

# ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA DO ERRO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ARITMÉTICA DE ESTRUTURA ADITIVA

**Joana Castro**

*Escola Superior de Educação de Lisboa*

**Deolinda Botelho**

*Escola Superior de Educação de Lisboa*

**Luísa Morgado**

*Universidade de Coimbra*

**Silvia Parrat-Dayant**

*Universidade de Genève*

**Alina Galvão Spinillo**

*Universidade Federal de Pernambuco*

---

129

## 1. Introdução

A problemática do erro tornou-se um tema central em vários autores, sobretudo nos que se interessaram, quer pela formação dos conhecimentos e suas relações com o processo de aprendizagem (Inhelder, Sinclair & Bovet 1974; Piaget, 1973/74/75 ; Kamii, 1985; Sala, 1989; Vergnaud, 1981; Ving-Bang, 1990), quer pela educação matemática numa perspectiva construtivista (Carpenter, Hiebert & Moser, 1981; De Corte & Verschaffel, 1987/89; Riley, Greeno & Verschaffel, 1987/89; Colomb, 1999).

O erro é olhado por todos estes investigadores de uma forma positiva porque permite conhecer o nível de desenvolvimento cognitivo do sujeito, e, ao mesmo tempo, provoca, no momento de tomada de consciência do mesmo pela criança, uma contradição cognitiva interna que pode originar uma reorganização estrutural do pensamento e conduzir à reorientação dos procedimentos desencadeadores da descoberta da resposta correcta.

O erro pode ser explicado por dificuldades de elaboração de estruturas operatórias na criança (Riley, Greeno & Heller, 1983) e, neste caso, será designado por erro estrutural. Mas o erro pode, também, resultar de uma incompreensão linguística (Coquin-Viennot, 2000; Cummins, 1991; Lean, 1990; Markman, 1973; Markman & Siebert, 1976) ou ser proveniente de dificuldades encontradas na construção e generalização de procedimentos de resolução (Fuson, 1988; Fuson & Brians, 1990; Geory, 1990; Meissner, 1986). Este será designado erro funcional e será ultrapassado pela criança através de uma estratégia de contra-sugestão, isto é, de diálogo co-construído, quer com o adulto, quer com um par. É este o quadro conceptual em que se inscreve esta investigação.

## **2. OBJECTIVO**

É objectivo desta investigação analisar o tipo de erro, estrutural ou funcional, observado em crianças dos 5 aos 8 anos, durante a resolução de três categorias de problemas aritméticos de estrutura aditiva -combinação, separação, comparação - (Vergnaud, 1981), em situações diferenciadas (manipulativa, figurativa, numérica).

As questões postas são as seguintes:

Questão 1: Haverá uma relação entre o tipo de erro e a categoria de problema de estrutura aditiva?

Questão 2: Haverá uma relação entre os níveis psicogenético e escolar da criança e a lógica do erro, independentemente da situação experimental (manipulativa, figurativa, numérica) com a qual é confrontada?

Questão 3: Haverá uma relação entre os níveis psicogenético e escolar, o tipo de grafismo e as representações?

## **3. População e Método Experimental**

Participaram no estudo crianças de uma Escola Pública de Lisboa de um meio sócio-económico médio (do último ano do pré-escolar 15 crianças com idades entre os 5A;5M e os 6A;5M, cuja média de idades é de 5A;9M; do 1º ano de escolaridade 15 crianças com idades entre os 6A;1M e os 7A;3M, cuja média de idades é de 6A;9M; do 2º ano de escolaridade 15 crianças de idades compreendidas entre os 7A;5M e os 8A;4M, cuja média de idades é de 7A;11M.).

---

A metodologia seguida foi a de tipo clínico (análise crítica).

Cada criança participou em 4 sessões experimentais: a primeira para determinar o seu nível psicogenético<sup>1</sup> e as seguintes para resolver os três problemas de aritmética<sup>2</sup>. O intervalo entre as sessões foi de uma semana. A investigação decorreu entre Março e Junho de 2001 e de 2002.

Em cada sessão a criança escolhia aleatoriamente um dos problemas, o qual era lido em voz alta (pelo experimentador ou pelo experimentador e pela criança ou só pela criança). Em seguida a criança era convidada a resolvê-lo, primeiro com a ajuda de material concreto (forma manipulativa), a seguir desenhando (forma figurativa), depois fazendo como na sala - na escola - (forma numérica). Qualquer que fosse a resposta da criança o experimentador pedia a justificação e apresentava a contra-sugestão.

Os números entre parêntesis foram apresentados nos problemas propostos às crianças do 2º ano de escolaridade.

## 4. Análise de Resultados

### 4.1. Níveis de Desenvolvimento Psicogenético

A análise dos protocolos das provas operatórias passadas permitiu a identificação dos níveis psicogenéticos. **Conservação de Quantidades Discretas (QD)**: não conservador (NC), intermediário (Int), conservador (C); **Seriação (S)**: I (pré-operatório), II (intermédio) e III (operatório) e **Quantificação de Inclusão (QInc)**: I (pré-operatório), II (intermédio) e III (operatório). O registo destes indicadores segue a seguinte ordem no referencial horizontal do gráfico: primeiro QD, segundo S e terceiro QInc (no exemplo **C-III-II**: **C** corresponde a conservador nas QD; **III** corresponde a operatório em S; **II** corresponde intermédio na QInc).

---

<sup>1</sup> Conservação de quantidades discretas (Q.D.); Seriação de bastonetes (S); Quantificação de Inclusão de classes (Q.Inc).

<sup>2</sup> **Problema 1: combinação** (conhecidas duas quantidades determinar o valor da sua união): Num autocarro de dois andares estão 4 (16) passageiros em baixo e 5 (7) passageiros em cima. Quantos passageiros há ao todo no autocarro?;

**Problema 2: separação** (conhecido o todo e uma das partes encontrar a complementar desta): Num autocarro de dois andares, há 9 (26) passageiros. No andar de baixo há 3 (8) passageiros. Quantos passageiros há no andar de cima?

**Problema 3: comparação** (conhecidas duas quantidades determinar a diferença entre elas): No andar de cima do autocarro há 6 (16) passageiros. No andar de baixo há 4 (11). Quantos passageiros há a mais no andar de cima?

Os números entre parêntesis foram apresentados nos problemas propostos às crianças do 2º ano de escolaridade.

	Pré- escolar	1º ano	2º ano	
NC - I- I	4		1	5
NC -II- I	1			1
Int- I- I	5	3		8
Int- II- I	1	2	1	4
Int -II- II	1		1	2
Int- III -I	1	1		2
C - I -I		2	1	3
C - II- I	1	5	5	11
C - II- II			1	1
C - III- I	1	1	3	5
C - III- II		1		1
C - III- III			2	2
	15	15	15	45

**Tabela 1:** Níveis de desenvolvimento psicogenético e escolar

Na leitura da Tabela 1 observamos uma certa sobreposição entre os níveis psicogenéticos (o mesmo nível em diferentes grupos) das crianças dos três grupos (pré-escolar, 1º ano e 2º ano de escolaridade). Esta sobreposição é ligeiramente mais acentuada entre as crianças do 1º e 2º anos de escolaridade (53% têm o mesmo perfil psicogenético), do que entre as do pré-escolar e 1º ano de escolaridade (47% têm o mesmo perfil psicogenético).

De salientar que se constata uma progressão de níveis psicogenéticos que estão em correspondência com os anos de escolarização. Assim, na prova da conservação das quantidades discretas no nível conservador encontram-se 13% no pré-escolar, 60% no 1º ano, 80% no 2º ano; na prova de seriação no nível operatório 13% no pré-escolar, 20% no 1º ano, 33% no 2º ano; na prova de quantificação de inclusão no nível operatório 0% no pré-escolar, 0% no 1º ano, 13% no 2º ano.

Os níveis de desenvolvimento psicogenético revelam, assim, que a composição de cada um dos grupos é heterogênea. Cada grupo tem, por um lado, uma percentagem de crianças com um nível igual ao nível superior da classe anterior e, por outro, uma percentagem de crianças com um nível igual ao nível inferior da classe seguinte.

#### ***4.2. Caracterização de Situações na Resolução de Problemas: Combinação, Separação e Comparação***

Esta caracterização integra a análise feita para cada uma das situações experimentais, manipulativa, figurativa e numérica, relativamente aos resultados observados nos problemas propostos.

Faremos em primeiro lugar a análise correspondente à situação de resolução com apoio de material concreto (manipulativa), seguindo-se a análise da resolução com lápis e papel (figurativa e numérica). Na situação

figurativa e numérica a análise dos dados recai apenas num problema (problema 1) dada a similitude de dados revelada nos três problemas.

#### 4.2.1. Situações de resolução com material concreto

A natureza do material utilizado procurou estabelecer uma relação entre o conteúdo real dos problemas (vivencial) e a sua representação (brinquedos - autocarro e passageiros-, “croquis” e cubos), respeitando a aproximação à linha de desenvolvimento do concreto ao representativo e permitindo a oportunidade do uso do jogo simbólico.

Os conteúdos dos quadros que apresentamos integram as tipologias de resultados encontradas: respostas correctas (cor), respostas com erros funcionais (fun), respostas com erros estruturais (est). Todas são referenciadas aos níveis psicogenéticos e aos grupos estudados.

##### 4.2.1.1. Problema 1, combinação: Num autocarro de dois andares estão 4 (16) passageiros em baixo e 5 (7) passageiros em cima. Quantos passageiros há ao todo no autocarro?

A análise da Tabela 2 permite-nos constatar o grande número de respostas correctas (cor), 53% no pré-escolar, 86% no 1º ano (faltou uma criança) e 80% no 2º ano, situando-se em diferentes níveis psicogenéticos. Constata-se um número muito reduzido de erros estruturais (est), 20%, apenas no pré-escolar e em níveis psicogenéticos mais baixos, ainda que próximos. Os erros funcionais são reduzidos, verificando-se em todos os grupos e em diferentes níveis psicogenéticos.

	Correctas			Erro funcional			Erro estrutural			Totais
	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	
NC I I	1		1	1			2			5
NC II I				1						1
Irt I I	3	2		1	1		1			8
Irt II I	1		1		1					3
Irt II II	1					1				2
Irt III I	1	1								2
C I I		2	1							3
C II I		5	4	1		1				11
C II II			1							1
C III I	1	1	2			1				5
C III II		1								1
C III III			2							2
Totais	8	12	12	4	2	3	3	0	0	44

**Tabela 2:** Tipos de respostas segundo os níveis psicogenético e escolar

No pré-escolar os erros funcionais são devidos à incompreensão da linguagem do conteúdo do problema. Com efeito, a expressão verbal “*ao todo*” não foi compreendida. São exemplos as respostas: «*Ao todo?!*» (Jo-5;11); «*O quê?!*» (In-5;5); «*Ao todo o que quer dizer?!*» (Fa-5;10); «*Todos*

*juntos?!»* (Vi -5;10). Após a compreensão da expressão “ao todo” (por diálogo ou informação), a criança resolve o problema correctamente. De referir a concordância destes dados com outros estudos neste campo. (Coquin-Viennot, 2000; Cummins, 1991; Markman & Siebert, 1976).

**4.2.1.2. Problema 2, separação: Num autocarro de dois andares há 9 (26) passageiros. No andar de baixo há 3 (8) passageiros. Quantos passageiros há no andar de cima?**

A leitura da Tabela 3, permite ver o tipo de respostas ao problema, referenciadas aos níveis psicogenético e escolar, e dizer que são poucas as crianças que resolveram correctamente o problema, no 1º ano de escolaridade, 6%, e no 2º ano, 20%. No pré-escolar, 53% das crianças acertaram o problema. Esta elevada percentagem leva à possível interpretação de ter sido devida à estratégia utilizada. As crianças que acertaram começaram a resolução do problema pelos passageiros do andar de baixo, 3, e colocaram os que faltavam para chegar aos 9, por contagem. Esta estratégia não pressupõe a compreensão da inclusão como revela a resposta à contra sugestão, “Um outro menino disse que eram 9 em cima e 3 em baixo, quem tem razão?” “Sou eu” “Como é que lhe explicava” “Dizia para contar...Porque se fossem 9 eram muitos.

A maioria das crianças do 1º e 2º ano regista erros estruturais (est), sendo estes em maior número no 1º ano de escolaridade (93%) do que 2º ano (73%). Apenas uma criança, do 2º ano, regista um erro funcional.

	Correctas			Erro funcional			Erro estrutural			Totais
	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	
NC II	3						1		1	5
NC II I	1									1
Int I I	1						4	3		8
Int II I	1	1						1	1	4
Int II II	1								1	2
Int III I							1	1		2
C I I								2	1	3
C II I	1		1			1		5	3	11
C II II			1							1
C III I	0		1				1	1	2	5
C III II								1		1
C III III									2	2
Totais	8	1	3	0	0	1	7	14	11	45

**Tabela 3:** Tipos de respostas segundo os níveis psicogenético e escolar

A análise do conteúdo das respostas relativamente aos erros estruturais permite inferir a lógica subjacente a cada tipo de procedimento:

- num, a criança compreende « 9 (26) passageiros no autocarro» como sendo uma das partes (os passageiros do andar de cima). São exemplo as respostas: «São 9 passageiros em cima» (Be 6;0 do pré-escolar); «São

9 em cima, ...Já fiz muitas contas na escola com letras e palhinhas...» (An 6;7 do 1º ano de escolaridade); «São 26 em cima.» (Aa 7;3, do 2º ano de escolaridade);

- noutro, a criança compreende os «9 (26) passageiros do autocarro» também como uma das partes (os passageiros do andar de cima), mas dá como resposta a soma das partes. São exemplo as respostas: «São 9...Não tenho a certeza...Eu conto ...Acho que é 12» (Ca 5;10 do pré\_escolar); «9...Ao todo 12...Porque  $9+3$  são 12» (Fa 6;1 do 1º ano de escolaridade); «26 em cima...estava a contar estes e estes ...Estão 34» (Al 7;9 do 2º ano de escolaridade).

Estes tipos de procedimento mostram que a relação de inclusão, neste problema, não foi significativa para a criança, pelo que o erro não foi ultrapassado, ou seja, trata-se de um erro estrutural. Assim, esta resolve o problema de separação (conhecido o todo e uma das partes, encontrar a outra complementar desta) como sendo de combinação (o todo como soma das partes), ou identifica o todo como sendo uma das partes. Estes dados são concordantes com estudos que mostram que os problemas de separação são mais difíceis de resolver pelas crianças do que os de combinação (Giroux, J. & Ste-Marie, A, 2001).

O registo de um maior número de erros estruturais (estr) no 1º e 2º anos de escolaridade levanta, ainda, a questão de eventuais efeitos da aprendizagem tradicional do algoritmo, a qual, ao acentuar mais a memorização dos procedimentos e menos a construção da relação entre os dados e a questão colocada, não estimula a compreensão da solução do problema. Resultados de investigações levam a admitir que a aprendizagem tradicional do algoritmo pode estar na origem de dificuldades ou bloqueios na compreensão da estrutura de problemas aritméticos (Kamii & De Clark, 1985).

O erro funcional (fun) assinalado no 2º ano é ultrapassado com a contra-sugestão.

**4.2.1.3. Problema 3, comparação: No andar de cima do autocarro há 6 (16) passageiros. No andar de baixo há 4 (11). Quantos passageiros há, a mais, no andar de cima?**

Constatamos, pela leitura da Tabela 4, que 47% das crianças do pré-escolar e 40% do 2º ano de escolaridade respondem correctamente (cor) ao problema, enquanto que, apenas, 20% das do 1º ano de escolaridade o faz.

	Correctas			Erro funcional			Erro estrutural			Totais
	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	
NC I I	1						3		1	5
NC II I	1									1
Int I I	2						3	3		8
Int II I	1							2	1	4
Int II II	1								1	2
Int III I							1	1		2
C I I			1					2		3
C II I		2	2		1		1	2	3	11
C II II			1							1
C III I	1		1		1				2	5
C III II		1								1
C III III			1			1				2
Totais	7	3	6	0	2	1	8	10	8	45

**Tabela 4:** Tipos de respostas segundo os níveis psicogenético e escolar

Nos erros estruturais (est) registados nos três grupos, mais acentuados (67%) no 1º ano de escolaridade, a lógica subjacente em cada tipo de procedimento parece ser a seguinte:

- num, registado em todos os grupos, é dado o mesmo significado à expressão «**a mais**» e à expressão «mais (tem mais)». São exemplo: «*São mais em cima e poucos em baixo...este tem 6 e este tem 4*» (Ca 5;10 do pré-escolar); «*6...Estão a mais!*» (Jo 6;9 do 1ºano de escolaridade); «*16 porque são mais que 11*» (Al 7;9 do 2º ano de escolaridade);

- noutro, registado no 1º e 2º ano de escolaridade, é dado o mesmo sentido à expressão «a mais» e à expressão «mais (é de “+”)». São exemplos: «*10...Conta (pelos dedos), 4 em baixo e 6 em cima*» ( Fi 6;9 do 1º ano de escolaridade); «*Eu acho que é de mais porque os números são pequenos...são 27*» (Al 7;9 do 2º ano de escolaridade).

Estes dados podem permitir inferir que nos dois tipos de procedimentos não foi entendido o sentido da questão que o problema contém, quantificação da diferença, pois enquanto no primeiro foi entendido como a quantificação da parte maior, no segundo foi entendido como a quantificação do todo.

Os resultados são convergentes com a literatura neste domínio, confirmando que os problemas de separação e comparação são mais difíceis de resolver do que o de combinação (Carpenter, Hiebert & Moser, 1981; De Corte & Verschaffel, 1987,1989Wolters, 1983).

Parece, no entanto, oportuno reflectir sobre o facto de se registarem mais erros no grupo do 1º ano do que nos grupos do pré-escolar e do 2º ano de escolaridade. Uma das interpretações remete-nos para a questão da aprendizagem tradicional do algoritmo, já analisada no problema anterior; outra para a estratégia utilizada, pelas crianças do pré-escolar, de correspondência termo a termo, favorecida pela reduzida quantidade numérica; uma terceira interpretação, mais focalizada nas crianças do 2º ano, prende-se com o facto de que o maior domínio do algoritmo pode libertar o pensamento para a relação entre os dados e a questão posta. De sublinhar, ainda, que esta situação se regista nos níveis psicogenéticos mais



avanzados, o que pode constituir uma quarta interpretação. De salientar, ainda, que nalguns casos de respostas correctas, nos grupos do 1º e 2º anos, estas surgem mesmo antes da manipulação de material e que a justificação reflecte que a criança compreendeu a estrutura do problema.

São raros (1º e 2º ano) os erros funcionais (fun) facilmente ultrapassáveis pela contra-sugestão. Como reflexão geral, resultante da análise acabada de fazer relativamente aos problemas de separação e comparação, recordamos o registo de não construção da noção de inclusão de classes na maioria das crianças desta população, como se constatou na análise dos níveis psicogenéticos. De sublinhar a concordância destes dados com outros estudos neste campo. (Riley, Greeno e Heller, 1983; Vergnaud, 1981).

#### *4.2.2 Situações de Resolução com Lápis e Papel*

A análise das situações com lápis e papel situa-se no contexto das representações figurativas e numéricas na perspectiva de identificar a forma como a criança traz ao presente experiências da realidade contextualizada, isto é, representa graficamente e conceptualiza essas situações. (Piaget, 1976, 1978). De salientar o interesse em perceber como se conjugam forma e conteúdo da representação, como processo dinâmico completado pela verbalização, na expressão da lógica subjacente às resoluções do problema.

De acordo com o que já foi anteriormente referido serão analisados apenas os dados relativos ao Problema 1, combinação, dada a similitude destes nos três problemas (1, combinação; 2, separação; 3, comparação).

##### *4.2.2.1 Representação Figurativa*

A Tabela 5 regista os diferentes tipos de grafismo usados pelas crianças, os quais traduzem formas diferenciadas de representação da realidade. Utilizou-se na caracterização da tipologia a classificação: **pictográfico** (pic) - representação próxima do real com autocarro, figura humana detalhada em pormenores e contexto -; **iconográfico** (ico) - representação mais afastada da realidade com figuras geométricos, traços, bolas -; **simbólico** (sim) - utilização da simbologia matemática com algarismos, sinais -, + -; **misto** (m): combinação entre os tipos anteriores-. (Hughes, 1986).

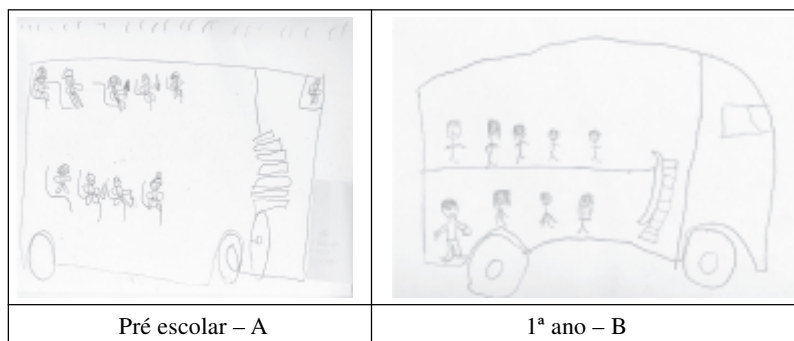
	Tipo pictográfico			Tipo iconico			Tipo misto			
	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano	
NC II I	3		1	1						5
NC II I	1									1
Int II I	3	2		2	1					8
Int II I		1		1	1	1				4
Int II II				1		1				2
Int III I	1				1					2
C II		1				1		1		3
C II I	1	5				4			1	11
C II II									1	1
C III I	1	1				1			2	5
C III II					1					1
C III III						2				2
Totais	10	10	1	5	4	10	0	1	4	

**Tabela 5:** Tipo de grafismos segundo os níveis psicogenético e escolar

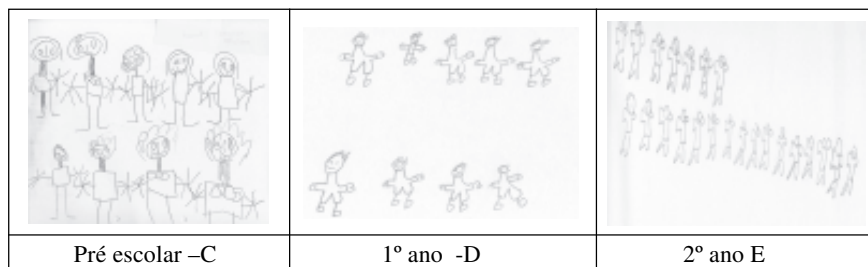
Os dados registados nesta Tabela 5 englobam as representações de respostas correctas ou erradas.

Constata-se, pela leitura desta tabela, que o tipo pictográfico (pic) é o mais utilizado pelas crianças dos grupos pré-escolar (67%) e 1º ano de escolaridade (67%). Apenas uma criança do 2º ano de escolaridade o utiliza.

Apresentam-se a seguir, nos Quadros 1 e 2, exemplos deste tipo de representação.



**Quadro 1:** Tipo pictográfico com dois elementos do problema, passageiros e autocarro.



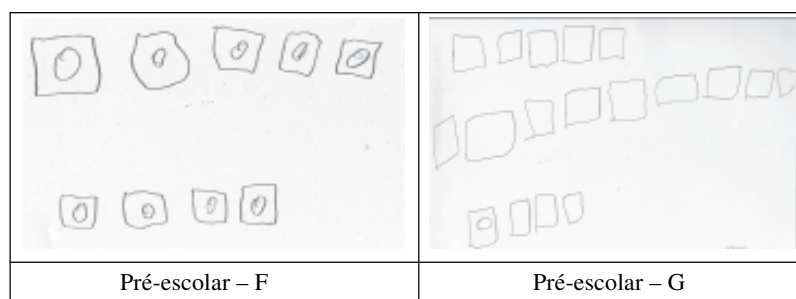
**Quadro 2:** Tipo pictográfico centrado num dos elementos do problema, passageiros.

A comparação dos Quadros 1 e 2 permite sublinhar que no Quadro 2 as representações pictográficas se centram apenas na realidade «passageiros», enquanto que as representações pictográficas do quadro 1 englobam, «autocarro» e «passageiros».

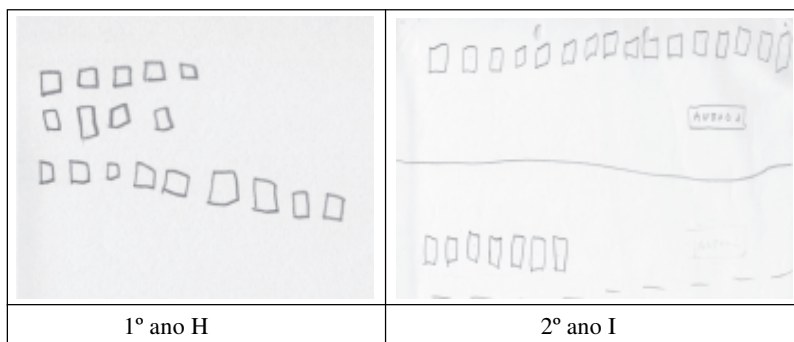
Esta diferença pode reflectir: que algumas crianças do pré-escolar e do 1º ano ainda precisam de representar mais elementos e características da experiência real (passageiros, forma de vestir, sexo diferente, escada do autocarro, condutor), como se vê nos exemplos do Quadro 1 (A e B), enquanto que outras crianças do pré-escolar, do 1º ano e do 2º ano de escolaridade já não precisam de representar tantos elementos, centrando-se nos dados do problema (apenas passageiros). O Quadro 2 (C, D, E) contém alguns desses exemplos. De referir a linha de desenvolvimento progressivo do conteúdo destas representações (na direcção da selecção dos dados essenciais do problema) que acompanha a dos níveis psicogenético e escolar .

Continuando a leitura da Tabela 5 verificamos que a forma iconográfica se observa no pré-escolar (33%) e no 1º ano (27%), mas é preferencialmente utilizada pelas crianças do 2º ano (67%).

Nos exemplos deste tipo de grafismo verifica-se uma aproximação às características do material utilizado (cubos de enfiamento), a qual é mais observada no grupo do pré-escolar do que nos grupos do 1º e 2º anos de escolaridade. A diferença que se observa nos exemplos do Quadro 3, (pré-escolar) e do Quadro 4 (1º e 2º anos de escolaridade) revela um processo de distanciamento da realidade figurada que se regista nos sujeitos com nível mais elevado, quer de escolaridade, quer de desenvolvimento psicogenético.

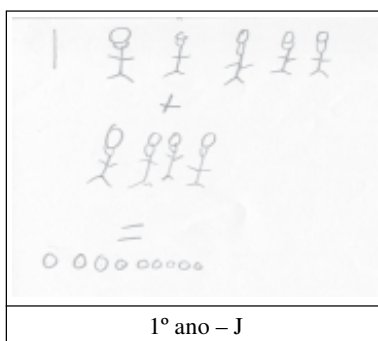


**Quadro 3:** Representação iconográfica com mais elementos do material utilizado (quadrado como a face do cubo e o círculo como o buraco do enfiamento).

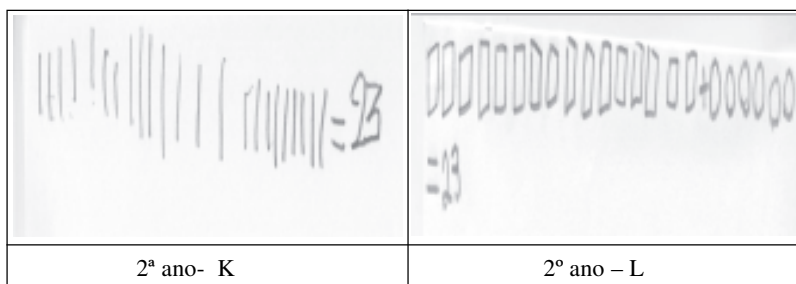


**Quadro 4:** Representação iconográfica com apenas o quadrado (face do cubo utilizado).

De assinalar que o registo do tipo de representação mista, Quadros 5, 6,7, se observa em poucas crianças, isto é, no 1ºano em 7% e no 2º ano em 27% .



**Quadro 5:** Representação mista (pictográfica, icónica e simbólica)



**Quadro 6:** Representação mista (iconográfica e simbólica)

2º ano – M	2º ano –N

**Quadro7:** Representação mista (iconográfica e simbólico) “conta deitada “ e “ conta de pé”.

Os exemplos que os Quadros 5, 6, 7 registam permitem observar a utilização conjunta dos dois tipos de representação, iconográfica e simbólica. Esta forma mista revela a construção de significantes com progressivo distanciamento da realidade concreta, situando-se em níveis psicogenético e escolar mais avançados.

Reportando-nos à relação entre os dados acabados de analisar e procedimentos de resolução seguidos podemos observar:

a) a representação figurativa dos dados (Quadros 1, 2, 3F, 4I) com verbalização oral do processo e da resposta, em especial, no pré-escolar. Exemplo (Quadro 3F), «São dois, mais dois, são quatro, são dois mais dois, mais um. São nove.» (Au,5;10, do Pré-escolar).

b) a representação figurativa dos dados e da resposta (Quadros 2, 3G, 4H e 6K) e verbalização oral do procedimento. Exemplo (Quadro 4H), «Eram quatro. Eram cinco. São nove.» (Re, 6;8 do 1º ano de escolaridade).

c) a representação figurativa dos dados, do procedimento e da resposta (Quadro 5, 6L, 7), podendo ser concomitante a verbalização oral. Exemplo (Quadro 7N), «Estes são os do andar de cima. Estes os do andar de baixo. Têm que ser todos» (Van, 8;2, 2º ano de escolaridade).

Esta conceptualização cada vez mais complexa e elaborada está em relação directa com a progressão dos níveis escolar e psicogenético dos grupos.

De sublinhar que os protocolos revelam que a lógica subjacente à solução encontrada é a mesma, quer quando da utilização de material concreto, quer quando da representação figurativa, o que mostra o dinamismo cognitivo e a coerência do processo de resolução. A forma como a criança constrói a representação externa está de acordo com a organização interna da informação (Hiebert e Carpenter, 1992; Goldin e Shteingold, 2001).

### 4.2.2.1 Representação Numérica

Esta análise reporta-se à terceira situação experimental, «como faz na sala». De referir que algumas crianças, do pré-escolar, não percebiam o que queria dizer “como faz na sala” e mesmo com a sugestão de que talvez na sala utilizassem números diziam não saber fazer.

Na Tabela 6 estão registadas as formas como a criança representa o «como faz na sala». Esses dados reportam-se à representação numérica e não ao acerto, ou não, do problema.

Na representação numérica observada constatam-se três tipos de registos: um deles recorrendo apenas a algarismos referentes aos dados do problema e verbalizando o resultado, outro recorrendo aos algarismos referentes aos dados do problema e da solução e verbalizando o processo; um terceiro representando os dados do problema, a solução e o processo através de conta deitada e/ou de pé.

Há crianças do 1º ano (40%) e do 2º ano (60%) que representam em simultâneo a indicação do cálculo (conta deitada) e o cálculo por algoritmo (conta de pé).

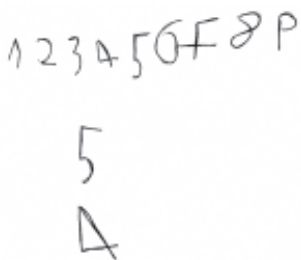
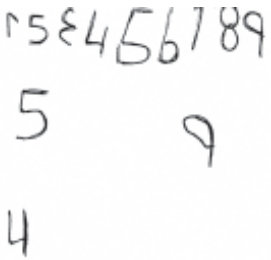
	Não faz			Num			Conta deitada			Conta de pé			Totais	
	p	1	2	Algarismos			Pré	1ºano	2ºano	Pré	1ºano	2ºano		
				Pré	1ºano	2ºano								
NC I I	2			2							1		1	5
NC II I	1													1
Int I I	2			3				1				1		7
Int II I			1	1	1			1						4
Int II II	1			1						1*			1*	4
Int III I								1						1
C I I								2*	1*		2*	1*		6
C II I				1				4*	3*		4	3*		15
C II II									1				1	2
C III I	1							1			2*	2		7
C III II								1						1
C III III													1*	2
<b>Totais</b>	<b>7</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>11</b>	<b>7</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>12</b>		

\* faz mas erra o processo


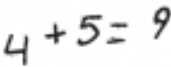
**Tabela 6:** Representação numérica segundo os níveis psicogenéticos e escolares.

A leitura dos dados registados na Tabela 6 permite constatar que 47% das crianças do pré-escolar não sabe fazer de “outra maneira” (utilização do algoritmo) o problema e que as restantes recorrem à utilização de algarismos. O recurso à indicação do cálculo, “conta deitada”, é mais frequente no 1º ano (73%), enquanto no 2º é mais frequente a “conta de pé”, algoritmo, (80%). Em alguns casos são utilizadas as duas formas “conta deitada” e “conta de pé”. Esta evolução está de acordo com a sequência dos anos de escolaridade.

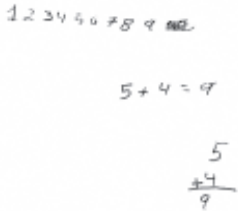
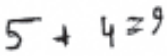
Apresentam-se alguns exemplos (nos Quadros 8, 9, 10, 11, 12) que nos permitem seguir como a criança foi progressivamente passando da conceptualização de contagem seguida, na junção das duas parcelas ( os passageiros de cima e os passageiros de baixo), para uma representação algorítmica. Algarismos e sinais começam a fazer parte das representações internas e externas na construção de conceitos. A análise das representações construídas pelas crianças reflectem o desenvolvimento progressivo da passagem das acções motoras às representações simbólicas convencionais (Mason, 1987; Glasersfeld, 1987).

	
Pré-escolar – O	Pré – escolar – P

**Quadro 8:** Representação simbólica convencional (algarismos)

	
Pré-escolar – Q	1º Ano – R

**Quadro 9:** Representação simbólica convencional (algarismos e sinais)

	
1º Ano – S	1º Ano – T

**Quadro 10:** Representação simbólica convencional (sinais e algarismos)

$16 + 7 = 23$ $\begin{array}{r} 16 \\ + 7 \\ \hline 23 \end{array}$	$16 + 7 = 23$ $\begin{array}{r} D V \\ 16 \\ + 7 \\ \hline 23 \\ D C \end{array}$
2º Ano – U	2º ano – V

**Quadro 11:** Representação simbólica convencional («conta deitada» e «conta de pé»)

$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & & & & & & & & \\ & & & & & 16 & & & & & \\ & & & & & + 7 & & & & & \\ & & & & & \hline & & & & & 23 & & & & & \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ + 7 \\ \hline 23 \end{array}$
2º ano – X	2º ano – Z

**Quadro 12:** Representação simbólica convencional («conta de pé»)

No que diz respeito aos procedimentos nesta forma de representação verificam-se as seguintes modalidades:

a) a representação numérica dos dados (Quadros 8O) e verbalização do resultado, com incidência no pré-escolar. Exemplo, «quatro» «cinco» «um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove» (MaO, 5;7, pré-escolar);

b) a representação numérica dos dados e solução do problema (Quadros 8P; 9Q) com verbalização do procedimento. Exemplo, (Quadro 8P) «Podemos fazer em números os do andar de cima e os de baixo» «Aqui são todos» «cinco» «quatro» «Nove, podemos pôr aqui» ...«há uma maneira de fazer para dizer que juntou?» « Não» (MaL, 6;4, pré-escolar);

c) a representação numérica dos dados, solução do problema e processo, «conta deitada» e/ou «conta de pé» (Quadros 9R, 10, 11, 12) com eventual verbalização. Exemplos, (Quadro 9R) «cinco mais quatro dá nove» (Fi, 6;9,1º ano). ; (quadro 11,U) «6+7 ...13» « 1+1=2. Porque o algarismo 1 faz parte da casa das dezenas» (Da, 2º ano); (Quadro 12 Z) «seis, sete ...treze. Para aqui. Sete mais um são oito» «Não dá a mesma coisa do que quando fez com as bolinhas. Onde acha que está certo?» «No outro» (Pa, 8;1, 2º ano).



De sublinhar o interesse desta última situação, em que a criança não domina a técnica do algoritmo, mas mantém a representação correcta da forma de solução anterior. Prosseguir na análise neste aspecto revela-se um tema passível de continuidade de estudo.

A caracterização feita dos procedimentos permite dizer que, especialmente no grupo das crianças do pré-escolar, os registos são completados por verbalizações, enquanto que nas crianças do 1º e 2º anos de escolaridade a verbalização é usada como leitura do registo feito e não como complemento de informação.

A análise global distingue o grupo do pré-escolar dos do 1º e 2º anos de escolaridade. O primeiro utiliza a representação numérica dos dados do problema e o resultado, os outros utilizam a representação numérica dos dados, os indicadores simbólicos da transformação e o resultado. A sequência destas diferentes representações segue a linha sequencial dos níveis de desenvolvimento e escolaridade.

## 5. Conclusões

A análise dos dados acabada de fazer permite responder afirmativamente às três questões formuladas:

1- Os erros de tipo estrutural são mais frequentes, em todos os grupos, no problema de separação e no problema de comparação. Uma das explicações avançadas passa pela incompreensão da noção lógico-matemática de inclusão de classes nos grupos que fizeram parte deste estudo. O maior número de erros nas crianças do 1º ano de escolaridade leva a admitir que seja resultante da introdução precoce da aprendizagem do algoritmo tradicional. Os erros tipo funcional são mais frequentes no problema de combinação no grupo do pré-escolar e na sua maioria devidos a incompreensão linguística.

2- Na lógica do erro a criança revela que não mobilizou a estrutura de inclusão, o que está de acordo com o nível psicogenético em que se situa, independentemente do grupo estudado e da situação experimental (manipulativa, figurativa, numérica). O raciocínio lógico subjacente ao procedimento de solução mantém-se o mesmo em qualquer das situações.

3- O tipo de grafismo utilizado pela criança diferencia-se (pictográfico, iconográfico, simbólico), na maioria dos casos, segundo a linha progressiva de desenvolvimento psicogenético e escolar.

De salientar, nesta mesma direcção, que no pré-escolar é característica dos procedimentos serem completados por verbalizações orais, enquanto que no 1º e 2º anos estas surgem apenas, pontualmente, como leitura da representação figurativa que também é mais completa.

- A representação numérica da resolução do problema, nas crianças do pré-escolar, reduz-se à escrita dos dados com algarismos, ou da solução e dos dados do problema. No 1º ano surge a representação dos dados, da solução e dos indicadores de transformação (conta deitada). No 2º ano, verifica-se de forma maioritária a representação da indicação do cálculo, “conta deitada”, e do algoritmo, “conta de pé”, com o domínio, ou não, do processo. Esta representação diferenciada acompanha a sequência dos anos de escolaridade.

De assinalar que entre os níveis de desenvolvimento psicogenético e escolar se observa uma sincrónica progressão. De salientar, contudo, que a análise dos níveis psicogenéticos das crianças dos três grupos estudados chama a atenção para a heterogeneidade de cada grupo, evidenciando a sobreposição de níveis em cada um. Assim, é de sublinhar a diferença e a continuidade inter e intra-grupos.

## **6. Recomendações**

Esta investigação evidenciou as dificuldades encontradas pelas crianças na resolução de certos problemas de aritmética de estrutura aditiva e mostrou que os erros cometidos são de tipo diferente, estrutural ou funcional, reclamando intervenções pedagógicas diversificadas.

O conhecimento da lógica do erro, por parte do docente, e a sua tomada de consciência, por parte da criança, constitui um elemento fundamental para promover uma aprendizagem significativa.

A análise dos níveis psicogenéticos nas crianças dos três grupos estudados chama a atenção para a heterogeneidade intra e inter-grupos, evidenciando a coexistência de diferentes níveis em cada um, o que deve ser tido em conta na diferenciação das estratégias de aprendizagem.

A conjugação de diferentes experiências de resolução, manipulativa, figurativa, numérica, e a valorização da concomitante expressão verbal do pensamento que acompanha a acção possibilitam identificar tipos e formas de representação diferenciada e compreender os fundamentos das respostas erradas, a lógica do erro. Esta compreensão permite criar intervenções pedagógicas diversificadas alterando, assim, o estatuto do erro, isto é, fazendo deste um instrumento de aprendizagem e desenvolvimento.

---

O uso de contra-sugestão, no diálogo co-construído ou de outros tipos de intervenção que possam provocar, na situação de resposta errada, conflitos cognitivos e/ou sócio-cognitivos, deve ser considerado elemento promotor de desenvolvimento e de aprendizagem.

*«Do ponto de vista da invenção, um erro corrigido pode ser mais fecundo que uma resolução imediata, porque a comparação da hipótese falsa e das suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre os erros dá novas ideias»*

Piaget citado por Inhelder & Cellérier, 1992, p.43.

### **Referência Bibliográfica**

Carpenter, T.; Hiebert, J. & Moser, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.

Coquoin-Viennot, D. (2000). Lecture d'énoncés de problèmes arithmétiques : effet d'une introduction thématique sur la construction de la représentation. *Archives de Psychologie*, 68, 41-58.

Cummins, D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, 8, 261-289.

De Corte, E. & Verschaffel, F. (1987). The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 563-581.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1989). Teaching word problems in the primary school: what research has to say to the teacher. In B. Greer & G. Mullern (Eds.), *New directions in mathematics education*. London: Routledge.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. & Briars, D. (1990). Base-ten blocks as a first and second grade learning teaching setting for multidigit addition and subtraction and place-value concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 180-206.

---

Giroux, J. & Ste-Marie, A. (2001). The solution of compare problems among first-grade students. *European Journal of Psychology of Education*, 16, 141-161.

Glaserfeld, E. (1987) Learning as a Constructive Activity. In C. Janvier (Ed). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics p 1-17*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001) Systems of Representations and the Development of Mathematics Concepts . In A. A. Cuoco e FR Curcio(eds) *Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook p1-23 Virginia: Ntional Council of Teachers of Mathematics*.

Greeno, JG (1991) Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in Mathematics Education*, 22(3), p170-218.

Hilbert, J. & Carpenter, T.P. (1992) Learning as and Teaching with understanding. In DA Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning p 65-97* , New York:Mavmillan.

Hughes, M. (1986). Children and Number:difficulties in Learning Mathematics. Basil Blackwell Ltd Oxford. UK.

Inhelder, B.; Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de le connaissance*. Paris: P.U.F.

Kamii, C. & De Clark, G. (1985). *Young children reinvent arithmetic*. New York: Columbia University Press.

Lean, G. (1990). Linguist and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: a comparative study. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 165-191.

Leplat, J. & Pailhours, J. (1974). Quelques remarques sur l'origine des erreurs. *Bulletin de Psychologie*, 312, 729-735.

Masonm, J. (1987). Representing Representing : Notes Following the Conference. In C. Janvier (Ed). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics p 207-214*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

---

Meissner, H. (1986). Cognitive conflicts in mathematics learning. *European Journal of Psychology of Education*, 1, 7-15.

Piaget, J. (1973). Remarques sur l'éducation mathématique. *Math École*, 58, 1-7.

Piaget, J. (1974). *Reussir et comprendre*. Paris: P.U.F.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement*. Paris: P.U.F.

Riley, M.; Greeno, J. & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Sala, E. (1989). *Cuestiones y retos de la psicología*. Barcelona: Editorial Laia.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.

Vinh-Bang (1990). L'intervention psychopédagogique. *Archives de Psychologie*, 58, 123-135.

**Resumo:** O Objectivo deste estudo é analisar o tipo de erro, estrutural ou funcional, observado em crianças dos 5 aos 8 anos, durante a resolução de três tipos de problemas aritméticos de estrutura aditiva – combinação, separação e comparação – em situações diferenciadas (manipulativa, figurativa, numérica).

A amostra do estudo é constituída por 45 crianças (15 do último ano do pré-escolar, 15 do 1º ano de escolaridade e 15 do 2º ano) de uma escola pública de Lisboa, de meio sócio-económico médio.

A metodologia seguida foi a de tipo clínico ( análise crítica). Cada criança participou em quatro sessões experimentais (uma por semana), sendo a primeira para determinar o nível psicogenético e as seguintes para resolver os três problemas de aritmética.

Os resultados mostram a relação entre o tipo de erro e a estrutura e a categoria do problema; entre os níveis psicogenético e escolar e o tipo de erro observado, independentemente da situação experimental (manipulativa, figurativa, numérica); entre os níveis psicogenético e escolares e o tipo de grafismo e as representações. Mostrou ainda a lógica do erro seguida por cada criança, a qual se mantém em qualquer das situações experimentais.

**Abstract:** In this study we investigated the kind of errors students make, structured or functional, observed on students from 5 to 8 years old, when they solved arithmetic problems with additive structure - combined, separated and compared- in different situations (hands on, figurative and numeric)

The study sample has 45 children (15 from kindergarten, 15 from 1<sup>st</sup> year in primary, and 15 from the 2<sup>nd</sup> year) from a public school in Lisbon, the social environment is average.

The methodology used was a clinic interview. Each student had four experimental sessions (one on each week), the first one was to determine the psychogenetic level and the others to solve three arithmetic problems. The study results showed us that there is a relationship between the kind of mistake students do and the kind of problem; a relationship between students psychogenetic levels, school level and the kind of mistake found but it was not related with the experimental situation (hands on , figurative, and numeric); a relationship between the psychogenetic levels, school level and the kind of drawing they do about the problems and theirs representations.

It also showed the logic of the mistake followed by each child, which was consistent all over the way.

**Résumé:** Le but de cette recherche est d'étudier les erreurs, structurales et fonctionnelles, observées chez des enfants de 5 à 8 ans, pendant la résolution de trois catégories de problèmes de structure additive (combinaison, séparation, comparaison) dans différentes situations (manipulative, figurative, numérique).

La population (15 enfants de dernière année du préscolaire, âge moyen=5A;9M, 15 enfants de première année, âge moyen=6A ;9M, 15 enfants de deuxième année, âge moyen 7A ;11M) est issue d'un milieu socio-économique moyen.

La méthodologie suivie a été de type clinique. Chaque enfant a été individuellement soumis à quatre séances expérimentales : la première pour déterminer son niveau psychogénétique et les trois autres pour résoudre les trois problèmes d'arithmétique. L'intervalle entre les séances a été d'une semaine.

Les résultats ont fait ressortir des relations : entre le type d'erreur et la catégorie du problème ; entre les niveaux psychogénétiques et scolaires et le type d'erreur, ceci indépendamment de la situation expérimentale; entre ces niveaux et les différents types de graphiques et représentations.

Les résultats nous permettent d'attirer l'attention sur la valeur de la compréhension de la logique de l'erreur et sur le besoin d'être attentif à l'hétérogénéité des niveaux psychogénétiques dans chacune des classes.

Les recommandations vont dans le sens de tenir compte des conclusions des résultats pour faire de l'erreur un instrument de l'apprentissage et de développement.

---

**Da  
Investigação  
às Práticas**

Estudos de  
Natureza  
Educativa

---

152

---



---

## CONDIÇÕES DE COLABORAÇÃO

---

As propostas de colaboração (artigos, resenhas, etc) devem ser enviadas em versão impressa (duplicado) e em suporte informático (Word) por correio ou por e-mail para os endereços abaixo indicados.

**Avaliação.** Todos os textos submetidos para publicação serão analisados por dois especialistas da área em que se inscrevem.

**Dimensões.** Os textos devem ter como limite máximo 25 páginas, em formato A4, numeradas sequencialmente. A primeira página destina-se a indicar exclusivamente: título do artigo, nome(s) do(s) autor(es) e instituição(ões) a que pertence(m), assim como endereços postais e contactos.

**Configurações do texto.** Texto justificado, letra **Times New Roman** 11 pt. e espaçamento 1,5 entre linhas.

**Quadros e figuras.** Devem ser apresentados em separado, no final do texto, com numeração e título, devendo o autor indicar a sua localização aproximada no texto, por exemplo: "Inserir o Quadro 1 aproximadamente aqui". Devem ainda, sempre que possível, ser apresentados a preto e branco, visto tratar-se de uma revista de conteúdo monocromático.

**Resumos.** A acompanhar os textos devem ser enviados resumos em português, em inglês (Abstract) e em francês (Résumé). Os resumos não devem exceder as 150 palavras (ou 10 linhas). Junto dos resumos devem ainda ser indicadas palavras-chave nas respectivas línguas.

**Notas de rodapé.** Devem ser numeradas sequencialmente e inseridas na página a que dizem respeito.

**Referências ao longo do texto.** Devem ser citadas no texto (e não em rodapé), com indicação do nome do(s) autor(es), seguido(s) do ano de publicação (entre parêntesis) e página(s) se for caso disso. No caso de se tratar de dois autores, ambos os nomes devem ser referidos. Se mais de um artigo do mesmo autor e do mesmo ano for citado, as letras *a*, *b*, *c*, etc. devem seguir-se ao ano.

**Lista final de referências.** As referências bibliográficas devem ser ordenadas alfabeticamente no final do texto de acordo com as normas de publicação da American Psychological Association (Publication Manual, 5ª edição, 2001). Veja-se os seguintes exemplos:

**a) Livro**

Nóvoa, A. (1991). *Profissão professor*. Porto: Porto Editora.

**b) Artigo em revista**

Amaral, V. (2002). Teorias implícitas acerca da inteligência: Aspectos desenvolvimentistas e de género. *Psicologia*, 16, 237 – 256.

**c) Capítulo de livro**

Brophy, J., & Good, T. (1986). Teacher behaviour and students achievement. In C. Witrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 328 – 373). New York: Macmillan.

**d) Tese**

Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

**e) Comunicação apresentada em congresso**

Amaral, H. (2003, Novembro). *Actividades de investigação e aprendizagem da matemática*. Comunicação apresentada no XIV SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática, Santarém.

**f) Documento electrónico**

American Psychological Association (1992). *Ethical principles of psychologists and code of condute*. Consultado em 17 de Abril de 2002 através de <http://www.apa.org/ethics/code.html>

**Obs.:** Os textos publicados são da exclusiva responsabilidade dos respectivos autores. Os originais não publicados não serão devolvidos, a não ser que tal seja expressamente solicitado. Os textos aceites poderão não ser publicados na edição imediata à sua entrega. Os autores receberão gratuitamente 2 exemplares da publicação em que o seu artigo seja inserido.

