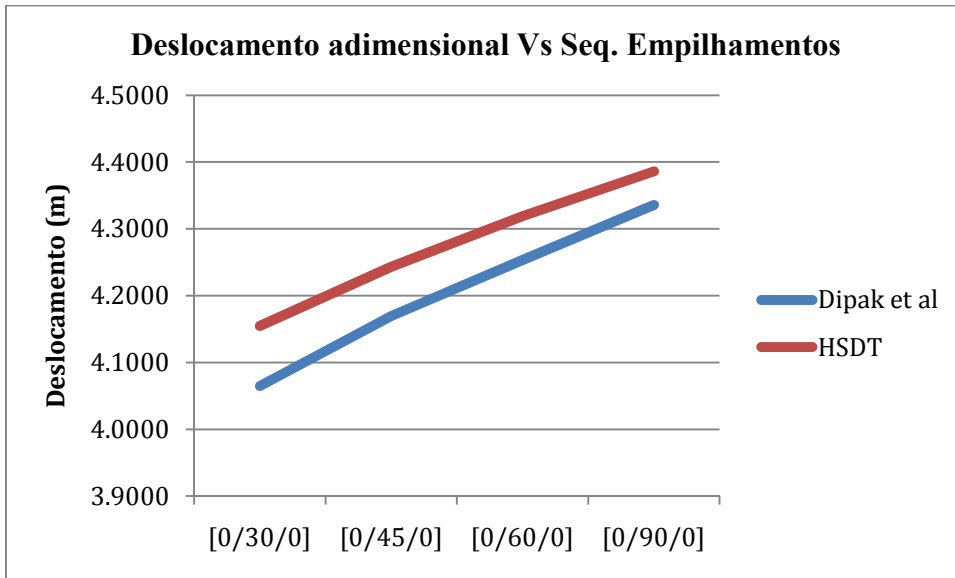


Figura 39- Variação do deslocamento adimensional com a sequência de empilhamento

Tal como para a teoria FSDT, o deslocamento máximo aumentou com o aumento do ângulo de orientação das fibras.

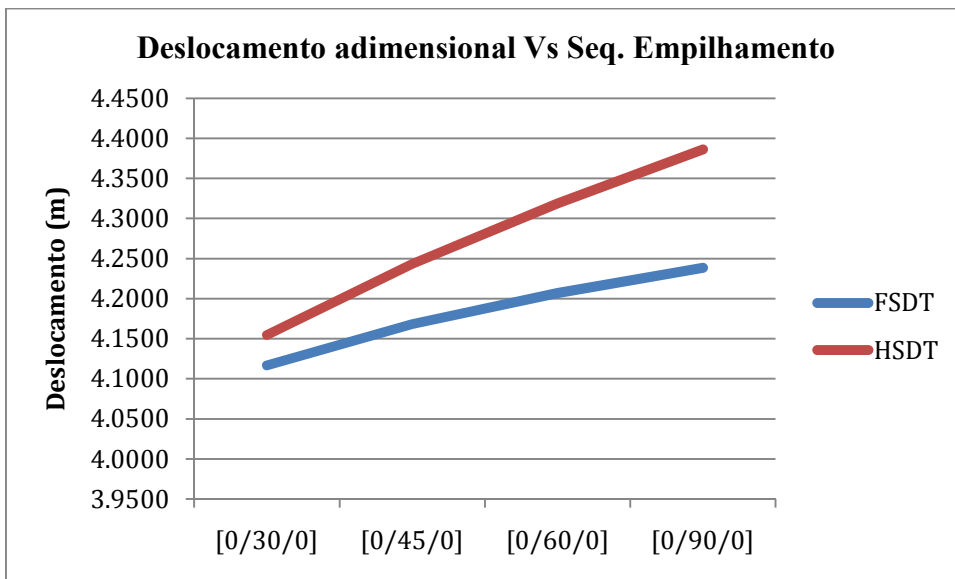


Figura 40- Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos pelas duas teorias em função da sequência de empilhamento

Conclui-se que a discrepância entre a teoria FSDT e a teoria HSDT tem tendência a aumentar conforme a variação do ângulo de orientação das fibras. Como há uma maior solicitação do material ao corte, a teoria HSDT tem uma resultado mais preciso.

b) Para este estudo foi utilizado um laminado assimétrico. Todas as propriedades e características do material e da viga se mantêm.

Tabela 35- Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria FSDT

Ângulos	Dipak et al	FSDT	Desvio %
[0/90/0/90]	7,6099	7,6457	0,4702
[0/30/-30/0]	4,2967	4,3943	2,2723
[0/45/-45/0]	4,4308	4,4954	1,4579
[0/60/-60/0]	4,5256	4,5655	0,8820

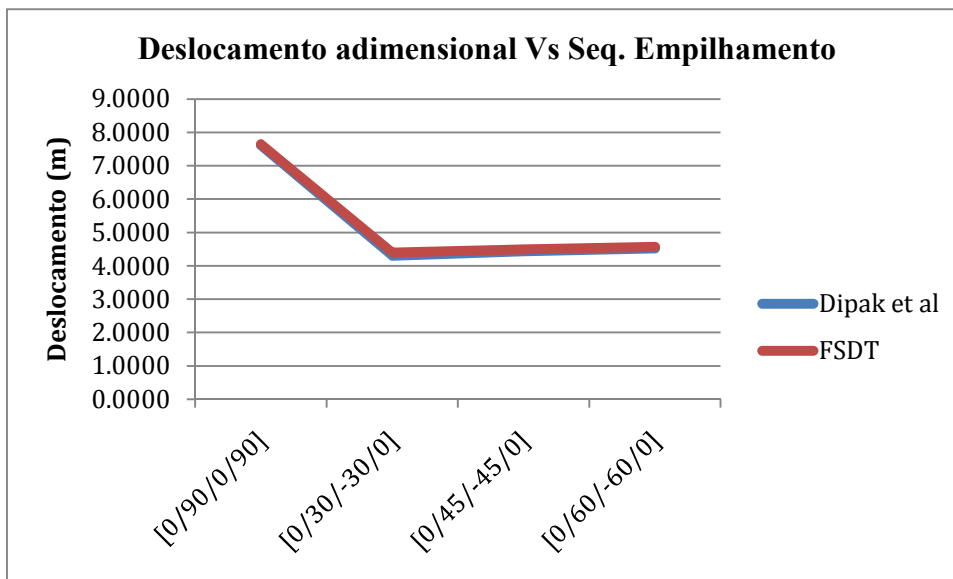


Figura 41- Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos em função da sequência de empilhamento (anti-simétrico)

O deslocamento adimensional foi praticamente constante para os últimos empilhamentos.

Tabela 36- Empilhamento estudado e resultados obtidos para a teoria HSDT

Ângulos	Dipak et al	HSDT	Desvio %
[0/90/0/90]	7,7661	7,9346	2,1698
[0/30/-30/0]	4,2804	4,4146	3,1354
[0/45/-45/0]	4,4432	4,5600	2,6294
[0/60/-60/0]	4,5869	4,6818	2,0688

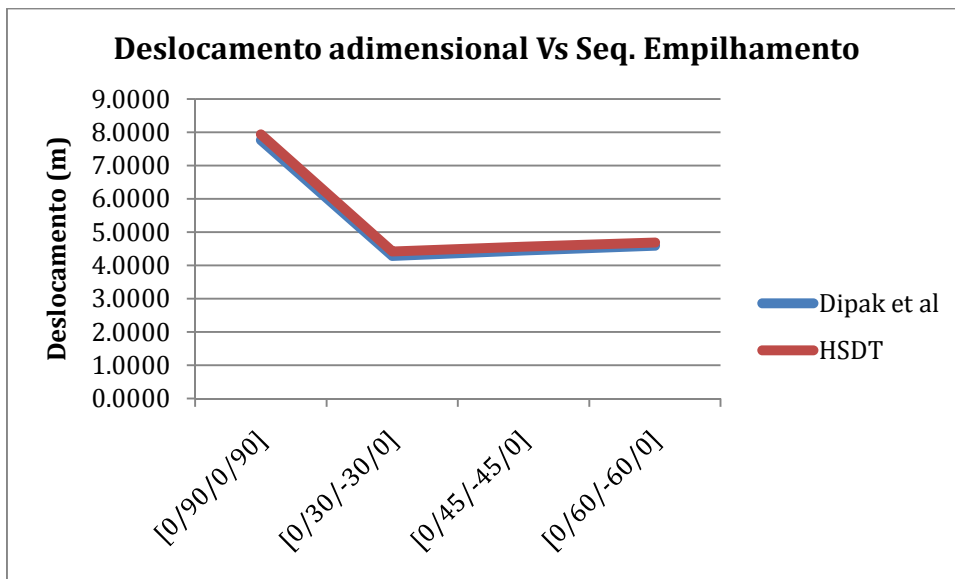


Figura 42- Comparação entre os deslocamentos adimensionais obtidos em função da sequência de empilhamento (anti-simétrico)

Tal como para a teoria FSĐT, na teoria HSDT manteve-se a constância nos últimos empilhamentos. Em ambos os casos, o empilhamento [0/30/-30/0], foi o que apresentou maior desvio em relação ao autor.

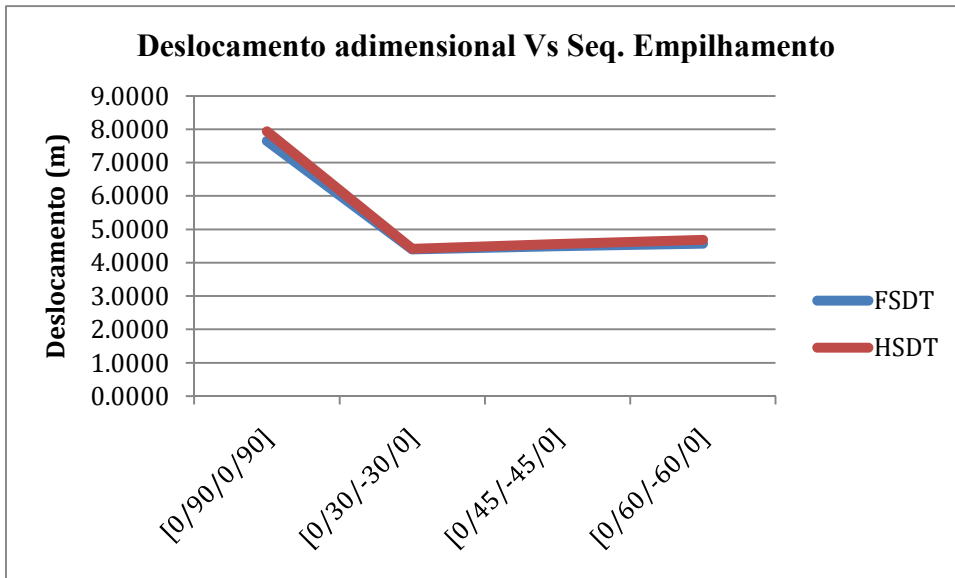


Figura 43-Comparação entre o deslocamento adimensional obtido pela teoria FSDT e HSDT

Pode-se concluir que não existem grandes discrepâncias entre a teoria FSDT e a teoria HSDT.

3.3-Estudo de vigas construídas em materiais multifuncionais

1. *Estudo do deslocamento adimensional de uma viga FGM encastrada numa extremidade e com carga transversal concentrada na outra extremidade.[Kadoli et al 2008]*



Figura 44 - Exemplo de viga estudada

deslocamento adimensional $\bar{w} = \frac{w \cdot E_{11} \cdot h^3 \cdot b}{F \cdot L^3}$

$$\frac{L}{h} = 15$$

$n = 1000$ (rico em metal)

$E_c = 310 \text{ GPa}$

$\nu_c = \nu_m = 0.27$

$P = 500 \text{ N}$

Tabela 37 - Comparação do deslocamento adimensional obtido para um diferente número de elementos

N.º Elementos	Deslocamento adimensional	
	<i>Kadoli et al</i>	<i>obtido</i>
2	3,602	4
5	3,604	4
20	3,605	4
30	3,605	4

Dado que o Kadoli et al utilizou um campo de deslocamentos baseado na teoria de Reddy, e que neste estudo, foi utilizado um campo de deslocamentos baseado na teoria de Lo et al, logo menos conservativo, os resultados estão dentro do esperado.

2. *Variação do módulo de Elasticidades através da espessura da viga FGM – Simsek (2009)*

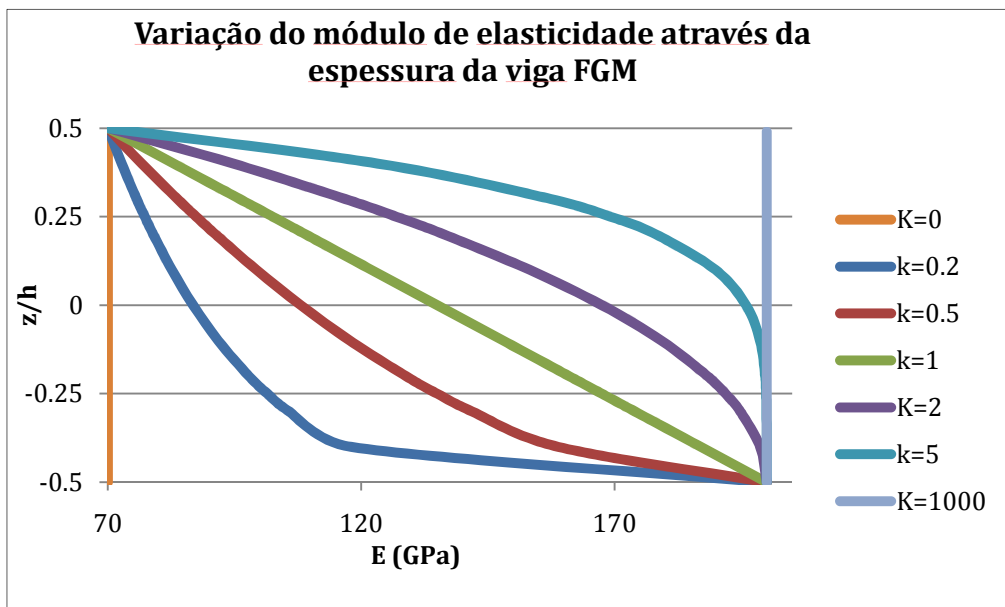


Figura 45 - Variação do módulo de elasticidade através da espessura da viga FGM

Para este estudo, as propriedades dos materiais bem como a configuração da viga, são idênticos aos do estudo anterior.

A figura 45 exemplifica a variação do módulo de elasticidade através da espessura bem como da fração de material constituinte da viga (cerâmico ou alumínio). Ou seja, quando $K=0$, a viga é constituída apenas por alumínio e quando $K=1000$, a viga é constituída apenas por cerâmico.

O resultado obtido foi idêntico ao resultado obtido por Simsek (2009).

3. Deslocamento adimensional máximo da viga para diferentes valores de expoente K
 – Simsek (2009)

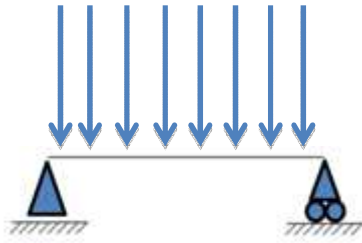


Figura 46 - Exemplo da viga estudada

deslocamento adimensional $\bar{w} = \frac{w}{w_s}$

$$\frac{L}{h} = 4, \quad 16$$

$$E_c = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu_c = 0,3$$

$$E_m = 70 \text{ GPa}$$

$$P_0 = 500 \text{ N/m}$$

Tabela 38 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 4$ e para a teoria FSDT

k	<i>Simsek</i>	<i>w obtido</i>	<i>desvio %</i>
0	1,13002	1,18414	4,78907
0,2	0,84906	0,88917	4,72418
0,5	0,71482	0,74909	4,79361
1	0,62936	0,65977	4,83222
2	0,56165	0,58891	4,85268
5	0,49176	0,51562	4,85123
1000	0,3955	0,4152	4,97988

Os resultados obtidos foram os expectáveis apesar da existência de um desvio na ordem dos 5%.

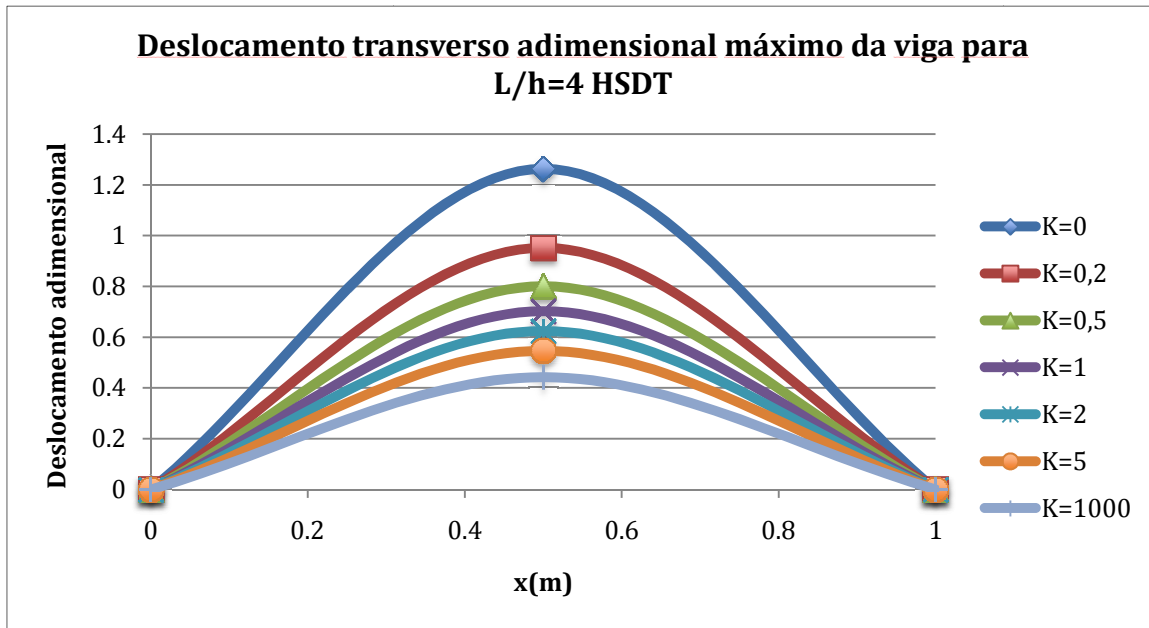


Figura 47 - Deslocamento transversal adimensional máximo para $L/h = 4$, para a teoria HSDT

Como seria de esperar, o deslocamento adimensional foi maior para um valor de x correspondente a $L/2$ e para a viga constituída apenas por alumínio, que neste caso tinha um menor Módulo de Young (70 GPa). A viga constituída apenas por material cerâmico ($K=1000$), tem um deslocamento adimensional inferior a todas as outras, precisamente pelo seu Módulo de Young ser o mais elevado (200GPa).

Tabela 39 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 4$ e para a teoria HSDT

k	<i>Simsek</i>	<i>w obtido</i>	<i>desvio %</i>
0	1,15578	1,26313	9,28806
0,2	0,87145	0,95154	9,19073
0,5	0,73264	0,80044	9,25449
1	0,64271	0,70252	9,30549
2	0,57142	0,62476	9,33523
5	0,49978	0,54649	9,34695
1000	0,40452	0,44288	9,48198

Neste caso, em que a teoria estudada é a HSDT, existe um desvio de cerca de 10%, entre os resultados obtidos pelo autor em comparação aos obtidos neste estudo.

Tabela 40 - Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 16$ e para a teoria FSDT

<i>k</i>	<i>Simsek</i>	<i>w obtido</i>	<i>desvio %</i>
0	1,00812	1,06226	5,37064
0,2	0,75595	0,79610	5,31159
0,5	0,63953	0,67381	5,36017
1	0,56615	0,59658	5,37448
2	0,50718	0,53445	5,37685
5	0,44391	0,46778	5,37668
1000	0,35284	0,37251	5,57518

Para a relação $L/h = 16$, utilizando a teoria FSDT, os desvios obtidos foram semelhantes aos obtidos para a relação $L/h = 4$. Os resultados estão dentro do esperado.

Tabela 41 – Comparação entre deslocamento adimensional para um $L/h = 16$ e para a teoria HSDT

<i>k</i>	<i>Simsek</i>	<i>w obtido</i>	<i>desvio %</i>
0	1,00975	1,10396	9,32968
0,2	0,75737	0,82754	9,26467
0,5	0,64065	0,70035	9,31803
1	0,56699	0,61992	9,3354
2	0,5078	0,55522	9,33871
5	0,44442	0,48593	9,33947
1000	0,35341	0,38713	9,54181

Neste estudo, o desvio mantém-se em cerca de 10%, tal como sucedeu no estudo para um $L/h = 4$. Os resultados obtidos foram os esperados.

Capítulo Quatro – Conclusões

Neste trabalho são analisadas vigas em materiais compósitos do ponto de vista estático. O trabalho teve como objectivo estudar a influência das propriedades do material, bem como a configuração das vigas, no deslocamento máximo. Para se concluir acerca dessa influência, utilizou-se duas teorias, FSDT e HSDT.

Como seria de esperar, o ângulo de orientação das fibras e as propriedades do material, influenciam bastante o deslocamento máximo obtido. Quanto maior é a variação do ângulo de orientação das fibras, maior será o deslocamento.

A relação l/h é deveras importante, pois quando maior esta relação maior será o deslocamento máximo da viga.

Comparando entre as duas teorias utilizadas, quando maior é a espessura do laminado (menor l/h), maior é a discrepância entre os resultados obtidos pelas duas teorias.

Como a teoria FSDT não contempla os efeitos do esforço transversal, a teoria HSDT apresenta-se como teoria mais refinada, logo mais precisa, no que diz respeito a vigas espessas.

Podemos concluir que para vigas finas a teoria FSDT é suficiente mas que para vigas espessas a teoria HSDT é a mais precisa.

Capítulo Cinco – Desenvolvimentos Futuros

Para desenvolvimentos futuros propõe-se: o desenvolvimento do algoritmo de forma a contemplar: introdução de cargas distribuídas sinusoidais, cálculo de tensões e de resultantes.

Estender o trabalho realizado à análise dinâmica de vibrações livres e à análise de instabilidade linear. Considerar a existência de amortecimento na estrutura analisada e considerar a possibilidade de incorporar materiais activos (ex: piezoelectricos, magnetostrictivos, electrostrictivo) com vista ao controlo da estrutura (ex: minimização da frequência fundamental).

Bibliografia

Ahmed, N., & Basu, K. (1994). Higher-order finite element modelling of laminated composite plates. *International journal for numerical methods in engineering* vol. 37 , 123-139.

ASM Handbook Volume 21 Composites. (2001).

Carrera, E., & B., K. (1997). Zig Zag and interlaminar equilibria effects in large deflection and postbuckling analysis of multilayered plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* , 69-94.

Chaudhuri, A. R. (2005). Analysis of laminated shear-flexible angle ply plates. *Composite Structures* 67 , 71-84.

FGM Database. (2002). Obtido em 28 de Setembro de 2009, de FGM Database: fgmdb.kakuda.jaxa.jp/e_whatstfgm.html

Gay, D., Hoa, S., & Tsai, S. (2003). *Composite Materials - Design and applications.* London : CRC Press.

Hughes, T. J. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis.* Prentice Hall.

Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials.* Virginia: Taylor & Francis.

Kadoli, R., Kashif, A., & N., G. (2008). Static Analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling* 32 , 2509-2525.

Knight Jr, N., & Qi, Y. (1997). Restatement of first-order shear deformation theory for laminated plates. *International Journal Solids Structures* Vol.34 , 481-492.

Knight Jr., N., & Qi, Y. (1997). On a consistent first-order shear deformation theory for laminated plates. *Composites Part B* 28B , 397-405.

Latheswary, S., Valsarajan, K. V., & Rao, S. (2004). Behaviour of laminated composite plates using High-order shear deformation theory. *IE(I) Journal-AS* .

Li, S. (Outubro de 2002). Classical Laminated Theory of Composites. *Composites I* . Reino Unido.

Lo, K.H; Christensen, R.M.; Wu, E.M (1977-a). A high order theory of plate deformation-PartI: Homogenous plates. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.44, pp.663-668.

Lo, K.H; Christensen, R.M.; Wu, E.M (1977-b). A high order theory of plate deformation-PartII: Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.44, pp.669-676.

Lucia Della Croce, P. V. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 , 705-725.

Nguyen, T.-K., & Karam Sab, G. B. (2008). First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures* 83 , 25-36.

Oden, J.T., Ripperger,E.A (1981) *Mechanics of Elastic Structures*, Hemisphere Publishing Corporation, USA.

Ochoa, O. O., & Reddy, J. N. (1992). *Finite element analisys of composite laminates*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Pervez, T., C., S. A., & F.K.S., A.-J. (2005). Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 71 , 414-422.

Qi, Y., & Knight Jr, N. (1996). A refined first-order shear deformation theory and its justification by plane strain bendinf problem of laminated plates. *International Journal Solid Structures Vol. 39* , 49-64.

Ramos Loja, M. A., Infante Barbosa, J., & Mota Soares, C. (1997). Buckling Behaviour of laminated beam structures using a high-order discrete model. *Composite Structures Vol.38* , 119-131.

Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*. CRC Press.

Simsek (2009). Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol 1 (3)*.

Vinayak, R. U., & Prathap, G. N. (1994). Beam elements based on a higher order theory-I . Formulation and analysis of performance. *Computers & Structures Vol.58 , 775-789*.

ANEXOS

```

> #Resolução do exercício apresentado por Wennerstrom e Backlund (1986)
> restart :
  with ( LinearAlgebra ) :
>
  with ( linalg ) :
  with ( plots ) :
> Digits := (20)
                                     Digits := 20 (1)
> #HSDT COM MATERIAIS ISOTRÓPICOS
#
#
>
> #DADOS DO PROBLEMA
> #Número de camadas
> NL := 3
                                     NL := 3 (2)
> # Se forem M matrizes elementares
M := 10;
                                     M := 10 (3)
> P := -500
                                     P := -500 (4)
> #F:= I
> E := array(1..NL, [124E9, 0, 124E9])
                                     E := [ 1.24 1011 0 1.24 1011 ] (5)
> b := 10E-3
                                     b := 0.010 (6)
> L := 1
                                     L := 1 (7)
> H := array(1..NL + 1, [(-12.78625E-3), -12.49875E-3, 0.01221125, 0.01278625])
                                     H := [ -0.01278625 -0.01249875 0.01221125 0.01278625 ] (8)
> altura := H[NL + 1] - H[1]
                                     altura := 0.02557250 (9)
> relacaoLH := evalf( ( L / altura ) )
                                     relacaoLH := 39.104506794408055528 (10)
> Le := L / M
                                     Le := 1 / 10 (11)
> v := array(1..NL, [0, 0, 0])

```


$$v := [0 \ 0 \ 0]$$

(12)

```
> #MATRIZ COEFICIENTES ELÁSTICOS
> #for i from 1 to NL do
  G[1] := 0; G[2] := 22E6; G[3] := 0
# end do
```

$$G_1 := 0$$

$$G_2 := 2.2 \cdot 10^7$$

$$G_3 := 0$$

(13)

```
> for i from 1 to NL do
  
$$\lambda[i] := \frac{(v[i] \cdot E[i])}{(1 + v[i]) \cdot (1 + v[i])}$$

end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C11[i] := E[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C22[i] := E[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C33[i] := E[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C12[i] :=  $\lambda[i]$ 
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C13[i] :=  $\lambda[i]$ 
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C23[i] :=  $\lambda[i]$ 
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C44[i] := G[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C55[i] := G[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  C66[i] := G[i]
end do:
```

```
> for i from 1 to NL do
  Qb[i] := array(1..6, 1..6, [[C11[i], C12[i], C13[i], 0, 0, 0], [C12[i], C11[i],
  C13[i], 0, 0, 0], [C13[i], C13[i], C33[i], 0, 0, 0], [0, 0, 0, C44[i], 0, 0], [0, 0, 0, 0,
  C44[i], 0], [0, 0, 0, 0, 0, C66[i]]])
```

end do

$$Qb_1 := \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Qb_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$Qb_3 := \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(14)

>

> $\psi := 'psi'$:

> $N1 := -\frac{9}{16} \cdot \left(\psi + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\psi - \frac{1}{3}\right) \cdot (\psi - 1)$

$$N1 := -\frac{9}{16} \left(\psi + \frac{1}{3}\right) \left(\psi - \frac{1}{3}\right) (\psi - 1)$$

(15)

> $N2 := \frac{27}{16} \cdot (\psi + 1) \cdot \left(\psi - \frac{1}{3}\right) \cdot (\psi - 1)$

$$N2 := \frac{27}{16} (\psi + 1) \left(\psi - \frac{1}{3}\right) (\psi - 1)$$

(16)

> $N3 := -\frac{27}{16} \cdot (\psi + 1) \cdot \left(\psi + \frac{1}{3}\right) \cdot (\psi - 1)$

$$N3 := -\frac{27}{16} (\psi + 1) \left(\psi + \frac{1}{3}\right) (\psi - 1)$$

(17)

> $N4 := \frac{9}{16} \cdot (\psi + 1) \cdot \left(\psi + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\psi - \frac{1}{3}\right)$

$$N4 := \frac{9}{16} (\Psi + 1) \left(\Psi + \frac{1}{3} \right) \left(\Psi - \frac{1}{3} \right) \quad (18)$$

> $x := N1 \cdot x1 + N2 \cdot x2 + N3 \cdot x3 + N4 \cdot x4 :$

> $x1 := 0 : x2 := \frac{Le}{3} : x3 := \frac{2 Le}{3} : x4 := Le :$

> $dxdzeta := simplify(diff(x, \Psi))$

$$dxdzeta := \frac{1}{20} \quad (19)$$

> $Jac := (dxdzeta)$

$$Jac := \frac{1}{20} \quad (20)$$

>

> $dN1 := \frac{diff(N1, \Psi)}{Jac} :$

> $dN2 := \frac{diff(N2, \Psi)}{Jac} :$

> $dN3 := \frac{diff(N3, \Psi)}{Jac} :$

> $dN4 := \frac{diff(N4, \Psi)}{Jac} :$

> #só componentes de membrana - flexão

> #
> #

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**

$Zmbs[i] := Matrix(2, 6, [[1, 0, z[i]^2, z[i], 0, z[i]^3], [0, 1, 0, 0, z[i], 0]])$

end do

$$Zmbs_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_1^2 & z_1 & 0 & z_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_2^2 & z_2 & 0 & z_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_3^2 & z_3 & 0 & z_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(21)

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**

$Qmb[i] := matrix(2, 2, [[Qb[i][1, 1], Qb[i][1, 3]], [Qb[i][1, 3], Qb[i][3, 3]])$

end do

$$\begin{aligned}
 Qmb_1 &:= \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} \end{bmatrix} \\
 Qmb_2 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 Qmb_3 &:= \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**
 $Qmb[i] := convert(Qmb[i], Matrix)$
end do

$$\begin{aligned}
 Qmb_1 &:= \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} \end{bmatrix} \\
 Qmb_2 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 Qmb_3 &:= \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{23}$$

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**
 $Zmbs[i] := convert(Zmbs[i], Matrix)$
end do

$$\begin{aligned}
 Zmbs_1 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_1^2 & z_1 & 0 & z_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 Zmbs_2 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_2^2 & z_2 & 0 & z_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 Zmbs_3 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_3^2 & z_3 & 0 & z_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{24}$$

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**
 $Pbm[i] := Multiply(Multiply(Transpose(Zmbs[i]), Qmb[i]), Zmbs[i])$
end do

$$Pbm_1 := \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^2 & 1.24 \cdot 10^{11} z_1 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^3 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1 & 0. \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_1^2 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^4 & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^5 \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_1 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^3 & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^2 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^4 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1 & 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^2 & 0. \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_1^3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^5 & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^4 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_1^6 \end{bmatrix}$$

$$Pbm_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Pbm_3 := \begin{bmatrix} 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^2 & 1.24 \cdot 10^{11} z_3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^3 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} & 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3 & 0. \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_3^2 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^4 & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^5 \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^3 & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^2 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^4 \\ 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3 & 0. & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^2 & 0. \\ 1.24 \cdot 10^{11} z_3^3 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^5 & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^4 & 0. & 1.24 \cdot 10^{11} z_3^6 \end{bmatrix} \quad (25)$$

> for i from 1 to NZ do

$h[i+1] := H[i+1]; h[i] := H[i];$

end do

$h_2 := -0.01249875$

$h_1 := -0.01278625$

$h_3 := 0.01221125$

$h_2 := -0.01249875$

$h_4 := 0.01278625$

$h_3 := 0.01221125$

(26)

> for i from 1 to NZ do

$Pbm[i] := \text{map}\left(\text{int}, \text{map}\left(\text{int}, Pbm[i], y = -\frac{b}{2} \dots \frac{b}{2}\right), z[i] = h[i] \cdot h[i+1]\right);$

end do

```
Pbm1 := [[ 3.56500000000000000000 105, 0., 56.982851007552083333,  
-4507.051250000000000000, 0., -0.72046778318879101562 ],  
[ 0., 3.56500000000000000000 105, 0., 0., -4507.0512500000000000, 0. ],  
[ 56.982851007552083333, 0., 0.0091096914258620399573, -0.72046778318879101562,  
0., -0.00011518912321344807230 ],  
[ -4507.051250000000000000, 0., -0.72046778318879101562, 56.982851007552083333,  
0., 0.0091096914258620399573 ],  
[ 0., -4507.051250000000000000, 0., 0., 56.982851007552083333, 0. ],  
[ -0.72046778318879101562, 0., -0.00011518912321344807230,  
0.0091096914258620399573, 0., 0.0000014565921965059481896 ]]
```

$$Pbm_2 := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

```
Pbm3 := [[ 7.13000000000000000000 105, 0., 111.40361449947916667,  
8911.608750000000000000, 0., 1.3928969934991933594 ],  
[ 0., 7.13000000000000000000 105, 0., 0., 8911.6087500000000000, 0. ],  
[ 111.40361449947916667, 0., 0.017418678853008257112, 1.3928969934991933594, 0.,  
0.00021786518869840509113 ],  
[ 8911.608750000000000000, 0., 1.3928969934991933594, 111.40361449947916667, 0.,  
0.017418678853008257112 ],  
[ 0., 8911.608750000000000000, 0., 0., 111.40361449947916667, 0. ],  
[ 1.3928969934991933594, 0., 0.00021786518869840509113, 0.017418678853008257112,  
0., 0.0000027254411169820943634 ]]
```

(27)

```
> Pbmm := array(1..6, 1..6, sparse);  
for m to NL do  
  for i to 6 do  
    for j to 6 do  
      Pbmm[i,j] := Pbmm[i,j] + Pbm[m][i,j]  
    end do  
  end do  
end do
```

$$Pbmm := array(sparse, 1..6, 1..6, []) \quad (28)$$

```

>
> #MATRIZ B
> Bbm := Matrix( 6, 28, [[ dN1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN4, 0,
0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, NI, 0, 0, 0, 0, 0, 0, N2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, N3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, N4, 0, 0,
0], [0, 0, 0, 0, dN1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN4, 0, 0],
[0, 0, dN1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN4, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 0, 0, 2 NI, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 N2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 N3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 N4, 0], [0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, dN1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN4]] );

```

$$Bbm := \left[\begin{array}{l} 6 \times 28 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right] \quad (29)$$

```

> #Bbm:= convert( Bbm, Matrix ) :
> P1 := multiply( multiply( transpose( Bbm ), Pbmm ), Bbm ) :
>
> Ke := map( int, P1, ψ=-1..1 ) :#integração normal
> Ke := evalm( Ke·Jac ) :#multiplicação pelo Jacobiano
> f:= Matrix( 28, 1, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, P, 0, 0, 0, 0, 0, 0] );

```

$$f:= \left[\begin{array}{l} 28 \times 1 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right] \quad (30)$$

```

> Kee := submatrix( Ke, 8..28, 8..28 ) :
> ff:= submatrix( f, 8..28, 1..1 ) :
> linsolve( Kee, ff ) :
> #componentes de corte
> ψ := 'ψ':
> NI1 := - 9/16 · (ψ + 1/3) · (ψ - 1/3) · (ψ - 1);

```

$$NI1 := - \frac{9}{16} \left(\psi + \frac{1}{3} \right) \left(\psi - \frac{1}{3} \right) (\psi - 1) \quad (31)$$

```

> NI2 := 27/16 · (ψ + 1) · (ψ - 1/3) · (ψ - 1);

```

$$NI2 := \frac{27}{16} (\psi + 1) \left(\psi - \frac{1}{3} \right) (\psi - 1) \quad (32)$$

```

> NI3 := - 27/16 · (ψ + 1/3) · (ψ + 1/3) · (ψ - 1);

```

$$NI3 := - \frac{27}{16} \left(\psi + \frac{1}{3} \right) \left(\psi + \frac{1}{3} \right) (\psi - 1); \quad (33)$$

$$N13 := -\frac{27}{16} \left(\psi + \frac{1}{3} \right)^2 (\psi - 1) \quad (33)$$

$$> N14 := \frac{9}{16} \cdot (\psi + 1) \cdot \left(\psi + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\psi - \frac{1}{3} \right);$$

$$N14 := \frac{9}{16} (\psi + 1) \left(\psi + \frac{1}{3} \right) \left(\psi - \frac{1}{3} \right) \quad (34)$$

$$> x := x11 \cdot N11 + x12 \cdot N12 + x13 \cdot N13 + x14 \cdot N14;$$

$$> x11 := 0 : x12 := \frac{Le}{3} : x13 := \frac{2 \cdot Le}{3} : x14 := Le;$$

>

>

>

$$> \#dxdzeta := \text{simplify}(\text{diff}(x, \psi))$$

$$> \#Jac := (dxdzeta)$$

$$> \#dN1 := \frac{\text{diff}(N1, \psi)}{Jac}$$

$$> \#dN2 := \frac{\text{diff}(N2, \psi)}{Jac}$$

$$> \#dN3 := \frac{\text{diff}(N3, \psi)}{Jac}$$

$$> \#dN4 := \frac{\text{diff}(N4, \psi)}{Jac}$$

> for i from 1 to NL do

$$Zmbs[i] := \text{matrix}(1, 3, [1, z[i], z[i]^2]);$$

end do

$$Zmbs_1 := \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_2 := \begin{bmatrix} 1 & z_2 & z_2^2 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_3 := \begin{bmatrix} 1 & z_3 & z_3^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

> for i from 1 to NL do

$$Qs[i] := \text{matrix}(1, 1, [Qb[i][5, 5]])$$

end do

$$Qs_1 := \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$Qs_2 := \begin{bmatrix} 2.2 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$Qs_3 := \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

> #factor de correção de cinco sextos 5|6

> for i from 1 to NL do


```
#Qs[i] := evalm( (Qs[i]*5) / 6 ); #alpha representa o factor
```

```
end do
```

```
> for i from 1 to NL do
```

```
  Psh[i] := multiply(multiply(transpose(Zmbs[i]), Qs[i]), Zmbs[i]);
```

```
end do
```

$$Psh_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Psh_2 := \begin{bmatrix} 2.2 \cdot 10^7 & 2.2 \cdot 10^7 z_2 & 2.2 \cdot 10^7 z_2^2 \\ 2.2 \cdot 10^7 z_2 & 2.2 \cdot 10^7 z_2^2 & 2.2 \cdot 10^7 z_2^3 \\ 2.2 \cdot 10^7 z_2^2 & 2.2 \cdot 10^7 z_2^3 & 2.2 \cdot 10^7 z_2^4 \end{bmatrix}$$

$$Psh_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(37)

```
> for i from 1 to NL do
```

```
  h[i+1] := H[i+1]: h[i] := H[i];
```

```
end do
```

$$h_2 := -0.01249875$$

$$h_1 := -0.01278625$$

$$h_3 := 0.01221125$$

$$h_2 := -0.01249875$$

$$h_4 := 0.01278625$$

$$h_3 := 0.01221125$$

(38)

```
> for i from 1 to NL do
```

```
  Ps[i] := map(int, map(int, Psh[i], z[i] = h[i]..h[i+1]), y = -b/2 .. b/2);
```

```
end do
```

$$Ps_1 := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

```
Ps_2 := [[5436.2000000000000000, -0.78145375000000000000, 0.27671710767822916667],
[-0.78145375000000000000, 0.27671710767822916667, -0.00011930195666797460938],
[0.27671710767822916667, -0.00011930195666797460938,
```

```
0.000025367868512216101664]]
```

$$Ps_3 := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (39)$$

```
> Bs := matrix(3, 28, [[0, dN1, N1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, N2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN3, N3, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    dN4, N4, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, dN1, 2 N1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 2 N2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, dN4, 2 N4, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN1, 3 N1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN2, 3 N2, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    dN3, 3 N3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, dN4, 3 N4]]):
```

```
> PsI := array(1..3, 1..3, sparse);
for m to NL do
for i to 3 do
for j to 3 do
PsI[i,j] := PsI[i,j] + Ps[m][i,j]
end do
end do
end do;
```

$$PsI := array(sparse, 1..3, 1..3, []) \quad (40)$$

```
> P2 := multiply(multiply(transpose(Bs), PsI), Bs):
```

```
> #integração reduzida
```

```
>
```

```
> A := 4:
```

```
> X[1] := -0.8611363116 :
X[2] := -0.3399810436 :
X[3] := 0.3399810436 :
X[4] := 0.8611363116 :
```

```
W[1] := 0.3478548451 :
W[2] := 0.6521451549 :
W[3] := 0.6521451549 :
W[4] := 0.3478548451 :
```

```
> Kes := array(1..28, 1..28, sparse):
```

```
> for m to A do
for i to 28 do
for j to 28 do
ψ := X[m];
Kes[i,j] := Kes[i,j] + P2[i,j]·W[m]
end do
end do
end do;
```

```
> evalm(Kes):
```

```
> Kess := evalm(Kes·Jac):
```

```

> f:= matrix(28, 1, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, P, P, 0, 0, 0, 0, 0]) :
> Kg := matadd ( Ke, Kess ) :
> Kgg := submatrix ( Kg, 8 ..28, 8 ..28 ) :
> ff:= submatrix ( f, 8 ..28, 1 ..1 ) :
> linsolve ( Kgg, ff ) :
> #varios elementos
>
>
> GDLno := 7 :
  GDLelem := GDLno·4; # 4 nós por elemento

  NE := GDLelem;

  S := GDLelem + (M - 1)·(GDLelem - GDLno);

  KTotal := array(1 ..S, 1 ..S, sparse) :

  for a from 1 to M do

    acresc := (a - 1)·3·GDLno;

    for i from 1 to NE do

      for j from 1 to NE do

        KTotal [i + acresc, j + acresc] := KTotal [i + acresc, j + acresc] + Kg [i, j];

      od:

    od:

  od:

  #print(KTotal)

  GDLelem := 28
  NE := 28
  S := 217

```

```

> f := matrix(S, 1, 0) :
> #carregamento axial e transversal
> #f[S-6, 1] := P:
> #f[S-5, 1] := F:
> #print(f)
> KGG := submatrix(KTotal, 8..S, 8..S) :
> #ff := submatrix(f, 8..S, 1..1) :
> #q := linsolve(KGG, ff);

```

```

>
>
>
>
> Kp := Matrix(1..S, 1..S, [0])

```

$Kp :=$

<i>217 x 217 Matrix</i>
<i>Data Type: anything</i>
<i>Storage: rectangular</i>
<i>Order: Fortran_order</i>

(42)

```

> Kp1,1 := 100E100 :
> Kp2,2 := 100E100 :
> Kp3,3 := 100E100 :
> Kp4,4 := 100E100 :
> Kp5,5 := 100E100 :
> Kp6,6 := 100E100 :
> Kp7,7 := 100E100 :
> #KpS-6, S-6 := 100E100 :
> KpS-5, S-5 := 100E100 :
> #Kp26, 26 := 10E100 :
> KKK := matadd(KTotal, Kp) :
> KKK := convert(KKK, Matrix) :
> #f[S-5, 1] := P:
> #f[S-6, 1] := F:
> f[ ( ( 23 + ( 21 · (  $\frac{M}{2}$  - 1 ) ) ) ) , 1 ] := P
> f107,1 := -500
> qq := linsolve(KKK, f)

```

(43)

2.0836572234356147309 10⁻¹¹⁸
-3.3656089796267208192 10⁻¹⁰⁰
8.6560897962672075132 10⁻¹⁰¹
3.8379474710443391465 10⁻¹⁰⁴
-1.2617609867728307232 10⁻¹⁰⁴
-1.7413004587877165415 10⁻¹⁰⁴
1.3673821284768789277 10⁻¹⁰⁴
-0.000065583093924740794361
-0.0023724153364434367545
0.021156520064307210158
-3.2324127186378044336 10⁻⁷
-0.055921373495019121130
-0.000010738035946998834574
-20.266204282260431695
-0.00012984284548952527772
-0.0053033664282572220347
0.036202868461132682670
1.4222055927196081172 10⁻⁷
-0.052085493020849000562
0.0000067671604523452097574
-17.578356644441221068
-0.00018292072180943061382
-0.0087081250836089621631
0.049538960107847717408
-2.4014616391574294788 10⁻⁷
-0.054842042504693421833
-0.000011735190331812335725
-19.821906019417217776
-0.00022642287328517171119
-0.012504339486602537985
0.059751573363117686447
4.3520367518927269556 10⁻⁸
-0.052750713166563380762

```
> print(qq[(23 + (21 * (M/2 - 1))), 1]);  
-0.056355327843384715264  
[>
```

(45)


```

v32[i] := (E3[i]·v23[i]) / E2[i];
Δ[i] := 1 - vI2[i]·v2I[i] - v23[i]·v32[i] - v3I[i]·vI3[i] - 2·v2I[i]·v32[i]
·vI3[i];
end do;

```

$$\alpha_1 := 0$$

$$\alpha_2 := \frac{1}{3} \pi$$

$$\alpha_3 := -\frac{1}{3} \pi$$

$$\alpha_4 := 0$$

$$v2I_1 := 0.0159632603917744394653540442855$$

$$v3I_1 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$v32_1 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$\Delta_1 := 0.813633261115125857886956589040$$

$$v2I_2 := 0.0159632603917744394653540442855$$

$$v3I_2 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$v32_2 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$\Delta_2 := 0.813633261115125857886956589040$$

$$v2I_3 := 0.0159632603917744394653540442855$$

$$v3I_3 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$v32_3 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$\Delta_3 := 0.813633261115125857886956589040$$

$$v2I_4 := 0.0159632603917744394653540442855$$

$$v3I_4 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$v32_4 := 0.299999999999999999999999999999$$

$$\Delta_4 := 0.813633261115125857886956589040$$

(4)

> for i from 1 to NZ do

$$CII[i] := \frac{EI[i]}{1 - vI2[i]·v2I[i]};$$

$$C12[i] := \frac{vI2[i] \cdot E2[i]}{1 - vI2[i] \cdot v2I[i]};$$

$$C22[i] := \frac{E2[i]}{1 - vI2[i] \cdot v2I[i]};$$

end do;

for i from 1 to NL do

$$C44[i] := G23[i];$$

$$C55[i] := G13[i];$$

$$C66[i] := G12[i];$$

$$C13[i] := 0;$$

$$C23[i] := 0;$$

$$C33[i] := 0;$$

end do;

$$C11_1 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$$

$$C12_1 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$$

$$C22_1 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$$

$$C11_2 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$$

$$C12_2 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$$

$$C22_2 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$$

$$C11_3 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$$

$$C12_3 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$$

$$C22_3 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$$

$$C11_4 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$$

$$C12_4 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$$

$$C22_4 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$$

$$C44_1 := 2.5414 \cdot 10^9$$

$$C55_1 := 4.3053 \cdot 10^9$$

$$C66_1 := 5.15658 \cdot 10^9$$

$$C13_1 := 0$$

$$C23_1 := 0$$

$$C33_1 := 0$$

$$C44_2 := 2.5414 \cdot 10^9$$

$$C55_2 := 4.3053 \cdot 10^9$$

$$C66_2 := 5.15658 \cdot 10^9$$

$$C13_2 := 0$$

$$C23_2 := 0$$

$$C33_2 := 0$$

$$C44_3 := 2.5414 \cdot 10^9$$

$$C55_3 := 4.3053 \cdot 10^9$$

$$C66_3 := 5.15658 \cdot 10^9$$

$$C13_3 := 0$$

$$C23_3 := 0$$

$$C33_3 := 0$$

$$C44_4 := 2.5414 \cdot 10^9$$

$$C55_4 := 4.3053 \cdot 10^9$$

$$C66_4 := 5.15658 \cdot 10^9$$

$$C13_4 := 0$$

$$C23_4 := 0$$

$$C33_4 := 0$$

(5)

>

for i **from** 1 **to** NL **do**

$C[i] := \text{matrix}(6, 6, [[C11[i], C12[i], C13[i], 0, 0, 0], [C12[i], C22[i], C23[i], 0, 0, 0], [C13[i], C23[i], C33[i], 0, 0, 0], [0, 0, 0, C44[i], 0, 0], [0, 0, 0, 0, C55[i], 0], [0, 0, 0, 0, 0, C66[i]]]);$

end do;

$C_1 := [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}, 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9,$
 $0, 0, 0, 0],$
 $[2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0,$
 $0, 0, 0],$
 $[0, 0, 0, 0, 0, 0],$

[0, 0, 0, 2.5414 10⁹, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 4.3053 10⁹, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 5.15658 10⁹]]

$C_2 := [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}, 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9,$

0, 0, 0, 0],

$[2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0,$

0, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, 2.5414 10⁹, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 4.3053 10⁹, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 5.15658 10⁹]]

$C_3 := [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}, 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9,$

0, 0, 0, 0],

$[2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0,$

0, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, 2.5414 10⁹, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 4.3053 10⁹, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 5.15658 10⁹]]

$C_4 := [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}, 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9,$ (6)

0, 0, 0, 0],

$[2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0,$

0, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, 2.5414 10⁹, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 4.3053 10⁹, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 5.15658 10⁹]]

> for i from 1 to NZ do

$Qa11[i] := C11[i] \cdot \cos^4(\alpha[i]) + 2(C12[i] + 2 C66[i]) \cdot \sin^2(\alpha[i]) \cdot \cos^2(\alpha[i])$
 $+ C22[i] \cdot \sin^4(\alpha[i]);$

$Qa12[i] := (C11[i] + C22[i] - 4 \cdot C66[i]) \cdot \sin^2(\alpha[i]) \cdot \cos^2(\alpha[i])$

```

+ C12[i] (sin4(α[i]) + cos4(α[i]) );
Qa22[i] := C11[i]·sin4(α[i]) + 2 (C12[i] + 2 C66[i])·sin2(α[i])·cos2(α[i])
+ C22[i]·cos4(α[i]);
Qa16[i] := (C11[i] - C12[i] - 2 C66[i])·sin(α[i])·cos3(α[i]) + (C12[i]
- C22[i] + 2·C66[i])sin3(α[i])·cos(α[i]);
Qa26[i] := (C11[i] - C12[i] - 2 C66[i])·sin3(α[i])·cos(α[i]) + (C12[i]
- C22[i] + 2·C66[i])sin(α[i])·cos3(α[i]);
Qa66[i] := (C11[i] + C22[i] - 2 C12[i] - 2 C66[i])·sin2(α[i])·cos2(α[i])
+ C66[i]·(sin4(α[i]) + cos4(α[i]) );
Qa44[i] := C44[i]cos2(α[i]) + C55[i]sin2(α[i]);
Qa45[i] := (C55[i] - C44[i])·cos(α[i])·sin(α[i]);
Qa55[i] := C55[i]·cos2(α[i]) + C44[i]·sin2(α[i]);
end do;

```

$$Qa11_1 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$$

$$Qa12_1 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$$

$$Qa22_1 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$$

$$Qa16_1 := 0.$$

$$Qa26_1 := 0.$$

$$Qa66_1 := 5.15658 \cdot 10^9$$

$$Qa44_1 := 2.5414 \cdot 10^9$$

$$Qa45_1 := 0.$$

$$Qa55_1 := 4.3053 \cdot 10^9$$

$$Qa11_2 := 1.80675704412879333796041595780 \cdot 10^{10}$$

$$Qa12_2 := 2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}$$

$$Qa22_2 := 7.81684640189319160235966632349 \cdot 10^{10}$$

$$Qa16_2 := 7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}$$

$$Qa26_2 := 2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}$$

$$Qa66_2 := 2.65976170322139753672571323726 \cdot 10^{10}$$

$$Qa44_2 := 3.864325000000000000000000000000 \cdot 10^9$$

$$Qa45_2 := 4.409750000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}$$

$$Qa55_2 := 2.982375000000000000000000000000 \cdot 10^9$$

$$Qa11_3 := 1.80675704412879333796041595780 \cdot 10^{10}$$

$Qa12_3 := 2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}$
 $Qa22_3 := 7.81684640189319160235966632349 \cdot 10^{10}$
 $Qa16_3 := -7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}$
 $Qa26_3 := -2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}$
 $Qa66_3 := 2.65976170322139753672571323726 \cdot 10^{10}$
 $Qa44_3 := 3.8643250000000000000000000000000000000000 \cdot 10^9$
 $Qa45_3 := -4.4097500000000000000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}$
 $Qa55_3 := 2.9823750000000000000000000000000000000000 \cdot 10^9$
 $Qa11_4 := 1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}$
 $Qa12_4 := 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9$
 $Qa22_4 := 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9$
 $Qa16_4 := 0.$
 $Qa26_4 := 0.$
 $Qa66_4 := 5.15658 \cdot 10^9$
 $Qa44_4 := 2.5414 \cdot 10^9$
 $Qa45_4 := 0.$
 $Qa55_4 := 4.3053 \cdot 10^9$

(7)

> for *i* from 1 to *NL* do

$Qb[i] := \text{matrix}(6, 6, [[Qa11[i], Qa12[i], 0, 0, 0, Qa16[i]], [Qa12[i], Qa22[i], 0, 0,$
 $0, Qa26[i]], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, Qa44[i], Qa45[i], 0], [0, 0, 0, Qa45[i],$
 $Qa55[i], 0], [Qa16[i], Qa26[i], 0, 0, 0, Qa66[i]]]);$

end do

$Qb_1 := [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11},$
 $2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 0, 0, 0, 0],$
 $[2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0,$
 $0, 0, 0],$
 $[0, 0, 0, 0, 0, 0],$
 $[0, 0, 0, 2.5414 \cdot 10^9, 0., 0],$
 $[0, 0, 0, 0., 4.3053 \cdot 10^9, 0],$

$$[0., 0., 0, 0, 0, 5.15658 \cdot 10^9]]$$

$$\begin{aligned} Qb_2 := & [[1.80675704412879333796041595780 \cdot 10^{10}, \\ & 2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}, 0, 0, 0, \\ & 7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}], \\ & [2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}, 7.81684640189319160235966632349 \cdot 10^{10}, \\ & 0, 0, 0, 2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 3.86432500000000000000000000000000 \cdot 10^9, \\ & 4.40975000000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}, 0], \\ & [0, 0, 0, 4.40975000000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}, \\ & 2.98237500000000000000000000000000 \cdot 10^9, 0], \\ & [7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}, \\ & 2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}, 0, 0, 0, \\ & 2.65976170322139753672571323726 \cdot 10^{10}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qb_3 := & [[1.80675704412879333796041595780 \cdot 10^{10}, \\ & 2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}, 0, 0, 0, \\ & -7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}], \\ & [2.42870058581247616153267697024 \cdot 10^{10}, 7.81684640189319160235966632349 \cdot 10^{10}, \\ & 0, 0, 0, -2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 3.86432500000000000000000000000000 \cdot 10^9, \\ & -4.40975000000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}, 0], \\ & [0, 0, 0, -4.40975000000000000000000000000000 \cdot 10^8 \sqrt{3}, \\ & 2.98237500000000000000000000000000 \cdot 10^9, 0], \\ & [-7.87821105033967053857908178998 \cdot 10^9 \sqrt{3}, \\ & -2.21722357384823207834171700384 \cdot 10^{10} \sqrt{3}, 0, 0, 0, \\ & 2.65976170322139753672571323726 \cdot 10^{10}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qb_4 := & [[1.29659947839967882712850047436 \cdot 10^{11}, \\ & 2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 0, 0, 0, 0.], \\ & [2.06979550975329908950519078526 \cdot 10^9, 9.45816068467991742486504012236 \cdot 10^9, 0, \end{aligned}$$

0, 0, 0.],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 2.5414 10⁹, 0., 0],
 [0, 0, 0, 0., 4.3053 10⁹, 0],
 [0., 0., 0, 0, 0, 5.15658 10⁹]]

> for i from 1 to NZ do

$$Qa[i][1, 1] := Qb[i][1, 1] + Qb[i][1, 2] \cdot \left(\frac{(Qb[i][1, 6] \cdot Qb[i][2, 6] - Qb[i][1, 2] \cdot Qb[i][6, 6])}{(Qb[i][2, 2] \cdot Qb[i][6, 6] - Qb[i][2, 6]^2)} \right) + Qb[i][1, 6]$$

$$\cdot \left(\frac{(Qb[i][1, 6] \cdot Qb[i][2, 2] - Qb[i][1, 2] \cdot Qb[i][2, 6])}{(Qb[i][2, 6]^2 - Qb[i][2, 2] \cdot Qb[i][6, 6])} \right).$$

end do

$$Qa_{1,1} := 1.2920700 10^{11}$$

$$Qa_{2,1} := 1.01417742448416159574138020111 10^{10}$$

$$Qa_{3,1} := 1.01417742448416159574138020111 10^{10}$$

$$Qa_{4,1} := 1.2920700 10^{11}$$

(9)

> for i from 1 to NZ do

$$Qa[i][5, 5] := Qb[i][5, 5] - \frac{Qb[i][4, 5]^2}{Qb[i][4, 4]}:$$

end do

$$Qa_{1,5,5} := 4.3053 10^9$$

$$Qa_{2,5,5} := 2.83141025146694442108259527861 10^9$$

$$Qa_{3,5,5} := 2.83141025146694442108259527861 10^9$$

$$Qa_{4,5,5} := 4.3053 10^9$$

(10)

> for i from 1 to NZ do

$$Q[i] := \text{matrix}(2, 2, [Qa[i][1, 1], 0, 0, Qa[i][5, 5]])$$

end do;

$$Q_1 := \begin{bmatrix} 1.2920700 10^{11} & 0 \\ 0 & 4.3053 10^9 \end{bmatrix}$$

$Q_2 :=$

$$Q_3 := \begin{bmatrix} 1.01417742448416159574138020111 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 2.83141025146694442108259527861 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$
$$Q_4 := \begin{bmatrix} 1.2920700000000000000000000000 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 4.3053 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \quad (11)$$

```
> Qtotal := matrix(2, 2, 0) :  
for m to NL do  
for i to 2 do  
for j to 2 do  
# print(Q[m][i,j]);  
Qtotal[i,j] := Qtotal[i,j] + Q[m][i,j];  
end do;  
end do;  
end do;  
  
print(Qtotal);
```

$$\begin{bmatrix} 2.78697548489683231914827604022 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 1.42734205029338888421651905572 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad (12)$$

```
> Psi := 'Psi':  
  
N1 := Psi/2 * (Psi - 1) : N2 := (1 - Psi^2) : N3 := Psi/2 * (Psi + 1) :  
x := x1 * N1 + x2 * N2 + x3 * N3 :  
  
x1 := 0 : x2 := Le/2 : x3 := Le :  
dxdzeta := simplify(diff(x, Psi)) :  
Jac := (dxdzeta);  
dN1 := diff(N1, Psi)/Jac : dN2 := diff(N2, Psi)/Jac : dN3 := diff(N3, Psi)/Jac :
```

$$Jac := 0.002381250000000000000000000000000000 \quad (13)$$

```
> #só componentes de membrana - flexão
```

```

> #epsix:=du0dx+z·dthetaydx
#gamaxz=thetax + dw0dx
> for i from 1 to NL do
  Zmbs[i] := matrix(1, 2, [[1, z[i]]])
end do;

for i from 1 to NL do
  Qmb[i] := matrix(1, 1, [Q[i][1, 1]])
end do;

```

$$Zmbs_1 := \begin{bmatrix} 1 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_2 := \begin{bmatrix} 1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_3 := \begin{bmatrix} 1 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$Zmbs_4 := \begin{bmatrix} 1 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$Qmb_1 := \begin{bmatrix} 1.29207000000000000000000000000000 10^{11} \end{bmatrix}$$

$$Qmb_2 := \begin{bmatrix} 1.01417742448416159574138020111 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$Qmb_3 := \begin{bmatrix} 1.01417742448416159574138020111 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$Qmb_4 := \begin{bmatrix} 1.29207000000000000000000000000000 10^{11} \end{bmatrix}$$

(14)

```

> for i from 1 to NL do
  Pbm[i] := multiply(multiply(transpose(Zmbs[i]), Qmb[i]), Zmbs[i])
end do;

```

$Pbm_1 :=$

$$\begin{bmatrix} [1.29207000000000000000000000000000 10^{11}, \\ 1.29207000000000000000000000000000 10^{11} z_1], \\ [1.29207000000000000000000000000000 10^{11} z_1, 1.29207000000000000000000000000000 10^{11} \\ z_1^2] \end{bmatrix}$$

$Pbm_2 :=$

$$\begin{bmatrix} [1.01417742448416159574138020111 10^{10}, \\ 1.01417742448416159574138020111 10^{10} z_2], \\ [1.01417742448416159574138020111 10^{10} z_2, 1.01417742448416159574138020111 10^{10} \\ z_2^2] \end{bmatrix}$$

$Pbm_3 :=$

$$\left[\left[1.01417742448416159574138020111 \cdot 10^{10}, \right. \right. \\ \left. \left. 1.01417742448416159574138020111 \cdot 10^{10} z_3 \right], \right. \\ \left. \left[1.01417742448416159574138020111 \cdot 10^{10} z_3, 1.01417742448416159574138020111 \cdot 10^{10} \right. \right. \\ \left. \left. z_3^2 \right] \right]$$

$Pbm_4 :=$

(15)

$$\left[\left[1.29207000000000000000000000000000 \cdot 10^{11}, \right. \right. \\ \left. \left. 1.29207000000000000000000000000000 \cdot 10^{11} z_4 \right], \right. \\ \left. \left[1.29207000000000000000000000000000 \cdot 10^{11} z_4, 1.29207000000000000000000000000000 \cdot 10^{11} \right. \right. \\ \left. \left. z_4^2 \right] \right]$$

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**
 $h[i] := H[i];$
 $h[i+1] := H[i+1];$
end do;

$$h_1 := -0.01905$$

$$h_2 := -0.009525$$

$$h_2 := -0.009525$$

$$h_3 := 0$$

$$h_3 := 0$$

$$h_4 := 0.009525$$

$$h_4 := 0.009525$$

$$h_5 := 0.01905$$

(16)

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**
 $PbmI[i] := \text{map}\left(\text{int}, \text{map}\left(\text{int}, Pbm[i], y = -\frac{b}{2} \dots \frac{b}{2}\right), z[i] = h[i] \dots h[i+1]\right);$
end do;

$Pbmm := \text{matrix}(2, 2, 0) :$

for m **to** NL **do**

for i **to** 2 **do**

for j **to** 2 **do**

$Pbmm[i, j] := Pbmm[i, j] + PbmI[m][i, j]$

end do;

end do;

end do;

```
print (Pbmm);
```

```
PbmI1 :=
```

```
[ [1.56298477725000000000000000000000 107,  
-2.23311450049593750000000000000000 105 ],  
[ -2.23311450049593750000000000000000 105, 3308.73131823481406250000000000 ]]
```

```
PbmI2 :=
```

```
[ [1.22682507596287817832845409478 106 -5842.75442427320732428926262638  
-5842.75442427320732428926262638 37.1014905941348665092368176775 ]
```

```
PbmI3 := [ [1.22682507596287817832845409478 106 5842.75442427320732428926262638  
5842.75442427320732428926262638 37.1014905941348665092368176775 ]
```

```
PbmI4 :=
```

```
[ [1.56298477725000000000000000000000 107 2.23311450049593750000000000000000 105  
2.23311450049593750000000000000000 105 3308.73131823481406250000000000  
[ 3.37133456969257563566569081896 107 0.  
0. 6691.66561765789785801847363536 ]
```

(17)

```
> #MATRIZ B
```

```
> Bbm := matrix(2, 9, [[dN1, 0, 0, dN2, 0, 0, dN3, 0, 0], [0, 0, dN1, 0, 0, dN2, 0, 0, dN3]]);
```

```
Bbm := [ [419.947506561679790026246719160 ψ - 209.973753280839895013123359580, 0,  
0, -839.895013123359580052493438320 ψ, 0, 0, 419.947506561679790026246719160 ψ  
+ 209.973753280839895013123359580, 0, 0],  
[0, 0, 419.947506561679790026246719160 ψ - 209.973753280839895013123359580, 0,  
0, -839.895013123359580052493438320 ψ, 0, 0, 419.947506561679790026246719160 ψ  
+ 209.973753280839895013123359580]]
```

(18)

```
> #Bbm := convert(Bbm, Matrix)
```

```
> PI := multiply(multiply(transpose(Bbm), Pbmm), Bbm);
```

```
PI := [ [ (1.41578354632759081812732422843 1010 ψ  
- 7.07891773163795409063662114217 109) (419.947506561679790026246719160 ψ  
- 209.973753280839895013123359580), 0., 0.,  
-839.895013123359580052493438320 (1.41578354632759081812732422843 1010 ψ  
- 7.07891773163795409063662114217 109) ψ, 0., 0.,  
(1.41578354632759081812732422843 1010 ψ
```

(19)

$$\begin{aligned}
& - 7.07891773163795409063662114217 \cdot 10^9) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), 0., 0.], \\
& [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.], \\
& [0., 0., (2.81014829087995710572954273401 \cdot 10^6 \psi \\
& - 1.40507414543997855286477136700 \cdot 10^6) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), 0., 0., \\
& - 839.895013123359580052493438320 (2.81014829087995710572954273401 \cdot 10^6 \psi \\
& - 1.40507414543997855286477136700 \cdot 10^6) \psi, 0., 0., \\
& (2.81014829087995710572954273401 \cdot 10^6 \psi \\
& - 1.40507414543997855286477136700 \cdot 10^6) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580)], \\
& [- 2.83156709265518163625464845687 \cdot 10^{10} \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), 0., 0., \\
& 2.37821908044529691233986222099 \cdot 10^{13} \psi^2, 0., - 0., \\
& - 2.83156709265518163625464845687 \cdot 10^{10} \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), 0., 0.], \\
& [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.], \\
& [0., 0., \\
& - 5.62029658175991421145908546802 \cdot 10^6 \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), - 0., 0., \\
& 4.72045907129441613560868070805 \cdot 10^9 \psi^2, 0., 0., \\
& - 5.62029658175991421145908546802 \cdot 10^6 \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580)], \\
& [(1.41578354632759081812732422843 \cdot 10^{10} \psi \\
& + 7.07891773163795409063662114217 \cdot 10^9) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), 0., 0., \\
& - 839.895013123359580052493438320 (1.41578354632759081812732422843 \cdot 10^{10} \psi \\
& + 7.07891773163795409063662114217 \cdot 10^9) \psi, 0., 0., \\
& (1.41578354632759081812732422843 \cdot 10^{10} \psi \\
& + 7.07891773163795409063662114217 \cdot 10^9) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), 0., 0.],
\end{aligned}$$

```

[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., (2.81014829087995710572954273401 106 ψ
+ 1.40507414543997855286477136700 106) (419.947506561679790026246719160 ψ
- 209.973753280839895013123359580), 0., 0.,
-839.895013123359580052493438320 (2.81014829087995710572954273401 106 ψ
+ 1.40507414543997855286477136700 106) ψ, 0., 0.,
(2.81014829087995710572954273401 106 ψ
+ 1.40507414543997855286477136700 106) (419.947506561679790026246719160 ψ
+ 209.973753280839895013123359580) ]]
```

```

> Ke := map(int, PI, ψ=-1..1) :      #integração exacta
> Ke := evalm(Ke·Jac);              #multiplicação pelo Jacobiano
```

```

Ke := [[1.65174747071552262114854493317 1010, 0., 0.,
-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.,
2.35963924387931803021220704736 109, 0., 0.],
```

(20)

```

[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., 3.27850633935994995668446652300 106, 0., 0.,
-3.74686438783994280763939031202 106, 0., 0.,
4.68358048479992850954923789006 105],
[-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.,
3.77542279020690884833953127582 1010, 0., 0.,
-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.],
[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., -3.74686438783994280763939031202 106, 0., 0.,
7.49372877567988561527878062402 106, 0., 0.,
-3.74686438783994280763939031202 106],
[2.35963924387931803021220704736 109, 0., 0.,
-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.,
1.65174747071552262114854493317 1010, 0., 0.],
[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., 4.68358048479992850954923789006 105, 0., 0.,
-3.74686438783994280763939031202 106, 0., 0.,
3.27850633935994995668446652300 106]]
```

```

> f := matrix(9, 1, [0, 0, 0, 0, 0, 0, P, 0, 0]);
```

$$f := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(21)

```
> Kee := submatrix(Ke, 4..9, 4..9);
ff := submatrix(f, 4..9, 1..1);
linsolve(Kee, ff);
```

```
Kee := [[ [3.77542279020690884833953127582 1010, 0., 0.,
-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.],
[0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., 7.49372877567988561527878062402 106, 0., 0.,
-3.74686438783994280763939031202 106],
[-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.,
1.65174747071552262114854493317 1010, 0., 0.],
[0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 0., -3.74686438783994280763939031202 106, 0., 0.,
3.27850633935994995668446652300 106]]
```

$$ff := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(22)

$$\begin{bmatrix} 7.06322659698868390470318463937 \cdot 10^{-11} P \\ -t_{11} \\ 0. \\ 1.41264531939773678094063692787 \cdot 10^{-10} P \\ -t_{12} \\ 0. \end{bmatrix}$$

(22)

> $\Psi := '\Psi'$:

$$N1 := \frac{\Psi}{2}(\Psi - 1) : N2 := (1 - \Psi^2) : N3 := \frac{\Psi}{2}(\Psi + 1) :$$

$$x := x1 \cdot N1 + x2 \cdot N2 + x3 \cdot N3 :$$

$$x1 := 0 : x2 := \frac{Le}{2} : x3 := Le :$$

$$dxdzeta := \text{simplify}(\text{diff}(x, \Psi)) :$$

$$Jac := (dxdzeta);$$

$$dN1 := \frac{\text{diff}(N1, \Psi)}{Jac} : dN2 := \frac{\text{diff}(N2, \Psi)}{Jac} : dN3 := \frac{\text{diff}(N3, \Psi)}{Jac} :$$

$$Jac := 0.0023812500000000000000000000000000$$

(23)

> for i from 1 to NL do

$$Zmbs[i] := \text{matrix}(1, 1, [1]);$$

end do;

for i from 1 to NL do

$$Qs[i] := \text{matrix}(1, 1, [Q[i][2, 2]])$$

end do;

for i from 1 to NL do

$$Qs[i] := \text{evalm}\left(\frac{Qs[i] \cdot 5}{6}\right); \quad \# \text{factor de correcção ao efeito de corte}$$

end do;

$$Zmbs_1 := [1]$$

$$Zmbs_2 := [1]$$

$$Zmbs_3 := [1]$$

$$Zmbs_4 := [1]$$

$$\begin{aligned}
 Qs_1 &:= [4.3053 \cdot 10^9] \\
 Qs_2 &:= [2.83141025146694442108259527861 \cdot 10^9] \\
 Qs_3 &:= [2.83141025146694442108259527861 \cdot 10^9] \\
 Qs_4 &:= [4.3053 \cdot 10^9] \\
 Qs_1 &:= [3.58775000000000000000000000000000 \cdot 10^9] \\
 Qs_2 &:= [2.35950854288912035090216273217 \cdot 10^9] \\
 Qs_3 &:= [2.35950854288912035090216273217 \cdot 10^9] \\
 Qs_4 &:= [3.58775000000000000000000000000000 \cdot 10^9]
 \end{aligned}$$

(24)

```

> for i from 1 to NL do
  Psh[i] := multiply(multiply(transpose(Zmbs[i]), Qs[i]), Zmbs[i]);
end do;

for i from 1 to NL do
  h[i] := H[i];
  h[i+1] := H[i+1];
end do;

for i from 1 to NL do
  Ps[i] := map(int, map(int, Psh[i], z[i] = h[i]..h[i+1]), y = -\frac{b}{2} .. \frac{b}{2});
end do;

Psh_1 := [ 3.58775000000000000000000000000000 \cdot 10^9 ]
Psh_2 := [ 2.35950854288912035090216273217 \cdot 10^9 ]
Psh_3 := [ 2.35950854288912035090216273217 \cdot 10^9 ]
Psh_4 := [ 3.58775000000000000000000000000000 \cdot 10^9 ]

h_1 := -0.01905
h_2 := -0.009525
h_2 := -0.009525
h_3 := 0
h_3 := 0
h_4 := 0.009525
h_4 := 0.009525

```

$$h_s := 0.01905$$

$$\begin{aligned} Ps_1 &:= \left[4.34001148125000000000000000000000 10^5 \right] \\ Ps_2 &:= \left[2.85423849661939666047757370304 10^5 \right] \\ Ps_3 &:= \left[2.85423849661939666047757370304 10^5 \right] \\ Ps_4 &:= \left[4.34001148125000000000000000000000 10^5 \right] \end{aligned} \quad (25)$$

```
> Bs := matrix(1, 9, [[0, dN1, N1, 0, dN2, N2, 0, dN3, N3]]);
```

$$Bs := \left[0, 419.947506561679790026246719160 \psi - 209.973753280839895013123359580, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \psi (\psi - 1), 0, -839.895013123359580052493438320 \psi, 1 - \psi^2, 0, \right. \\ \left. 419.947506561679790026246719160 \psi + 209.973753280839895013123359580, \frac{1}{2} \psi (\psi \right. \\ \left. + 1) \right] \quad (26)$$

```
> PsI := matrix(1, 1, 0);
for m to NL do
  for i to 1 do
    for j to 1 do
      PsI[i, j] := PsI[i, j] + Ps[m][i, j]
    end do;
  end do;
end do;
```

```
P2 := multiply(multiply(transpose(Bs), PsI), Bs);
```

$$PsI := \left[0 \right]$$

$$P2 := \left[\left[0., 0., 0., 0., -0., -0., 0., 0., 0. \right], \right. \\ \left[0., (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \right. \\ - 3.02120733978767313825829866795 10^8) (419.947506561679790026246719160 \psi \\ - 209.973753280839895013123359580), \\ \left. \frac{1}{2} (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \right. \\ \left. - 3.02120733978767313825829866795 10^8) \psi (\psi - 1), 0., \right. \\ \left. 419.947506561679790026246719160 \psi + 209.973753280839895013123359580, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \psi (\psi + 1), 839.895013123359580052493438320 \psi, \right. \\ \left. 1 - \psi^2, 839.895013123359580052493438320 \psi, \right. \\ \left. (419.947506561679790026246719160 \psi - 209.973753280839895013123359580), \right. \\ \left. (419.947506561679790026246719160 \psi + 209.973753280839895013123359580), \right. \\ \left. \frac{1}{2} \psi (\psi + 1) \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& -839.895013123359580052493438320 (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \\
& - 3.02120733978767313825829866795 10^8) \psi, \\
& (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \\
& - 3.02120733978767313825829866795 10^8) (1 - \psi^2), 0., \\
& (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \\
& - 3.02120733978767313825829866795 10^8) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), \\
& \frac{1}{2} (6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi \\
& - 3.02120733978767313825829866795 10^8) \psi (\psi + 1) \Big], \\
& [0., 7.19424997786939666047757370305 10^5 \psi (\psi \\
& - 1) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), \\
& 3.59712498893469833023878685152 10^5 \psi^2 (\psi - 1)^2, 0., \\
& -6.04241467957534627651659733589 10^8 \psi^2 (\psi - 1), \\
& 7.19424997786939666047757370305 10^5 \psi (\psi - 1) (1 - \psi^2), 0., \\
& 7.19424997786939666047757370305 10^5 \psi (\psi \\
& - 1) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), \\
& 3.59712498893469833023878685152 10^5 \psi^2 (\psi - 1) (\psi + 1) \Big], \\
& [0., 0., 0., 0., -0., -0., 0., 0., 0. \Big], \\
& [-0., \\
& -1.20848293591506925530331946718 10^9 \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), \\
& -6.04241467957534627651659733590 10^8 \psi^2 (\psi - 1), -0., \\
& 1.01499879131974320655396910629 10^{12} \psi^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1.20848293591506925530331946718 \cdot 10^9 \psi (1 - \psi^2), -0., \\
& -1.20848293591506925530331946718 \cdot 10^9 \psi (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), \\
& -6.04241467957534627651659733590 \cdot 10^8 \psi^2 (\psi + 1) \Big], \\
& \Big[-0., (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) \\
& (419.947506561679790026246719160 \psi - 209.973753280839895013123359580), \\
& \frac{1}{2} (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) \psi (\psi - 1), -0., \\
& -839.895013123359580052493438320 (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) \psi, \\
& (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) (1 - \psi^2), -0., \\
& (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) \\
& (419.947506561679790026246719160 \psi + 209.973753280839895013123359580), \\
& \frac{1}{2} (1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \\
& - 1.43884999557387933209551474061 \cdot 10^6 \psi^2) \psi (\psi + 1) \Big], \\
& \Big[0., 0., 0., 0., -0., -0., 0., 0., 0. \Big], \\
& \Big[0., (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) (419.947506561679790026246719160 \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 209.973753280839895013123359580), \\
& \frac{1}{2} (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) \psi (\psi - 1), 0., \\
& -839.895013123359580052493438320 (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) \psi, \\
& (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) (1 - \psi^2), 0., \\
& (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), \\
& \frac{1}{2} (6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi \\
& + 3.02120733978767313825829866795 \cdot 10^8) \psi (\psi + 1) \Big], \\
& [0., 7.19424997786939666047757370305 \cdot 10^5 \psi (\psi \\
& + 1) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& - 209.973753280839895013123359580), \\
& 3.59712498893469833023878685152 \cdot 10^5 \psi^2 (\psi - 1) (\psi + 1), 0., \\
& -6.04241467957534627651659733589 \cdot 10^8 \psi^2 (\psi + 1), \\
& 7.19424997786939666047757370305 \cdot 10^5 \psi (\psi + 1) (1 - \psi^2), 0., \\
& 7.19424997786939666047757370305 \cdot 10^5 \psi (\psi \\
& + 1) (419.947506561679790026246719160 \psi \\
& + 209.973753280839895013123359580), \\
& 3.59712498893469833023878685152 \cdot 10^5 \psi^2 (\psi + 1)^2 \Big]
\end{aligned}$$

> # *Integração reduzida*

> $A := 2 :$

```

X[1] := evalf ( 1 / sqrt(3) );
X[2] := evalf ( - 1 / sqrt(3) );

```

```

W[1] := 1 :
W[2] := 1 :

```

```

> Kes := matrix(9, 9, 0) :

```

```

for m to A do
  for i to 9 do
    for j to 9 do

```

```

Psi := X[m];
Kes[i,j] := Kes[i,j] + P2[i,j] * W[m];

```

```

end do;
end do;
end do;

```

```

> # evalm ( Kes );
Kess := evalm ( Kes * Jac );

```

```

Kess := [ [ 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0. ],
[ 0., 7.04948379283790398926936355856 108,
-7.19424997786939666047757370306 105, 0.,
-8.05655290610046170202212978122 108, -9.59233330382586221397009827072 105,
0., 1.00706911326255771275276622267 108, 2.39808332595646555349252456769 105 ],
[ 0., -7.19424997786939666047757370308 105, 761.391455991177813233876550239, 0.,
9.59233330382586221397009827074 105, 761.391455991177813233876550239, 0.,
-2.39808332595646555349252456769 105, -380.695727995588906616938275121 ],
[ 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0. ],
[ 0., -8.05655290610046170202212978124 108,
9.59233330382586221397009827077 105, 0., 1.61131058122009234040442595624 109,
0., 0., -8.05655290610046170202212978124 108,
-9.59233330382586221397009827077 105 ],
[ 0., -9.59233330382586221397009827069 105, 761.391455991177813233876550239, 0.,
0., 3045.56582396471125293550620095, 0., 9.59233330382586221397009827069 105,
761.391455991177813233876550239 ],

```

(28)

```
[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
[0., 1.00706911326255771275276622267 108,
-2.39808332595646555349252456769 105, 0.,
-8.05655290610046170202212978122 108, 9.59233330382586221397009827072 105, 0.,
7.04948379283790398926936355856 108, 7.19424997786939666047757370306 105],
[0., 2.39808332595646555349252456769 105, -380.695727995588906616938275121, 0.,
-9.59233330382586221397009827074 105, 761.391455991177813233876550239, 0.,
7.19424997786939666047757370308 105, 761.391455991177813233876550239]]
```

```
> f:= matrix(9, 1, [0, 0, 0, 0, 0, 0, P, P, 0]);
```

$$f:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

(29)

```
> Kg := matadd(Ke, Kess);
Kgg := submatrix(Kg, 4..9, 4..9) :
ff:= submatrix(f, 4..9, 1..1) :
linsolve(Kgg,ff);
```

```
Kg := [[1.65174747071552262114854493317 1010, 0., 0.,
-1.88771139510345442416976563791 1010, 0., 0.,
2.35963924387931803021220704736 109, 0., 0.],
[0., 7.04948379283790398926936355856 108,
-7.19424997786939666047757370306 105, 0.,
-8.05655290610046170202212978122 108, -9.59233330382586221397009827072 105,
0., 1.00706911326255771275276622267 108, 2.39808332595646555349252456769 105],
[0., -7.19424997786939666047757370308 105,
3.27926773081594113449770039955 106, 0., 9.59233330382586221397009827074 105,
-3.74610299638395162982615643547 106, 0.,
-2.39808332595646555349252456769 105, 4.67977352751997262048306850731 105],
```

$[-1.88771139510345442416976563791 \cdot 10^{10}, 0., 0.,$
 $3.77542279020690884833953127582 \cdot 10^{10}, 0., 0.,$
 $-1.88771139510345442416976563791 \cdot 10^{10}, 0., 0.],$
 $[0., -8.05655290610046170202212978124 \cdot 10^8,$
 $9.59233330382586221397009827077 \cdot 10^5, 0., 1.61131058122009234040442595624 \cdot 10^9,$
 $0., 0., -8.05655290610046170202212978124 \cdot 10^8,$
 $-9.59233330382586221397009827077 \cdot 10^5],$
 $[0., -9.59233330382586221397009827069 \cdot 10^5,$
 $-3.74610299638395162982615643547 \cdot 10^6, 0., 0.,$
 $7.49677434150385032653171613022 \cdot 10^6, 0., 9.59233330382586221397009827069 \cdot 10^5,$
 $-3.74610299638395162982615643547 \cdot 10^6],$
 $[2.35963924387931803021220704736 \cdot 10^9, 0., 0.,$
 $-1.88771139510345442416976563791 \cdot 10^{10}, 0., 0.,$
 $1.65174747071552262114854493317 \cdot 10^{10}, 0., 0.],$
 $[0., 1.00706911326255771275276622267 \cdot 10^8,$
 $-2.39808332595646555349252456769 \cdot 10^5, 0.,$
 $-8.05655290610046170202212978122 \cdot 10^8, 9.59233330382586221397009827072 \cdot 10^5, 0.,$
 $7.04948379283790398926936355856 \cdot 10^8, 7.19424997786939666047757370306 \cdot 10^5],$
 $[0., 2.39808332595646555349252456769 \cdot 10^5, 4.67977352751997262048306850731 \cdot 10^5,$
 $0., -9.59233330382586221397009827074 \cdot 10^5,$
 $-3.74610299638395162982615643547 \cdot 10^6, 0., 7.19424997786939666047757370308 \cdot 10^5,$
 $3.27926773081594113449770039955 \cdot 10^6]]$

$$\begin{bmatrix}
 7.06322659698868390470318463937 \cdot 10^{-11} P \\
 1.65664902404897376447987957762 \cdot 10^{-9} P \\
 -1.27106281600588388993059868290 \cdot 10^{-9} P \\
 1.41264531939773678094063692787 \cdot 10^{-10} P \\
 3.31531586031835686963502398063 \cdot 10^{-9} P \\
 -1.69475042134117851990746491054 \cdot 10^{-9} P
 \end{bmatrix}$$

(30)

> # Se forem M matrizes elementares

$M := I;$

$S := GDL_{elem} + (M - 1) \cdot (GDL_{elem} - GDL_{no});$


```

KTotal := array(1 ..S, 1 ..S, sparse) :

for a from 1 to M do

  acresc := (a - 1) · 2 · GDLno;

  for i from 1 to NE do

    for j from 1 to NE do

      KTotal[i + acresc, j + acresc] := KTotal[i + acresc, j + acresc] + Kg[i, j];

    od:
  od:
od:

#print(KTotal);

```

S := 243

(31)

```

> f := matrix(S, 1, 0) :
> Kp := Matrix(1 ..S, 1 ..S, [0]) :
> Kp1,1 := 100E100 :
> Kp2,2 := 100E100 :
> Kp3,3 := 100E100 :
> #Kp23,23 := 10E100 :
> #Kp4,4 := 10E100 :
> #Kp5,5 := 10E100 :
> #KpS-1, S-1 := 100E100 :
> #Kp27,27 := 10E100 :
> KKK := matadd(KTotal, Kp) :
  KKK := convert(KKK, Matrix) :
> f := matrix(S, 1, 0) :
> #carregamento axial e transversal
> #S - ((M · GDLno) + 1)
> #f[S - ((M · GDLno) + 1), 1] := P:
> #f[S - 2, 1] := P:
> f[S - 1, 1] := F:

> #ff := matadd(f, fdistr2)
> qq := linsolve(KKK, f) :

```

> **for** i **from** 1 **to** NL **do**

$$w0 := \frac{10 \cdot E3[i] \cdot b \cdot altura^3 \cdot qq[S-1, 1]}{F \cdot L^3}$$

end do

$w0 := 4.56551886983057605468276096404$

$w0 := 4.56551886983057605468276096404$

$w0 := 4.56551886983057605468276096404$

$w0 := 4.56551886983057605468276096404$

(32)