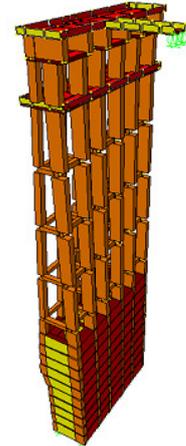




ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Civil



Desenvolvimento de modelos para análise dinâmica de estruturas. Aplicação a barragens de betão e estruturas auxiliares

MARGARIDA ISABEL RAMALHO ESPADA
(Licenciada em Engenharia Civil)

Trabalho Final de Mestrado elaborado no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil pelo Instituto Superior de Engenharia de Lisboa no âmbito do protocolo de cooperação entre o ISEL e o LNEC

(Documento Definitivo)

Orientadores:

Doutor Sérgio Bruno Martins de Oliveira
Mestre Paulo Jorge Henriques Mendes

Júri:

Presidente: Mestre Cristina Ferreira Xavier de Brito Machado
Vogais:

Inv. Coordenador João Carlos Chaves de Almeida Fernandes
Doutor Sérgio Bruno Martins de Oliveira
Mestre Paulo Jorge Henriques Mendes

Janeiro de 2010

DESENVOLVIMENTO DE MODELOS PARA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS. APLICAÇÃO A BARRAGENS DE BETÃO E ESTRUTURAS AUXILIARES

Resumo

Com este trabalho mostra-se a importância da utilização integrada de modelos numéricos e de resultados da observação do comportamento dinâmico com vista ao controlo de segurança de grandes estruturas, particularizando para o caso da barragem do Cabril e da respectiva torre das tomadas de água.

Descrevem-se os fundamentos da dinâmica de estruturas sob a perspectiva da realização de estudos no domínio do tempo e no domínio da frequência, e referem-se os princípios em que se baseiam as metodologias de identificação modal, utilizadas na interpretação e análise de resultados de ensaios de vibração ambiental.

Apresentam-se os fundamentos do método dos elementos finitos na perspectiva da sua implementação computacional para análise dinâmica de estruturas, e apresenta-se sumariamente o programa MEFDIN3D, desenvolvido em MATLAB no âmbito deste trabalho, o qual permite a análise estática e dinâmica de estruturas utilizando elementos finitos de placa e tridimensionais.

Analisa-se os parâmetros dinâmicos da torre, em termos de frequências naturais e configurações modais, utilizando modelos numéricos 2D (MEFDIN3D e SAP 2000) e um modelo 3D em SAP 2000. Os resultados destes modelos numéricos são comparados com resultados experimentais obtidos a partir de: i) ensaios de vibração ambiental com medição de acelerações no topo da torre e no corpo da barragem e; ii) de um sistema de observação em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril, recentemente instalado em obra pelo LNEC.

Após a calibração dos modelos numéricos, apresenta-se um estudo de previsão do comportamento dinâmico da torre sob acções sísmicas, efectuando a análise no domínio do tempo e por espectro de resposta. Por fim, apresentam-se resultados de um cálculo sísmico 3D da barragem do Cabril com o MEFDIN3D.

MODELS DEVELOPMENT FOR STRUCTURAL DYNAMIC ANALYSIS. CONCRETE DAMS AND AUXILIARY STRUCTURES

Abstract

In this work it is shown the importance of the integrated use of numerical models and observation results of the dynamic behaviour to control the safety of large structures, specifying for the case of Cabril dam and its intake tower.

The bases of structural dynamics are described under the perspective of time and frequency domain studies, as well as the methodologies of modal identification, used in the interpretation and analysis of ambient vibration tests are presented.

The bases of the finite element method in the perspective of its computational implementation for structural dynamic analysis are presented. It was also presented a MATLAB computer program (MEFDIN3D), developed in the context of this work, which allows the structural analysis of 2D and 3D structures, under static and dynamic loads, using the finite element approach.

The dynamic parameters of the intake tower are analyzed, in terms of natural frequencies and mode shapes, using two plane models (MEFDIN3D and SAP 2000) and a 3D model in SAP 2000. The results of these numerical models are compared with experimental results from: i) ambient vibration tests with acceleration measurements at the top of the intake tower and in the dam body and; ii) a dynamic continuous monitoring system, recently installed by LNEC on the Cabril dam.

After the numerical models calibration, it is presented a study to predict the dynamic behaviour of the intake tower under seismic actions, making the analysis in the time domain and with the response spectrum method. Finally, a 3D seismic analysis of the Cabril dam is presented using the MEFDIN3D program.

Palavras – Chave / Keywords

Barragens de betão / Concrete dams;

Estruturas auxiliares / Auxiliary structures;

Controlo de segurança / Safety control;

Comportamento dinâmico / Dynamic behaviour;

Frequências naturais / Natural frequencies;

Configurações modais / Mode shapes;

Modelos numéricos de elementos finitos / Numerical finite element models;

Ensaio de vibração ambiental / Ambient vibration tests;

Análise sísmica / Seismic analysis;

Espectros de resposta / Response spectra.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Engenheiro Sérgio Oliveira todo o apoio, dedicação, disponibilidade e ensinamentos transmitidos que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Gostaria igualmente de agradecer ao Engenheiro Paulo Mendes a disponibilidade que sempre demonstrou, os auxílios constantes e sugestões importantes que contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço ao LNEC a possibilidade que me concedeu de realizar este trabalho no Departamento de Barragens de Betão (Núcleo de Modelação Matemática e Física). À EDP agradeço o apoio para a realização do ensaio de vibração ambiental na torre das tomadas de água da barragem do Cabril. Agradeço ainda à Kinematics e à sua representante em Portugal, a Quantific, a possibilidade de ter usado, para teste, o seu novo equipamento de aquisição (Modelo Basalt).

Por fim, agradeço aos meus pais, às minhas irmãs Rita e Maria e ao Arlindo por todo o apoio, força e incentivo.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais	1
1.2 Objectivos da Dissertação	4
1.3 Estruturação do trabalho.....	7

Capítulo 2

Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão e estruturas auxiliares

2.1 Considerações iniciais.....	9
2.2 Classificação de barragens.....	10
2.2.1 Barragens de Betão.....	10
2.2.2 Barragens de Alvenaria	13
2.2.3 Barragens de Materiais soltos.....	13
2.3 Órgãos de segurança e exploração	14
2.3.1 Descarregadores de cheias.....	14
2.3.2 Descargas de fundo.....	15
2.3.3 Tomadas de água	15
2.4 Observação e controlo de segurança de barragens de betão e respectivas estruturas auxiliares	18
2.4.1 Segurança estrutural, ambiental, hidráulica e operacional	18
2.4.2 Controlo de segurança	18
2.5 Considerações finais	30

Capítulo 3

Conceitos Fundamentais de Dinâmica de Estruturas

3.1 Considerações iniciais.....	31
3.2 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com um grau de liberdade. Análise no domínio do tempo	32
3.2.1 Enquadramento.....	32
3.2.2 Análise do comportamento dinâmico de um oscilador de 1 G.L.....	32
3.2.3 Vibração livre sem amortecimento.....	34
3.2.4 Vibração livre com amortecimento	36
3.2.5 Vibração forçada	39
3.2.6 Resposta a acelerogramas sísmicos aplicados na base	49
3.3 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com um grau de liberdade. Análise no domínio da frequência.....	55
3.3.1 Decomposição de funções em ondas sinusoidais. Séries de Fourier	55
3.3.2 Decomposição de acelerogramas em ondas sinusoidais.....	58
3.3.3 Representação das Séries de Fourier na forma complexa. Transformada Discreta de Fourier.....	60

3.3.4	Utilização de módulos computacionais para o cálculo de TDF	62
3.4	Comportamento dinâmico de modelos estruturais com vários graus de liberdade.	
	Análise no domínio do tempo	63
3.4.1	Modos de Vibração e Frequências Naturais	63
3.4.2	Coordenadas modais. Massa modal, amortecimento modal e rigidez modal	71
3.4.3	Vibração com amortecimento e forças exteriores aplicadas.....	76
3.4.4	Cálculo sísmico de estruturas com vários G.L. utilizando os espectros de resposta	83
3.5	Comportamento dinâmico de modelos estruturais com vários graus de liberdade.	
	Análise no domínio da frequência.....	85
3.5.1	Modos de Vibração e Frequências Naturais	85
3.6	Considerações finais	90

Capítulo 4

Modelação Numérica do Comportamento Dinâmico de Estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos

4.1	Considerações iniciais.....	93
4.2	Formulação do Método dos Elementos Finitos	96
4.2.1	Considerações gerais	96
4.2.2	Fundamentos do M.E.F. Deformação de um cabo elástico	97
4.2.3	Aproximação Fundamental do M.E.F.	101
4.2.4	Análise estática de uma estrutura plana pelo M.E.F.....	103
4.2.5	Análise dinâmica de uma estrutura plana pelo M.E.F.....	120
4.3	Elementos finitos planos com oito pontos nodais e elementos tridimensionais tipo cubo de vinte nós	124
4.4	Desenvolvimento do programa MEFDIN3D de elementos finitos (2D e 3D) para análise estática e dinâmica de estruturas.....	127
4.4.1	Algoritmo do programa MEFDIN3D	127
4.4.2	Análise estática. Exemplo de teste	130
4.4.3	Análise dinâmica. Exemplos de teste	132
4.5	Considerações finais	135

Capítulo 5

Aplicação à barragem do Cabril e à torre das tomadas de água

5.1	Considerações iniciais.....	137
5.2	Observação e análise do comportamento dinâmico da barragem do Cabril	140
5.3	Observação e análise do comportamento dinâmico da torre das tomadas de água	146
5.3.1	Modelação numérica (2D e 3D)	146
5.3.2	Ensaio de vibração ambiental	153
5.3.3	Comparação entre os resultados experimentais e numéricos.....	158
5.4	Análise do comportamento sob acções sísmicas.....	159
5.4.1	Comportamento sísmico da torre das tomadas de água. Análise no domínio do tempo e por espectro de resposta.....	159
5.4.2	Comportamento sísmico da barragem	172
5.5	Considerações finais	173

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Síntese do trabalho175

6.2 Desenvolvimentos Futuros176

Referências Bibliográficas179

Índice de Figuras

Capítulo 1

- Figura 1.1: Utilização integrada de resultados da observação do comportamento dinâmico e de resultados numéricos (adaptado de [Mendes e Oliveira, 2008]).3
- Figura 1.2: Desenvolvimento do programa MEFDIN3D de elementos finitos (2D e 3D) em MATLAB para análise de estruturas sob ações estáticas e dinâmicas. Barragem do Cabril: discretização, campo de tensões principais, deslocamento radial ao longo do tempo e modos de vibração.4
- Figura 1.3: Barragem do Cabril e torre das tomadas de água. Identificação modal das frequências naturais da torre a partir de uma série temporal (acelerações) obtida experimentalmente.6
- Figura 1.4: Análise do comportamento dinâmico da torre sob ações sísmicas. Análise no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta.6

Capítulo 2

- Figura 2.1: Alguns tipos de barragens portuguesas em betão: a) barragem de Cova do Viriato (gravidade); b) barragem do Torrão (gravidade aligeirada); c) barragem de Pracana (contrafortes); d) barragem do Alto Rabagão (mista de arco e gravidade); e) barragem do Cabril (abóbada de dupla curvatura); f) barragem da Aguieira (múltiplas abóbadas).11
- Figura 2.2: Secção transversal tipo de uma barragem de gravidade. 12
- Figura 2.3: Barragem da Lagoa Comprida, Portugal (barragem de gravidade em alvenaria). 13
- Figura 2.4: Barragem de Rego do Milho constituída por terras e enrocamento, Portugal. 14
- Figura 2.5: Tomadas de água na: a) barragem do Alto Lindoso (Portugal) [Site 3]; b) barragem de Hoover (Estados Unidos da América) [Site 2].16
- Figura 2.6: a) Exemplo de grelha metálica numa tomada de água em albufeira; b) exemplo de grelha em betão armado em descargas de fundo [Pinheiro, 2006].17
- Figura 2.7: a) Trabalhos de reparação na barragem do Cabril que consistiram no tratamento da fundação, injeção das juntas de contracção e tratamento da fissuração significativa. b) Reações álcali-agregado na barragem antiga do Alto Ceira.20
- Figura 2.8: a) Vibrador de massa excêntrica utilizado no ensaio de vibração forçada na barragem do Cabril. b) Excitador hidráulico para barragens.23
- Figura 2.9: Disposição dos acelerómetros num nicho de uma galeria de uma barragem de betão. 23
- Figura 2.10: Sistema de observação do comportamento dinâmico em contínuo, instalado na barragem do Cabril [Mendes, 2009].24

Figura 2.11: Modelos utilizados na análise do comportamento de barragens de betão [Oliveira, 2000].....	26
Figura 2.12: Modelação física no apoio a projectos de órgãos hidráulicos (LNEC – DHA). a) Estudo dos descarregadores de superfície da barragem de Ribeiradio; b) reforço de potência na barragem da Bemposta; c) barragem da Paradela – estudo de descarregadores de superfície, em canal e em poço; d) nova barragem do Alto Ceira – estudo do descarregador de superfície (lâmina livre).....	28
Figura 2.13: Utilização de modelos físicos em estudos de verificação da segurança para cenários de rotura. a) Barragem do Alto Lindoso (decrécimo da resistência); b) barragem do Alqueva (movimento horizontal na falha da fundação) (adaptado de [Oliveira, 2000]).....	28

Capítulo 3

Figura 3.1: a) Modelo físico de um edifício de um piso. b) Perspectiva e representação esquemática do modelo de 1 G.L.	33
Figura 3.2: Representação gráfica dos deslocamentos da estrutura ao longo do tempo em regime de vibração livre sem amortecimento.....	35
Figura 3.3: Representação esquemática do espaço das soluções complexas da equação $m\ddot{u} + ku = 0$ e do correspondente subespaço das soluções reais.....	36
Figura 3.4: Representação gráfica dos deslocamentos da estrutura ao longo do tempo em regime de vibração livre com amortecimento.	37
Figura 3.5: Representação gráfica da variação ao longo do tempo de alguns tipos de forças dinâmicas que podem actuar em estruturas de engenharia civil [Oliveira, 2007].....	39
Figura 3.6: Representação gráfica da tendência da resposta total para a parcela estacionária.	41
Figura 3.7: Representação gráfica da amplitude a) e do ângulo de fase b) da resposta estacionária em função da frequência de excitação.....	42
Figura 3.8: Representação gráfica da resposta em batimento $\left(\frac{3}{4}\omega_N < \omega_f < \frac{5}{4}\omega_N\right)$	43
Figura 3.9: Representação gráfica da aplicação de um impulso unitário e da sua resposta para um instante genérico $t = \tau$ [Oliveira, 2007].....	45
Figura 3.10: Representação esquemática da aproximação de uma força com variação contínua ao longo do tempo através de uma sequência de infinitos impulsos infinitesimalmente próximos.....	45
Figura 3.11: Representação de uma história de carga definida por troços lineares.....	46
Figura 3.12: Sistema estrutural de 1 G.L. sujeito à actuação de um acelerograma sísmico na base.	49

Figura 3.13: Cálculo de um espectro de resposta (em deslocamentos) correspondente a um acelerograma sísmico. As ordenadas do espectro correspondem aos valores máximos (absolutos) da resposta de vários osciladores de 1 G.L. em termos de deslocamentos relativamente à base.	51
Figura 3.14: Espectro de resposta em deslocamentos relativos.....	52
Figura 3.15: Espectros de resposta em: a) velocidades relativas; b) pseudo-velocidades.....	53
Figura 3.16: Espectro de resposta em acelerações absolutas.....	54
Figura 3.17: Decomposição de uma função em ondas sinusoidais [Oliveira, 2007].....	55
Figura 3.18: Representação da função $f(t)$ no domínio do tempo a) e no domínio da frequência através dos espectros dos coeficientes a_n e b_n b) e através dos espectros de amplitudes e de fases c) [Oliveira, 2007].	58
Figura 3.19: Acelerograma medido e correspondente espectro de amplitudes do edifício de 1 piso quando sujeito a ruído ambiente.	60
Figura 3.20: Modelo físico de um edifício de 3 pisos.	64
Figura 3.21: Matriz de rigidez do edifício de 3 pisos, considerando 1 G.L. de translação por piso.	65
Figura 3.22: Representação dos deslocamentos estruturais da estrutura a determinar para cada grau de liberdade.	65
Figura 3.23: Idealização do movimento oscilatório correspondente a um modo de vibração (neste caso, com todos os pisos a oscilarem em sintonia – em fase).....	66
Figura 3.24: Configurações modais para o edifício dos 3 pisos.....	71
Figura 3.25: Ilustração do conceito da fórmula fundamental da análise dinâmica no edifício de 3 pisos.....	73
Figura 3.26: Modelo do edifício de 3 pisos sujeito a forças exteriores. Vector das histórias de forças aplicadas nos vários graus de liberdade.	76
Figura 3.27: Ilustração da acção do vento no edifício de três pisos.	77
Figura 3.28: Edifício de três pisos sujeito a um movimento da base de fundação (sismo).	79
Figura 3.29: Organização de uma folha cálculo para simulação do comportamento dinâmico de um edifício de três pisos sob a acção de um acelerograma sísmico horizontal na base. Cálculo no domínio do tempo em coordenadas modais.	81
Figura 3.30: Modelo plano de elementos finitos de placa do edifício de três pisos com 2 G.L. de translação por nó.....	82
Figura 3.31: Modelo de elementos finitos de placa do edifício de três pisos sujeito a acelerações na base nas direcções horizontal e vertical.	83
Figura 3.32: Representação esquemática da obtenção dos valores máximos das coordenadas modais para os N modos de vibração a partir da multiplicação dos factores de participação modal com a ordenada do espectro de deslocamentos correspondente ao modo N.	85

Figura 3.33: Acelerogramas medidos nos três pisos devido à aplicação de várias pancadas ao nível dos pisos.	86
Figura 3.34: Espectros de Amplitudes do edifício em análise: a) do piso superior; b) do piso intermédio e; c) do piso inferior.	87
Figura 3.35: Decomposição em ondas dos acelerogramas registados em cada piso, identificando-se as três ondas principais cujas frequências correspondem às frequências naturais do edifício. Representação das configurações modais correspondentes às frequências naturais do edifício (adaptado de [Oliveira, 2007]).	88
Figura 3.36: Representação das principais ondas identificadas nos vários pisos para a) frequência de 4,28 Hz (1º modo de vibração); b) frequência de 12,87 Hz (2º modo de vibração) e; c) frequência de 18,32 Hz (3º modo de vibração).	89
Figura 3.37: Representação das configurações modais do edifício de três pisos com base na decomposição em ondas sinusoidais dos acelerogramas registados.	90

Capítulo 4

Figura 4.1: Incógnitas e equações fundamentais da Mecânica dos Sólidos (adaptado de [Oliveira e Mendes, 2009]).	94
Figura 4.2: Equações de equilíbrio na análise de estruturas e sua resolução por métodos numéricos. A solução numérica pelo M.E.F. obtém-se a partir da forma integral.	96
Figura 4.3: a) Barragem de gravidade. b) Modelo plano. c) Modelo tridimensional.	97
Figura 4.4: Deformação de um cabo elástico apoiado nas extremidades.	97
Figura 4.5: Discretização do cabo em quatro elementos finitos e representação de uma solução aproximada dada pela combinação linear de funções simples definidas por troços lineares (funções de interpolação, $N_i(x)$).	99
Figura 4.6: Conceito de funções de interpolação utilizando um elemento finito de barra com dois pontos nodais e um grau de liberdade de translação por nó.	102
Figura 4.7: Conceito de funções de interpolação utilizando um elemento finito de placa com quatro pontos nodais e dois graus de liberdade de translação por nó.	102
Figura 4.8: Barragem de gravidade em estudo.	103
Figura 4.9: Modelo plano (equilíbrio de placa).	103
Figura 4.10: Possíveis tipos de elementos finitos com 2 G.L. de translação por nó para a análise de estruturas planas [Oliveira, 2003].	104
Figura 4.11: Malha de elementos finitos (discretização da estrutura).	105
Figura 4.12: Equação de equilíbrio: forma forte e forma fraca. Introdução da aproximação fundamental do M.E.F. na forma fraca para obtenção da equação de equilíbrio de um elemento finito [Oliveira, 2003; Oliveira e Mendes, 2009].	108

Figura 4.13: Funções de interpolação lineares para o elemento finito quadrangular com 2 G.L./nó representado.	109
Figura 4.14: Representação das componentes da matriz jacobiana num determinado ponto P do interior do elemento finito: a) no referencial local (vectores unitários ortogonais) e; b) no referencial geral (vectores não unitários e não ortogonais).....	111
Figura 4.15: Representação das componentes da matriz jacobiana noutra ponto P. Variação da matriz jacobiana de ponto para ponto no interior do elemento finito.....	111
Figura 4.16: Representação dos prismas em que se subdivide o volume sob o gráfico da função (integral). Pontos de Gauss e respectivos pesos [Oliveira, 2003].	113
Figura 4.17: Representação da matriz de rigidez elementar para o elemento finito plano de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.	115
Figura 4.18: Ilustração do processo de montagem ou espalhamento das várias matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global.	116
Figura 4.19: Representação da matriz de rigidez global para o elemento finito plano de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.	116
Figura 4.20: Representação do vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.	118
Figura 4.21: Forças nodais equivalentes ao peso próprio distribuídas pela estrutura. Processo de espalhamento das forças elementares no vector das forças globais equivalentes ao peso próprio.	118
Figura 4.22: Representação do vector global das forças nodais equivalentes ao peso próprio para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.	119
Figura 4.23: Representação do vector dos deslocamentos nos pontos nodais para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.....	120
Figura 4.24: a) Elemento finito plano isoparamétrico de 8 pontos nodais com 2 G.L. de translação por nó e respectiva matriz com as funções de interpolação. b) Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo de 20 pontos nodais com 3 G.L. de translação por nó e respectiva matriz com as funções de interpolação.....	124
Figura 4.25: Elemento finito plano isoparamétrico de 8 pontos nodais. Representação dos eixos locais. Convenções adoptadas para a numeração dos pontos nodais. Funções de interpolação.	125
Figura 4.26: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo com 20 pontos nodais. Representação dos eixos locais e das coordenadas locais dos nós. Convenções adoptadas para a numeração de pontos nodais e faces. Funções de interpolação.	126
Figura 4.27: Representação das funções de interpolação segundo cada grau de liberdade para os pontos nodais 1, 2 e 20 do elemento finito tridimensional tipo cubo de 20 nós.	126
Figura 4.28: Ambiente do programa MEFDIN3D em MATLAB. Barragem de gravidade: deformada e campo de tensões principais num dado instante, tensões principais devidas ao peso próprio, modos de vibração e espectro de amplitudes do deslocamento horizontal ao nível do coroamento.	130

Figura 4.29: Viga em consola sujeita apenas ao seu peso próprio.	130
Figura 4.30: Malha de elementos finitos planos de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.	131
Figura 4.31: Deformada da estrutura e campo de tensões principais obtidos com o MEFDIN3D.	131
Figura 4.32: Frequências naturais e modos de vibração de flexão. Valores teóricos para uma viga em consola.	133
Figura 4.33: Viga em consola para efectuar o teste para o cálculo dinâmico.	133
Figura 4.34: Quatro primeiras configurações modais da viga em consola em análise obtidas com o programa MEFDIN3D utilizando elementos finitos planos isoparamétricos de 8 nós.	134
Figura 4.35: Cálculo dinâmico com o MEFDIN3D: a) malha de elementos finitos tridimensionais tipo cubo de 20 nós da consola em análise; b) deformada da consola e campo de tensões principais (nos 27 pontos de Gauss por elemento) e; c) frequências naturais e modos de vibração da consola (1º ao 4º modo).	135

Capítulo 5

Figura 5.1: a) Vista da barragem do Cabril e da albufeira. b) Planta geral da barragem [Site 3].	137
Figura 5.2: a) Vista de montante da barragem. b) Perfil da barragem com a torre das tomadas de água [Site 3].	138
Figura 5.3: a) Vista lateral da barragem e da torre das tomadas de água com os órgãos de manobra das comportas. b) Vista do paramento de montante da barragem e da torre das tomadas de água [Xerez, 1954].	138
Figura 5.4: Espectro com os valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência obtido nos ensaios de vibração ambiental em Fevereiro de 2002 (adaptado de [Mendes, 2005]).	141
Figura 5.5: Ensaio de vibração ambiental de Fevereiro de 2002. Disposição dos 12 acelerómetros na barragem (adaptado de [Mendes, 2005]).	141
Figura 5.6: Efeito do nível da água na albufeira sobre as três primeiras frequências naturais identificadas em ensaios de vibração forçada e ambiental [Mendes, 2005].	142
Figura 5.7: Espectro com os valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência obtidos num dos registos em Dezembro de 2008 no sistema de observação em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril [Mendes, 2009].	143
Figura 5.8: Análise dinâmica da barragem do Cabril com o programa MEFDIN3D. Malha de elementos finitos tridimensionais tipo cubo, de 20 nós.	144
Figura 5.9: Três primeiras configurações modais e respectivas frequências naturais da barragem do Cabril obtidas com o programa MEFDIN3D considerando a albufeira vazia e a hipótese de fundação rígida.	145

Figura 5.10: a) Equipamento dos ultra-sons constituído por uma unidade central e dois transdutores. b) Ensaio de ultra-sons num dos pilares da torre das tomadas de água da barragem do Cabril.....	148
Figura 5.11: Três primeiros modos de vibração da torre (direcção montante-jusante) e respectivas frequências naturais obtidas com o programa MEFDIN3D considerando elementos finitos de placa de 8 nós.	149
Figura 5.12: Configurações modais dos três primeiros modos de vibração e respectivas frequências naturais obtidas com o programa SAP 2000 numa análise bidimensional.	150
Figura 5.13: Torre das tomadas de água: vista em planta. Simplificações adoptadas na definição das secções dos pilares no modelo 3D em SAP 2000.	151
Figura 5.14: Configurações modais dos três primeiros modos de vibração e respectivas frequências naturais obtidas com o modelo tridimensional em SAP 2000.	152
Figura 5.15: a) Sistema de aquisição de dados (Modelo Basalt, Kinematics). b) Acelerómetro uniaxial (Modelo Episensor ES-U2, Kinematics).	154
Figura 5.16: Esquema da colocação do acelerómetro uniaxial na direcção montante-jusante.....	155
Figura 5.17: Registo de acelerações medidas na direcção montante-jusante.	155
Figura 5.18: Espectro de amplitudes correspondente ao acelerograma medido na direcção montante-jusante.	156
Figura 5.19: Esquema da colocação do acelerómetro uniaxial na direcção margem esquerda-direita.....	157
Figura 5.20: Registo de acelerações medidas na direcção margem esquerda-direita.....	157
Figura 5.21: Espectro de amplitudes correspondente ao acelerograma medido na direcção margem esquerda-direita.	158
Figura 5.22: Acelerograma sísmico considerado e correspondente espectro de resposta em acelerações absolutas ($\xi = 5\%$).	160
Figura 5.23: Deformada da estrutura e campo de tensões principais nos pontos de Gauss em três instantes de tempo durante a actuação do sismo considerado.	161
Figura 5.24: a) Espectro de resposta em acelerações absolutas; b) pseudo-espectro de resposta em velocidades relativas; c) pseudo-espectro de resposta em deslocamentos relativos para a acção sísmica apresentada na Figura 5.22, considerando $\xi = 5\%$	162
Figura 5.25: Representação das coordenadas modais para os quatro primeiros modos de vibração (nos planos $u_1^* - u_2^*$ e $u_3^* - u_4^*$). Representação das elipses envolventes determinadas pelo método do espectro de resposta e representação das coordenadas modais ao longo do tempo.	163
Figura 5.26: Análise comparativa do deslocamento máximo no topo da torre (grau de liberdade 1) obtido através de um cálculo no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (RQSQ e CQC) para o acelerograma apresentado.	166

Figura 5.27: Deslocamentos sísmicos máximos em três pontos no topo da torre, utilizando o modelo 3D em SAP 2000. Análise no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (regras CQC e RQSQ, considerando apenas 20 modos de vibração), utilizando o espectro que corresponde exactamente ao acelerograma adoptado.....	169
Figura 5.28: Comparação entre um espectro de resposta envolvente (suavizado) e o espectro de resposta (não suavizado) que corresponde exactamente ao acelerograma sísmico adoptado.....	170
Figura 5.29: Deslocamentos sísmicos máximos em três pontos no topo da torre, utilizando o modelo 3D em SAP 2000. Comparação da análise no domínio do tempo e por espectro de resposta (regras CQC e RQSQ, considerando apenas 20 modos de vibração), utilizando um espectro de resposta envolvente.	171
Figura 5.30: Barragem do Cabril. Deformada e campo de tensões principais em três instantes de tempo quando sujeita ao acelerograma sísmico em estudo.	172

Índice de Tabelas

Capítulo 4

Tabela 4-1: a) Coordenadas dos nós da estrutura em estudo; b) definição dos elementos (tabela de incidências).....106

Tabela 4-2: Coordenadas e respectivos pesos dos 4 pontos de Gauss adoptados. 113

Tabela 4-3: Comparação dos valores das frequências naturais obtidos analiticamente e numericamente com o MEFDIN3D considerando elementos finitos planos de 4 e de 8 nós.....133

Capítulo 5

Tabela 5-1: Tabela resumo da comparação entre os resultados obtidos nos modelos numéricos 2D e 3D com o programa MEFDIN3D e o SAP 2000.153

Tabela 5-2: Tabela resumo da comparação entre os resultados obtidos no modelo 3D em SAP 2000 e nos ensaios de vibração ambiental.....158

Tabela 5-3: Comparação entre os resultados obtidos no domínio do tempo e segundo o método do espectro de resposta (RQSQ e CQC) nos modelos bidimensionais em MEFDIN3D (MATLAB) e em SAP 2000.168

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

Na análise estrutural e, em particular, na análise de grandes estruturas como é o caso das barragens de betão, é fundamental desenvolver modelos numéricos que permitam simular o seu comportamento sob diversos tipos de acções, estáticas ou dinâmicas. Estes modelos permitem apoiar as actividades de controlo de segurança das obras ao longo da sua vida útil, desde a fase de projecto até ao final do período de exploração.

A actividade de desenvolvimento de modelos numéricos adequados aos diversos tipos de estudos que se efectuam no âmbito do controlo da segurança de barragens e respectivas estruturas auxiliares, exige a utilização de programas de análise estrutural relativamente sofisticados, que muitas vezes se baseiam no método dos elementos finitos (M.E.F.) e, em geral, permitem efectuar análises estáticas e dinâmicas considerando materiais de comportamento linear e até não linear. Para utilizar este tipo de programas de forma adequada, tirando partido de todas as suas potencialidades, é conveniente, numa fase inicial, aprofundar os conhecimentos sobre as formulações e sobre os métodos numéricos em que esses programas se apoiam. Se, por exemplo, como é o caso neste trabalho, o objectivo é desenvolver modelos para simular o comportamento dinâmico de uma dada estrutura, sob a acção do ruído ambiente ou sob acções sísmicas, é fundamental estudar os diferentes tipos de modelos de elementos finitos que podem ser utilizados e as diferentes metodologias de cálculo que podem ser adoptadas, nomeadamente, recorrendo a análises no domínio do tempo (utilizando ou não as coordenadas modais) ou por espectro de resposta.

Nesta perspectiva de aprofundar os conhecimentos sobre modelação numérica com vista à análise do comportamento dinâmico de estruturas pelo M.E.F., foi desenvolvido no âmbito deste trabalho, um programa de elementos finitos em MATLAB que permite efectuar a análise estática e dinâmica de estruturas planas e tridimensionais. O aprofundamento dos conhecimentos nesta área da modelação numérica, resulta em boa parte da possibilidade de orientar o estudo das formulações e dos métodos numéricos, com vista à sua implementação

computacional e da subsequente confrontação dos resultados obtidos com resultados dos programas comerciais que se pretende vir a utilizar de forma eficiente, explorando todas as suas potencialidades.

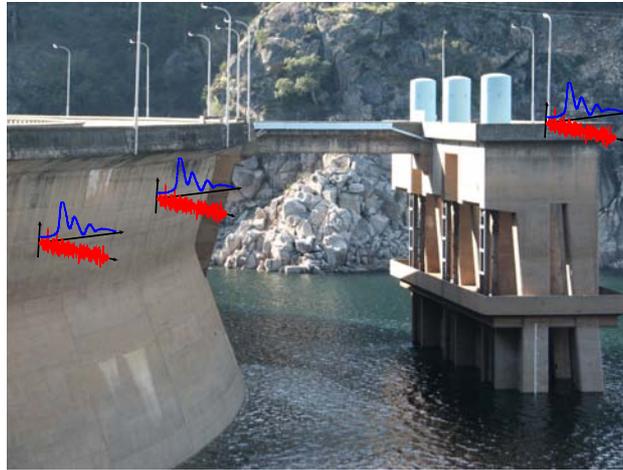
Neste trabalho é igualmente enfatizada a importância de confrontar os resultados numéricos com resultados observados. Nesta perspectiva, foi efectuado um ensaio dinâmico com medição de acelerações sob excitação ambiental, na torre das tomadas de água da barragem do Cabril⁽¹⁾, uma importante estrutura auxiliar constituída por duas tomadas de água para cada grupo de produção de energia e por uma descarga de fundo. Os resultados observados, depois de devidamente analisados por técnicas de identificação modal (análise espectral), são comparados com os resultados de modelos numéricos (modelos 2D e modelo 3D), como se mostra na Figura 1.1. A utilização integrada de resultados numéricos e observados, permite ajustar os parâmetros fundamentais dos modelos numéricos (no caso em estudo, o módulo de elasticidade do betão e as condições de apoio), por forma a que os principais parâmetros modais (frequências naturais e configurações modais) calculados numericamente, coincidam com os identificados a partir das séries temporais de acelerações medidas em obra.

Na sequência deste processo de comparação entre resultados numéricos e observados, com vista à calibração dos modelos para análise do comportamento dinâmico, podem ser desenvolvidos estudos de simulação do comportamento das obras sob acções sísmicas (de acordo com a nova regulamentação são geralmente mais gravosas do que as consideradas na época em que muitas das actuais barragens foram projectadas), com vista à reavaliação da segurança, tendo em conta a nova regulamentação. Estes estudos de reavaliação da segurança sob acções sísmicas podem, em alguns casos, levar a adoptar medidas de modernização/reforço do sistema de observação instalado, nomeadamente complementando-o com dispositivos para medição em contínuo da resposta dinâmica das obras [Mendes, 2009].

Com este tipo de sistemas para monitorização do comportamento dinâmico de barragens em contínuo (utilizados também em pontes e edifícios de grande porte), é possível acompanhar a evolução de eventuais processos de deterioração que provoquem alterações estruturais significativas, pois podem influenciar a resposta dinâmica observada ao nível das frequências naturais e configurações modais [Oliveira et al., 2003]. Estes sistemas também são de grande interesse para avaliar eventuais danos provocados por acções sísmicas: se, a resposta dinâmica

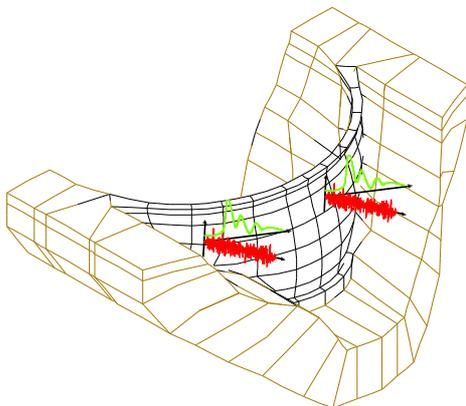
(1) A torre das tomadas de água é referida em [Xerez, 1954] como um órgão importante do aproveitamento do Cabril: “*Desejamos chamar a atenção para o facto de a torre, como estrutura de betão armado de 130 metros de altura, constituir uma obra que, em si própria, comporta importantes estudos de projecto e obrigou a adoptar especiais disposições construtivas, embora tudo isso possa passar despercebido perante a grandeza das restantes partes do aproveitamento.*”

identificada após um sismo for diferente da identificada anteriormente, isso indicia que o sismo poderá ter provocado alterações estruturais importantes.

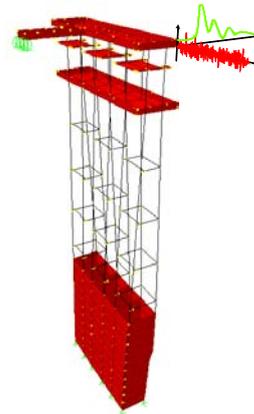


Vista da barragem do Cabril e da torre das tomadas de água

Modelos Numéricos para controlo de segurança



Modelo de Elementos Finitos Tridimensionais do sistema barragem-fundação



Modelo de Elementos Finitos de barra e de casca delgada da torre das tomadas de água

Espectro de Amplitudes

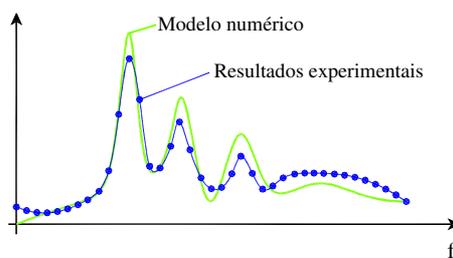


Figura 1.1: Utilização integrada de resultados da observação do comportamento dinâmico e de resultados numéricos (adaptado de [Mendes e Oliveira, 2008]).

1.2 Objectivos da Dissertação

A presente dissertação tem como objectivo principal o desenvolvimento de um programa de elementos finitos (2D e 3D – equilíbrios de placa e tridimensionais), utilizando o MATLAB [MATLAB, 2005], denominado MEFDIN3D, que permita efectuar a análise estática e dinâmica de estruturas (Figura 1.2), com a possibilidade de realização de cálculos no domínio do tempo (acção definida por histórias de forças aplicadas nos vários graus de liberdade da estrutura ou histórias de acelerações impostas na base) e pelo método do espectro de resposta.

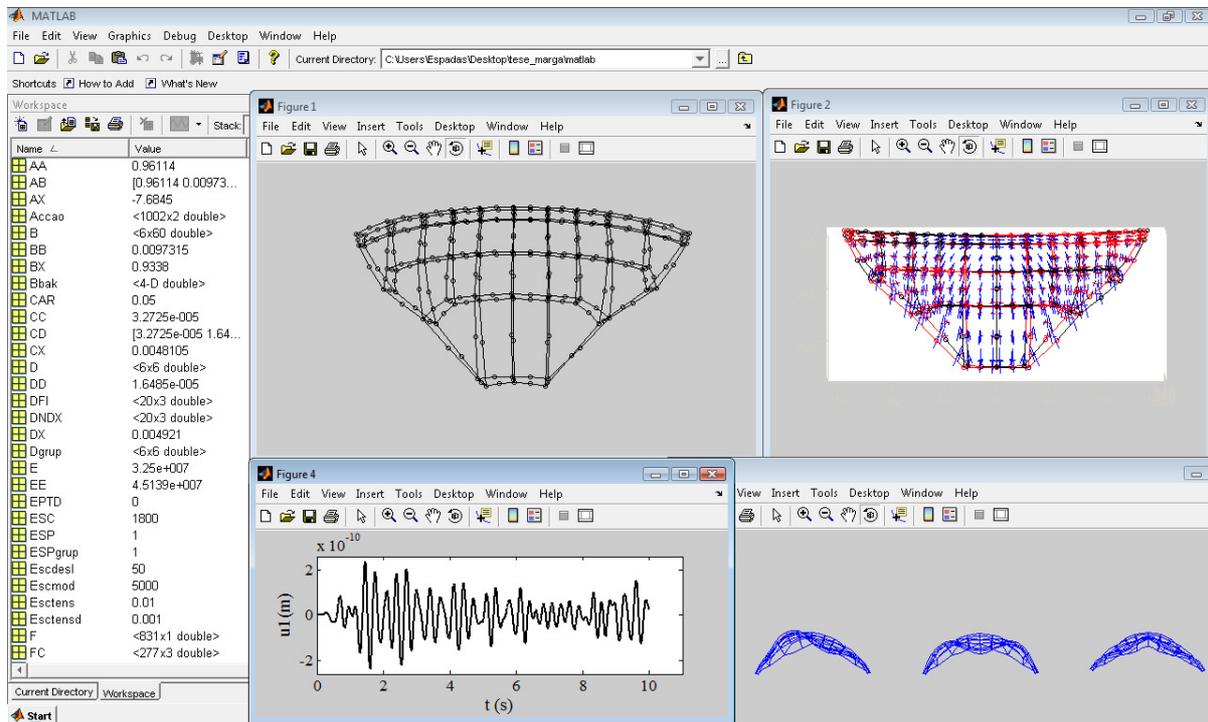
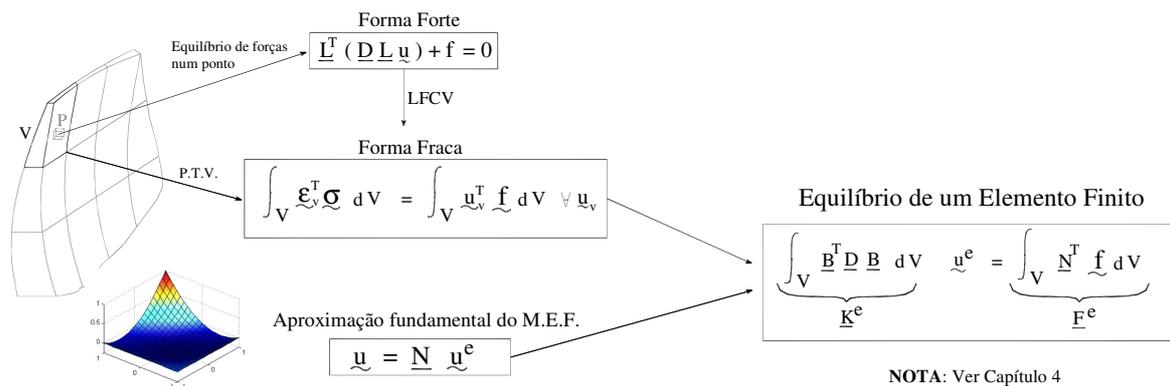


Figura 1.2: Desenvolvimento do programa MEFDIN3D de elementos finitos (2D e 3D) em MATLAB para análise de estruturas sob acções estáticas e dinâmicas. Barragem do Cabril: discretização, campo de tensões principais, deslocamento radial ao longo do tempo e modos de vibração.

Para além deste objectivo principal pretende-se:

- apresentar os fundamentos da dinâmica de estruturas com vista ao estudo das formulações no domínio do tempo e no domínio da frequência para sistemas de 1 grau de liberdade e vários graus de liberdade (conceito de coordenadas modais);
- apresentar os fundamentos das metodologias de identificação modal (método básico no domínio da frequência);
- apresentar os fundamentos do M.E.F. com vista à modelação numérica do comportamento estático e dinâmico de estruturas;
- testar a fiabilidade do programa MEFDIN3D em relação ao cálculo estático e dinâmico, a partir da comparação dos resultados numéricos com os resultados obtidos com o programa comercial SAP 2000 [Computers & Structures, 1998] e, com soluções analíticas conhecidas para estruturas relativamente simples;
- realizar um ensaio de vibração ambiental na torre das tomadas de água da barragem do Cabril, com medição de acelerações no topo da torre na direcção montante-jusante e na direcção margem esquerda-direita, para caracterizar o seu comportamento dinâmico (Figura 1.3);
- averiguar a hipótese de interacção dinâmica entre a torre e a própria barragem;
- realizar um ensaio de ultra-sons para a determinação experimental do módulo de elasticidade do betão da torre, um dos parâmetros fundamentais para calibração dos modelos numéricos;
- salientar a importância da utilização integrada de resultados obtidos nos modelos numéricos de elementos finitos e de resultados observados, para calibrar os modelos numéricos;
- previsão do comportamento dinâmico da torre sob acções sísmicas no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (Figura 1.4);
- mostrar as potencialidades do MEFDIN3D para a análise sísmica de estruturas maciças (equilíbrios tridimensionais), através de um estudo de aplicação envolvendo o cálculo sísmico da barragem do Cabril, com representação gráfica 3D, com animação dos campos de deslocamentos e de tensões no corpo da barragem durante o período de actuação do sismo.

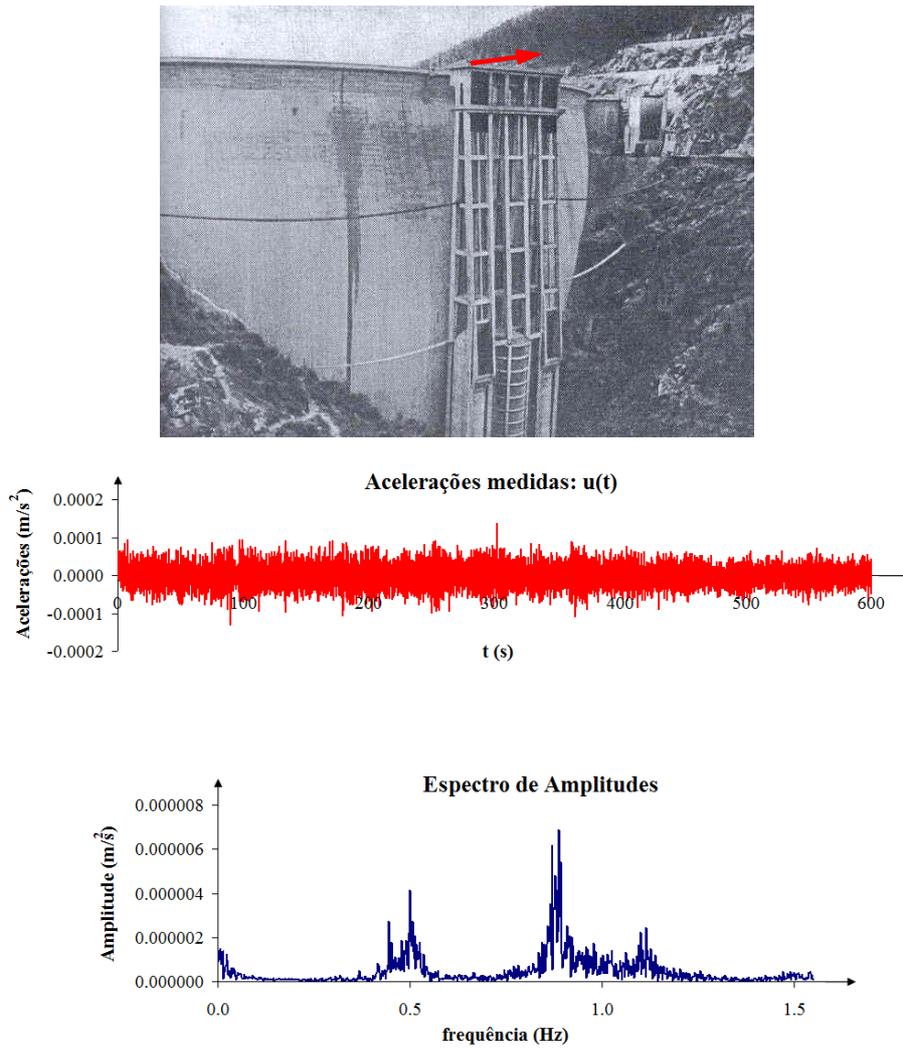


Figura 1.3: Barragem do Cabril e torre das tomadas de água. Identificação modal das frequências naturais da torre a partir de uma série temporal (acelerações) obtida experimentalmente.

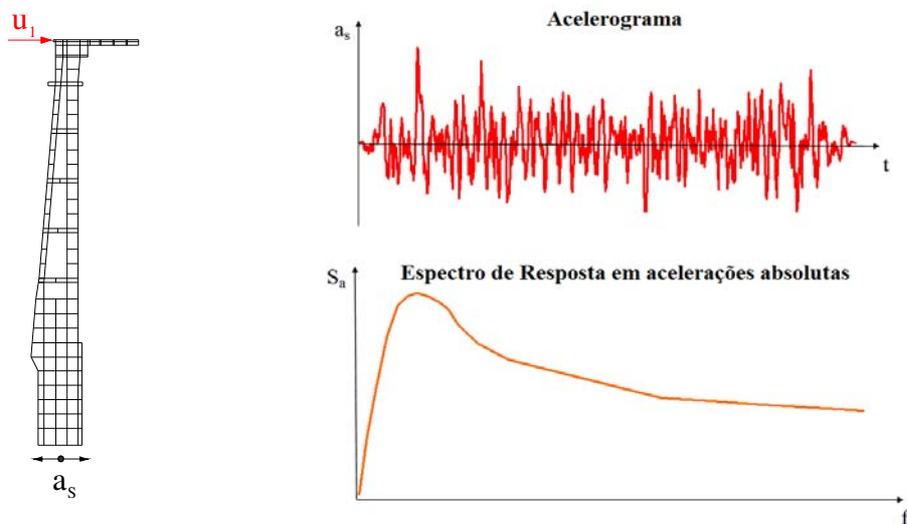


Figura 1.4: Análise do comportamento dinâmico da torre sob ações sísmicas. Análise no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta.

1.3 Estruturação do trabalho

Em seguida apresenta-se a estruturação adoptada para este trabalho com um resumo dos tópicos abordados em cada um dos capítulos.

Capítulo 2 – Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão e estruturas auxiliares

Apresentam-se os principais tipos de barragens e descrevem-se os órgãos de segurança e exploração de um aproveitamento hidroeléctrico.

São também abordadas as actividades essenciais para efectuar a observação e controlo de segurança das barragens de betão e das respectivas estruturas auxiliares referindo, em particular, os equipamentos e as metodologias que podem ser utilizadas na observação do seu comportamento dinâmico.

Capítulo 3 – Conceitos Fundamentais de Dinâmica de Estruturas

Neste capítulo abordam-se os principais conceitos de dinâmica de estruturas para efectuar uma análise no domínio do tempo e no domínio da frequência de modelos simples de 1 grau de liberdade e de modelos estruturais com vários graus de liberdade (com base no conceito de coordenadas modais).

Descreve-se um dos métodos de identificação modal no domínio da frequência, que permite obter as características dinâmicas de uma estrutura a partir da medição de vibrações (histórias de acelerações).

Apresentam-se também alguns dos conceitos fundamentais envolvidos na análise sísmica de estruturas com vários graus de liberdade utilizando o método do espectro de resposta.

Capítulo 4 – Modelação Numérica do Comportamento Dinâmico de Estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos

Apresentam-se os fundamentos do Método dos Elementos Finitos com vista à modelação numérica do comportamento estático e dinâmico de estruturas. Para explicar as técnicas adoptadas na implementação computacional deste método, utiliza-se o exemplo de uma barragem de gravidade em betão. Inicialmente a apresentação restringe-se à análise sob

acções estáticas e, em seguida, generaliza-se para a análise dinâmica, estudando em particular a acção sísmica.

Apresenta-se o algoritmo do programa MEFDIN3D, desenvolvido em MATLAB, que permite utilizar elementos finitos de placa (4 e 8 pontos nodais) e elementos finitos tridimensionais (20 nós), para a análise estática e dinâmica de estruturas (cálculos no domínio do tempo e por espectro de resposta). Apresentam-se ainda alguns exemplos de estruturas simples que foram utilizadas para testar a fiabilidade do programa desenvolvido relativamente ao cálculo estático e dinâmico, através da comparação dos resultados numéricos com soluções analíticas.

Capítulo 5 – Aplicação à barragem do Cabril e à torre das tomadas de água

Neste capítulo procede-se a uma análise do comportamento dinâmico da torre das tomadas de água da barragem do Cabril, com o objectivo de avaliar a hipótese de interacção dinâmica entre o movimento oscilatório da torre e da barragem. Para tal, foram desenvolvidos dois modelos numéricos 2D de elementos finitos (com o MEFDIN3D e com o SAP 2000) e um outro modelo 3D com o SAP 2000 para simular o comportamento dinâmico da torre. Os resultados numéricos destes modelos foram comparados com resultados experimentais obtidos a partir de ensaios de vibração ambiental realizados no topo da torre (na direcção montante-jusante e na direcção margem esquerda-direita) e no corpo da barragem, e de resultados obtidos com um sistema de observação dinâmica em contínuo, recentemente instalado na barragem [Mendes, 2009]. Apresentam-se resultados de um ensaio de ultra-sons realizado num dos pilares da torre das tomadas de água, com o objectivo de determinar experimentalmente o módulo de elasticidade do betão a adoptar nos modelos numéricos.

Mostram-se os resultados obtidos com os modelos numéricos calibrados relativos à análise do comportamento da torre sob acções sísmicas, no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta. Por fim, apresentam-se alguns resultados referentes à análise sísmica da barragem do Cabril (modelo 3D) obtidos com o programa MEFDIN3D.

Capítulo 6 – Conclusões e Perspectivas futuras

Apresentam-se as principais conclusões do trabalho e perspectivam-se os desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão e estruturas auxiliares

2.1 Considerações iniciais

A observação e a análise do comportamento dinâmico das barragens de betão e respectivas estruturas auxiliares, tem assumido uma importância crescente, tendo em vista especialmente, o controlo de segurança relativamente às acções sísmicas. Na verdade, até à presente data os acidentes graves em barragens devido a eventos de origem sísmica ocorreram relativamente em pequeno número, embora tenham sido registados vários casos de incidentes que envolveram o aparecimento de fissuras e deslocamentos permanentes, percolação excessiva através da fundação, etc. Contudo, é importante ter em conta que as barragens são estruturas de elevado risco potencial e que a maioria das que se encontram em exploração foram projectadas e construídas com base em métodos de análise sísmica que actualmente são considerados inadequados.

É igualmente relevante efectuar o controlo de segurança das estruturas auxiliares sujeitas a importantes acções dinâmicas, como é o caso que se analisa no capítulo 5 desta dissertação, a torre das tomadas de água da barragem do Cabril – uma estrutura esbelta de 132m de altura, imersa e sujeita a vibrações provocadas pelo funcionamento dos grupos de produção de energia.

Neste capítulo referem-se os diversos tipos de barragens, nomeadamente as barragens de betão, e salientam-se os aspectos mais importantes envolvidos nas actividades de controlo da segurança destas obras, desde a observação à modelação (matemática e física), com especial atenção aos aspectos relacionados com o seu comportamento dinâmico.

2.2 Classificação de barragens

As barragens podem ser classificadas quanto à sua dimensão, finalidade, capacidade de armazenamento, materiais utilizados na sua construção e forma estrutural. Segundo o ICOLD [Site 1] (International Commission of Large Dams), as barragens podem ser classificadas em pequenas e grandes barragens, de acordo com a sua altura e volume de água armazenado. Adota-se a designação de grande barragem, aquela que possui uma altura igual ou superior a 15m, medida desde a cota mais baixa da fundação até ao coroamento. As barragens com uma altura entre os 5 e os 15m, também tomam a designação de grandes barragens, desde que o seu reservatório permita armazenar um volume de água superior a 3 milhões de metros cúbicos.

As barragens de altura inferior a 15m que não estejam incluídas no grupo anterior, designam-se por pequenas barragens.

Por outro lado, as barragens também podem ser classificadas quanto ao tipo de materiais utilizados na sua construção, podendo estas ser em betão, alvenaria ou em materiais soltos, como por exemplo enrocamento e terras.

2.2.1 Barragens de Betão

De acordo com o tipo estrutural, as barragens de betão podem ainda subdividir-se em:

- Barragens de gravidade maciças;
- Barragens de gravidade com vazamento;
- Barragens de contrafortes;
- Barragens de arco-gravidade;
- Barragens em abóbada, com simples ou dupla curvatura;
- Barragens de abóbada múltiplas.

Na Figura 2.1 apresentam-se exemplos de barragens portuguesas em betão com as formas distintas descritas atrás.

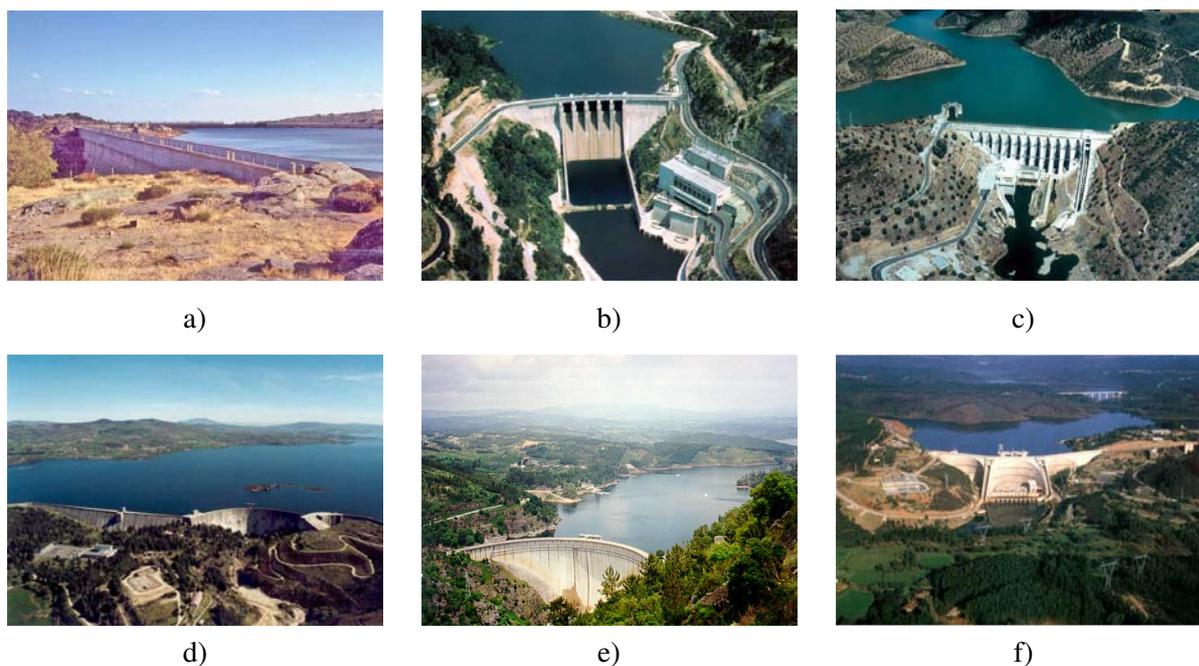


Figura 2.1: Alguns tipos de barragens portuguesas em betão: a) barragem de Cova do Viriato (gravidade); b) barragem do Torrão (gravidade aligeirada); c) barragem de Pracana (contrafortes); d) barragem do Alto Rabagão (mista de arco e gravidade); e) barragem do Cabril (abóbada de dupla curvatura); f) barragem da Aguieira (múltiplas abóbadas).

2.2.1.1 Barragens de Gravidade

As barragens de gravidade são estruturas em betão, com uma secção transversal típica aproximadamente triangular (Figura 2.2), e são concebidas para resistir, apenas pelo seu peso, aos impulsos da água que retêm.

Este tipo de barragens podem apresentar em planta uma forma rectilínea, curva ou uma forma quebrada. A escolha da forma em planta depende essencialmente das condições do subsolo, do sistema construtivo previsto, das condições topográficas (forma dos vales), etc.

Geralmente estas barragens são constituídas por betão convencional ou betão compactado com cilindro [Monteiro, 2007], embora possam também ser executadas com outro tipo de materiais, como por exemplo, alvenaria de granito ou xisto, ligados por argamassas (secção 2.2.2).

As barragens de gravidade em betão convencional são estruturas formadas por blocos monolíticos separados por juntas de contracção transversais, com desenvolvimento em toda a secção desde a fundação até ao coroamento.

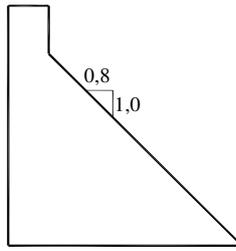


Figura 2.2: Secção transversal tipo de uma barragem de gravidade.

As barragens de betão com a forma de arco-gravidade correspondem genericamente a barragens de betão de gravidade aligeiradas, com uma curvatura significativa em planta. Este tipo de barragens transmitem os esforços à fundação e aos encontros simultaneamente por gravidade e por efeito de arco.

As barragens de gravidade são adequadas em regiões de topografia suave com vales largos e com rocha compacta na fundação.

2.2.1.2 Barragens de Contrafortes

Trata-se de uma estrutura do tipo gravidade aligeirada que, para além da mobilização do seu peso, aproveita a existência de contrafortes (elementos estruturais transversais à secção do vale) para resistir ao impulso da massa de água sobre o paramento de montante para aumentar a sua estabilidade.

As formas mais comuns neste tipo de barragens são as constituídas por lajes com alinhamento recto ou por vários arcos apoiados a montante nos contrafortes e as constituídas apenas por contrafortes.

São obras mais económicas do ponto de vista da quantidade de betão necessário para a sua construção, comparativamente com as barragens típicas de gravidade, no entanto, exigem grandes áreas de cofragem e maior reforço de armadura na zona dos contrafortes.

As barragens de contrafortes geralmente são adequadas para regiões de topografia suave com vales amplos e com rocha muito resistente para a fundação.

2.2.1.3 Barragens Abóbada

Uma barragem abóbada é uma estrutura com curvatura em planta, com a convexidade voltada para montante, concebida por forma a transmitir o impulso da água principalmente para os encontros e não para o fundo do vale. Este tipo de barragens podem ser simples ou de dupla

curvatura e geralmente têm uma reduzida espessura, podendo classificar-se como esbeltas, pouco espessas ou espessas.

Estas podem ser construídas com alturas muito elevadas, sendo adequadas para regiões de topografia irregular e necessitam de um maciço de fundação muito resistente.

As barragens deste tipo que têm associadas mais do que uma abóbada designam-se por barragens de abóbadas múltiplas. A transmissão dos esforços neste tipo de barragens é semelhante às barragens de apenas uma abóbada, porém, como existe mais do que um arco, os esforços são transmitidos à fundação geralmente por contrafortes maciços que ligam as abóbadas.

2.2.2 Barragens de Alvenaria

As barragens de alvenaria podem subdividir-se em:

- Barragens de gravidade (Figura 2.3);
- Barragens de contrafortes;
- Barragens de arco.



Figura 2.3: Barragem da Lagoa Comprida, Portugal (barragem de gravidade em alvenaria).

2.2.3 Barragens de Materiais soltos

As barragens de materiais soltos, são usualmente construídas sob a forma de aterro, usando materiais como blocos de pedra solta, enrocamento, terras ou uma combinação desses materiais, não se empregando qualquer tipo de ligante. Este tipo de barragens caracterizam-se pela sua forma trapezoidal, tendo um maior desenvolvimento na base e uma diminuição à medida que se aproximam do topo.

Estas barragens podem ainda ser mistas, isto é, constituídas por terras e enrocamento (Figura 2.4), em que os materiais são usados distintamente no corpo principal e nas estruturas de fecho dos vales para as margens.



Figura 2.4: Barragem de Rego do Milho constituída por terras e enrocamento, Portugal.

2.3 Órgãos de segurança e exploração

É frequente construir estruturas auxiliares às barragens, denominadas por torres, com o objectivo de instalar alguns órgãos de segurança e exploração, assim como os dispositivos de manobra das respectivas comportas.

O controlo de segurança destas estruturas auxiliares é fundamental para garantir as correctas condições de funcionalidade e segurança da barragem.

Em seguida descrevem-se os órgãos de segurança e exploração de um aproveitamento.

2.3.1 Descarregadores de cheias

Segundo o Regulamento de Segurança de Barragens [RSB, 2007], estes órgãos devem ser aptos a escoar em qualquer circunstância a cheia de projecto sem necessidade do auxílio das descargas de fundo, tomadas de água ou outros dispositivos.

Os descarregadores de cheia apresentam diferentes tipos e constituição, em função das barragens em que se inserem e das condições topográficas e hidráulicas existentes. A opção por um tipo de descarregador e a sua concepção devem ser analisadas em cada caso tomando em consideração os aspectos referidos, juntamente com os aspectos de segurança e com critérios económicos, de modo a obter uma solução adequada aos condicionalismos existentes e economicamente aceitável [Pinheiro, 2007].

Estes órgãos podem classificar-se quanto à localização e controlo do caudal e quanto ao guiamento da lâmina líquida e modo de dissipação de energia.

Os descarregadores de cheias podem classificar-se, relativamente à sua localização e controlo do escoamento nos diferentes tipos:

- Descarregadores de cheias sobre as barragens (para barragens de betão);
- Orifícios através da barragem (para barragens de aterro);
- Canal de encosta (para qualquer tipo de barragem);
- Poço vertical ou inclinado (para barragens mista de terra e enrocamento);
- Diques ou comportas fusíveis (para qualquer tipo de barragem);
- Descarregadores não convencionais (túneis ou canais com soleira rugosa ou descarregadores com soleira em degraus).

2.3.2 Descargas de fundo

De acordo com o Regulamento de Segurança de Barragens [RSB, 2007], as descargas de fundo e de meio fundo devem permitir o esvaziamento da albufeira e ser equipadas com duas comportas que possam ser comandadas quer localmente quer à distância, e mediante energia proveniente de duas origens distintas, além de poderem ser accionadas manualmente, uma funcionando como segurança e a outra destinada ao serviço normal da exploração. Estes órgãos são também utilizados para controlar a subida do nível de albufeira durante o primeiro enchimento, de modo a possibilitar o acompanhamento do comportamento estrutural da barragem através dos sistemas de observação instalados.

As descargas de fundo podem ser agrupadas em três tipos de acordo com a sua concepção:

- Descarga de fundo através de túneis escavados na rocha;
- Descarga de fundo através de barragens de betão;
- Descarga de fundo em condutas sob aterros.

2.3.3 Tomadas de água

O aproveitamento dos recursos hídricos superficiais implica a construção de estruturas tomadas de água em cursos de água naturais, a montante de aproveitamentos hidráulicos a fio-de-água, em albufeiras ou em reservatórios, podendo a água ser destinada para diferentes finalidades, como por exemplo para abastecimento público, rega ou produção hidroelétrica. As estruturas de tomada de água podem ainda ser necessárias para integrar outros órgãos tais

como os descarregadores de cheia ou as descargas de fundo, tal como sucede na torre das tomadas de água da barragem do Cabril, que será objecto de estudo desta dissertação.

Na Figura 2.5 mostram-se alguns exemplos destas estruturas em barragens.



a)



b)

Figura 2.5: Tomadas de água na: a) barragem do Alto Lindoso (Portugal) [Site 3]; b) barragem de Hoover (Estados Unidos da América) [Site 2].

O Regulamento de Segurança de Barragens [RSB, 2007] não inclui nenhuma recomendação relativamente a estes órgãos, no entanto, a concepção das tomadas de água deverá atender aos caudais necessários para os usos a jusante ou de dimensionamento dos outros órgãos de segurança e exploração em que se integram, tendo em atenção as variações de nível a montante, à eventual presença de material sólido em suspensão ou à possibilidade de existir transporte sólido por arrastamento.

As tomadas de água podem dividir-se em três grupos:

- tomadas em albufeiras de regularização, em que a água não contém quantidade significativa de material sólido em suspensão e as tomadas situam-se acima da cota máxima que previsivelmente será atingida pelos sedimentos depositados na albufeira;
- tomadas em aproveitamentos a fio-de-água ou em cursos de água com alturas de escoamento significativas, em que a água poderá conter quantidade significativa de material sólido em suspensão e, eventualmente, o material transportado por arrastamento pode atingir a tomada de água;
- tomadas em reservatórios artificiais de pequena profundidade.

No caso das tomadas de água em albufeiras de regularização, estas podem ainda subdividir-se em vários tipos, de acordo com o seu tipo estrutural [INAG, 2001]:

- torre através da barragem;

- em torre separada do corpo da barragem, com acesso por passadiço (caso da torre das tomadas de água da barragem do Cabril);
- em torre adjacente à barragem;
- em estrutura fundada numa das vertentes, frequentemente seguida de túnel;
- em estrutura flutuante, no caso de tomadas de água temporárias.

Estas estruturas são dotadas de grelhas de protecção para evitar a entrada de detritos que possam danificar os restantes órgãos hidromecânicos inseridos nesse circuito hidráulico, como é o caso de válvulas, turbinas, bombas, etc, ou que sejam indesejáveis do ponto de vista de manutenção. Independentemente da utilização das tomadas de água, deve ser previsto um equipamento hidromecânico (comportas ou, para pequenas dimensões, válvula) para proceder ao seu fechamento.

Na Figura 2.6 a) apresenta-se uma grelha metálica de uma tomada de água em albufeira constituída por um único painel rectangular e na Figura 2.6 b) mostra-se uma grelha de protecção das descargas de fundo em betão armado.

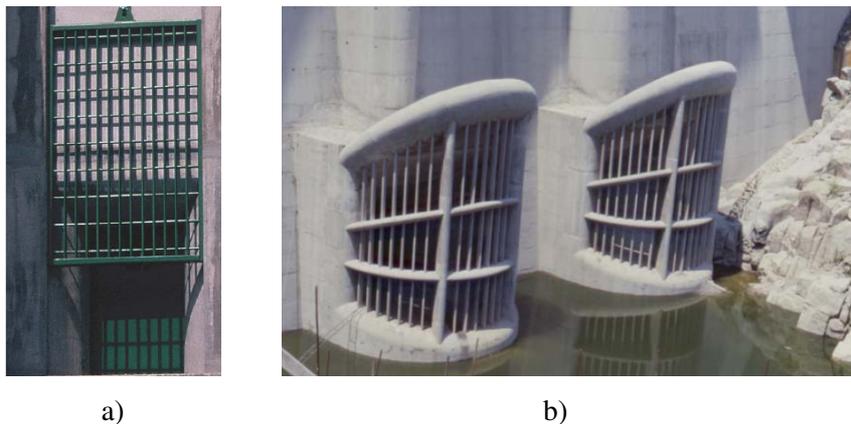


Figura 2.6: a) Exemplo de grelha metálica numa tomada de água em albufeira; b) exemplo de grelha em betão armado em descargas de fundo [Pinheiro, 2006].

No caso da torre das tomadas de água da barragem do Cabril, esta é constituída pelas duas tomadas de água para cada grupo de produção, protegidas com uma grade metálica, e por uma descarga de fundo com uma grade em betão armado. No capítulo 5 deste trabalho este órgão será descrito com maior pormenor.

2.4 Observação e controlo de segurança de barragens de betão e respectivas estruturas auxiliares

2.4.1 Segurança estrutural, ambiental, hidráulica e operacional

Segundo o Regulamento de Segurança de Barragens [RSB, 2007], a segurança global de uma barragem consiste na capacidade em satisfazer as exigências de comportamento relativas a aspectos estruturais, ambientais, hidráulicos e operacionais de modo a evitar a ocorrência de acidentes ou incidentes.

Em termos estruturais, é necessário garantir durante todas as fases da vida útil da obra, a segurança do corpo da barragem e da sua fundação perante as diversas acções a que estão sujeitas, como é o caso do peso próprio, pressão hidrostática, variações térmicas, acelerações sísmicas, escoamentos hidráulicos na fundação, etc.

A segurança ambiental consiste na capacidade da barragem em satisfazer os requisitos de comportamento relativos à limitação de incidências que possam ser prejudiciais ao ambiente, nomeadamente, na qualidade das águas, assoreamento da albufeira, evolução do leito a jusante e alteração dos níveis freáticos e finalmente, os aspectos ecológicos, climáticos, paisagísticos, histórico-culturais e arqueológicos.

Em termos hidráulicos as questões de segurança estão relacionadas com a garantia de uma adequada capacidade de resposta dos órgãos de segurança e de exploração e igualmente, com a adequada capacidade de impermeabilização e de drenagem dos sistemas responsáveis pela impermeabilização e drenagem da fundação.

A segurança operacional consiste em garantir as exigências de funcionalidade dos equipamentos dos órgãos de segurança e exploração.

2.4.2 Controlo de segurança

De acordo com o Regulamento de Segurança de Barragens [RSB, 2007] o controlo de segurança das barragens e estruturas auxiliares, envolve um conjunto de medidas a tomar desde a fase de projecto, construção, primeiro enchimento da albufeira e fase de exploração, contemplando os aspectos estruturais, hidráulico-operacionais e ambientais, com vista a assegurar as suas condições de segurança, permitindo um conhecimento adequado e continuado do estado da infra-estrutura, a detecção oportuna de eventuais anomalias e uma intervenção eficaz sempre que se justifique.

Numa primeira fase, que engloba a execução do projecto, a fase construtiva e o primeiro enchimento da albufeira, devem ser elaborados modelos que servem para projectar a obra e também para definir as várias componentes do sistema de observação a ser instalado, designadamente:

- as grandezas que melhor descrevem o comportamento do conjunto barragem-fundação-albufeira, como por exemplo, a medição de temperaturas, nível da albufeira, deslocamentos, extensões, tensões, movimentos de juntas, acelerações sísmicas, etc;
- os instrumentos para medição das referidas grandezas, como é o caso dos termómetros, fios de prumo, extensómetros, tensómetros, piezómetros, bases de alongâmetro, sismógrafos, etc;
- o número e a distribuição dos instrumentos de medição;
- a periodicidade das observações.

Neste sentido, deve ser definido e implementado um Plano de Observação que visa o controlo de segurança estrutural da barragem e das estruturas auxiliares nesta fase inicial.

Na segunda fase correspondente ao período de exploração, as actividades de controlo de segurança a implementar, dependem obviamente do que foi definido no Plano de Observação na fase inicial.

No âmbito da observação e análise do comportamento estrutural destas infra-estruturas, devem ser tomadas as seguintes medidas desde o início de exploração até à fase de abandono:

- realização de campanhas de inspecção visual da barragem e respectivas estruturas auxiliares de forma a detectar possíveis patologias;
- exploração dos sistemas de observação instalados;
- desenvolvimento de modelos de interpretação e previsão do comportamento estrutural, que permitam aferir o carácter satisfatório do comportamento da obras, durante esta fase.

2.4.2.1 Inspecções Visuais

As inspecções visuais têm como finalidade a detecção de sinais ou evidências de deterioração ou sintomas de envelhecimento nas barragens de betão e nas respectivas estruturas auxiliares e também a detecção de anomalias no sistema de observação instalado.

As principais patologias ou anomalias que são usualmente detectadas no decurso destas inspecções nas barragens de betão, relacionam-se essencialmente com a ocorrência de movimentos diferenciais entre blocos, com a existência de fissuração significativa, com percolações não controladas através do corpo da obra ou da sua fundação (ressurgências ou exsurgências) e reacções álcali-agregado (Figura 2.7).



Figura 2.7: a) Trabalhos de reparação na barragem do Cabril que consistiram no tratamento da fundação, injeção das juntas de contracção e tratamento da fissuração significativa. b) Reacções álcali-agregado na barragem antiga do Alto Ceira.

Em termos das inspecções visuais nos órgãos de segurança que constituem a barragem, designadamente os descarregadores de cheias e as descargas de fundo, estas são motivadas principalmente por causas de índole hidráulica. Este tipo de deteriorações que podem ocorrer estão relacionadas com a existência de escoamentos de alta velocidade e turbulência, envelhecimento das estruturas hidráulicas (cavitação, abrasão, ressaltos hidráulicos, etc), exposição aos agentes atmosféricos, e entre outros factores.

Em geral, as tomadas de água não devem ser incluídas nas campanhas de inspecções visuais pois tratam-se de órgãos exclusivamente de exploração. No entanto, na torre das tomadas de água da barragem do Cabril devem ser levadas a cabo este tipo de inspecções pois, para além desta incorporar as tomadas de água e a descarga de fundo, trata-se de uma estrutura muito esbelta em betão armado que se encontra imersa, sendo necessário especiais cuidados para a correcta avaliação da sua segurança.

Nos elementos estruturais que se encontrem imersos, como é o caso da torre das tomadas de água da barragem do Cabril, devem ser efectuadas inspecções recorrendo a câmaras subaquáticas, para detectar eventuais processos de deterioração.

Importa referir que a informação adquirida com as inspecções visuais, tem de ser complementada com os dados experimentais provenientes dos sistemas de instrumentação instalados, para que seja possível quantificar as referidas incidências.

Para cada obra, é necessário definir a periodicidade das inspecções visuais a efectuar, o tipo de inspecções a realizar e os principais aspectos a inspeccionar na obra e no sistema de observação.

O preenchimento da ficha de inspecção pelos técnicos responsáveis pela actividade deve contemplar todos os aspectos relevantes, podendo incluir registos fotográficos e desenhos esquemáticos.

Na perspectiva do comportamento dinâmico de barragens de betão e respectivas estruturas auxiliares, as inspecções visuais servem essencialmente para detectar e aferir qualitativamente a importância da evolução de algumas das patologias já existentes na obra ou o surgimento de novas, devidas à ocorrência de eventos sísmicos, ou a outras acções dinâmicas relevantes.

2.4.2.2 Sistemas de Observação

Como já foi dito anteriormente, o sistema de observação numa obra consiste no conjunto de instrumentos instalados para medir as principais grandezas que determinam o comportamento dessa obra. O processo de recolha e apresentação dos dados obtidos a partir da instrumentação é designado por monitorização.

A instrumentação e a monitorização permitem a obtenção e o tratamento da informação experimental com vista ao controlo de segurança das obras, a partir da comparação entre os resultados observados e o comportamento esperado da obra através dos modelos de interpretação e previsão de comportamento (este tema será abordado mais adiante) e também através da emissão de alertas acerca de eventuais alterações que possam colocar em risco a segurança estrutural destas obras.

Durante a fase de projecto, construção e primeiro enchimento da albufeira é definido o Plano de Observação, onde são avaliadas as grandezas mais adequadas a medir nas barragens de betão e nas respectivas estruturas auxiliares, de acordo com o tamanho da obra, risco potencial associado, tipo de barragem, etc. Contudo, estes Planos são frequentemente revistos, até porque têm de ser adequados às condições de exploração da obra, pelo que é possível corrigir ou melhorar a instrumentação instalada.

Uma vez que este trabalho refere-se à observação do comportamento dinâmico de barragens de betão e estruturas auxiliares, em seguida introduzem-se os aspectos mais relevantes nesta questão.

Actualmente, a caracterização do comportamento dinâmico de estruturas (frequências naturais e modos de vibração) assume grande importância em estruturas como prédios altos, pontes, torres, barragens ou em outras estruturas cujas solicitações de origem dinâmica sejam relevantes.

No âmbito da observação do comportamento dinâmico de barragens e das estruturas auxiliares, existem duas metodologias de ensaio para avaliação das suas características dinâmicas: i) ensaios de vibração forçada e; ii) ensaios de vibração ambiental.

Ensaio de Vibração Forçada

Desde 1960 que são realizados no LNEC ensaios de vibração forçada que consistem fundamentalmente, na aplicação de uma excitação (aleatória, transitória ou harmónica) à estrutura, que pode ser ou não conhecida e/ou controlada, e na medição do seu efeito sobre esta. Os instrumentos utilizados neste tipo de ensaio designam-se por vibradores de massa excêntrica, como se mostra na Figura 2.8.

Este tipo de ensaio é usualmente designado na literatura inglesa por “*input-output*”, uma vez que é introduzida uma acção (conhecida ou não) que excita a estrutura. Relativamente ao número de *inputs* (pontos de excitação) e ao número de *outputs* (pontos de medição da resposta dinâmica) pode-se adoptar um sistema SISO (single input single output), SIMO (single input multi output), MISO (multi input single output) e MIMO (multi input multi output) [Cunha e Caetano, 2006].

Dado o elevado custo associado a este tipo de ensaios, estes apenas são realizados em intervalos de tempo muito longos, não permitindo assim a obtenção de informação relevante sobre o comportamento dinâmico das obras.



a)



b)

Figura 2.8: a) Vibrador de massa excêntrica utilizado no ensaio de vibração forçada na barragem do Cabril. b) Excitador hidráulico para barragens.

Ensaio de Vibração Ambiental

O desenvolvimento tecnológico ao nível dos aparelhos utilizados para a medição de vibrações, conduziu ao aparecimento de uma outra metodologia de ensaio designadamente, os ensaios de vibração ambiental. Nestes ensaios a barragem ou as estruturas auxiliares apenas se encontram sujeitas às acções ambientais, como o vento, tráfego de veículos que circulem sobre as estruturas, os grupos de produção de energia eléctrica (que originam vibrações do tipo harmónico), sismos de baixa intensidade, o efeito da ondulação da albufeira, ou a operação dos órgãos de segurança. A instrumentação utilizada nestes ensaios é constituída por acelerómetros, como se observa na Figura 2.9.



Figura 2.9: Disposição dos acelerómetros num nicho de uma galeria de uma barragem de betão.

Este tipo de ensaio é usualmente designado na literatura inglesa por “*output-only*”, uma vez que não exige o conhecimento das acções que solicitam a estrutura.

Atendendo a que as barragens de betão são estruturas muito rígidas, as amplitudes de vibração medidas são muito baixas, pelo que é recomendável a utilização de transdutores de boa sensibilidade e sistemas de aquisição de dados com boa resolução.

Visto que este tipo de ensaios não necessitam da aplicação de qualquer tipo de excitação artificial, a sua realização torna-se mais simples e económica.

Sistemas de Observação em Contínuo

A informação experimental obtida nos ensaios de vibração forçada ou de vibração ambiental, tem contribuído para o desenvolvimento e calibração dos modelos utilizados na avaliação do comportamento dinâmico das barragens. Contudo, estes ensaios são realizados esporadicamente durante a vida útil da obra e deste modo, não é possível recolher informação suficiente de modo a garantir a segurança destas obras às acções dinâmicas a que são solicitadas. Neste sentido, foi recentemente instalado na barragem do Cabril, um sistema que permite a observação em contínuo do comportamento dinâmico da barragem [Mendes, 2009], com o objectivo de complementar os actuais sistemas de observação previstos no Plano de Observação, cujos resultados, como se sabe, são fundamentais para o controlo da segurança destas obras (Figura 2.10).

A observação dinâmica das barragens de betão em contínuo, permite observar e interpretar a resposta dinâmica destas obras durante a ocorrência de eventuais sismos, identificar mais facilmente as alterações do comportamento estrutural ao longo do tempo (eventualmente correlacionáveis com efeitos de deterioração), e também possibilita a calibração dos modelos numéricos de interpretação e previsão do comportamento dinâmico destas obras.

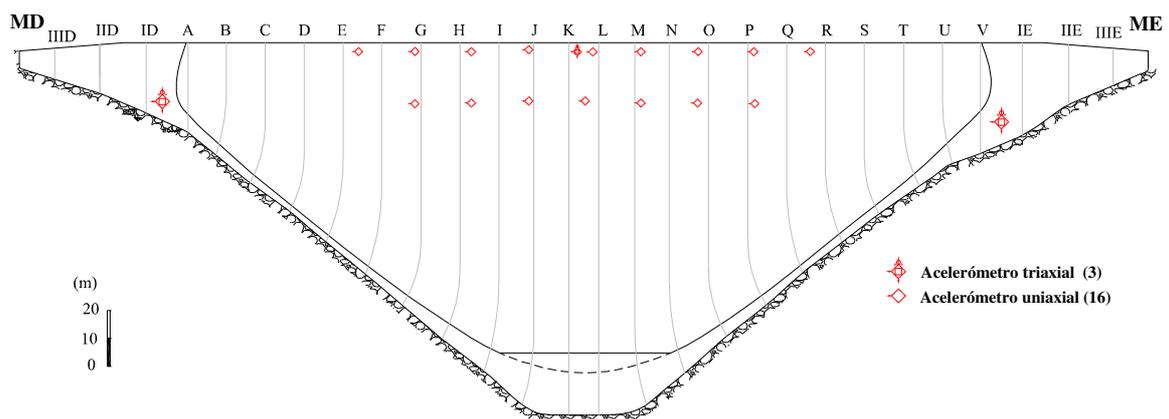


Figura 2.10: Sistema de observação do comportamento dinâmico em contínuo, instalado na barragem do Cabril [Mendes, 2009].

2.4.2.3 Modelos de Interpretação e Previsão do Comportamento Estrutural

Como já foi referido atrás, numa primeira fase define-se um modelo preliminar com o objectivo de projectar a infra-estrutura. Posteriormente, desenvolvem-se modelos de interpretação e previsão do comportamento estrutural que permitem efectuar o acompanhamento e uma previsão futura do comportamento da obra, sendo uma ferramenta fundamental no controlo de segurança das barragens e respectivas estruturas auxiliares. Geralmente, são modelos mais complexos que os modelos utilizados para projectar a obra, uma vez que é necessário ter em conta os eventuais processos de deterioração existentes, como as expansões e a fissuração significativa e também as anomalias estruturais decorrentes da actuação de sismos ou outro tipo de acções dinâmicas importantes.

Estes modelos, podem ser modelos de interpretação quantitativa, modelos físicos e modelos numéricos (método dos elementos de fronteira, método dos elementos das diferenças finitas, método dos elementos discretos e método dos elementos finitos).

Estes modelos permitem interpretar e prever o comportamento das obras ao longo do tempo e compará-lo com os resultados observados a fim de aferir a normalidade do comportamento observado (Figura 2.11). Se o comportamento observado for compatível com o comportamento previsto nos modelos, então pode-se considerar que não existem anomalias e que a obra poderá continuar em exploração sem quaisquer restrições.

Caso existam aspectos do comportamento observado que, para as acções conhecidas, não podem ser explicados, então torna-se necessário realizar estudos numéricos mais aprofundados que permitam averiguar as causas do comportamento imprevisto, essencialmente associados a problemas de deterioração. É com estes modelos de interpretação e previsão do comportamento estrutural que é possível avaliar as condições de funcionalidade e de segurança ao colapso destas obras perante as anomalias identificadas.

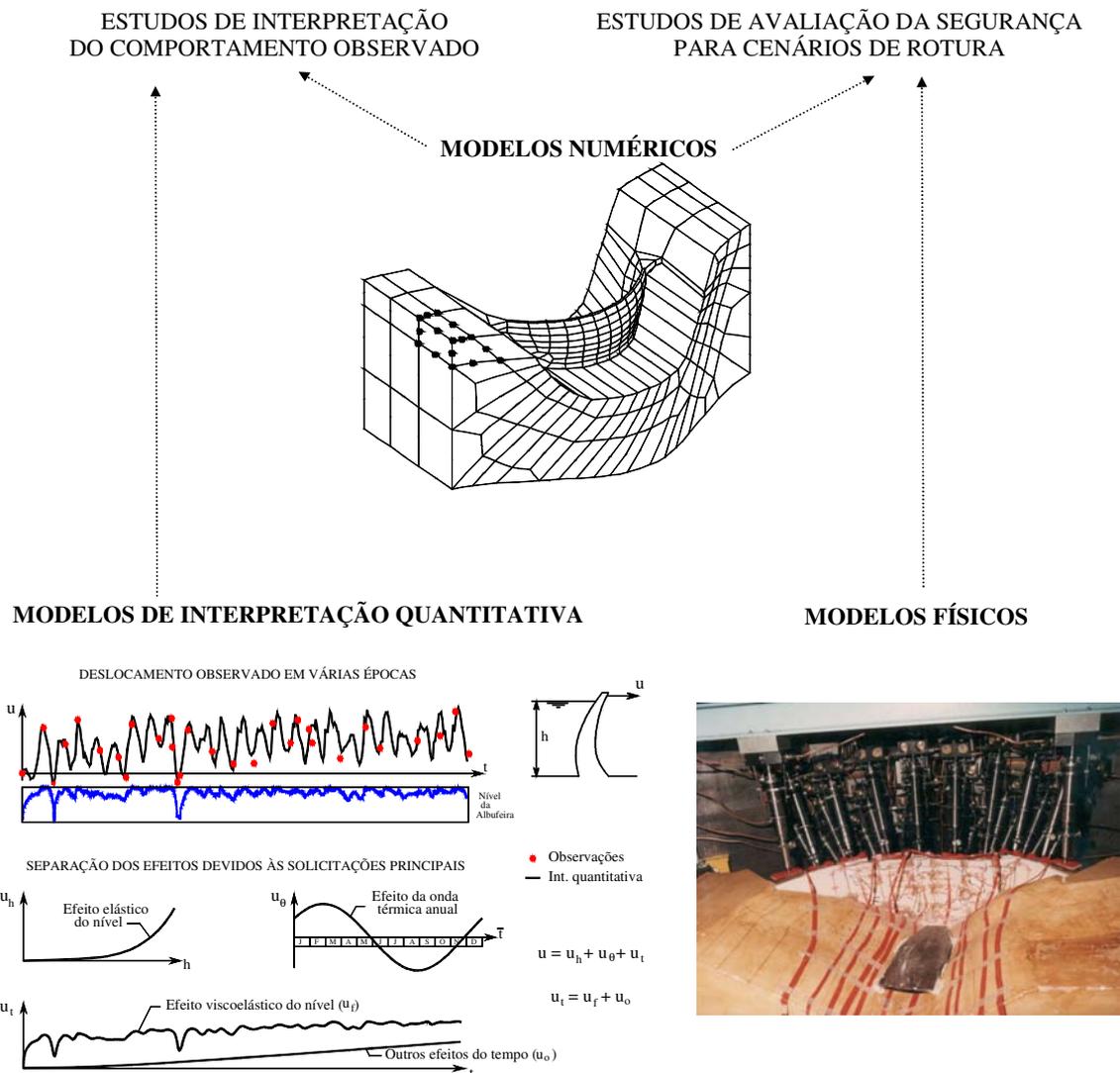


Figura 2.11: Modelos utilizados na análise do comportamento de barragens de betão [Oliveira, 2000].

Modelos de Interpretação Quantitativa

As grandezas observadas no âmbito do controlo de segurança de barragens de betão nas diversas fases da sua exploração (deslocamentos, extensões, tensões, movimento de juntas, frequências naturais, etc), devem ser analisadas tendo em conta as acções que mais significativamente as influenciam. Porém, a resposta observada resulta do efeito conjunto de várias acções, tornando-se complexo interpretar o comportamento da obra com base nos resultados observados. Deste modo, foram desenvolvidos os modelos de interpretação quantitativa que permitem separar os efeitos com base no estabelecimento de relações funcionais semi-empíricas entre as grandezas observadas e as solicitações que os originam, e na respectiva análise por técnicas estatísticas de ajuste aos valores observados.

É de salientar que, os modelos de interpretação quantitativa constituem uma importante ferramenta que, conjuntamente com a experiência adquirida em obras idênticas, permite avaliar se num dado período de observação o comportamento da obra é ou não anómalo. Todavia, sendo estes modelos de natureza não determinística, não é conveniente utilizar somente os resultados provenientes destes modelos para prever o comportamento de uma dada obra. Assim, deve proceder-se a uma utilização integrada de resultados obtidos com os modelos de interpretação quantitativa e resultados fornecidos pelos modelos numéricos.

Modelos Físicos

A modelação física surgiu nas décadas de 40 e 50 para apoio de projectos de grandes barragens de betão portuguesas devido à limitada capacidade dos métodos de cálculo disponíveis na altura. É de referir a larga experiência do LNEC nesta área, principalmente no desenvolvimento de técnicas para determinar a forma ideal de barragens abóbada.

Os modelos físicos (ou modelos reduzidos) são actualmente utilizados em estudos hidráulicos, com vista à definição de formas de descarregadores (Figura 2.12) e, na análise estrutural, em estudos de cenários de rotura para determinação de coeficientes de segurança globais (Figura 2.13). Estes modelos baseiam-se na Teoria da Semelhança, segundo a qual é possível conhecer o comportamento de protótipos se for conhecido o comportamento de modelos físicos semelhantes aos protótipos. Um protótipo e o respectivo modelo físico dizem-se sistemas fisicamente semelhantes relativamente a um dado conjunto de grandezas, se existir uma relação constante entre valores homólogos dessas grandezas nos dois sistemas.

É de salientar que a modelação física para análise de cenários de rotura actualmente ainda tem muito interesse, principalmente porque constituiu uma forma de verificar a fiabilidade dos modelos numéricos.



a)



b)

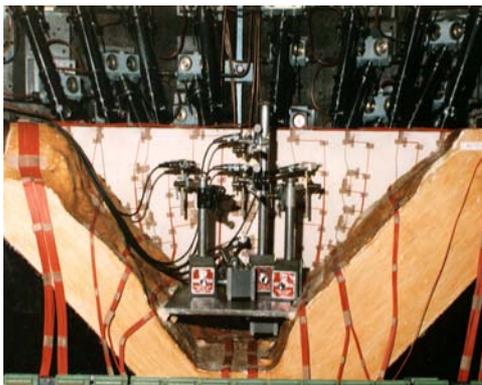


c)



d)

Figura 2.12: Modelação física no apoio a projectos de órgãos hidráulicos (LNEC – DHA). a) Estudo dos descarregadores de superfície da barragem de Ribeiradio; b) reforço de potência na barragem da Bemposta; c) barragem da Paradela – estudo de descarregadores de superfície, em canal e em poço; d) nova barragem do Alto Ceira – estudo do descarregador de superfície (lâmina livre).



a)



b)

Figura 2.13: Utilização de modelos físicos em estudos de verificação da segurança para cenários de rotura. a) Barragem do Alto Lindoso (decréscimo da resistência); b) barragem do Alqueva (movimento horizontal na falha da fundação) (adaptado de [Oliveira, 2000]).

Modelos Numéricos

Na verificação da segurança das primeiras grandes barragens de betão e das estruturas auxiliares durante a fase de projecto, utilizavam-se os modelos numéricos, onde eram admitidas várias hipóteses simplificativas face à pouca experiência na modelação matemática destas estruturas e, utilizavam-se também os modelos físicos, os quais inicialmente eram mais versáteis e menos dispendiosos que os modelos numéricos.

Na sequência de trabalhos pioneiros da década de 50, inseridos no âmbito do programa de exploração espacial dos Estados Unidos da América, assistiu-se na década de 60 a um desenvolvimento dos métodos numéricos para análise estrutural, em simultâneo com o aparecimento dos primeiros computadores. Desenvolveram-se vários métodos numéricos, nomeadamente: i) o método dos elementos de fronteira; ii) o método dos elementos das diferenças finitas; iii) o método dos elementos discretos e; iv) o método dos elementos finitos. De entre os métodos numéricos referidos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) [Zienkiewicz, 1967; Pedro, 1977] que, para além de ter revolucionado a análise estrutural é também o método mais utilizado.

Actualmente o M.E.F. é um método bastante versátil e fiável, sendo considerado uma ferramenta indispensável que, após validação e calibração com base nos resultados obtidos em ensaios de materiais e/ou de modelos físicos, permite estudar cenários correntes ou de rotura e efectuar extrapolações para o protótipo com custos adicionais mínimos.

A utilização deste método para avaliar o comportamento dinâmico de estruturas é fundamentalmente para estudar o comportamento destas face a um sismo, acção dinâmica que desde sempre tem preocupado os engenheiros. De forma a verificar a fiabilidade do M.E.F. na avaliação das características dinâmicas de uma estrutura (frequências naturais e configurações modais), tem sido utilizado em conjunto com os modelos numéricos, os modelos de identificação modal aplicados a séries temporais de dados obtidos experimentalmente.

Um dos métodos de identificação modal será abordado no capítulo 3, e os fundamentos do método dos elementos finitos no âmbito do comportamento dinâmico de estruturas, apresentam-se no capítulo 4 deste trabalho.

2.5 Considerações finais

Neste capítulo descreveram-se as principais actividades de controlo de segurança de barragens e estruturas auxiliares, a desenvolver durante a vida útil destas obras, desde a fase de projecto até à fase final da exploração.

Estas actividades envolvem a instalação de adequados sistemas de observação, a realização de minuciosas inspecções visuais de modo a detectar atempadamente possíveis deficiências ou insuficiências, e o desenvolvimento de modelos de interpretação e previsão do comportamento das obras em exploração, de forma a prevenir situações de acidente ou incidente.

Actualmente, com as crescentes preocupações em termos de segurança das estruturas sob acções sísmicas, tem aumentado o interesse em desenvolver sistemas que visam a observação e a análise do comportamento dinâmico destas estruturas. Com estes sistemas é possível obter mais informação sobre o estado global das barragens e respectivas estruturas auxiliares, o que permite complementar as informações resultantes das outras actividades de controlo de segurança.

Capítulo 3

Conceitos Fundamentais de Dinâmica de Estruturas

3.1 Considerações iniciais

Apesar da maioria das estruturas de engenharia estarem sujeitas a cargas que variam ao longo do tempo, a maior parte destas são calculadas a partir dos métodos convencionais com base em análises estáticas, não só pela simplicidade de cálculo, mas também porque muitas vezes a variação das cargas é tão lenta que não está completamente incorrecto considerá-las como estáticas. Na verdade, as cargas estáticas constituem um caso particular das cargas dinâmicas e, ao efectuar uma análise das estruturas, é conveniente distinguir quais as cargas estáticas e dinâmicas a actuar, para avaliar a resposta da estrutura para cada tipo de carga separadamente, para depois se obter a resposta total considerando todos os efeitos.

De facto, em estruturas como as grandes barragens, pontes muito esbeltas, ou, em geral, estruturas que estejam sujeitas a sismos, à acção do vento, a vibrações devidas ao funcionamento de motores, ou outras, é necessário ter em conta os efeitos dinâmicos para uma correcta avaliação da sua segurança.

Neste capítulo são abordados os principais conceitos de dinâmica de estruturas na perspectiva do estudo das formulações no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Em primeiro lugar é analisado o caso mais simples de um modelo estrutural de um grau de liberdade, também designado por oscilador de um grau de liberdade, que permite introduzir os principais conceitos da dinâmica de estruturas, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, assim como efectuar uma transição para o estudo de modelos estruturais de vários graus de liberdade [Duarte, 1978].

No estudo da dinâmica para o caso de modelos estruturais com vários graus de liberdade, refere-se a importância do conceito de modo de vibração e de coordenadas modais.

Por fim, referem-se as particularidades da análise de modelos com vários graus de liberdade sob acções sísmicas, referindo em particular, o método do espectro de resposta.

3.2 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com um grau de liberdade. Análise no domínio do tempo

3.2.1 Enquadramento

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas reais representáveis por modelos numéricos com vários milhares de graus de liberdade, como é o caso das barragens, pontes ou edifícios, exige a resolução de sistemas de equações diferenciais de grandes dimensões – tantas equações quanto o número de graus de liberdade (G.L.) em causa.

Para iniciar o estudo destes casos envolvendo modelos numéricos, é conveniente começar pelo estudo do comportamento dinâmico de modelos mais simples com apenas alguns graus de liberdade; pode-se pensar por exemplo, no caso do comportamento dinâmico de um edifício de 3 pisos, com apenas 1 G.L. de translação ao nível de cada piso. No entanto, este caso redutível a um sistema de apenas 3 equações diferenciais, corresponde a um problema físico relativamente complexo devido aos efeitos de interacção entre os pisos durante o movimento. É por esta razão que, para introduzir os conceitos de dinâmica de estruturas é conveniente começar por analisar um modelo ainda mais simples, como é o caso por exemplo, de um edifício de 1 piso com apenas 1 G.L.

Veremos em seguida que a análise do comportamento dinâmico de estruturas com N graus de liberdade, pode-se converter na resolução separada de N equações idênticas à equação de modelos de 1 G.L. e daí a importância de se estudar primeiramente com detalhe o comportamento dinâmico dos modelos mais simples de apenas 1 G.L.

3.2.2 Análise do comportamento dinâmico de um oscilador de 1 G.L.

No estudo do comportamento dinâmico de estruturas simples (por exemplo, um edifício de 1 piso), estas podem ser idealizadas como um oscilador de 1 grau de liberdade, do tipo sistema massa-mola: mola de rigidez k , massa m e amortecimento c .

O comportamento dinâmico do modelo físico que se apresenta na figura seguinte, corresponde a um edifício de apenas 1 piso (com 4 pilares materializados por intermédio de

lâminas de alumínio e piso em chapa de aço com 1cm de espessura) pode ser bem simulado através de um modelo em que se considera apenas 1 G.L. correspondente ao deslocamento de translação do piso na direcção de menor rigidez (x_1).

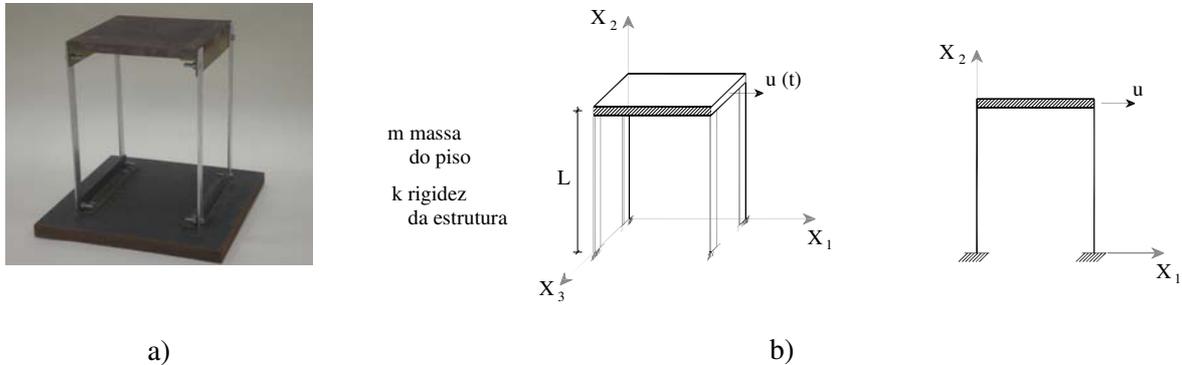


Figura 3.1: a) Modelo físico de um edifício de um piso. b) Perspectiva e representação esquemática do modelo de 1 G.L.

Esta estrutura sendo solicitada por um força externa variável no tempo $f(t)$, movimenta-se segundo o grau de liberdade considerado a partir da sua posição de equilíbrio estático. O equilíbrio dinâmico traduz-se em cada instante t , pelo equilíbrio entre todas as forças envolvidas no movimento, ou seja, em cada instante deve verificar-se a seguinte igualdade:

$$f_I(t) + f_A(t) + f_E(t) = f(t) \quad (3.1)$$

em que $f(t)$ é a referida força exterior no instante t e,

- $f_I(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$ representa a força de inércia (2ª Lei de Newton);
- $f_A(t) = c \cdot \dot{u}(t)$ representa a força de amortecimento (considerando a hipótese de amortecimento viscoso) e;
- $f_E(t) = k \cdot u(t)$ representa a força de restituição elástica.

Deste modo, a equação do movimento ou equação do equilíbrio dinâmico, escrita na forma diferencial (e após a substituição das expressões anteriores) é a seguinte:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = f(t), \quad u = u(t) \quad (3.2)$$

3.2.3 Vibração livre sem amortecimento

Primeiramente será estudado o movimento oscilatório mais simples que pode ocorrer, ou seja, o movimento de vibração livre sem amortecimento, correspondente a uma situação em que não existem forças exteriores aplicadas, $f(t)=0$ e em que se considera que não existe amortecimento, $c=0$ (neste caso só poderá existir movimento se for imposto um deslocamento inicial e/ou uma velocidade inicial).

A equação diferencial do movimento é então dada por:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.3)$$

Considerando por simplificação que a massa e a rigidez são escalares unitários ($m=1$ e $k=1$), as soluções desta equação $u = u(t)$ devem corresponder a funções cuja 2ª derivada $\ddot{u}(t)$ somada com a própria função $u(t)$ é sempre zero. Facilmente se percebe que as funções trigonométricas $\cos(t)$ e $\sin(t)$ satisfazem esta condição; assim, pela teoria das equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, a solução geral será dada pela combinação linear das funções $\cos(t)$ e $\sin(t)$.

Caso m e k não sejam constantes unitárias, verifica-se que a solução geral da equação anterior é do tipo:

$$u(t) = a \cdot \cos(\omega_N t) + b \cdot \sin(\omega_N t), \quad a \text{ e } b \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

onde, $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Fisicamente este resultado significa que um oscilador de 1 G.L. de massa m e rigidez k tende a oscilar naturalmente com uma frequência natural ω_N .

A amplitude das oscilações mantém-se constante ao longo do tempo visto que o amortecimento é nulo, tal como se mostra na Figura 3.2.

Para se obter a solução particular, basta conhecer duas condições iniciais para determinar o valor das constantes a e b . Em geral, conhece-se à partida o deslocamento inicial $u(0) = u_0$ e a velocidade inicial $\dot{u}(0) = v_0$, do que resulta:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega_N t) + \frac{v_0}{\omega_N} \cdot \sin(\omega_N t), \quad \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

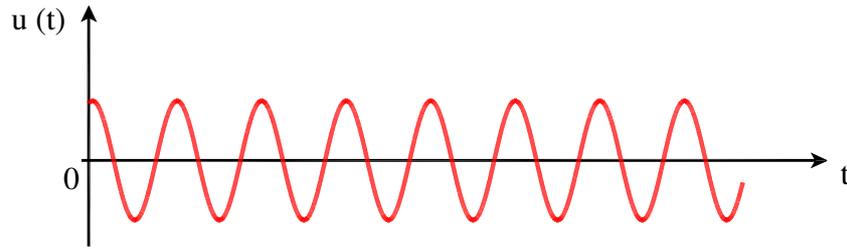


Figura 3.2: Representação gráfica dos deslocamentos da estrutura ao longo do tempo em regime de vibração livre sem amortecimento.

Neste ponto é interessante salientar que a solução anterior pode ser obtida de forma mais geral pelo método do polinómio característico, em que se procuram soluções do tipo $u(t) = e^{\lambda t}$. Com este método conclui-se que existem duas funções complexas linearmente independentes do tipo $u(t) = e^{+i\omega_N t}$ e $u(t) = e^{-i\omega_N t}$, que são solução da equação diferencial. Então, sendo $\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, e substituindo na equação (3.3) tem-se que:

$$\underbrace{(m \cdot \lambda^2 + k)}_{\text{método do polinómio característico}} \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{u(t)} = 0 \quad (3.6)$$

$$m \cdot \lambda^2 + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \lambda = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \lambda = +i \cdot \omega_N \quad \text{ou} \quad \lambda = -i \cdot \omega_N \quad (3.7)$$

donde se conclui que, $u(t) = e^{+i\omega_N t}$ e $u(t) = e^{-i\omega_N t}$ são de facto, duas soluções da equação $m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0$.

Este resultado significa que a solução geral da equação (3.4), pode ser dada, num domínio mais geral, por:

$$u(t) = a \cdot e^{+i\omega_N t} + b \cdot e^{-i\omega_N t}, \quad a \text{ e } b \in \mathbb{C} \quad (3.8)$$

Esta solução geral corresponde a uma família de funções complexas que constituem um espaço de funções gerado pelas funções $e^{+i\omega_N t}$ e $e^{-i\omega_N t}$ (base do espaço). Este espaço contém todas as soluções da equação do movimento, e em particular contém o subespaço das funções reais que são as que têm significado físico, tal como se ilustra na Figura 3.3.

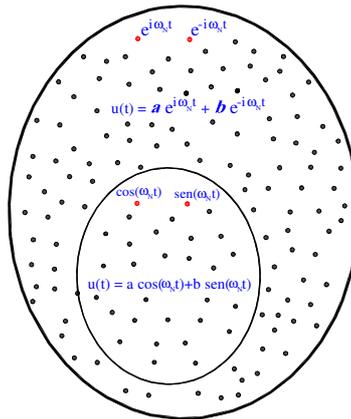


Figura 3.3: Representação esquemática do espaço das soluções complexas da equação $m\ddot{u} + ku = 0$ e do correspondente subespaço das soluções reais.

O subespaço das soluções reais obtém-se recorrendo à famosa fórmula de Euler dos complexos ($e^{i\omega_N t} = \cos(\omega_N t) + i \cdot \sin(\omega_N t)$). De facto, tomando $a = 1/2$ e $b = 1/2$ e recorrendo à fórmula de Euler, obtém-se uma conhecida solução real e, do mesmo modo, fazendo $a = +1/2i$ e $b = -1/2i$ resulta uma outra solução real bem conhecida, como se mostra a seguir:

$$\frac{e^{i\omega_N t} + e^{-i\omega_N t}}{2} = \cos(\omega_N t) \quad \text{e}, \quad \frac{e^{i\omega_N t} - e^{-i\omega_N t}}{2i} = \sin(\omega_N t) \quad (3.9)$$

A combinação linear destas duas soluções reais corresponde, como se sabe, à anterior solução geral real (3.4).

3.2.4 Vibração livre com amortecimento

Este tipo de movimento é de facto, o caso mais geral da vibração livre, ou seja, não existem forças de excitação a actuar e considera-se que o amortecimento é não nulo. As forças de amortecimento são responsáveis pelo conhecido efeito de dissipação de energia, o que conduz a uma redução da amplitude do movimento oscilatório ao longo do tempo (Figura 3.4).

A equação diferencial que rege este movimento é dada por:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.10)$$

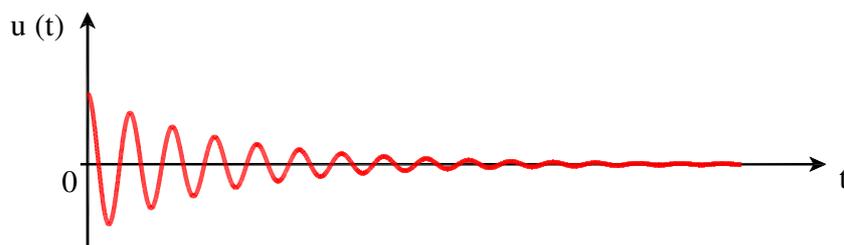


Figura 3.4: Representação gráfica dos deslocamentos da estrutura ao longo do tempo em regime de vibração livre com amortecimento.

Neste caso, a solução geral do movimento também pode ser obtida considerando que funções do tipo $e^{\lambda t}$ são solução da equação.

Assim sendo, $u(t) = e^{\lambda t}$, $\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda u$ e $\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 u$, e tendo como base o já referido método do polinómio característico, tem-se, $(m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) \cdot u = 0$, o que conduz à seguinte equação algébrica do 2º grau, cujas raízes λ_1 e λ_2 correspondem aos pretendidos valores de λ :

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (3.11)$$

Matematicamente resultam três casos distintos consoante o discriminante $(c^2 - 4mk)$ seja positivo, nulo ou negativo. Nos problemas de engenharia civil, o amortecimento c é geralmente baixo, muito inferior ao amortecimento crítico dado por $c_{\text{crit}} = \sqrt{4mk} = 2\sqrt{mk}$, pelo que interessa analisar apenas o caso em que o discriminante é negativo.

Nesta situação de discriminante negativo, ou seja, $c^2 < 4mk$, as raízes λ são constituídas por uma parte real α e outra imaginária β :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} i = \alpha \pm \beta i \quad (3.12)$$

Isto significa que nestas condições de amortecimento, a equação do movimento (3.10) tem duas soluções complexas do tipo:

$$u(t) = e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \quad \text{e,} \quad u(t) = e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} \quad (3.13)$$

Através da combinação linear destas duas funções complexas, utilizando os coeficientes $a = 1/2, b = 1/2, a = +1/2i$ e $b = -1/2i$ e recorrendo à fórmula de Euler, obtêm-se as duas soluções reais seguintes:

$$u(t) = \frac{e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} + e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t}}{2} = e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \quad e, \quad (3.14)$$

$$u(t) = \frac{e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} - e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t}}{2i} = e^{\alpha t} \cdot \text{sen}(\beta t) \quad (3.15)$$

Estas duas soluções reais formam a base do subespaço que contém todas as soluções reais da equação (3.10) para $c < c_{\text{crit}}$ o que significa que a solução geral real é da seguinte forma:

$$u(t) = a \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + b \cdot e^{\alpha t} \cdot \text{sen}(\beta t), \quad a \text{ e } b \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

Em dinâmica de estruturas é usual escrever a solução anterior utilizando os parâmetros ω_N (frequência natural), ξ (coeficiente de amortecimento relativo) e ω_A (frequência amortecida), pelo que a solução (3.16) assume a forma seguinte:

$$u(t) = (a \cdot \cos(\omega_A t) + b \cdot \text{sen}(\omega_A t)) \cdot e^{-\xi \omega_N t}, \quad a \text{ e } b \in \mathbb{R} \quad (3.17)$$

onde,

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{frequência natural ou própria do sistema};$$

$$\xi = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \rightarrow \text{coeficiente de amortecimento relativo do sistema } (\xi < 1);$$

$$\omega_A = \omega_N \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \rightarrow \text{frequência amortecida do sistema.}$$

Assim, os anteriores parâmetros α e β podem ser escritos em termos de ω_N , ξ e de ω_A :

$$\alpha = -\frac{c}{2m} = -\xi \cdot \omega_N \quad e, \quad \beta = \omega_A = \omega_N \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.18)$$

Para as condições iniciais $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$, obtêm-se uma solução particular da equação em que as constantes a e b tomam os valores:

$$a = u_0 \quad e, \quad b = \frac{v_0 + u_0 \cdot \xi \cdot \omega_N}{\omega_A} \quad (3.19)$$

3.2.5 Vibração forçada

Nos casos abordados anteriormente, as estruturas não estavam sujeitas a forças de excitação aplicadas durante o movimento. De facto, os casos de maior interesse para as estruturas em engenharia civil correspondem a situações em que estas estão sujeitas a forças dinâmicas que variam durante o movimento. Estas forças podem ser devidas à acção do vento, ao funcionamento de máquinas rotativas (forças do tipo harmónicas), a impactos (forças impulsivas), a acelerações sísmicas na base (forças de inércia), a efeitos associados ao ruído ambiente, entre outras, como se pode observar na seguinte figura.

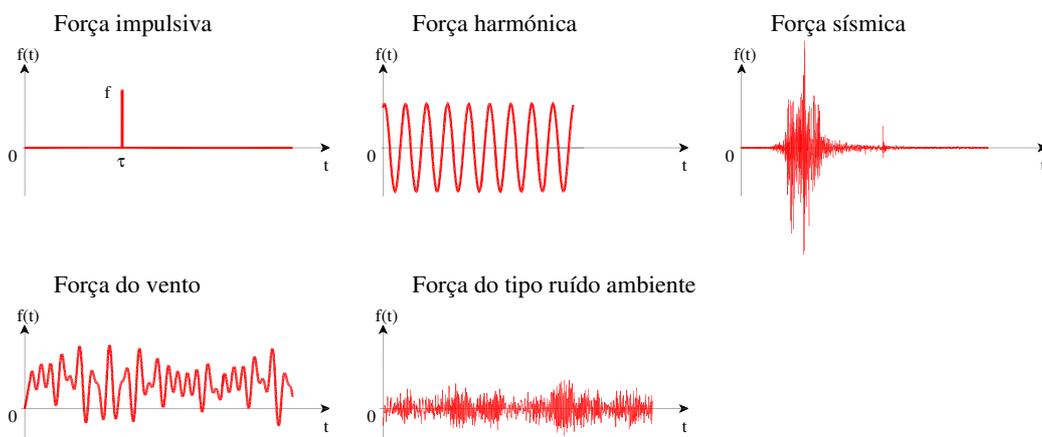


Figura 3.5: Representação gráfica da variação ao longo do tempo de alguns tipos de forças dinâmicas que podem actuar em estruturas de engenharia civil [Oliveira, 2007].

Existindo forças exteriores aplicadas durante o movimento, $f = f(t)$, a equação de equilíbrio dinâmico é então dada pela seguinte expressão:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = f(t) \quad (3.20)$$

A solução geral desta equação resulta da soma da solução geral correspondente à equação homogénea (termo independente nulo), analisada anteriormente, com uma solução particular qualquer da equação completa (3.20), isto é, $u(t) = u_H(t) + u_P(t)$. E, tendo em conta que o caso mais geral é a situação onde existe amortecimento, a solução geral é então dada por:

$$u(t) = (a \cdot \cos(\omega_A t) + b \cdot \text{sen}(\omega_A t)) \cdot e^{-\xi \omega_N t} + u_P(t) \quad (3.21)$$

Basta então encontrar uma solução particular para qualquer tipo de força $f(t)$.

3.2.5.1 Resposta a Forças Harmónicas

A determinação da solução particular $u_p = u_p(t)$ para qualquer tipo de força $f(t)$ pode ser conseguida com toda a generalidade recorrendo ao conceito de resposta a forças impulsivas e ao princípio da sobreposição de efeitos. Porém, é conveniente analisar primeiro a resposta a forças com variação harmónica ao longo do tempo visto tratar-se de um caso em que existe uma solução analítica relativamente simples.

Uma força com variação harmónica ao longo do tempo é descrita matematicamente por uma expressão do tipo:

$$f(t) = F_A \cdot \cos(\omega_f t) + F_B \cdot \text{sen}(\omega_f t), \quad \text{ou} \quad f(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_f t - \phi) \quad (3.22)$$

onde,

$\omega_f \rightarrow$ frequência da força (rad/s);

$F_0 = \sqrt{F_A^2 + F_B^2} \rightarrow$ amplitude da força harmónica;

$\phi \rightarrow$ ângulo de fase ou fase: $\phi = \arctan\left(\frac{F_B}{F_A}\right)$.

Introduzindo na equação da dinâmica a expressão da força harmónica tem-se que:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_A \cdot \cos(\omega_f t) + F_B \cdot \text{sen}(\omega_f t) \quad (3.23)$$

Estando a estrutura sujeita a uma força deste tipo, é previsível que a sua resposta tenda também a ser harmónica e com uma frequência igual à da força.

Deste modo, é admissível adoptar uma solução particular harmónica do género:

$$u_p(t) = U_A \cdot \cos(\omega_f t) + U_B \cdot \text{sen}(\omega_f t) \quad (3.24)$$

Para se obterem os parâmetros U_A e U_B , substitui-se $u_p(t)$ e respectivas derivadas na equação da dinâmica, resultando assim que:

$$U_A = \frac{F_A \cdot (k - m\omega_f^2) - F_B \cdot c \cdot \omega_f}{(k - m\omega_f^2)^2 + c^2 \cdot \omega_f^2} \quad \text{e}, \quad (3.25)$$

$$U_B = \frac{F_B \cdot (k - m\omega_f^2) + F_A \cdot c \cdot \omega_f}{(k - m\omega_f^2)^2 + c^2 \cdot \omega_f^2} \quad (3.26)$$

Deste modo, a solução geral para uma excitação harmónica é dada por:

$$u(t) = \underbrace{(a \cdot \cos(\omega_A t) + b \cdot \text{sen}(\omega_A t)) \cdot e^{-\xi \omega_N t}}_{\text{parcela transitória}} + \underbrace{U_A \cdot \cos(\omega_f t) + U_B \cdot \text{sen}(\omega_f t)}_{\text{parcela estacionária}} \quad (3.27)$$

Considerando as seguintes condições iniciais $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$, é possível obter a solução particular da equação, em que, as constantes a e b tomam os seguintes valores:

$$a = u_0 - U_A \quad \text{e}, \quad b = \frac{v_0}{\omega_A} + a \cdot \xi \cdot \frac{\omega_N}{\omega_A} - U_B \cdot \frac{\omega_f}{\omega_A} \quad (3.28)$$

É de salientar que, a primeira parcela de $u(t)$, que corresponde à solução geral da equação homogénea $u_H(t)$ é designada por parcela transitória que é caracterizada por apresentar uma frequência igual à frequência amortecida da estrutura e, para valores de ξ positivos, esta parcela anula-se à medida que t aumenta; a outra parcela designa-se por parcela estacionária ou forçada, cuja frequência é igual à da frequência da força aplicada. A resposta total da estrutura ao longo do tempo tenderá para a parcela estacionária, visto que a transitória anula-se, tal como se pode visualizar no gráfico seguinte.

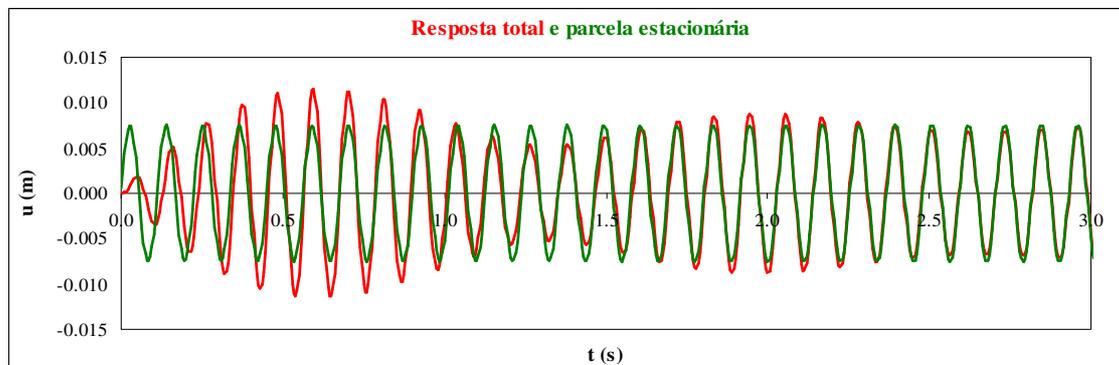


Figura 3.6: Representação gráfica da tendência da resposta total para a parcela estacionária.

Ainda neste ponto é importante referir a utilidade de recorrer a gráficos no domínio da frequência para interpretar o fenómeno da ressonância. Este fenómeno é caracterizado por existir um aumento das amplitudes das oscilações quando a frequência da excitação iguala a frequência própria da estrutura ($\omega_f \cong \omega_N$).

Como tal, é frequente efectuar um gráfico com a representação da amplitude da resposta estacionária (que, tende a ser igual à resposta total) em função da frequência da força de

excitação e um outro gráfico com a representação do ângulo de fase também este em função da frequência da força.

RESPOSTA DE UM OSCILADOR SIMPLES DE FREQUÊNCIA NATURAL $\omega_N = 60 \text{ RAD/S}$ A FORÇAS HARMÔNICAS DE FREQUÊNCIA ω_f

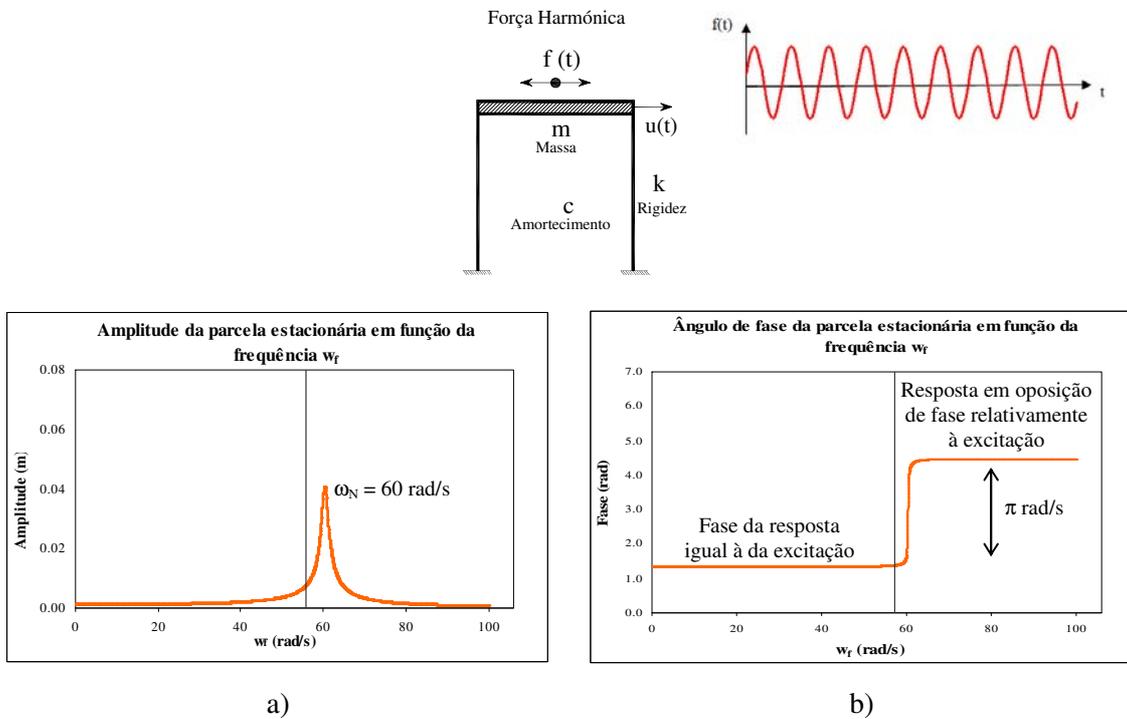


Figura 3.7: Representação gráfica da amplitude a) e do ângulo de fase b) da resposta estacionária em função da frequência de excitação.

No gráfico da Figura 3.7 a), constata-se que a amplitude máxima da estrutura associado ao fenómeno da ressonância, ocorre quando $\omega_f = \omega_N$, o que corresponde no gráfico ao pico localizado sensivelmente a 60 rad/s, isto é, a estrutura em causa tinha uma frequência natural próxima dos 60 rad/s. Quando $\omega_f = 0$, a resposta da estrutura é igual à resposta estática

$u = \frac{F}{K}$. Outro aspecto interessante é que, ligeiramente antes e depois de ocorrer a ressonância

$\left(\frac{3}{4} \omega_N < \omega_f < \frac{5}{4} \omega_N \right)$ surge um outro efeito designado por batimentos (Figura 3.8).

Este fenómeno é tanto mais acentuado quanto menor for o amortecimento da estrutura.

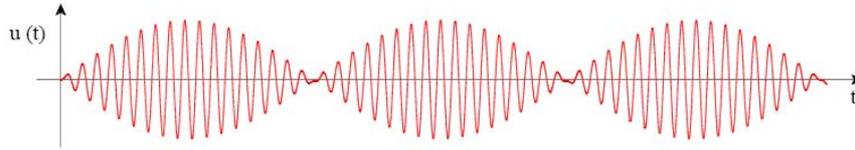


Figura 3.8: Representação gráfica da resposta em batimento $\left(\frac{3}{4}\omega_N < \omega_f < \frac{5}{4}\omega_N\right)$.

No gráfico da Figura 3.7 b) verifica-se que, quando $\omega_f \ll \omega_N$, a força excitadora e a estrutura estão em fase, ou seja, a força centrífuga devida ao motor tem o mesmo sentido que a resposta da estrutura; para $\omega_f \gg \omega_N$, a força excitadora $f(t)$ e o deslocamento $u(t)$ correspondem a funções harmónicas que estão em oposição de fase (diferença de fase de π radianos), isto é, em cada instante t têm sentidos contrários.

3.2.5.2 Resposta a Forças com Variação Arbitrária ao longo do tempo

Este é o caso mais geral no estudo do comportamento dinâmico de modelos de 1 G.L., pois as estruturas são frequentemente solicitadas por forças dinâmicas com uma variação arbitrária ao longo do tempo, como é o caso da ocorrência de um sismo, a acção do vento, ruído ambiente, etc. A solução particular que será seguidamente deduzida e apresentada, é válida para qualquer tipo de forças dinâmicas, até mesmo para as harmónicas. Para tal, será necessário recorrer ao conceito de resposta a um impulso e ao princípio da sobreposição de efeitos.

Uma força constante f_0 aplicada durante um curto intervalo de tempo Δt , origina um impulso de intensidade $I_{f_0} = f_0 \cdot \Delta t$. A actuação desta força constante f_0 durante o intervalo Δt e sobre

uma dada massa m , provoca uma aceleração $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (2ª Lei de Newton) tal que,

$$f_0 = m \cdot a \Leftrightarrow f_0 = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow I_{f_0} = f_0 \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad (3.29)$$

No entanto, considera-se que a força actua num instante e não num intervalo de tempo finito Δt , portanto, admite-se que $\Delta t \rightarrow 0$ e que $f \rightarrow \infty$.

Assim, um impulso unitário corresponde ao integral no tempo de uma força dada por um delta de Dirac $f(t) = \delta(t)$ (entidade matemática cujo integral é exactamente igual a 1).

Um impulso de intensidade f_0 é então dado pelo integral da força $f(t) = f_0 \cdot \delta(t)$, tal que:

$$I_{f_0} = \int_0^{+\infty} f_0 \cdot \delta(t) dt = f_0 \quad (3.30)$$

Para o instante $t=0$, a velocidade inicial que se obtém é proporcional à intensidade do impulso e inversamente proporcional à massa, tal como se mostra seguidamente:

$$v = \frac{I_{f_0}}{m} = \frac{f_0}{m} \quad (3.31)$$

Desta forma, pode-se concluir que a solução particular devido à aplicação de um impulso de intensidade f_0 num instante inicial $t=0$, corresponde à resposta em regime de vibração livre com amortecimento, considerando um deslocamento inicial nulo e uma velocidade $v = \frac{f_0}{m}$:

$$u_p(t) = \left(\frac{f_0/m}{\omega_A} \right) \cdot e^{-\xi\omega_N t} \cdot \text{sen}(\omega_A t) \quad (3.32)$$

Considerando que a intensidade do impulso f_0 é unitário, então obtém-se a designada função de resposta a um impulso unitário $h(t)$ dada por:

$$h(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_A} \cdot e^{-\xi\omega_N t} \cdot \text{sen}(\omega_A t) \quad (3.33)$$

A partir da equação (3.33) pode-se deduzir a equação que traduz a actuação de uma força impulsiva unitária num instante genérico $t = \tau$ (Figura 3.9).

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_A} \cdot e^{-\xi\omega_N (t - \tau)} \cdot \text{sen}(\omega_A (t - \tau)) \quad (3.34)$$

Para uma força impulsiva f_0 de intensidade qualquer, a resposta da estrutura é então dada por:

$$f_0 \cdot h(t - \tau) = \frac{f_0}{m \cdot \omega_A} \cdot e^{-\xi\omega_N (t - \tau)} \cdot \text{sen}(\omega_A (t - \tau)) \quad (3.35)$$

Se uma estrutura estiver sujeita a uma sequência de forças impulsivas, com diferentes intensidades e aplicadas em diferentes instantes, a resposta total $u_p(t)$ corresponde ao somatório das respostas de cada um desses impulsos (princípio da sobreposição de efeitos), ou seja,

$$u_p(t) = \sum_{i=1}^n f_n \cdot h(t - \tau_n) \quad (3.36)$$

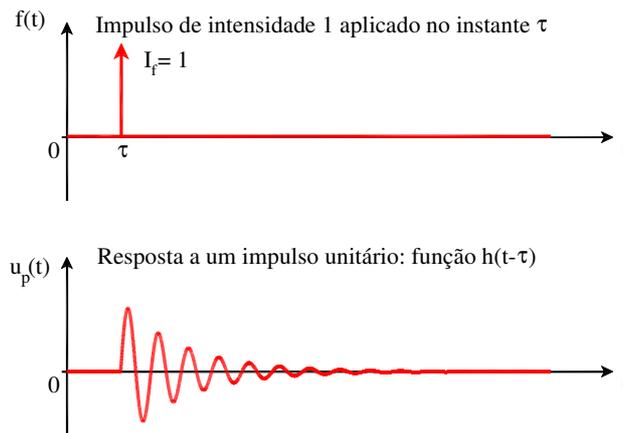


Figura 3.9: Representação gráfica da aplicação de um impulso unitário e da sua resposta para um instante genérico $t = \tau$ [Oliveira, 2007].

Resposta a forças com variação arbitrária ao longo do tempo. Integral de convolução

A resposta dinâmica para uma força impulsiva contínua $f(t)$, com variação arbitrária ao longo do tempo pode ser obtida através da sobreposição das respostas a uma sequência infinita de impulsos infinitesimalmente próximos (Figura 3.10). Esta sobreposição é traduzida por um integral designado por integral de convolução ou de Duhamel, que corresponde à solução particular em questão, para condições iniciais nulas ($u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0$):

$$u_p(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (3.37)$$

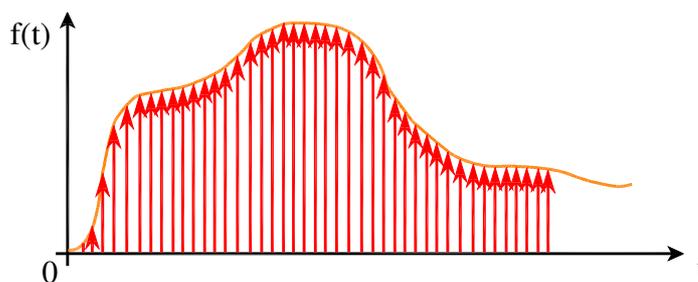


Figura 3.10: Representação esquemática da aproximação de uma força com variação contínua ao longo do tempo através de uma sequência de infinitos impulsos infinitesimalmente próximos.

Deste modo, a solução correspondente à actuação de uma força $f(t)$ com variação arbitrária ao longo do tempo é então dada por:

$$u(t) = \left(u_0 \cdot \cos(\omega_A t) + \left(\frac{v_0 + u_0 \cdot \xi \cdot \omega_N}{\omega_A} \right) \cdot \text{sen}(\omega_A t) \right) \cdot e^{-\xi \omega_N t} + \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (3.38)$$

O integral de convolução pode ser calculado numericamente a partir do método de integração que consiste na aproximação da área sob uma curva através da soma de áreas de trapézios, isto é:

$$u_p(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \approx \sum A_{\text{trapézios}} \quad (3.39)$$

Contudo, neste método das áreas dos trapézios, o cálculo torna-se computacionalmente pouco eficiente, uma vez que exige, para cada instante t uma integração completa. Deste modo, recorre-se a um outro método mais eficiente, denominado por método da fórmula recursiva, que fornece resultados exactos para forças definidas no tempo por troços lineares (Figura 3.11).

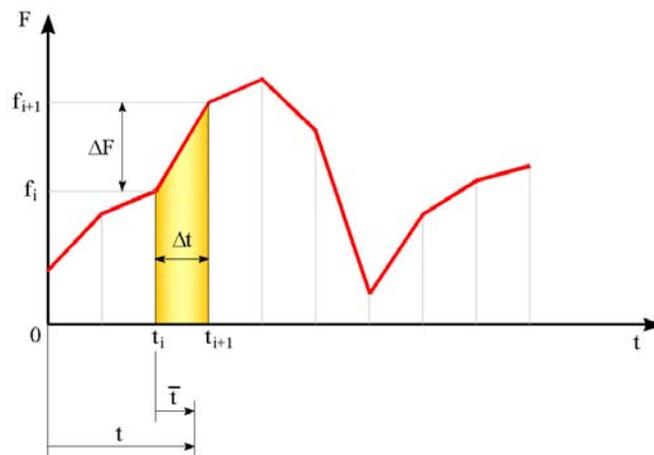


Figura 3.11: Representação de uma história de carga definida por troços lineares.

Na verdade, este método até pode ser utilizado para forças que não são exactamente definidas por troços lineares, na medida em que, qualquer história de cargas pode ser razoavelmente aproximada por troços lineares, pois essa aproximação apenas depende da discretização temporal adoptada.

No método da fórmula recursiva, a equação do movimento é resolvida independentemente para cada um dos intervalos da discretização, desde que as condições iniciais de deslocamento e velocidade de um dado intervalo sejam as condições finais do intervalo anterior.

Em seguida mostra-se a obtenção da referida fórmula.

Adopta-se a notação $u(\bar{t} = \Delta t) = u_{i+1}$ e as seguintes condições iniciais $u(\bar{t} = 0) = u_i$ e $\dot{u}(\bar{t} = 0) = \dot{u}_i$.

Como se observa na Figura 3.11, no intervalo de tempo \bar{t} , a força é definida por um trecho linear, e a sua expressão é escrita como a equação de uma recta com um declive $(f_{i+1} - f_i)/\Delta t$, ou seja:

$$f(\bar{t}) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta t} \cdot \bar{t} \quad (3.40)$$

A solução geral pode ser escrita da seguinte forma [Chopra, 1995; Oliveira, 2007]:

$$u(\bar{t}) = u_H(\bar{t}) + u_P(\bar{t}) = \left(a \cdot \cos(\omega_A \bar{t}) + b \cdot \text{sen}(\omega_A \bar{t}) \right) \cdot e^{-\xi \omega_N \bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} f(\tau) \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.41)$$

Substituindo as condições iniciais tem-se que,

$$u(\bar{t}) = \left(u_i \cdot \cos(\omega_A \bar{t}) + \left(\frac{\dot{u}_i + u_i \cdot \xi \cdot \omega_N}{\omega_A} \right) \cdot \text{sen}(\omega_A \bar{t}) \right) \cdot e^{-\xi \omega_N \bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} \left(f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta t} \cdot \tau \right) \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau \quad (3.42)$$

Desenvolvendo a equação anterior,

$$u(\bar{t}) = u_i \underbrace{\left(\cos(\omega_A \bar{t}) + \frac{\xi \omega_N \text{sen}(\omega_A \bar{t})}{\omega_A} \right)}_{A(\bar{t})} e^{-\xi \omega_N \bar{t}} + \dot{u}_i \underbrace{\left(\frac{\text{sen}(\omega_A \bar{t})}{\omega_A} \right)}_{B(\bar{t})} e^{-\xi \omega_N \bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} \left(f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta t} \tau \right) h(\bar{t} - \tau) d\tau \quad (3.43)$$

$$u(\bar{t}) = A(\bar{t}) \cdot u_i + B(\bar{t}) \cdot \dot{u}_i + \int_0^{\bar{t}} f_i \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau + \int_0^{\bar{t}} \frac{f_{i+1}}{\Delta t} \cdot \tau \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau - \int_0^{\bar{t}} \frac{f_i}{\Delta t} \cdot \tau \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau \quad (3.44)$$

$$u(\bar{t}) = A(\bar{t}) \cdot u_i + B(\bar{t}) \cdot \dot{u}_i + f_i \underbrace{\left(\int_0^{\bar{t}} h(\bar{t} - \tau) d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\bar{t}} \tau \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau \right)}_{C(\bar{t})} + f_{i+1} \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\bar{t}} \tau \cdot h(\bar{t} - \tau) d\tau \right)}_{D(\bar{t})} \quad (3.45)$$

Do que resulta,

$$u(\bar{t}) = A(\bar{t}) \cdot u_i + B(\bar{t}) \cdot \dot{u}_i + C(\bar{t}) \cdot f_i + D(\bar{t}) \cdot f_{i+1} \quad (3.46)$$

Derivando uma vez a expressão anterior, obtém-se a velocidade:

$$\dot{u}(\bar{t}) = \dot{A}(\bar{t}) \cdot u_i + \dot{B}(\bar{t}) \cdot \dot{u}_i + \dot{C}(\bar{t}) \cdot f_i + \dot{D}(\bar{t}) \cdot f_{i+1} \quad (3.47)$$

Assim, a partir das expressões deduzidas anteriormente, é possível obter o valor do deslocamento u_{i+1} e da velocidade \dot{u}_{i+1} no fim de cada intervalo, assumindo $\bar{t} = \Delta t$, onde Δt é constante para o período considerado:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}(\bar{t} = \Delta t) = \mathbf{A}(\Delta t) \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{B}(\Delta t) \cdot \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}(\Delta t) \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{D}(\Delta t) \cdot \mathbf{f}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}(\bar{t} = \Delta t) = \dot{\mathbf{A}}(\Delta t) \cdot \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{B}}(\Delta t) \cdot \dot{\mathbf{u}}_i + \dot{\mathbf{C}}(\Delta t) \cdot \mathbf{f}_i + \dot{\mathbf{D}}(\Delta t) \cdot \mathbf{f}_{i+1} \end{cases} \quad (3.48)$$

Os coeficientes $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Delta t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\Delta t)$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\Delta t)$ e $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\Delta t)$ e as respectivas derivadas $\mathbf{A}' = \dot{\mathbf{A}}(\Delta t)$, $\mathbf{B}' = \dot{\mathbf{B}}(\Delta t)$, $\mathbf{C}' = \dot{\mathbf{C}}(\Delta t)$ e $\mathbf{D}' = \dot{\mathbf{D}}(\Delta t)$ são então dados por [Chopra, 1995]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A\Delta t) + \cos(\omega_A\Delta t) \right) \\ \mathbf{B} &= e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{1}{\omega_A} \text{sen}(\omega_A\Delta t) \right) \\ \mathbf{C} &= \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - \tau) d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau \mathbf{h}(\Delta t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\xi}{\omega_N\Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_A\Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}(\omega_A\Delta t) - \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_N\Delta t} \right) \cos(\omega_A\Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau \mathbf{h}(\Delta t - \tau) d\tau = \frac{1}{k} \left\{ 1 - \frac{2\xi}{\omega_N\Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\frac{2\xi^2-1}{\omega_A\Delta t} \text{sen}(\omega_A\Delta t) + \frac{2\xi}{\omega_N\Delta t} \cos(\omega_A\Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{A}' &= \left(\frac{d\mathbf{A}(\bar{t})}{d\bar{t}} \right)_{\bar{t}=\Delta t} = -e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A\Delta t) \right) \\ \mathbf{B}' &= \left(\frac{d\mathbf{B}(\bar{t})}{d\bar{t}} \right)_{\bar{t}=\Delta t} = e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\cos(\omega_A\Delta t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A\Delta t) \right) \\ \mathbf{C}' &= \left(\frac{d\mathbf{C}(\bar{t})}{d\bar{t}} \right)_{\bar{t}=\Delta t} = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\left(\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}(\omega_A\Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \cos(\omega_A\Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{D}' &= \left(\frac{d\mathbf{D}(\bar{t})}{d\bar{t}} \right)_{\bar{t}=\Delta t} = \frac{1}{k\Delta t} \left[1 - e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A\Delta t) + \cos(\omega_A\Delta t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

O que permite escrever a fórmula recursiva na forma matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

No ponto seguinte mostra-se a utilidade desta fórmula para o cálculo de espectros de resposta correspondentes a um dado acelerograma sísmico.

Convém também salientar que esta fórmula recursiva é igualmente muito utilizada no cálculo dinâmico de grandes estruturas pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) em coordenadas modais. De facto, como se mostrará mais adiante, a representação em coordenadas modais dos sistemas de equações diferenciais que descrevem o comportamento no domínio do tempo de estruturas discretizadas em elementos finitos (discretização espacial), corresponde a um

conjunto de equações independentes – equações modais – cada uma das quais é idêntica à equação de um oscilador de 1 G.L.

3.2.6 Resposta a acelerogramas sísmicos aplicados na base

A fórmula recursiva anterior tem grande aplicação no estudo da resposta dinâmica de sistemas estruturais de 1 G.L. submetidos à actuação de acelerogramas sísmicos na base (Figura 3.12).

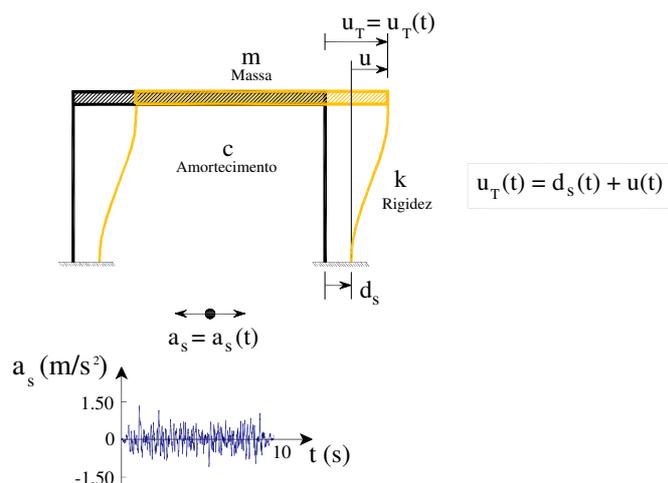


Figura 3.12: Sistema estrutural de 1 G.L. sujeito à actuação de um acelerograma sísmico na base.

Neste caso a equação de equilíbrio dinâmico deve ser escrita tendo em conta que a base agora também tem movimento, o qual é caracterizado usualmente pelo acelerograma sísmico $a_s = a_s(t)$. A este acelerograma, ou história de acelerações sísmicas na base, deve também corresponder uma história de velocidades sísmicas tal que $v_s = v_s(t)$ e de deslocamentos sísmicos, $d_s = d_s(t)$. Assim, em cada instante, a aceleração total do piso \ddot{u}_T corresponde à soma da aceleração sísmica da base $a_s(t)$ com a aceleração relativa $\ddot{u}(t)$:

$$\ddot{u}_T(t) = \ddot{u}(t) + a_s(t) \quad (3.51)$$

E o mesmo acontece com a velocidade total \dot{u}_T e o deslocamento total u_T :

$$\dot{u}_T(t) = \dot{u}(t) + v_s(t) \quad (3.52)$$

$$u_T(t) = u(t) + d_s(t) \quad (3.53)$$

Nestas equações as parcelas $a_s = a_s(t)$, $v_s = v_s(t)$ e $d_s = d_s(t)$, descrevem as componentes do movimento de corpo rígido.

Assim, a equação da dinâmica para o caso de movimento sísmico da base escreve-se da seguinte forma:

$$m \cdot \ddot{u}_T + c \cdot \dot{u}_T + k \cdot u_T = 0 \quad (3.54)$$

ou,

$$m \cdot (\ddot{u} + a_s) + c \cdot (\dot{u} + v_s) + k \cdot (u + d_s) = 0 \quad (3.55)$$

Tendo em conta que as forças elásticas associadas ao deslocamento de corpo rígido $d_s = d_s(t)$ são nulas e, que as forças de amortecimento associadas à velocidade de corpo rígido $v_s = v_s(t)$ são desprezáveis, então, a equação anterior assume a seguinte forma mais simples:

$$m \cdot (\ddot{u} + a_s) + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.56)$$

ou,

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = -m \cdot a_s \quad (3.57)$$

Nesta equação, o termo independente $-m \cdot a_s$ corresponde às denominadas forças sísmicas que são as forças de inércia associadas à aceleração de corpo rígido $a_s = a_s(t)$.

3.2.6.1 Definição de acções sísmicas por intermédio de espectros de resposta

A caracterização das vibrações sísmicas através dos seus efeitos em osciladores lineares de 1 grau de liberdade, caracterizados por uma frequência natural f_N (ou período natural $T_N = 1/f_N$) e por um coeficiente de amortecimento relativo ξ , conduz à determinação dos espectros de resposta dos movimentos sísmicos [Newmark & Rosenblueth, 1971; Housner, 1990]. Estes são geralmente definidos em termos de deslocamentos máximos relativos à base (S_d), velocidades máximas relativas (S_v) e em termos de acelerações máximas absolutas (S_a) [Bozorgnia & Bertero, 2004].

Num espectro de resposta representam-se os valores de pico da resposta para todos os possíveis osciladores de 1 G.L., quando solicitados, na sua base, por um determinado acelerograma sísmico.

Os espectros de resposta fornecem informação de grande utilidade sob o ponto de vista do projecto de estruturas sísmo resistentes. A Regulamentação de engenharia sísmica é

geralmente estruturada tendo por base a definição de regras para a utilização de espectros de resposta envolventes⁽²⁾ devidamente prescritos para cada zona do país de acordo com as suas características de sismicidade.

A construção de um espectro de resposta para um dado acelerograma específico, consiste na determinação da resposta máxima de vários osciladores de 1 G.L. com diferentes frequências naturais e com um coeficiente de amortecimento relativo ξ comum (Figura 3.13). Também é frequente representar num mesmo gráfico vários espectros de resposta para um mesmo sismo, mas com diferentes valores de ξ , para abranger todos os potenciais valores de amortecimento das estruturas.

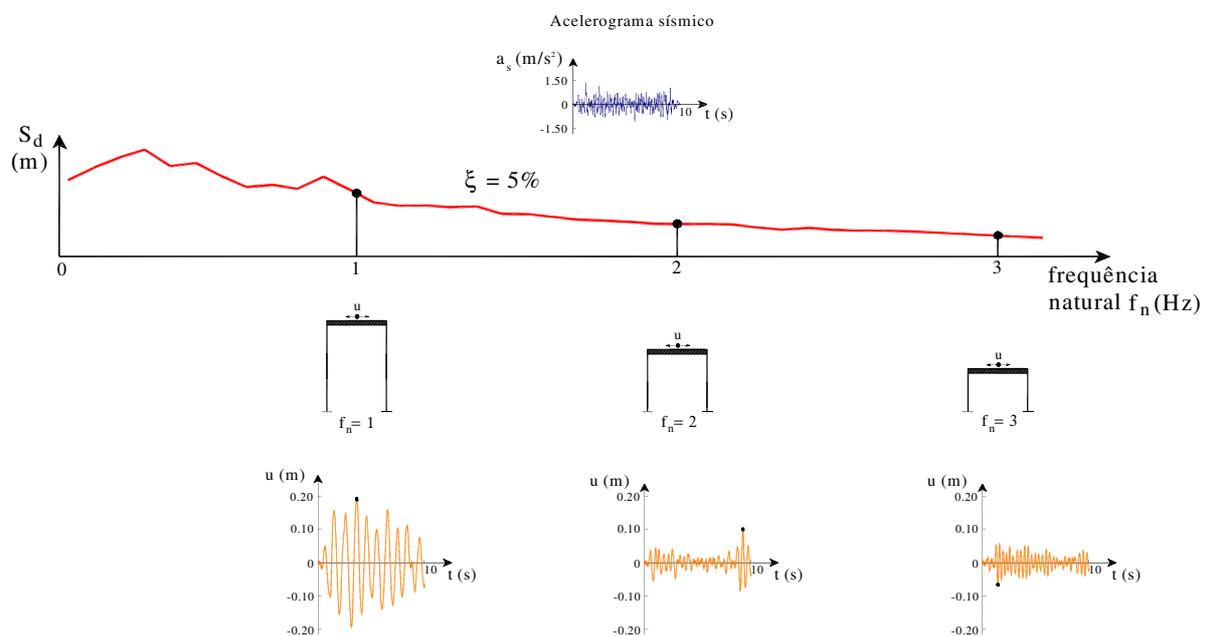


Figura 3.13: Cálculo de um espectro de resposta (em deslocamentos) correspondente a um acelerograma sísmico. As ordenadas do espectro correspondem aos valores máximos (absolutos) da resposta de vários osciladores de 1 G.L. em termos de deslocamentos máximos relativamente à base.

- Espectro de resposta em deslocamentos. Deslocamentos máximos relativos à base

Os espectros de resposta em deslocamentos $S_d = S_d(\omega_N)$ fornecem a resposta máxima para um dado acelerograma, em termos de deslocamentos relativos. Os deslocamentos máximos

⁽²⁾ Os espectros de resposta envolventes são estimados para representar não apenas um acelerograma sísmico, mas antes um conjunto de acelerogramas sísmicos que possam ocorrer com uma dada probabilidade de não serem excedidos num dado intervalo de tempo, como por exemplo, a vida útil da obra.

para cada oscilador de 1 G.L. sob a acção do referido acelerograma, são calculados a partir da fórmula recursiva (3.50), apresentada na secção anterior.

Na figura seguinte apresentam-se os espectros de resposta em deslocamentos relativos para diferentes valores de ξ estimados para uma zona situada na região centro de Portugal (são adoptados mais à frente no estudo apresentado no capítulo 5 referente à torre das tomadas de água da barragem do Cabril).

No gráfico seguinte pode-se verificar que como seria de prever, para osciladores com maior frequência natural, os deslocamentos relativos máximos durante a actuação do sismo diminuem, tendendo para zero. Os deslocamentos máximos são naturalmente menores em estruturas com maior amortecimento.

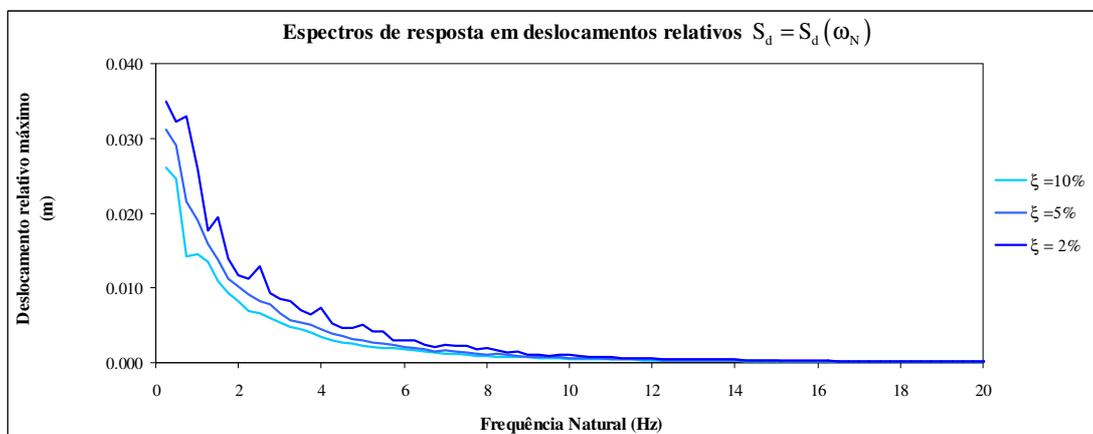


Figura 3.14: Espectro de resposta em deslocamentos relativos.

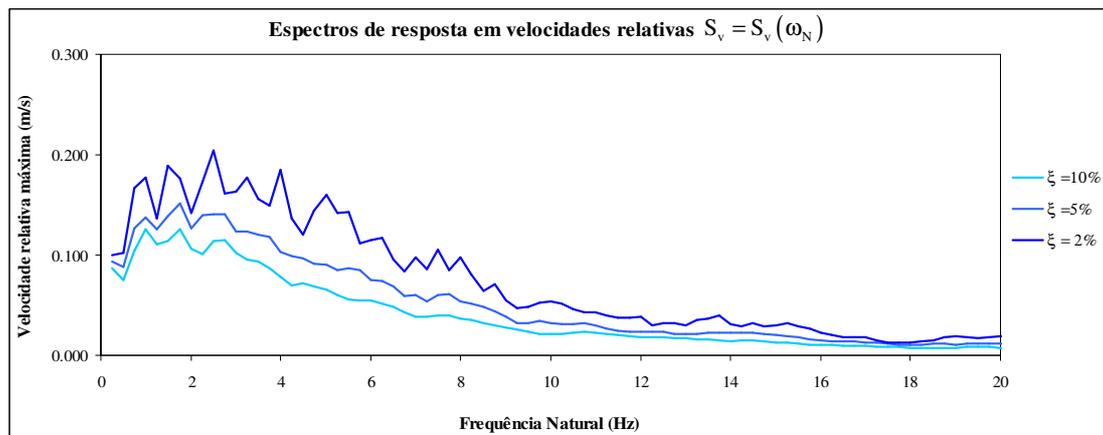
- Espectro de resposta em velocidades. Velocidades máximas relativas à base

Os espectros de resposta em velocidades $S_v = S_v(\omega_N)$ fornecem a resposta máxima em termos de velocidades relativas. As velocidades máximas para cada oscilador de 1 G.L. sob a acção de um acelerograma sísmico na base podem ser calculadas directamente a partir da fórmula recursiva (3.50), obtendo-se deste modo o espectro de resposta em velocidades relativas. Este espectro pode também ser calculado multiplicando os valores do espectro de deslocamentos relativos por ω_n , o qual, assim calculado se designa por espectro de resposta em pseudo-velocidades, isto é:

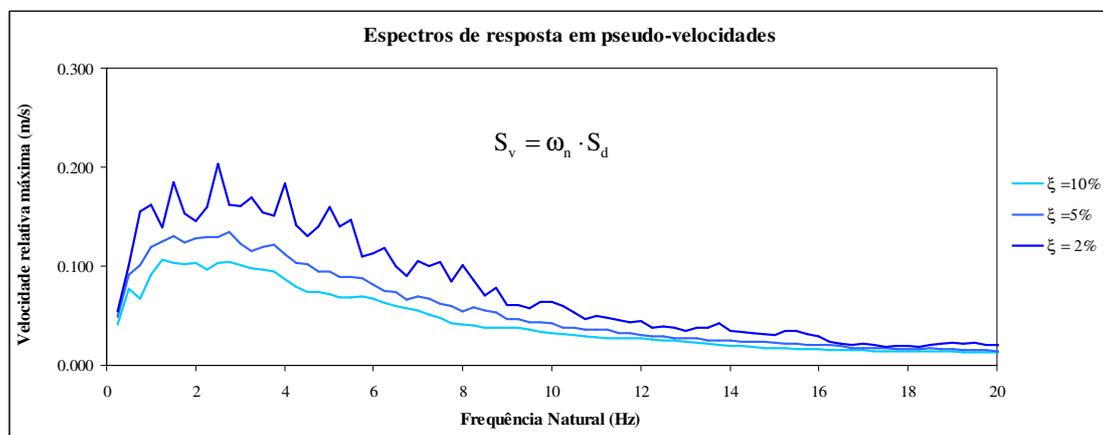
$$S_v = \omega_n \cdot S_d \quad (3.58)$$

Os espectros de resposta em velocidades para o caso do acelerograma em análise (Figura 3.13) e considerando diferentes valores de ξ , apresentam-se na Figura 3.15. Como se pode observar,

obtêm-se resultados idênticos utilizando a fórmula recursiva (Figura 3.15 a) ou a equação anterior (Figura 3.15 b).



a)



b)

Figura 3.15: Espectros de resposta em: a) velocidades relativas; b) pseudo-velocidades.

- Espectro de resposta em acelerações. Acelerações máximas absolutas

Para um dado acelerograma sísmico, os espectros de resposta em acelerações $S_a = S_a(\omega_N)$ fornecem a resposta máxima de osciladores de 1 G.L. em termos de acelerações absolutas. As acelerações máximas absolutas podem ser obtidas a partir do espectro dos deslocamentos máximos relativos multiplicado por ω_n^2 . Obtêm-se assim os espectros de resposta em pseudo-acelerações, ou seja:

$$S_a = \omega_n^2 \cdot S_d \quad (3.59)$$

Outra forma de determinar as acelerações máximas absolutas, consiste em somar as acelerações aplicadas na base $a_s = a_s(t)$, com as acelerações relativas $\ddot{u} = \ddot{u}(t)$, calculadas com base na fórmula recursiva (obtidas por derivação das histórias de velocidades $\dot{u} = \dot{u}(t)$). Na figura seguinte apresentam-se os espectros de resposta em acelerações absolutas ou pseudo-acelerações.

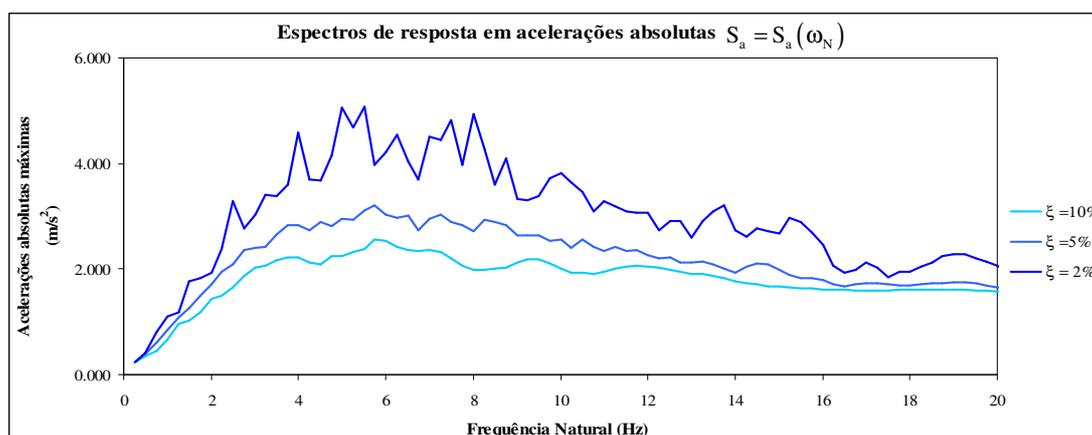


Figura 3.16: Espectro de resposta em acelerações absolutas.

Neste espectro pode-se verificar que as acelerações absolutas são praticamente nulas para sistemas (osciladores de 1 G.L.) com frequência natural muito baixa (rigidez quase nula), pois neste caso, as vibrações na base não se transmitem para o piso. Para sistemas com frequências naturais de valor elevado (rigidez elevada) a aceleração absoluta é idêntica à aceleração aplicada na base (osciladores perfeitamente rígidos).

Por fim, é interessante notar que na caracterização de acções sísmicas, a razão pela qual se utilizam espectros de resposta em acelerações absolutas e em velocidades relativas e deslocamentos relativos, está relacionada com o facto da equação da dinâmica de osciladores de 1 G.L. sujeitos a um acelerograma sísmico na base, tal que $a_s = a_s(t)$ ser escrita na forma:

$$m \cdot \underbrace{(\ddot{u} + a_s)}_{\substack{\text{acel.} \\ \text{absolutas}}} + c \cdot \underbrace{\dot{u}}_{\substack{\text{vel.} \\ \text{relativas}}} + k \cdot \underbrace{u}_{\substack{\text{desl.} \\ \text{relativos}}} = 0 \quad (3.60)$$

ou seja, em termos de acelerações absolutas e em termos de velocidades relativas e deslocamentos relativos.

3.3 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com um grau de liberdade. Análise no domínio da frequência

3.3.1 Decomposição de funções em ondas sinusoidais. Séries de Fourier

As estruturas são frequentemente solicitadas por forças com variação arbitrária ao longo do tempo (como é o caso da acção do vento ou dos sismos) as quais não podem ser descritas matematicamente a partir de uma expressão geral, como acontece no caso de forças devidas a máquinas rotativas.

O estudo da resposta estrutural para forças dinâmicas com variação arbitrária, apoia-se em grande parte na denominada análise de Fourier – decomposição de funções em ondas sinusoidais.

O ilustre matemático Fourier (1768-1830), no seguimento dos seus estudos sobre a propagação de ondas de calor em sólidos, descobriu que, qualquer função representável graficamente pode ser decomposta numa soma de infinitas ondas sinusoidais, tal como é ilustrado na figura seguinte.

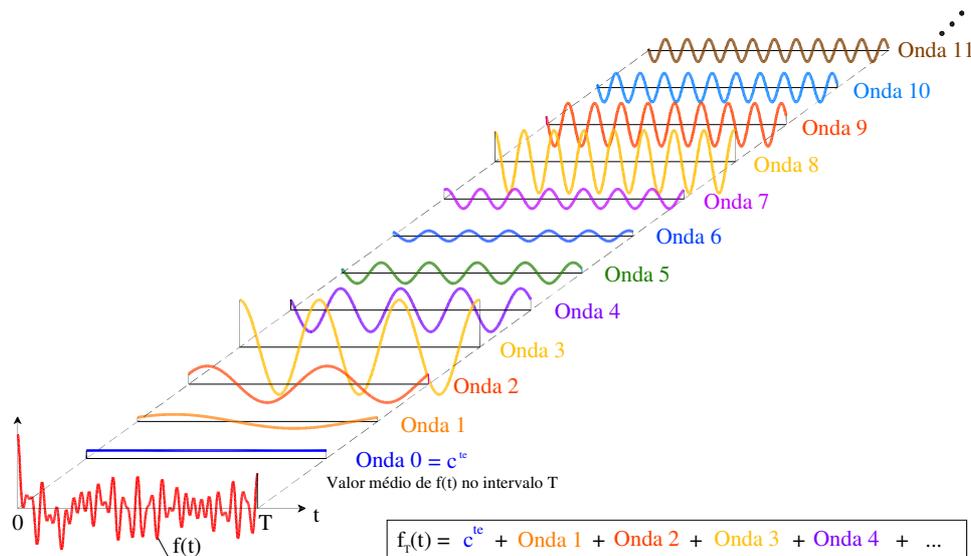


Figura 3.17: Decomposição de uma função em ondas sinusoidais [Oliveira, 2007].

Fourier percebeu que qualquer função $f(t)$ definida num intervalo de tempo finito $[0, T]$, pode ser aproximada por uma série, designada por Série de Fourier, que se traduz pelo somatório de uma constante e de um conjunto de infinitas ondas sinusoidais com períodos iguais a T e aos seus submúltiplos $T, T/2, T/3, T/4, \dots$ (ondas de frequência crescente).

A aproximação em série de Fourier de uma função $f(t)$ definida num intervalo de comprimento finito T é então dada pela seguinte expressão:

$$f_T(t) = c^{te} + \underbrace{\text{onda}_1}_{\omega_1} + \underbrace{\text{onda}_2}_{\omega_2} + \underbrace{\text{onda}_3}_{\omega_3} + \underbrace{\text{onda}_4}_{\omega_4} + \dots + \underbrace{\text{onda}_n}_{\omega_n} + \dots \quad (3.61)$$

Tomando $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, as frequências destas ondas são dadas por:

$$\omega_1 = \Delta\omega, \quad \omega_2 = 2\Delta\omega, \quad \omega_3 = 3\Delta\omega, \quad \omega_4 = 4\Delta\omega, \quad \dots \quad \omega_n = n\Delta\omega \quad (3.62)$$

A expressão de uma onda sinusoidal n , pode ser escrita como a combinação linear entre as funções trigonométricas co-seno e seno, cuja frequência é ω_n , ou seja:

$$\text{onda } n = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t) \quad (3.63)$$

Deste modo, a expressão que traduz $f_T(t)$ pode ser escrita na seguinte forma (forma trigonométrica):

$$f_T(t) = c^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{onda } n = c^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)), \quad \text{com } \omega_n = n\Delta\omega \quad (3.64)$$

Para calcular cada uma destas ondas basta então determinar cada um dos seus coeficientes a_n e b_n .

Devido ao facto das ondas apresentarem períodos submúltiplos de T , Fourier constatou que o valor médio de cada onda no intervalo T seria sempre nulo. Assim sendo, e recorrendo à notação $\langle f(t) \rangle_T$ para designar o valor médio de $f(t)$ no intervalo T tem-se que:

$$\langle f(t) \rangle_T = \underbrace{\langle c^{te} \rangle_T}_0 + \underbrace{\langle \text{onda}_1 \rangle_T}_0 + \underbrace{\langle \text{onda}_2 \rangle_T}_0 + \underbrace{\langle \text{onda}_3 \rangle_T}_0 + \underbrace{\langle \text{onda}_4 \rangle_T}_0 + \dots + \underbrace{\langle \text{onda}_n \rangle_T}_0 + \dots \quad (3.65)$$

Deste modo, pode-se concluir que a constante que aparece na expressão da série de Fourier é dada pelo valor médio da função $f(t)$ definida no intervalo T . Este valor médio corresponde à altura de um rectângulo de área igual à área sob a função, a qual é dada pelo seu integral definido no intervalo T :

$$c^{te} = \langle f(t) \rangle_T = \frac{\text{Área}}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.66)$$

Para o caso da onda 1 de frequência ω_1 , Fourier descobriu que o valor médio em $[0, T]$ de cada onda n multiplicada por $\cos(\omega_1 t)$ era sempre nulo, com exceção da própria onda 1, ou seja:

$$\langle f_T(t) \cos(\omega_1 t) \rangle_T = \underbrace{\langle c^{te} \cos(\omega_1 t) \rangle_T}_0 + \langle \text{onda1} \cos(\omega_1 t) \rangle_T + \underbrace{\langle \text{onda2} \cos(\omega_1 t) \rangle_T}_0 + \dots \quad (3.67)$$

do que resulta,

$$\langle f(t) \cdot \cos(\omega_1 t) \rangle_T = \langle \text{onda1} \cdot \cos(\omega_1 t) \rangle_T \quad (3.68)$$

e desenvolvendo fica:

$$\langle f(t) \cdot \cos(\omega_1 t) \rangle_T = \underbrace{\langle a_1 \cdot \cos^2(\omega_1 t) \rangle_T}_{a_1/2} + \underbrace{\langle b_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_1 t) \rangle_T}_0 = \frac{a_1}{2} \quad (3.69)$$

Pelo que é possível constatar que o coeficiente a_1 corresponde ao dobro do valor médio em T da função $f(t)$ multiplicada por $\cos(\omega_1 t)$, ou seja:

$$a_1 = 2 \cdot \langle f(t) \cdot \cos(\omega_1 t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_1 t) dt \quad (3.70)$$

Este resultado pode ser generalizado para qualquer onda n , vindo então:

$$a_n = 2 \cdot \langle f(t) \cdot \cos(\omega_n t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad (3.71)$$

Do mesmo modo, conclui-se que o coeficiente b_n de uma onda n , é dado como o dobro do valor médio em T da função $f(t)$ mas agora multiplicado por $\text{sen}(\omega_n t)$, ou seja:

$$b_n = 2 \cdot \langle f(t) \cdot \text{sen}(\omega_n t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(\omega_n t) dt \quad (3.72)$$

É interessante notar que este conceito da decomposição de uma função $f(t)$, definida num intervalo finito T , em ondas sinusoidais aplicando a técnica das séries de Fourier para obtenção dos coeficientes das ondas, resume-se basicamente à determinação de valores médios.

Uma dada função $f(t)$ definida num intervalo de tempo T , é representada no domínio do tempo apenas por um único gráfico $f = f(t)$. No entanto, a sua representação no domínio da frequência efectua-se com base em dois gráficos: $a_n = a(\omega_n)$ e $b_n = b(\omega_n)$.

Também é usual utilizar os gráficos da amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A(\omega_n)$ - espectro de amplitudes e da fase $\phi_n = \arctg(b_n/a_n) = \phi(\omega_n)$ - espectro de fases das várias ondas.

Como exemplo, mostra-se em seguida a representação gráfica de uma função $f(t)$ no domínio do tempo a) e no domínio da frequência recorrendo aos espectros dos coeficientes a_n e b_n das várias ondas b) e recorrendo aos espectros de amplitudes e de fases das referidas ondas c).

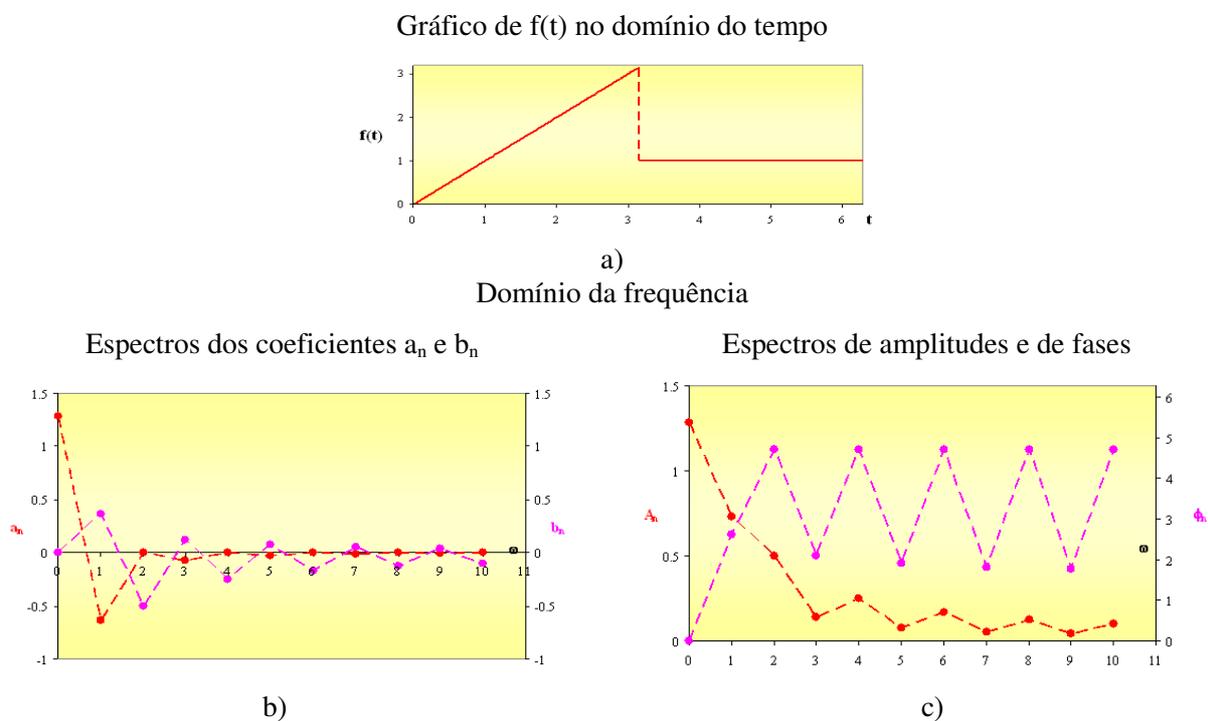


Figura 3.18: Representação da função $f(t)$ no domínio do tempo a) e no domínio da frequência através dos espectros dos coeficientes a_n e b_n b) e através dos espectros de amplitudes e de fases c) [Oliveira, 2007].

3.3.2 Decomposição de acelerogramas em ondas sinusoidais

Neste ponto será abordada uma aplicação das séries de Fourier na interpretação de resultados experimentais referentes à medição de vibrações em estruturas.

O conceito da decomposição de acelerogramas medidos em ondas sinusoidais, pode ser utilizado para descobrir propriedades importantes de uma estrutura, como é o caso das suas frequências naturais ω_N e modos de vibração.

A análise directa de um registo de acelerações obtido numa dada estrutura, não permite obter informação relevante sobre as propriedades da estrutura. Por outro lado, sabe-se que essas acelerações medidas devem ser de alguma forma influenciadas pelas características estruturais e isso conduz à ideia de que talvez haja alguma informação “oculta” nestes acelerogramas sobre as características dinâmicas da estrutura. O que permite aceder a essa informação “escondida” é exactamente a técnica das séries de Fourier, que corresponde a decompor os acelerogramas medidos em ondas sinusoidais.

Para exemplificar este tipo de aplicação das séries de Fourier à análise dinâmica de estruturas, foi efectuado um ensaio de vibrações no modelo físico do pórtico de um piso atrás apresentado. Foi colocado um acelerómetro ao nível do piso da estrutura, segundo a direcção de menor rigidez e, através de um sistema de aquisição adequado, obteve-se um registo das acelerações horizontais. As acelerações foram medidas durante 60 s e com uma frequência de amostragem de 51,2 Hz, o que significa que foram registados 51,2 valores por segundo, o que corresponde a um total de 3072 valores registados. O pórtico apenas esteve sujeito a vibrações ambientais ou também designado por ruído ambiente (vozes na sala, correntes de ar, etc).

É conveniente referir que, para um registo no tempo de 3072 valores, como é o caso, não é possível efectuar a transposição para o domínio da frequência calculando mais do que 3072 coeficientes a_n e b_n , o que corresponde no máximo a 1536 ondas. A frequência máxima referente à última onda que faz sentido identificar (onda 1536) é designada por frequência de Nyquist.

O registo das acelerações medidas e o correspondente espectro de amplitudes (representação das amplitudes das ondas que compõem o acelerograma medido em função da respectiva frequência, neste caso em Hz) apresentam-se na Figura 3.19.

Da análise do espectro de amplitudes conclui-se que, de todas as ondas que constituem o acelerograma medido, há uma que se destaca pela sua maior amplitude, que corresponde à onda com frequência de 6,27 Hz. É precisamente este tipo de informação que pode ser obtida a partir dos acelerogramas utilizando a análise de Fourier, ou seja, é possível a identificação experimental da frequência natural de vibração do pórtico de um piso a partir da decomposição em ondas de um acelerograma registado sob uma excitação do tipo ruído ambiente.

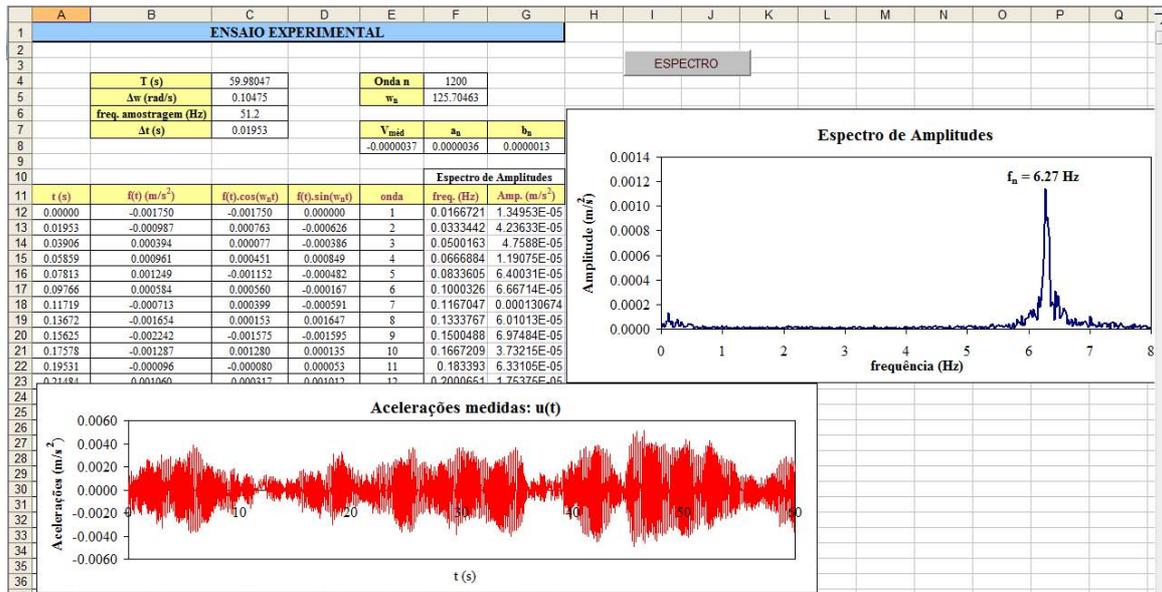


Figura 3.19: Acelerograma medido e correspondente espectro de amplitudes do edifício de 1 piso quando sujeito a ruído ambiente.

3.3.3 Representação das Séries de Fourier na forma complexa. Transformada Discreta de Fourier

A expressão (3.64) deduzida anteriormente para a representação de uma função em série de Fourier, toma a designação de forma trigonométrica da série de Fourier, pois apresenta os coeficientes das ondas a_n e b_n multiplicados, respectivamente, pelas funções trigonométricas $\cos(\omega_n t)$ e $\sin(\omega_n t)$.

No entanto, esta expressão também pode ser escrita de uma forma mais compacta, a partir da representação complexa das funções co-seno e seno, recorrendo à já referida fórmula de Euler dos números complexos $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$, que permite escrever:

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\omega_n t) = \frac{-ie^{i\omega_n t} + ie^{-i\omega_n t}}{2} \quad (3.73)$$

Ora, substituindo estas funções na forma trigonométrica das séries de Fourier (3.64) e desenvolvendo a expressão, tem-se que:

$$f_T(t) = v_{med} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + b_n \frac{-ie^{i\omega_n t} + ie^{-i\omega_n t}}{2} \right), \quad (3.74)$$

$$f_T(t) = v_{\text{med}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-i\omega_n t} \right), \quad (3.75)$$

$$f_T(t) = \frac{a_0 - i b_0}{2} e^{i\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\omega_n t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_k - i b_k}{2} e^{i\omega_k t} \quad (3.76)$$

Portanto, o valor médio obtém-se para $n = 0$ e a primeira parcela do somatório inclui todos os valores positivos de n e a segunda parcela engloba todos os valores negativos de n .

Então, a forma complexa da série de Fourier é dada por:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\omega_n t}, \quad -\infty < \omega_n = n \Delta\omega < +\infty \quad (3.77)$$

Pode-se ainda escrever a expressão $\frac{a_n - i \cdot b_n}{2}$ em forma de integral, isto é:

$$\frac{a_n - i \cdot b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega_n t) dt - i \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \text{sen}(\omega_n t) dt, \quad (3.78)$$

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \underbrace{(\cos(\omega_n t) - i \cdot \text{sen}(\omega_n t))}_{e^{-i\omega_n t}} dt, \quad (3.79)$$

ou seja,

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (3.80)$$

Designa-se por Transformada Discreta de Fourier da função $f(t)$ no intervalo finito $[0, T]$, a função complexa $F_T(\omega_n)$ dada por:

$$F_T(\omega_n) = \int_0^T f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a_n - i b_n}{2} \cdot T, \quad -\infty < \omega_n = n \Delta\omega < +\infty \quad (3.81)$$

Assim, a expressão que traduz a aproximação de uma função $f_T(t)$ em série de Fourier na forma complexa e para um intervalo finito $[0, T]$ é:

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.82)$$

Como foi deduzido anteriormente, a expressão da função $F_T(\omega_n)$, definida no domínio da frequência é constituída por uma parte real, $\frac{a(\omega_n)}{2}T$ e por uma parte imaginária $-\frac{b(\omega_n)}{2}T$.

A representação gráfica da Transformada Discreta de Fourier (TDF) pode ser efectuada recorrendo a dois gráficos espectrais, um correspondente à parte real e outro à parte imaginária [Newland, 1975]. De forma equivalente, pode-se também representar a TDF em termos de um gráfico de amplitudes e de um gráfico de ângulos de fase, sendo esta última a opção mais utilizada (espectro de amplitudes e de fases).

É importante salientar que, a Transformada Discreta de Fourier tem a designação de discreta, devido ao facto de se considerar um intervalo de comprimento finito T , ao qual correspondem valores finitos para o espaçamento $\Delta\omega$ entre as ondas que constituem a transformada. Quando $T \rightarrow \infty$, então $\Delta\omega \rightarrow 0$, o que significa que as infinitas ondas têm frequências infinitesimalmente próximas e nesta situação, a transformada de Fourier é designada por contínua. Neste caso, o símbolo de série (somatório) deve ser substituído por um símbolo de integral designado por integral de Fourier.

3.3.4 Utilização de módulos computacionais para o cálculo de TDF

O processo abordado até este ponto para decompor em ondas sinusoidais uma dada função $f(t)$, definida num intervalo de comprimento finito T , na prática não é o mais utilizado, pois é um método computacionalmente pouco eficiente. Na prática, recorre-se a programas que incluem módulos computacionais, baseados num algoritmo de grande eficiência computacional, designado por Fast Fourier Transform (FFT).

Visto que, neste trabalho será utilizado o programa MATLAB, onde se recorre ao cálculo dos coeficientes a_n e b_n através do algoritmo FFT, este tema será aqui abordado em pormenor.

A ideia é que, conhecendo uma dada função $f(t)$ (que até pode ser, por exemplo, a resposta de uma estrutura ao longo do tempo sujeita a uma determinada acção), aplicando-lhe o algoritmo FFT, obtêm-se os valores da Transformada Discreta de Fourier $F_T(\omega_n)$ na forma complexa (parte real e parte imaginária). Facilmente se determinam os coeficientes a_n e b_n das várias ondas, usando as seguintes expressões:

$$a_n = \frac{2 \operatorname{Re}(F_T(\omega_n))}{T} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2 \operatorname{Im}(F_T(\omega_n))}{T} \quad (3.83)$$

Ainda relativamente aos módulos computacionais, é importante salientar que muitos destes programas admitem à partida uma discretização temporal, em que $\Delta t = 1$. O utilizador apenas terá de especificar os NP valores da função, sendo que, muitos destes programas exigem que os NP sejam exactamente uma potência de base 2. Deste modo, o utilizador apenas terá de corrigir os NP valores referentes aos coeficientes a_n e b_n das ondas multiplicando-os pelo valor real de Δt , ou seja:

$$a_n = \frac{2 \operatorname{Re}(F_T(\omega_n)) \cdot \Delta t}{T} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2 \operatorname{Im}(F_T(\omega_n)) \cdot \Delta t}{T} \quad (3.84)$$

Destes NP valores fornecidos para $F_T(\omega_n)$, a primeira metade é constituída pelos valores de $F_T(\omega_n)$ correspondentes a ω_n positivos e a segunda metade engloba os valores correspondentes às frequências com os valores simétricos de ω_n . Assim, como já foi referido, são identificadas apenas NP/2 ondas (valores complexos), sendo os restantes valores informação repetida.

3.4 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com vários graus de liberdade. Análise no domínio do tempo

3.4.1 Modos de Vibração e Frequências Naturais

Para introduzir os conceitos da dinâmica de estruturas com vários graus de liberdade, será utilizado um exemplo de um edifício de três pisos, com apenas 3 graus de liberdade (NGL = 3), ou seja, com 1 G.L. de translação por piso, segundo a direcção de menor rigidez, como se mostra na Figura 3.20.

Neste caso, a diferença relativamente à equação do movimento do modelo de 1 G.L., é que a massa, a rigidez e o amortecimento da estrutura já não podem ser descritos matematicamente por escalares, mas sim por matrizes e vectores.



Figura 3.20: Modelo físico de um edifício de 3 pisos.

A equação do movimento para modelos estruturais com N graus de liberdade é então dada por:

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = \underline{f}(t) \quad (3.85)$$

onde,

\underline{m} – matriz de massas da estrutura (de dimensão $N \times N$);

\underline{c} – matriz de amortecimento da estrutura (de dimensão $N \times N$);

\underline{k} – matriz de rigidez da estrutura (de dimensão $N \times N$);

$\underline{u} = \underline{u}(t)$ – vector de deslocamentos da estrutura nos N graus de liberdade, ao longo do tempo (de dimensão $N \times 1$);

$\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}(t)$ – vector de velocidades da estrutura nos N graus de liberdade, ao longo do tempo (de dimensão $N \times 1$);

$\ddot{\underline{u}} = \ddot{\underline{u}}(t)$ – vector de acelerações da estrutura nos N graus de liberdade, ao longo do tempo (de dimensão $N \times 1$);

$\underline{f}(t)$ – vector das forças dinâmicas actuantes nos N graus de liberdade, ao longo do tempo (de dimensão $N \times 1$).

No caso do edifício de 3 pisos, facilmente se obtém a matriz de rigidez \underline{k} (3×3) com base nas usuais hipóteses simplificativas da teoria das peças lineares, como se observa na Figura 3.21.

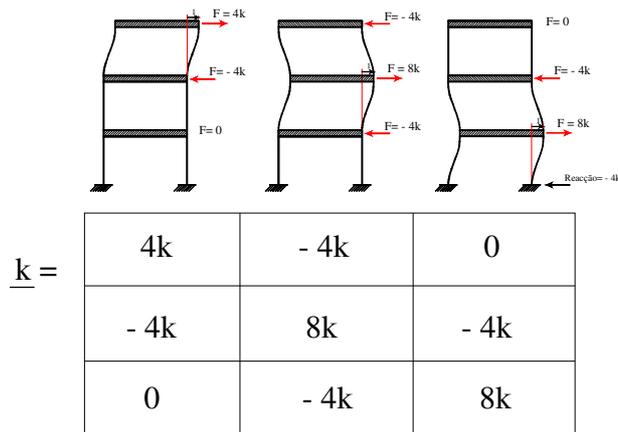


Figura 3.21: Matriz de rigidez do edifício de 3 pisos, considerando 1 G.L. de translação por piso.

Por simplificação, pode-se considerar que as matrizes de massas e de amortecimento são diagonais.

No caso do edifício em análise, a equação da dinâmica pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}}_{\underline{m}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{\underline{c}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4k_p & -4k_p & 0 \\ -4k_p & 8k_p & -4k_p \\ 0 & -4k_p & 8k_p \end{bmatrix}}_{\underline{k}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \quad (3.86)$$

Nesta equação diferencial as incógnitas são os deslocamentos estruturais ao longo do tempo segundo os 3 G.L., como se indica na Figura 3.22.

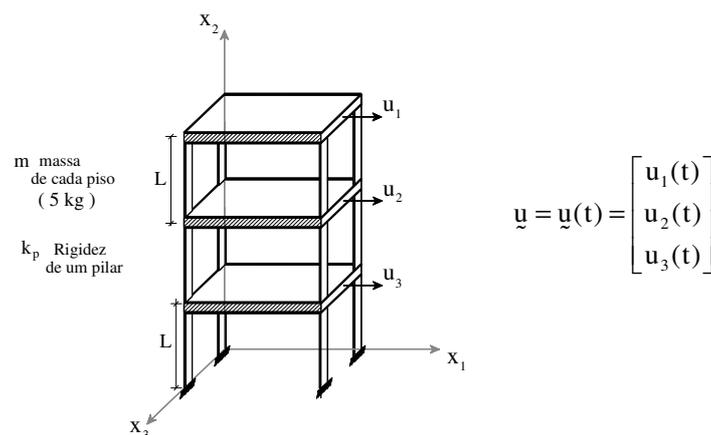


Figura 3.22: Representação dos deslocamentos estruturais da estrutura a determinar para cada grau de liberdade.

É de salientar que esta equação diferencial matricial corresponde ao seguinte sistema de três equações diferenciais acopladas⁽³⁾:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{u}_1 + c \cdot \dot{u}_1 + 4k_p \cdot u_1 - 4k_p \cdot u_2 = f_1 \\ m \cdot \ddot{u}_2 + c \cdot \dot{u}_2 - 4k_p \cdot u_1 + 8k_p \cdot u_2 - 4k_p \cdot u_3 = f_2 \\ m \cdot \ddot{u}_3 + c \cdot \dot{u}_3 - 4k_p \cdot u_2 + 8k_p \cdot u_3 = f_3 \end{cases} \quad (3.87)$$

Para determinar as frequências naturais e os modos de vibração de uma estrutura a partir da equação (3.86), é conveniente admitir a hipótese de vibração livre (sem forças aplicadas) sem amortecimento e condições iniciais não nulas [Mendes e Oliveira, 2008].

Por observação, pode-se verificar que para determinado tipo de condições iniciais, o edifício de 3 pisos tende a vibrar livremente com todos os pisos a oscilarem em sintonia do seguinte modo como se visualiza na Figura 3.23.

A observação deste tipo de movimento sugere que uma possível solução da equação anterior poderá ser caracterizada por três ondas sinusoidais (uma por piso), com a mesma frequência ω_n e com amplitudes decrescentes do piso superior para o inferior dadas por ϕ_{1n} , ϕ_{2n} e ϕ_{3n} , ou seja:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \cdot \cos(\omega_n t) \\ \phi_{2n} \cdot \cos(\omega_n t) \\ \phi_{3n} \cdot \cos(\omega_n t) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

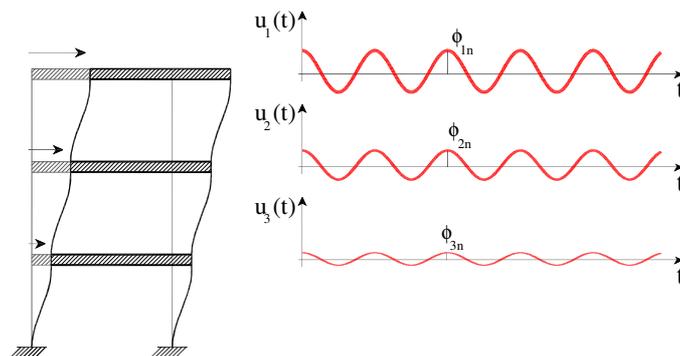


Figura 3.23: Idealização do movimento oscilatório correspondente a um modo de vibração (neste caso, com todos os pisos a oscilarem em sintonia – em fase).

⁽³⁾ Este sistema de três equações diferenciais acopladas pode ser facilmente desacoplado (utilizando o conceito das coordenadas modais que será abordado mais adiante), a partir da transformação das matrizes de massas, de amortecimento e de rigidez envolvidas nesta equação em matrizes diagonais.

Agora, há que verificar matematicamente se este resultado corresponde ou não a uma solução da equação que descreve o movimento do edifício em análise em regime de vibração livre sem amortecimento, correspondente à equação homogénea seguinte:

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (3.89)$$

Escrevendo $\underline{u}(t)$ e a sua segunda derivada $\ddot{\underline{u}}(t)$ na forma seguinte,

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega_n t) = \underline{\phi}_n \cdot \cos(\omega_n t), \quad (3.90)$$

$$\dot{\underline{u}}(t) = -\omega_n \cdot \underline{\phi}_n \cdot \text{sen}(\omega_n t) \text{ e } \ddot{\underline{u}}(t) = -\omega_n^2 \cdot \underline{\phi}_n \cdot \cos(\omega_n t) \quad (3.91)$$

e substituindo na equação do movimento (3.89), obtém-se:

$$-\omega_n^2 \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi}_n \cdot \cos(\omega_n t) + \underline{k} \cdot \underline{\phi}_n \cdot \cos(\omega_n t) = \underline{0} \quad (3.92)$$

dividindo ambos os membros por $\cos(\omega_n t)$, fica:

$$-\omega_n^2 \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi}_n + \underline{k} \cdot \underline{\phi}_n = \underline{0} \quad (3.93)$$

do que se obtém,

$$\left[\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2 \right] \cdot \underline{\phi}_n = \underline{0} \quad (3.94)$$

e, resolvendo em ordem a $\underline{\phi}_n$, tem-se que:

$$\underline{\phi}_n = \left[\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2 \right]^{-1} \cdot \underline{0} \quad (3.95)$$

e tendo em conta que a inversa de uma matriz é a correspondente matriz adjunta a dividir pelo determinante, fica:

$$\underline{\phi}_n = \frac{\text{Adj} \left[\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2 \right]}{\left| \underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2 \right|} \cdot \underline{0} \quad (3.96)$$

Assim, conclui-se que as hipotéticas soluções do tipo⁽⁴⁾:

⁽⁴⁾ É fácil verificar que a equação em análise também admite soluções do tipo seno, ou seja, $\underline{u}(t) = \underline{\phi}_n \cdot \text{sen}(\omega_n t)$ que, combinadas linearmente com as soluções do tipo co-seno permitem obter a solução geral que descreve o movimento do edifício.

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega_n t) = \underline{\phi}_n \cdot \cos(\omega_n t) \quad (3.97)$$

poderão de facto, ser soluções não nulas, desde que o determinante $|\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2|$ seja nulo (isto significa que as soluções não nulas deste tipo correspondem a soluções indeterminadas).

Então, é necessário calcular os valores de ω_n (valores próprios) para os quais se verifica a condição:

$$|\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2| = 0 \quad (3.98)$$

Estes, são os valores das frequências naturais da estrutura, que no caso do edifício de 3 pisos em análise, correspondem a três frequências distintas (neste caso $|\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2| = 0$ corresponde a uma equação do 3º grau em que $\lambda = \omega_n^2$).

Para cada um dos três valores de ω_n resolve-se o sistema $[\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2] \cdot \underline{\phi}_n = \underline{0}$ em ordem a $\underline{\phi}_n$:

$$\omega_n = \begin{cases} \omega_1 \rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_1^2] \cdot \underline{\phi}_1 = \underline{0} \rightarrow \underline{\phi}_1 \\ \omega_2 \rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_2^2] \cdot \underline{\phi}_2 = \underline{0} \rightarrow \underline{\phi}_2 \\ \omega_3 \rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_3^2] \cdot \underline{\phi}_3 = \underline{0} \rightarrow \underline{\phi}_3 \end{cases}$$

Cada um destes sistemas é indeterminado de grau 1 (ou seja, um sistema de N equações a N incógnitas em que só N-1 equações são linearmente independentes), pelo que a resolução de cada um destes sistemas exige a introdução de uma condição suplementar. A maneira mais simples de resolver o problema, consiste em atribuir o valor unitário a uma das componentes dos vectores $\underline{\phi}_1$, $\underline{\phi}_2$ e $\underline{\phi}_3$:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}_{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}_{(2)} = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}_{(3)} = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Estes três vectores correspondem a cada uma das três frequências naturais, correspondentes aos designados modos de vibração, os quais podem ser agrupados numa matriz:

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \underline{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

designada por matriz modal. Esta matriz contém em cada coluna j (que no caso deste edifício de 3 pisos $j = 1, 2$ ou 3) o modo de vibração $\underline{\phi}_j$ (ou vectores próprios).

Por vezes é útil modificar os valores obtidos anteriormente para os modos de vibração através da multiplicação por um factor α_j , por forma a obter uma matriz modal normalizada relativamente à matriz de massas, ou seja, de modo a que:

$$\underline{\phi}^T \underline{m} \underline{\phi} = \underline{I} \quad (3.101)$$

Assim, os anteriores valores considerados para cada um dos modos de vibração $\underline{\phi}_j = \begin{bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \phi_{3j} \end{bmatrix}$

devem ser corrigidos através da multiplicação por um factor α_j , de modo a respeitar a seguinte relação para cada modo de vibração j :

$$\underline{\phi}_j^T \underline{m} \underline{\phi}_j = 1 \Leftrightarrow \alpha_j \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1j} & \phi_{2j} & \phi_{3j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \alpha_j \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \phi_{3j} \end{bmatrix} = 1 \quad (3.102)$$

Desta forma, para o modo de vibração j , o factor correctivo α_j deve assumir o seguinte valor:

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{m \cdot (\phi_{1j}^2 + \phi_{2j}^2 + \phi_{3j}^2)}} \quad (3.103)$$

Retomando o caso de estudo do edifício de 3 pisos, mostra-se em seguida como podem ser calculadas as frequências naturais e os modos de vibração.

Cálculo das Frequências naturais

$E_{\text{alumínio}} = 75 \text{ GPa}; \quad h = 0,003\text{m}; \quad b = 0,015\text{m}; \quad L = 0,18\text{m}; \quad m = 5,0 \text{ kg}$

Obtém-se então $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 4,57 \text{ Hz}; \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 12,81 \text{ Hz}; \quad f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 18,51 \text{ Hz}$, ou seja,

$$|\underline{k} - \omega^2 \underline{m}| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 \rightarrow f_1 = 4,57 \text{ Hz} & \text{1º Modo de vibração} \\ \omega_2 \rightarrow f_2 = 12,81 \text{ Hz} & \text{2º Modo de vibração} \\ \omega_3 \rightarrow f_3 = 18,51 \text{ Hz} & \text{3º Modo de vibração} \end{cases}$$

Modos de vibração

Como se referiu atrás, a equação

$$[\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega_n^2] \cdot \underline{\phi}_n = 0$$

tem solução indeterminada, não nula, para cada uma das três frequências naturais anteriores.

Assim, resolvendo a equação anterior em ordem a $\underline{\phi}_n$, para $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ e $\omega = \omega_3$,

podem-se obter as configurações dos três modos de vibração (dependentes de um escalar α_j).

$$\omega_1 = 4,57 \times 2\pi \Rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot (4,57 \times 2\pi)^2] \cdot \underline{\phi}_n = 0 \Rightarrow \underline{\phi} = \underline{\phi}_{1^\circ \text{ Modo}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,802 \\ 0,445 \end{bmatrix} \times \alpha_1$$

$$\omega_2 = 12,81 \times 2\pi \Rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot (12,81 \times 2\pi)^2] \cdot \underline{\phi}_n = 0 \Rightarrow \underline{\phi} = \underline{\phi}_{2^\circ \text{ Modo}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,555 \\ -1,247 \end{bmatrix} \times \alpha_2$$

$$\omega_3 = 18,51 \times 2\pi \Rightarrow [\underline{k} - \underline{m} \cdot (18,51 \times 2\pi)^2] \cdot \underline{\phi}_n = 0 \Rightarrow \underline{\phi} = \underline{\phi}_{3^\circ \text{ Modo}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,247 \\ 1,802 \end{bmatrix} \times \alpha_3$$

Na Figura 3.24 apresentam-se as configurações modais para o edifício em estudo.

Como se pode observar na figura, o primeiro modo de vibração é caracterizado por apresentar uma frequência natural de 4,57 Hz, existindo um movimento conjunto dos três pisos para um mesmo lado.

No 2º modo de vibração, correspondente à frequência natural de 12,81 Hz, quando o piso superior se movimenta para a direita, os dois pisos inferiores movimentam-se para a esquerda e vice-versa.

No 3º modo de vibração, caracterizado por ter uma frequência natural de 18,51 Hz, verifica-se que os pisos superior e inferior se movimentam em sintonia e o piso intermédio desloca-se contrariamente aos outros.

Neste caso, e segundo a direcção considerada, a estrutura tem três modos de vibração (NMOD).

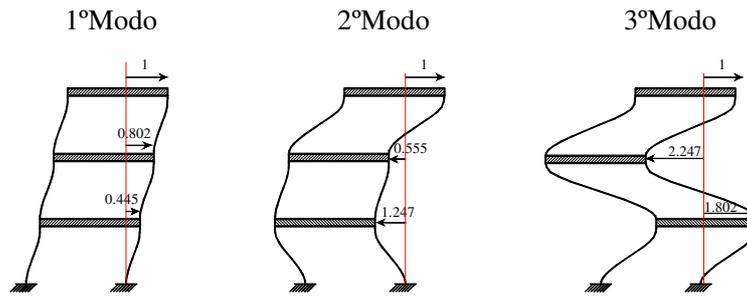


Figura 3.24: Configurações modais para o edifício dos 3 pisos.

Em síntese, verificou-se que no caso do edifício de 3 pisos em análise, a equação do movimento $\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0}$ (equação diferencial matricial que corresponde a um sistema de três equações com três incógnitas) apresenta três soluções do tipo co-seno,

$$u_1(t) = \phi_1 \cdot \cos(\omega_1 t), \quad u_2(t) = \phi_2 \cdot \cos(\omega_2 t) \quad \text{e} \quad u_3(t) = \phi_3 \cdot \cos(\omega_3 t),$$

e três soluções do tipo seno (envolvendo os mesmos valores de frequências naturais ω_1 , ω_2 e ω_3),

$$u_1(t) = \phi_1 \cdot \sin(\omega_1 t), \quad u_2(t) = \phi_2 \cdot \sin(\omega_2 t) \quad \text{e} \quad u_3(t) = \phi_3 \cdot \sin(\omega_3 t).$$

Assim, a solução geral é então dada pela combinação linear destas seis soluções:

$$\underline{u}(t) = (A_1 \phi_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \phi_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \phi_3 \cos(\omega_3 t)) + (B_1 \phi_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \phi_2 \sin(\omega_2 t) + B_3 \phi_3 \sin(\omega_3 t)) \quad (3.104)$$

ou,

$$\underline{u}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix}}_{\text{matriz modal}} \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \\ A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ A_3 \cos(\omega_3 t) + B_3 \sin(\omega_3 t) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

3.4.2 Coordenadas modais. Massa modal, amortecimento modal e rigidez modal

Como se mostrou atrás, os modos de vibração e as frequências naturais de uma estrutura com vários graus de liberdade têm um significado matemático bem preciso que surge de forma natural durante a resolução da equação do movimento estabelecida para a hipótese de vibração livre (sem forças aplicadas) e amortecimento nulo. O facto de uma qualquer estrutura ter os seus

modos de vibração (com as correspondentes frequências naturais), significa fisicamente que, essa estrutura “gosta de vibrar preferencialmente nesses modos”.

Mesmo no caso geral de vibração forçada e amortecimento não nulo ($\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = \underline{f}(t)$), o movimento de qualquer estrutura é sempre determinado pelos seus modos de vibração e respectivas frequências naturais. De facto, os deslocamentos estruturais em cada instante, podem ser determinados a partir de uma combinação linear dos modos de vibração, cujos coeficientes (funções do tempo), são denominados por coordenadas modais:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} \times u_1^*(t) + \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} \times u_2^*(t) + \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} \times u_3^*(t) \quad (3.106)$$

onde,

$\underline{\phi}$ é a já conhecida matriz modal que contém os três modos de vibração do edifício de 3 pisos em análise e,

$u_n^*(t)$ são as coordenadas modais (funções no tempo) correspondentes aos modos de vibração que se considerarem.

De uma forma mais compacta, a equação anterior pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^*(t) \\ u_2^*(t) \\ u_3^*(t) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

ou,

$$\underline{u}(t) = \underbrace{\underline{\phi}}_{(NGL \times NMOD)} \cdot \underbrace{\underline{u}^*(t)}_{(NMOD \times 1)} \quad (3.108)$$

Esta é a fórmula fundamental da análise dinâmica de estruturas com N graus de liberdade, denominada por equação da sobreposição modal.

Fisicamente esta fórmula da sobreposição modal significa que a configuração deformada de uma estrutura num qualquer instante t do seu movimento, sob qualquer história de forças exteriores aplicadas (observável, por exemplo, numa fotografia obtida no instante t), pode ser reproduzida exactamente com base numa combinação linear dos seus modos de vibração, faltando apenas descobrir os valores correctos dos coeficientes $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ e $u_3^*(t)$ da combinação para o instante t no caso do edifício em análise.

Este conceito pode ser exemplificado para o edifício de 3 pisos na Figura 3.25.

Instante qualquer t

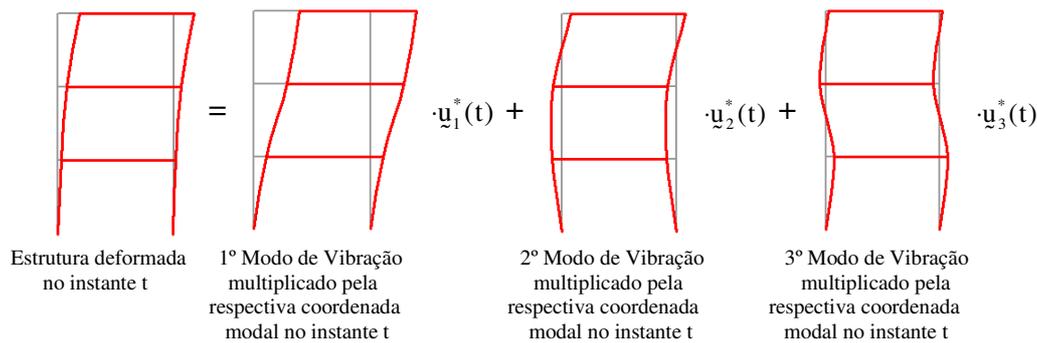


Figura 3.25: Ilustração do conceito da fórmula fundamental da análise dinâmica no edifício de 3 pisos.

Em seguida mostra-se de que forma a sobreposição modal pode ser usada para simplificar a resolução da equação do movimento de estruturas com vários graus de liberdade, considerando a situação de amortecimento não nulo.

Substituindo $\underline{u}(t) = \underline{\phi} \cdot \underline{u}^*(t)$ na equação do movimento em regime de vibração livre e considerando agora que existe amortecimento (as estruturas reais têm sempre amortecimento), tem-se que:

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = \underline{0} \quad (3.109)$$

assume a forma seguinte:

$$\underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \ddot{\underline{u}}^* + \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \dot{\underline{u}}^* + \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{u}^* = \underline{0} \quad (3.110)$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida multiplicando ambos os membros por $\underline{\phi}^T$, uma vez que esta multiplicação torna possível desacoplar as três equações diferenciais correspondentes à equação matricial (3.109),

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \ddot{\underline{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \dot{\underline{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{u}^* = \underline{0} \quad (3.111)$$

pois as matrizes $\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi}$ e $\underline{\phi}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\phi}$ são diagonais, assim como a matriz $\underline{\phi}^T \cdot \underline{c} \cdot \underline{\phi}$, desde que se admita que a matriz de amortecimento \underline{c} é uma combinação linear das matrizes \underline{m} e \underline{k} (esta é uma hipótese usual no cálculo de estruturas).

Estas matrizes são designadas por:

- $\underline{\underline{m}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \rightarrow$ matriz de massas modais

$$\underline{\underline{m}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Se todos os modos de vibração estiverem normalizados relativamente à matriz de massas, de forma a que se verifique $\underline{\underline{\phi}}_j^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\phi}}_j = 1$, então a matriz de massas modais corresponde à matriz identidade:

$$\underline{\underline{m}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

- $\underline{\underline{k}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \rightarrow$ matriz de rigidez modal

$$\underline{\underline{k}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Tendo em conta que a matriz $\underline{\underline{m}}^*$ corresponde à matriz identidade, então na diagonal da matriz de rigidez modal $\underline{\underline{k}}^*$, surgem os valores das frequências naturais ao quadrado:

$$\underline{\underline{k}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

- $\underline{\underline{c}}^* = \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \rightarrow$ matriz de amortecimento modal

Nestas condições compreende-se que, por simplificação da resolução do sistema de equações diferenciais, é conveniente que a matriz de amortecimento modal $\underline{\underline{c}}^*$ também seja uma matriz diagonal. De facto, esta hipótese pode ser geralmente adoptada, pois não compromete a boa adequação do modelo matemático à estrutura real.

Uma das formas de obter a matriz $\underline{\underline{c}}^*$, consiste em atribuir directamente os valores diagonais desta matriz, impondo deste modo, que esta seja obrigatoriamente uma matriz diagonal. Estes

valores são dados com base na experiência referente a medições ou cálculos das características do amortecimento, obtida na análise de estruturas do tipo daquelas.

Outra hipótese, é admitir que a matriz de amortecimento em coordenadas estruturais \underline{c} , resulta de uma combinação linear das matrizes \underline{m} e \underline{k} (hipótese de amortecimento de Rayleigh), garantindo-se desta forma que a matriz \underline{c}^* é diagonal:

$$\underline{c} = \alpha \cdot \underline{m} + \beta \cdot \underline{k} \quad , \quad \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \quad (3.116)$$

onde, α e β são constantes de ponderação.

Se a matriz de amortecimento \underline{c} for da forma anterior, então a matriz de amortecimento modal é garantidamente diagonal:

$$\underline{c}^* = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{c} \cdot \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & 0 \\ 0 & c_2^* & 0 \\ 0 & 0 & c_3^* \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Portanto, para o caso do edifício de 3 pisos, a equação do movimento assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^* \\ \ddot{u}_2^* \\ \ddot{u}_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & 0 \\ 0 & c_2^* & 0 \\ 0 & 0 & c_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^* \\ \dot{u}_2^* \\ \dot{u}_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

ou,

$$\underline{m}^* \cdot \ddot{\underline{u}}^* + \underline{c}^* \cdot \dot{\underline{u}}^* + \underline{k}^* \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (3.119)$$

O que corresponde ao seguinte sistema de três equações diferenciais desacopladas:

$$\begin{cases} m_1^* \cdot \ddot{u}_1^* + c_1^* \cdot \dot{u}_1^* + k_1^* \cdot u_1^* = 0 \\ m_2^* \cdot \ddot{u}_2^* + c_2^* \cdot \dot{u}_2^* + k_2^* \cdot u_2^* = 0 \\ m_3^* \cdot \ddot{u}_3^* + c_3^* \cdot \dot{u}_3^* + k_3^* \cdot u_3^* = 0 \end{cases} \quad (3.120)$$

cuja solução é obtida facilmente resolvendo cada uma das equações de forma independente em ordem às coordenadas modais, utilizando as metodologias apresentadas neste capítulo. A solução em coordenadas estruturais obtém-se finalmente, através da aplicação do princípio da sobreposição modal, como se mostrou anteriormente.

3.4.3 Vibração com amortecimento e forças exteriores aplicadas

O caso mais geral e que tem maior interesse em engenharia para avaliar o comportamento dinâmico de estruturas com vários graus de liberdade é o do movimento em regime de vibração forçada (forças exteriores aplicadas) com amortecimento.

Como já se referiu anteriormente, a equação geral do movimento para sistemas com vários graus de liberdade é dada por:

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = \underline{f}(t) \quad (3.121)$$

No caso geral, o vector $\underline{f}(t)$, com as histórias de forças nos vários graus de liberdade, é constituído por um conjunto de funções independentes que, no caso do edifício de três pisos, é expresso como se indica na Figura 3.26.

Portanto, para efectuar o cálculo estrutural, é necessário conhecer previamente as histórias de forças em todos os graus de liberdade da estrutura. Em estruturas com vários milhares de graus de liberdade (como é frequente analisar em problemas em engenharia), não faz sentido definir de forma independente as histórias de forças em todos os graus de liberdade. Na prática, é usual considerar-se apenas uma única história de forças que, multiplicada por factores constantes (a definir previamente para cada grau de liberdade), representa as histórias de forças a aplicar nos vários graus de liberdade da estrutura.

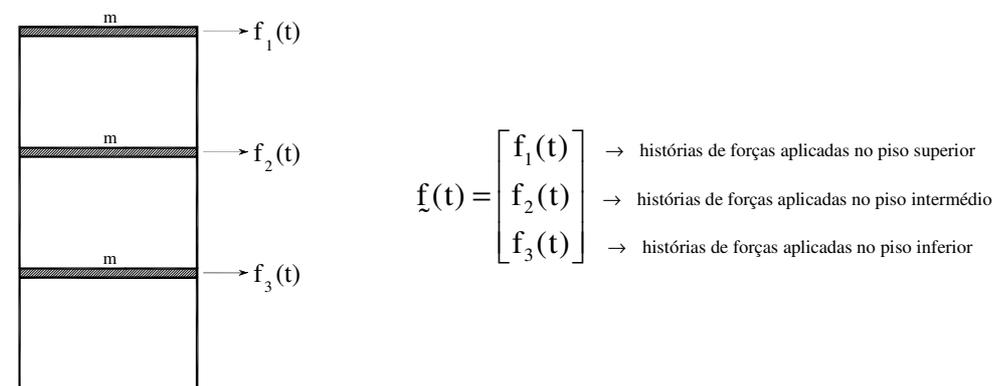


Figura 3.26: Modelo do edifício de 3 pisos sujeito a forças exteriores. Vector das histórias de forças aplicadas nos vários graus de liberdade.

Nesta fase, tem interesse analisar o desenvolvimento desta equação para diferentes forças exteriores aplicadas tendo como exemplo o edifício de três pisos.

3.4.3.1 Acção do Vento

No caso da acção do vento no edifício de três pisos, uma boa aproximação para construir o referido vector das histórias de forças $\underline{f}(t)$, consiste em admitir que se conhece a história de forças devidas ao vento no topo do edifício e que, nos pisos inferiores, a história de forças é idêntica à do topo, mas com uma amplitude inferior, que diminui com o decréscimo da cota dos pisos. Na Figura 3.27 mostra-se um exemplo da acção do vento para o edifício em estudo. Como se observa na figura, o vector \underline{s} traduz a distribuição espacial das histórias de forças pelos vários graus de liberdade.

Em seguida apresenta-se a transformação da equação do movimento para coordenadas modais, no caso da acção do vento assim definida:

$$\underline{m} \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{c} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = \underline{f}(t) \quad (3.122)$$

substituindo $\underline{u}(t) = \underline{\phi} \cdot \underline{u}^*(t)$ na equação anterior fica,

$$\underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\ddot{u}}^* + \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\dot{u}}^* + \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{u}^* = \underline{s} \cdot f_v(t) \quad (3.123)$$

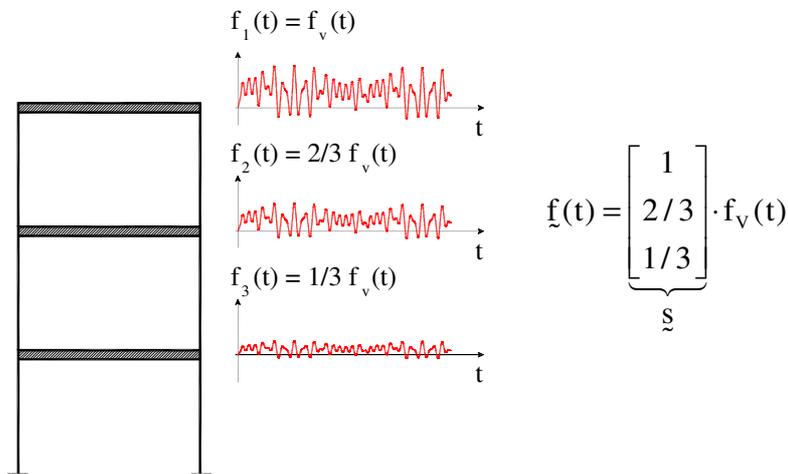


Figura 3.27: Ilustração da acção do vento no edifício de três pisos.

multiplicando ambos os membros por $\underline{\phi}^T$,

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\ddot{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\dot{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{u}^* = \underline{\phi}^T \cdot \underline{s} \cdot f_v(t) \quad (3.124)$$

do que resulta,

$$\underline{m}^* \cdot \underline{\ddot{u}}^* + \underline{c}^* \cdot \underline{\dot{u}}^* + \underline{k}^* \cdot \underline{u}^* = \underline{f}^*(t) \quad (3.125)$$

Então, o vector das histórias de forças modais $\underline{f}^*(t)$ é dado pela seguinte multiplicação:

$$\underline{f}^*(t) = \underline{\phi}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \cdot f_v(t) = \underline{F}_P \cdot f_v(t) \quad (3.126)$$

onde,

$$\underline{F}_P = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \end{bmatrix} \text{ é o vector com os factores de participação modais para a acção do vento (neste}$$

caso, com distribuição triangular em altura).

3.4.3.2 Vibrações devidas a movimentos da base de fundação - Acção sísmica

Do ponto de vista da engenharia civil, as acções sísmicas são, de entre as acções dinâmicas, as que têm maior interesse. Caracterizam-se pela existência de vibrações devidas a movimentos da base de fundação das estruturas, causadas geralmente por impulsos de aceleração, cujas componentes são predominantemente horizontais.

No caso da estrutura em análise, o deslocamento total u_T de um piso devido a um movimento na base de fundação resultante da ocorrência de um sismo, corresponde à soma do deslocamento de corpo rígido $d_s = d_s(t)$, com o deslocamento do piso relativamente à base $u = u(t)$, tal como se mostra na Figura 3.28.

Para deslocamentos, velocidades e acelerações totais, têm-se:

$$\underline{u}_T = \underline{u} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{d}_s} \cdot \underline{d}_s, \quad \underline{\dot{u}}_T = \underline{\dot{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_s} \cdot \underline{v}_s, \quad \underline{\ddot{u}}_T = \underline{\ddot{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_s} \cdot \underline{a}_s \quad (3.127)$$

Verifica-se igualmente que, o vector com a história das forças de inércia ao nível dos vários pisos (massa do piso multiplicada pela aceleração da base), também depende apenas de uma única história de acelerações na base, ou seja:

$$\underline{f}(t) = -\underline{m} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{1}} \cdot \underline{a}_s(t) \quad (3.128)$$

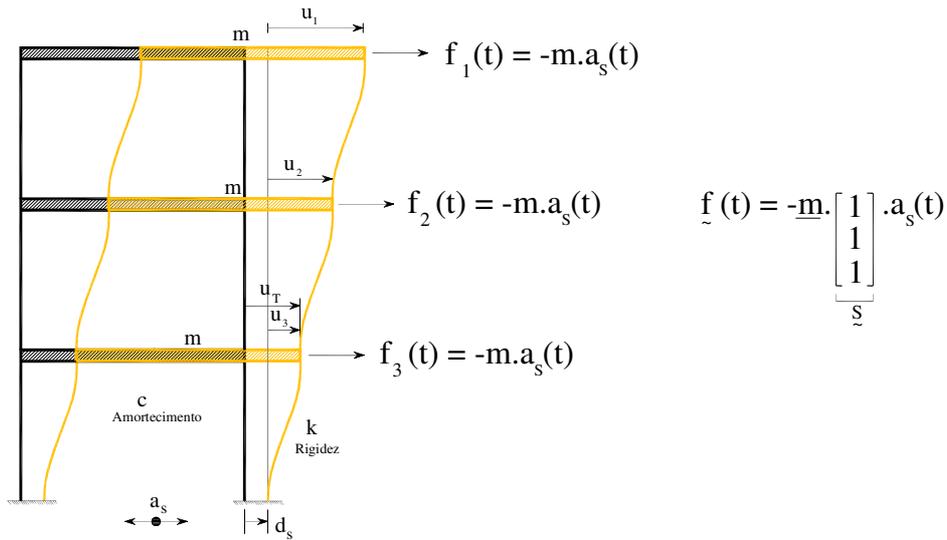


Figura 3.28: Edifício de três pisos sujeito a um movimento da base de fundação (sismo).

Neste caso considera-se que as forças exteriores são nulas ($f(t) = 0$), pois a estrutura apenas está sujeita a movimentos na base de fundação. A equação de equilíbrio dinâmico para a acção sísmica é então dada por:

$$\underline{m} \cdot \ddot{u}_T + \underline{c} \cdot \dot{u}_T + \underline{k} \cdot u_T = 0 \quad (3.129)$$

Então, substituindo u_T , \dot{u}_T e \ddot{u}_T na equação anterior, tem-se,

$$\underline{m} \cdot (\ddot{u} + \ddot{a}_s) + \underline{c} \cdot (\dot{u} + \dot{v}_s) + \underline{k} \cdot (u + d_s) = 0 \Leftrightarrow \underline{m} \cdot \ddot{u} + \underline{c} \cdot \dot{u} + \underline{k} \cdot u = -\underline{m} \cdot \ddot{a}_s - \underbrace{\underline{c} \cdot \dot{v}_s}_0 - \underbrace{\underline{k} \cdot d_s}_0 \quad (3.130)$$

donde resulta,

$$\underline{m} \cdot \ddot{u} + \underline{c} \cdot \dot{u} + \underline{k} \cdot u = -\underline{m} \cdot \ddot{a}_s(t) \quad (3.131)$$

Tal como foi referido para o caso do estudo da resposta sísmica de sistemas estruturais de 1 G.L., é de salientar que a parcela $\underline{k} \cdot d_s$ é nula pois corresponde a um movimento de corpo rígido (movimento de translação durante o qual a estrutura não se deforma), logo não se desenvolvem forças elásticas. O mesmo se passa com a parcela $\underline{c} \cdot \dot{v}_s$, que é desprezável pois considera-se que não se instalam forças de amortecimento associadas à velocidade do movimento de translação.

Aplicando o conceito de coordenadas modais, a equação (3.131) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \ddot{u}^* + \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \dot{u}^* + \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot u^* = -\underline{m} \cdot \ddot{a}_s(t) \quad (3.132)$$

multiplicando ambos os membros por $\underline{\phi}^T$ fica,

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{\phi} \cdot \ddot{\underline{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{c} \cdot \underline{\phi} \cdot \dot{\underline{u}}^* + \underline{\phi}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{u}^* = -\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{s} \cdot a_s(t) \quad (3.133)$$

ou seja,

$$\underline{m}^* \cdot \ddot{\underline{u}}^* + \underline{c}^* \cdot \dot{\underline{u}}^* + \underline{k}^* \cdot \underline{u}^* = \underline{f}^*(t) \quad (3.134)$$

em que, o vector das histórias de forças modais $\underline{f}^*(t)$ é dado por:

$$\underline{f}^*(t) = -\underline{\phi}^T \cdot \underline{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a_s(t) = -\underline{F}_p \cdot a_s(t) \quad (3.135)$$

onde,

$$\underline{F}_p = \begin{bmatrix} F_{p1} \\ F_{p2} \\ F_{p3} \end{bmatrix} \text{ é o vector com os factores de participação modais para a acção sísmica.}$$

Para estruturas cuja discretização corresponde a um modelo com centenas ou milhares de graus de liberdade, como é usual analisar em problemas de engenharia civil, geralmente não se consideram todos os modos de vibração (tantos quantos os graus de liberdade do modelo discretizado), ou seja, resolvem-se apenas algumas das equações modais correspondentes à equação matricial (3.134). Isto significa que se considera geralmente, como aproximação, um número de modos NMOD significativamente inferior ao número total de modos, ou seja, NGL ($NMOD \ll NGL$).

Assim, há que resolver apenas as primeiras NMOD equações modais:

$$\begin{cases} m_1^* \cdot \ddot{u}_1^* + c_1^* \cdot \dot{u}_1^* + k_1^* \cdot u_1^* = 0 \\ m_2^* \cdot \ddot{u}_2^* + c_2^* \cdot \dot{u}_2^* + k_2^* \cdot u_2^* = 0 \\ \vdots \\ m_{NMOD}^* \cdot \ddot{u}_{NMOD}^* + c_{NMOD}^* \cdot \dot{u}_{NMOD}^* + k_{NMOD}^* \cdot u_{NMOD}^* = 0 \end{cases} \quad (3.136)$$

que, se podem escrever na seguinte forma compacta:

$$m_n^* \cdot \ddot{u}_n^* + c_n^* \cdot \dot{u}_n^* + k_n^* \cdot u_n^* = f_n^*(t) \quad , \quad n = 1, NMOD \quad (3.137)$$

sendo,

$$\mathbf{f}_n^*(t) = - \underbrace{\Phi_n^T}_{(1 \times NGL)} \cdot \underbrace{\mathbf{m}}_{(NGL \times NGL)} \cdot \underbrace{\mathbf{s}}_{(NGL \times 1)} \cdot \mathbf{a}_s(t) = -\mathbf{F}_{Pn} \cdot \mathbf{a}_s(t) \quad (3.138)$$

Em seguida mostra-se um exemplo em Excel onde se calculam os deslocamentos estruturais ao longo do tempo a partir das coordenadas modais quando o edifício de três pisos é sujeito a uma acção sísmica na base, tal como foi aqui abordado (Figura 3.29).

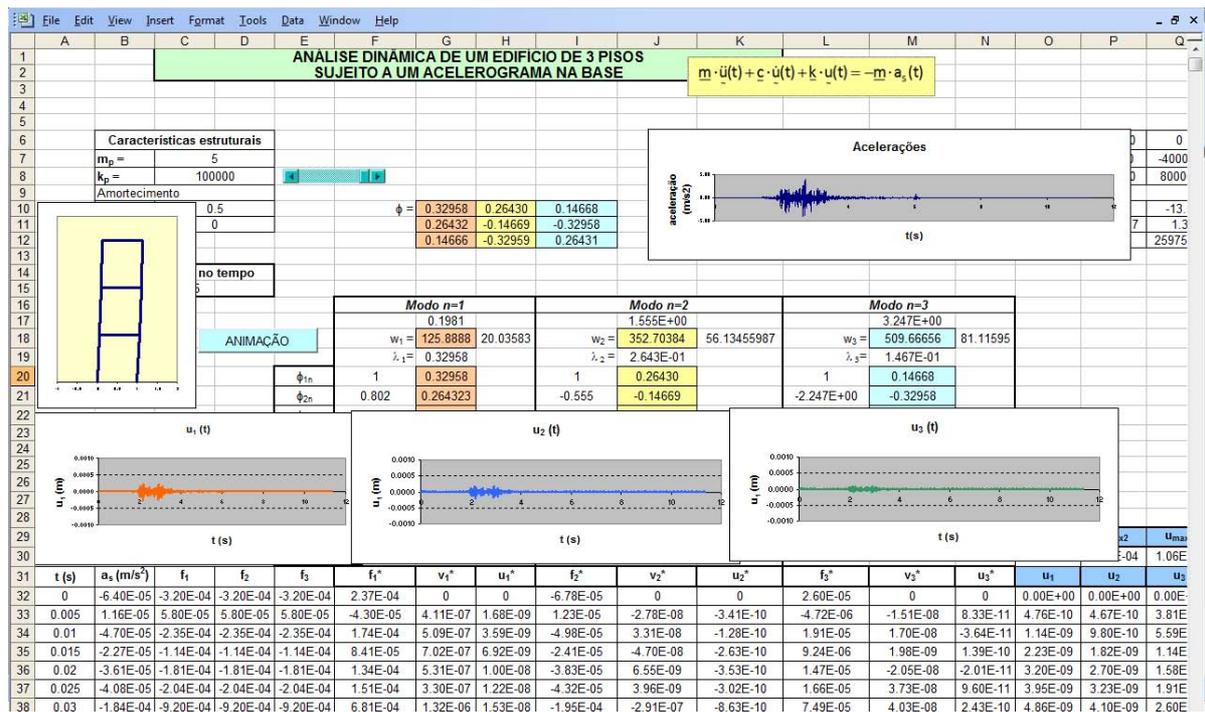


Figura 3.29: Organização de uma folha cálculo para simulação do comportamento dinâmico de um edifício de três pisos sob a acção de um acelerograma sísmico horizontal na base. Cálculo no domínio do tempo em coordenadas modais.

3.4.3.3 Factores de participação em modelos bidimensionais

Aplicação de acelerogramas sísmicos na base

O comportamento do edifício anterior pode ser simulado através de modelos mais complexos, nomeadamente, modelos planos de elementos finitos de placa com dois graus de liberdade de translação por nó, que permitam ter em conta movimentos na direcção horizontal e na direcção vertical, tal como será abordado com mais pormenor no capítulo seguinte (Figura 3.30).

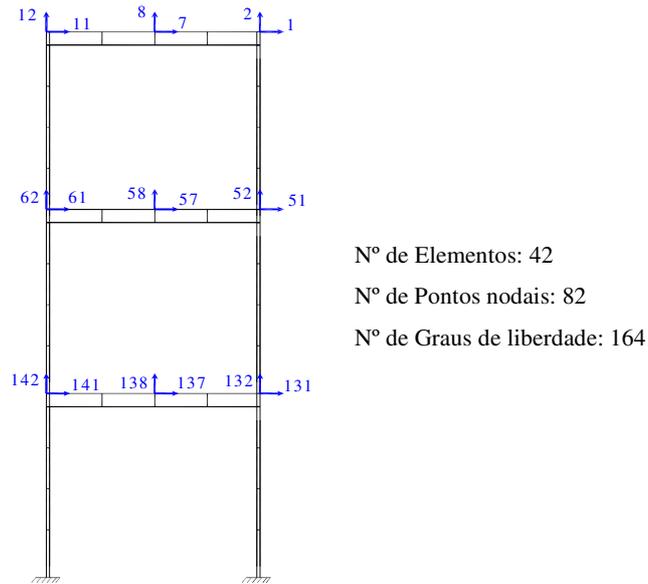


Figura 3.30: Modelo plano de elementos finitos de placa do edifício de três pisos com 2 G.L. de translação por nó.

Com este modelo de elementos finitos 2D, é possível estudar o comportamento do edifício sob a acção de acelerogramas aplicados na base, nas duas direcções, horizontal e vertical, tal como se mostra na Figura 3.31. Na análise sísmica de estruturas, o mais usual é que seja definido apenas um acelerograma para a direcção horizontal (uma vez que, durante uma ocorrência sísmica, é a componente horizontal que mais predomina), sendo o acelerograma na direcção vertical obtido através da multiplicação do acelerograma horizontal por um factor de aproximadamente de $2/3$. Deste modo, as histórias de forças a considerar nos vários graus de liberdade (forças de inércia dadas pelo produto entre a massa do piso e as acelerações na base) obtêm-se a partir da história de acelerações horizontais, $a_{sx} = a_{sx}(t)$.

A transformação da equação do movimento deste modelo de elementos finitos do edifício para coordenadas modais, conduz ao seguinte vector de forças modais:

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(t) = -\underline{\Phi}^T \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_x(t) + \tilde{\mathbf{f}}_y(t)) \quad (3.139)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(t) = -\underbrace{\underline{\Phi}^T \cdot \underline{\mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_x}_{\mathbf{F}_{px}} \cdot a_{sx}(t) - \underbrace{\underline{\Phi}^T \cdot \underline{\mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_y}_{\mathbf{F}_{py}} \cdot 2/3 \cdot a_{sx}(t) \quad (3.140)$$

onde,

\mathbf{F}_{px} é o vector com os factores de participação modais para o acelerograma sísmico segundo x;

\underline{F}_{py} é o vector com os factores de participação modais para o acelerograma sísmico segundo y.

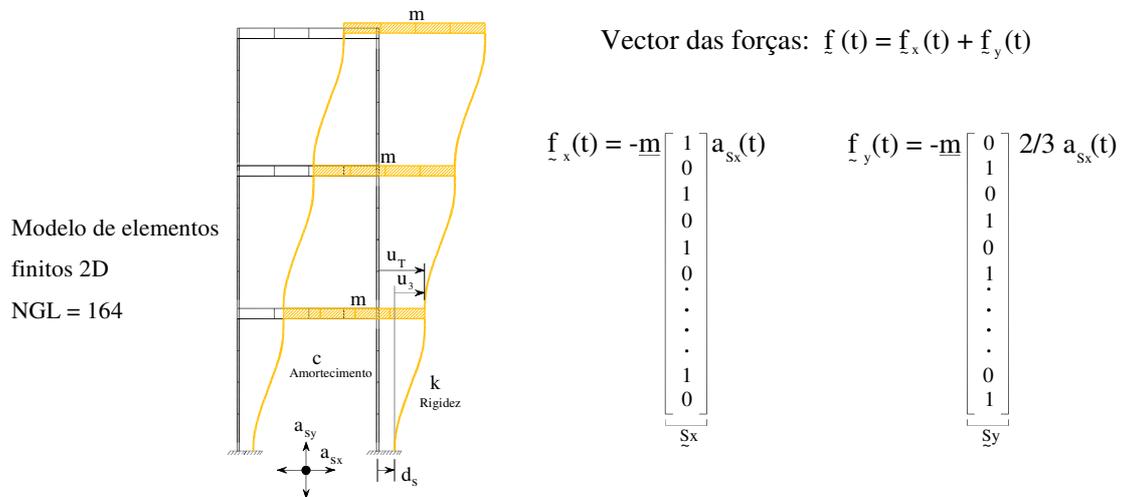


Figura 3.31: Modelo de elementos finitos de placa do edifício de três pisos sujeito a acelerações na base nas direcções horizontal e vertical.

3.4.4 Cálculo sísmico de estruturas com vários G.L. utilizando os espectros de resposta

O estudo do movimento de uma estrutura sob a acção de um sismo, com base num modelo de N.G.L. graus de liberdade, pode ser descrito matematicamente em coordenadas modais através do seguinte sistema de N.G.L. equações diferenciais desacopladas (o número total de modos de vibração é igual ao número de G.L. do modelo adoptado):

$$\begin{cases} m_1^* \cdot \ddot{u}_1^* + c_1^* \cdot \dot{u}_1^* + k_1^* \cdot u_1^* = -F_{p1} \cdot a_s(t) \\ m_2^* \cdot \ddot{u}_2^* + c_2^* \cdot \dot{u}_2^* + k_2^* \cdot u_2^* = -F_{p2} \cdot a_s(t) \\ \vdots \\ m_{NGL}^* \cdot \ddot{u}_{NGL}^* + c_{NGL}^* \cdot \dot{u}_{NGL}^* + k_{NGL}^* \cdot u_{NGL}^* = -F_{p,NGL} \cdot a_s(t) \end{cases} \quad (3.141)$$

Esta possibilidade de transformar a equação diferencial do movimento de um modelo estrutural com N.G.L. graus de liberdade num sistema de N.G.L. equações diferenciais independentes, semelhantes à equação que descreve o movimento de um oscilador de 1 G.L., permitiu desenvolver um método de grande eficácia para o cálculo dos valores máximos das coordenadas modais (e dos correspondentes deslocamentos estruturais) denominado método do espectro de resposta. Este método exige que se conheça à partida o deslocamento máximo

que um dado acelerograma $a_s(t)$ provoca em modelos simples de 1 G.L., com frequências naturais de vibração coincidentes com as frequências modais, ω_n^* , correspondentes a cada uma das equações anteriores (equações modais).

Facilmente se determina a solução ao longo do tempo, $u_n^*(t)$ de cada uma das N.G.L. equações anteriores, recorrendo à fórmula recursiva, atrás apresentada para o caso de um oscilador de 1 G.L. Depois, basta conhecer o efeito do acelerograma $a_s(t)$ (em termos de valores máximos) sobre diferentes osciladores de 1 G.L., com frequências iguais às frequências modais ω_n^* e amortecimentos correspondentes aos amortecimentos modais ξ^* . Os valores máximos dos deslocamentos modais $u_n^*(t)$ podem ser representados num gráfico, em que o eixo das abcissas corresponde às frequências modais, tal como se mostra na Figura 3.32. Para uma dada equação modal n , a que corresponde uma frequência modal de vibração ω_n^* , o valor máximo da solução $u_n^*(t)$ é exactamente igual à ordenada do espectro de deslocamentos $S_d(\omega_n)$ se, o factor de participação F_{pn} for unitário. No caso geral, em que o factor de participação não é unitário, o valor máximo de $u_n^*(t)$ corresponde ao produto da referida ordenada do espectro $S_d(\omega_n)$ pelo factor de participação modal (Figura 3.32).

Na elaboração de um projecto é extremamente importante conhecer a sismologia da zona onde se localiza a futura obra, através da caracterização/levantamento “*in-situ*” das falhas activas ou através da análise da sismicidade histórica e dos registos sísmicos mais recentes sentidos no local. Como resultado destes estudos, e tendo em conta as características elastodinâmicas das formações geológicas entre as zonas de construção e as zonas onde podem situar-se os principais focos dos potenciais sismos, é possível elaborar modelos de previsão da acção sísmica para um dado local [Carvalho, 2007]. É com base nestes modelos que se definem os espectros de resposta envolventes para uma dada zona e para sismos com diferentes períodos de retorno (maior ou menor probabilidade de ocorrência). Portanto, as estruturas devem ser dimensionadas de forma a suportar, sem quaisquer danos, os sismos com baixo período de retorno (sismos de menor intensidade que podem ocorrer com maior probabilidade) previstos para um dado local e não devem colapsar sob a acção dos sismos com maior período de retorno (sismos de maior intensidade e com menor probabilidade de ocorrência).

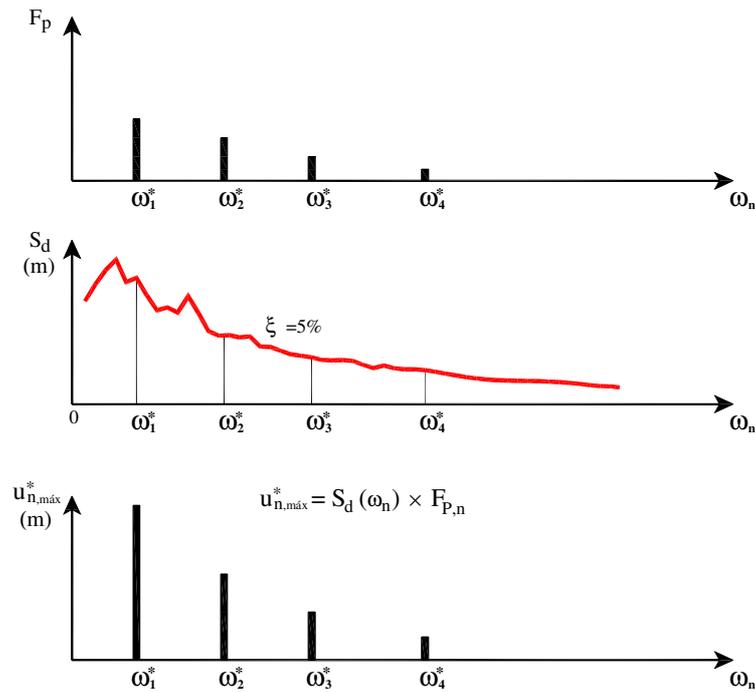


Figura 3.32: Representação esquemática da obtenção dos valores máximos das coordenadas modais para os N modos de vibração a partir da multiplicação dos factores de participação modal com a ordenada do espectro de deslocamentos correspondente ao modo N.

3.5 Comportamento dinâmico de modelos estruturais com vários graus de liberdade. Análise no domínio da frequência

Neste ponto será efectuado um estudo sobre o comportamento dinâmico do já referido edifício de 3 pisos, no sentido de se obterem as frequências naturais da estrutura a partir da técnica de Fourier, na decomposição em ondas de acelerogramas registados, tal como foi efectuado para o edifício de um piso.

3.5.1 Modos de Vibração e Frequências Naturais

Realizou-se um ensaio no qual se aplicaram uma sequência de pancadas ao nível dos vários pisos do edifício em estudo. Foram colocados três acelerómetros ao nível de cada piso e registaram-se as acelerações durante 60 s, a partir de um sistema de aquisição de dados. A frequência de amostragem foi de 51,2 Hz, o que significa que foram registados 51,2 valores por segundo, o que corresponde a um total de 3072 valores.

Na Figura 3.33 observam-se as acelerações medidas nos 3 pisos.

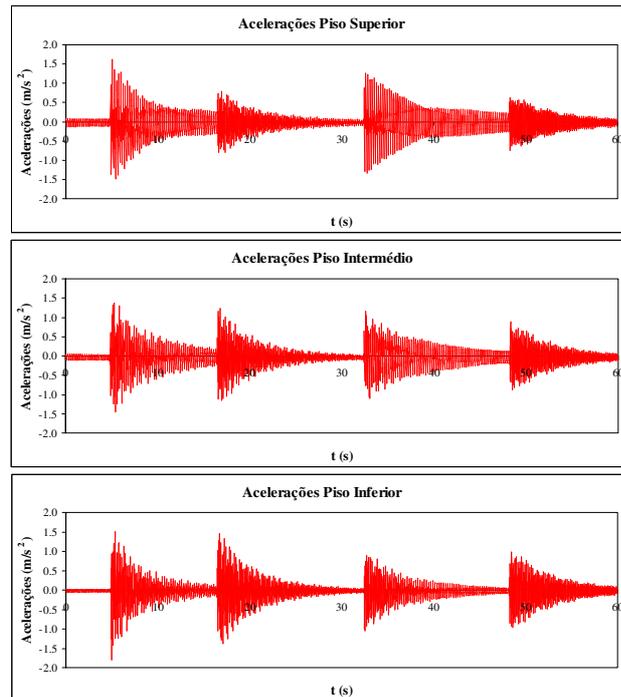
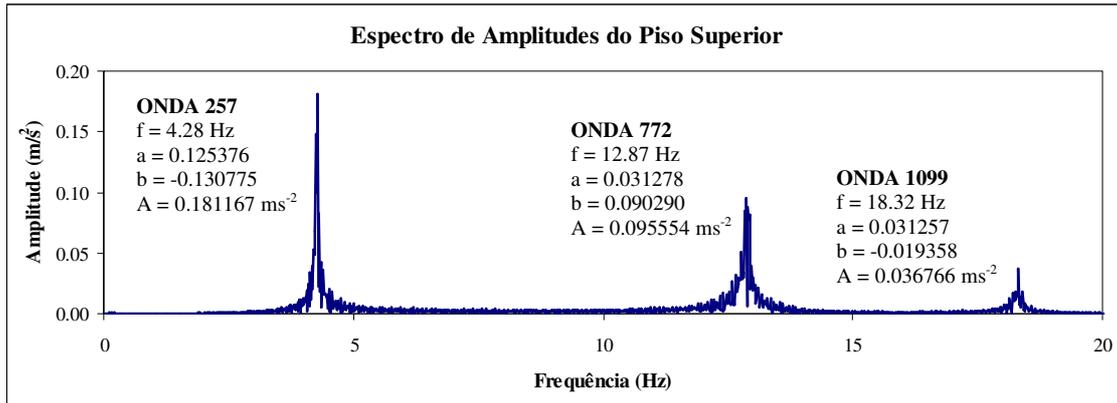


Figura 3.33: Acelerogramas medidos nos três pisos devido à aplicação de várias pancadas ao nível dos pisos.

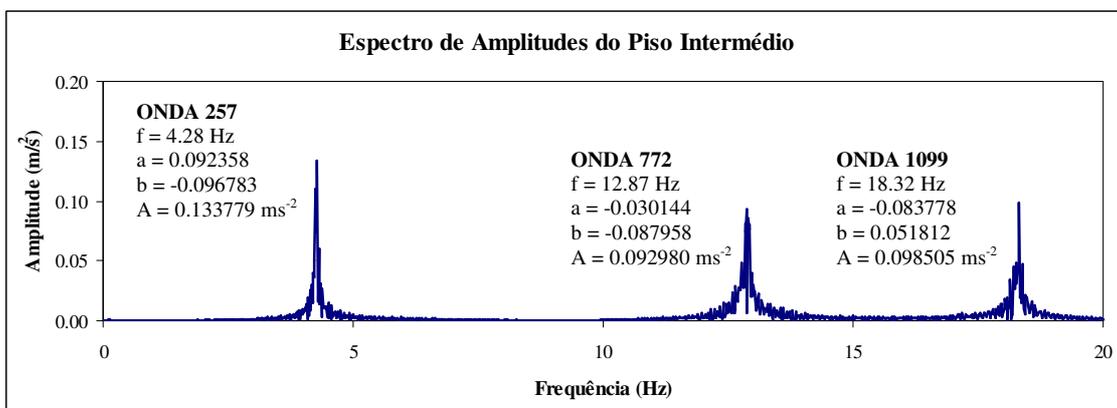
Aplicando a técnica das séries de Fourier para decompor em ondas sinusoidais os acelerogramas registados, conclui-se que, de entre todas as ondas escondidas nos acelerogramas, destacam-se três delas, por apresentarem as maiores amplitudes:

- Onda $n = 257$ de frequência 4,28 Hz;
- Onda $n = 772$ de frequência 12,87 Hz;
- Onda $n = 1099$ de frequência 18,32 Hz.

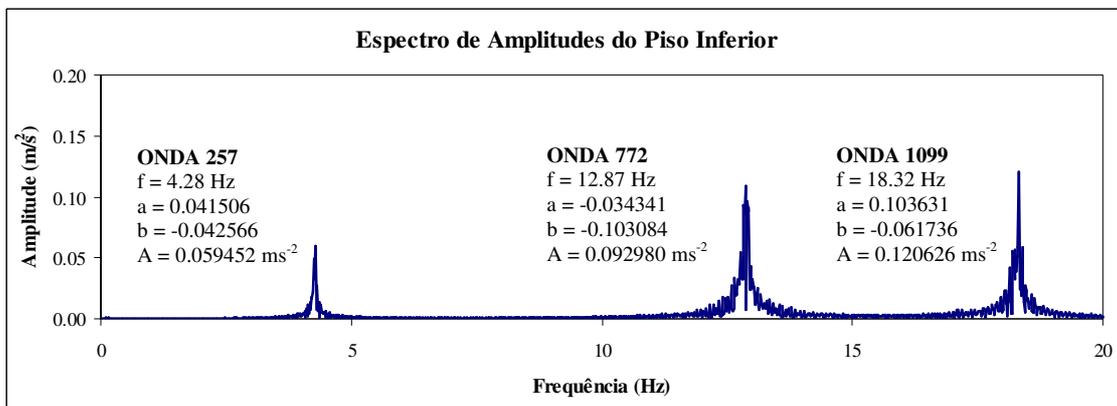
Na Figura 3.34 apresentam-se os respectivos espectros de amplitudes obtidos nos três pisos do edifício em análise.



a)



b)



c)

Figura 3.34: Espectros de Amplitudes do edifício em análise: a) do piso superior; b) do piso intermédio e; c) do piso inferior.

A cada um dos picos identificados nestes espectros de amplitudes corresponde uma dada onda sinusoidal, isto é, a uma das frequências naturais do edifício em estudo. Na Figura 3.35 mostra-se um esquema, em perspectiva, da decomposição das várias ondas dos acelerogramas registados para cada piso, onde se salientam os três picos, correspondentes às ondas principais cujas frequências correspondem às frequências naturais do edifício de três pisos em análise.

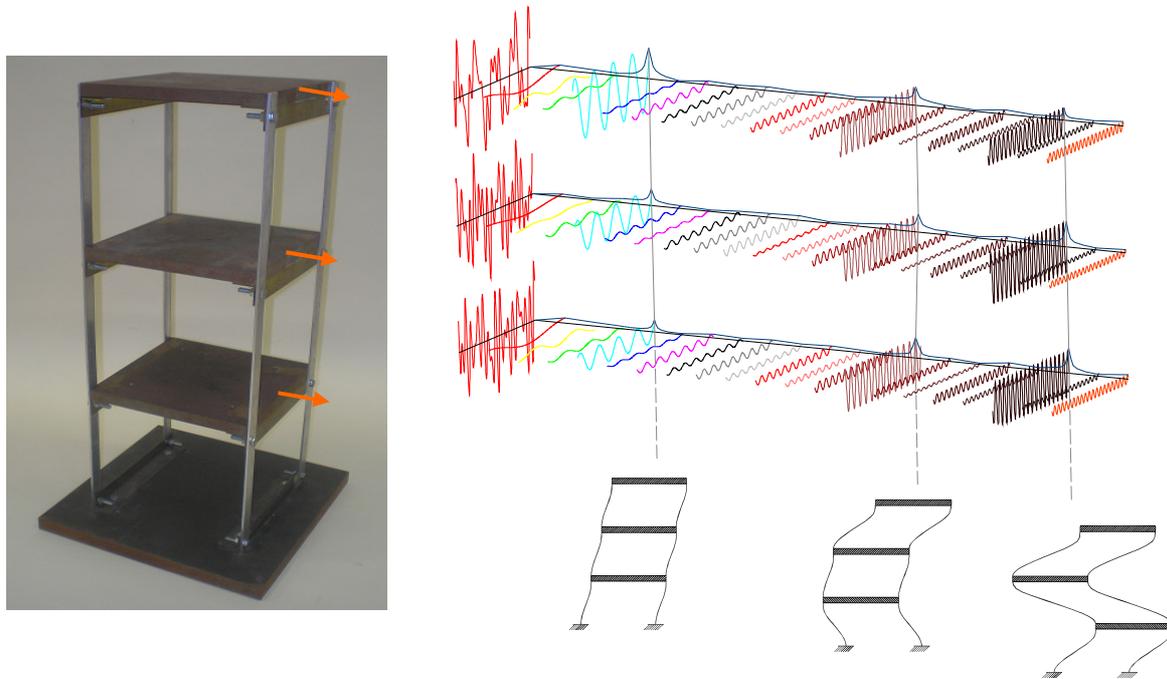


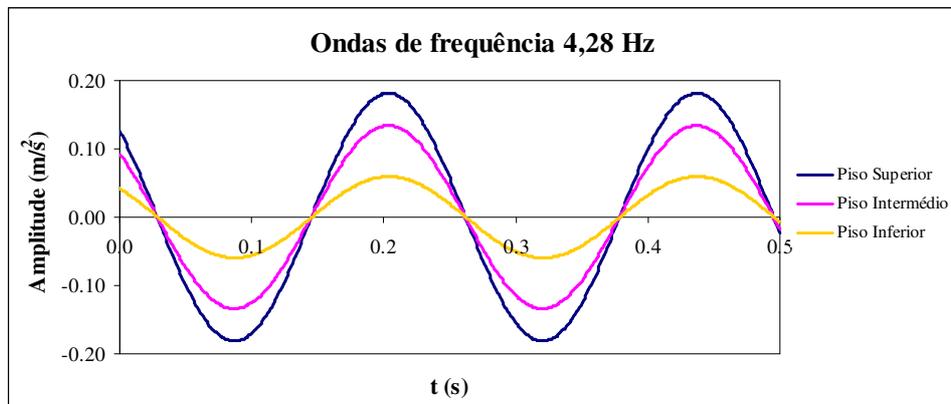
Figura 3.35: Decomposição em ondas dos acelerogramas registados em cada piso, identificando-se as três ondas principais cujas frequências correspondem às frequências naturais do edifício. Representação das configurações modais correspondentes às frequências naturais do edifício (adaptado de [Oliveira, 2007]).

A identificação das configurações modais baseia-se na análise da amplitude e do ângulo de fase de cada uma das três ondas identificadas nos acelerogramas registados [Mendes e Oliveira, 2008]. Na Figura 3.36 apresenta-se a representação das ondas sinusoidais para cada uma das frequências naturais identificadas neste edifício.

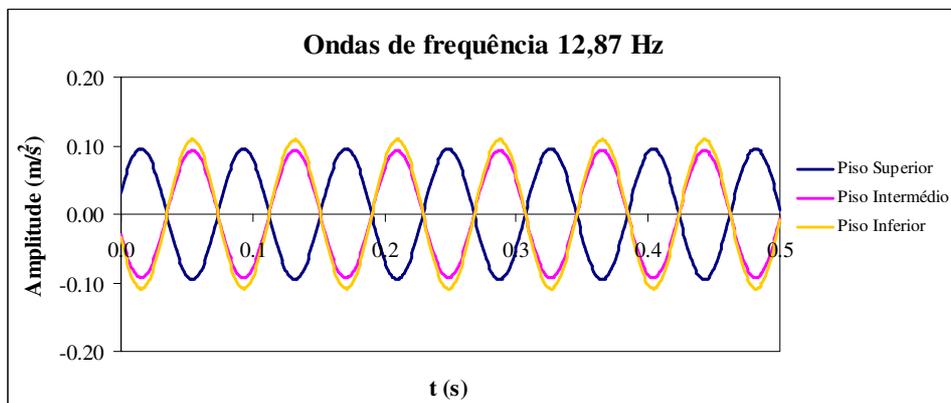
Relativamente à primeira frequência obtida ($f = 4,28 \text{ Hz}$), constata-se que as três ondas estão em fase, sendo a onda correspondente ao piso superior a de maior amplitude e a onda do piso inferior a de menor amplitude.

Na segunda frequência natural ($f = 12,87 \text{ Hz}$), verifica-se que, as ondas relativas aos pisos intermédio e inferior estão em fase e, a onda correspondente ao piso superior está em

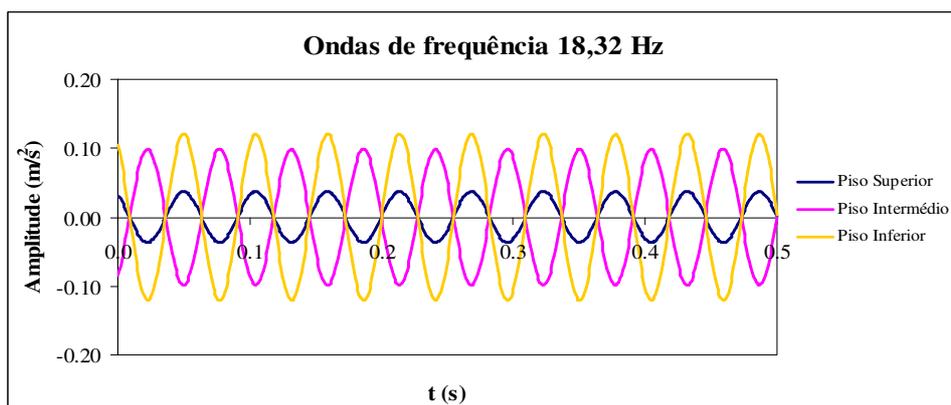
oposição de fase relativamente às outras. Em termos de amplitudes, observa-se que a onda relativa ao piso inferior apresenta uma amplitude ligeiramente superior que as restantes ondas.



a)



b)



c)

Figura 3.36: Representação das principais ondas identificadas nos vários pisos para a: a) frequência de 4,28 Hz (1º modo de vibração); b) frequência de 12,87 Hz (2º modo de vibração) e; c) frequência de 18,32 Hz (3º modo de vibração).

Da análise do gráfico referente às ondas obtidas com a terceira frequência natural ($f = 18,32 \text{ Hz}$), verifica-se que as ondas identificadas nos pisos superior e inferior estão em fase e que a onda do piso intermédio está em oposição de fase relativamente às ondas referidas anteriormente. Quanto às amplitudes, é a onda do piso inferior que apresenta maior amplitude, correspondendo a menor amplitude à onda relativa ao piso superior.

Com estes resultados, torna-se possível efectuar a representação gráfica das configurações dos três modos de vibração do edifício, com base nas amplitudes obtidas para cada uma das ondas sinusoidais (Figura 3.37).

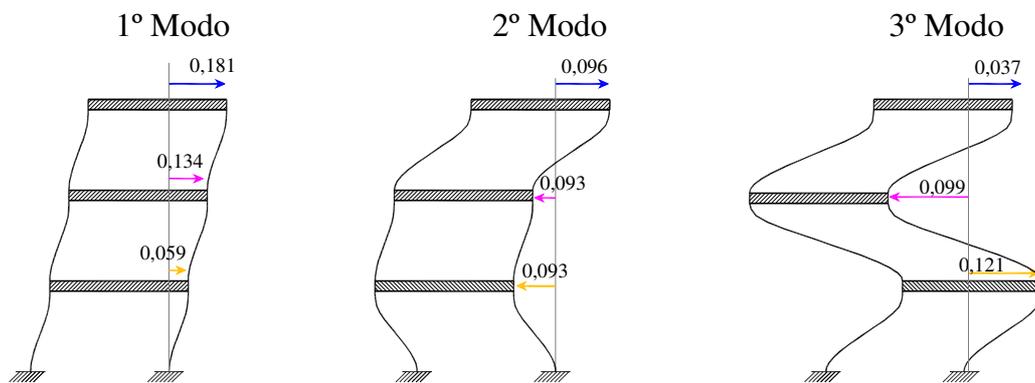


Figura 3.37: Representação das configurações modais do edifício de três pisos com base na decomposição em ondas sinusoidais dos acelerogramas registados.

3.6 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se os principais conceitos da análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Para introduzir estes conceitos abordou-se em primeiro lugar o caso mais simples de um oscilador de 1 G.L., considerando como exemplo um modelo de um edifício de 1 piso. Foi igualmente estudado em pormenor a resposta dinâmica de modelos de 1 G.L. quando sujeitos a acelerogramas sísmicos aplicados na base.

O edifício de 1 piso serviu também de modelo para a realização de um ensaio de vibração ambiental para mostrar a aplicação de uma técnica de identificação modal, designadamente, o método básico no domínio da frequência, baseado no conceito das séries de Fourier (decomposição de acelerogramas em ondas sinusoidais) que consistiu na determinação da frequência natural do pórtico.

Posteriormente, apresentaram-se as formulações no domínio do tempo para a análise do comportamento dinâmico de modelos estruturais com vários graus de liberdade com base no conceito de coordenadas modais, que consiste no desacoplamento do sistema de equações diferenciais em várias equações equivalentes à de um oscilador de 1 G.L. Adoptou-se como exemplo um modelo de um edifício de 3 pisos (com 1 G.L. de translação por piso) para exemplificar a determinação dos parâmetros dinâmicos (frequências naturais e modos de vibração) e, estudou-se em pormenor a acção do vento e a acção sísmica.

Apresentou-se também em pormenor a análise do comportamento de estruturas com vários G.L. sob a acção sísmica utilizando o método do espectro de resposta.

Por fim, submeteu-se o pórtico de 3 pisos a um ensaio de vibração para se mostrar a obtenção experimental das suas características dinâmicas.

Capítulo 4

Modelação Numérica do Comportamento Dinâmico de Estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos

4.1 Considerações iniciais

Na análise de estruturas um dos problemas de maior importância, é o da determinação dos campos de deslocamentos, deformações e tensões que se instalam devido à actuação de forças exteriores.

Na hipótese de comportamento elástico dos materiais, a resolução deste problema é relativamente simples pois envolve o estabelecimento das equações fundamentais da Mecânica que, nessa hipótese, correspondem a um sistema de equações diferenciais lineares, cuja solução numérica é, em geral, obtida facilmente utilizando o Método das Diferenças Finitas (M.D.F.) ou o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.).

Na Figura 4.1 apresentam-se esquematicamente as equações fundamentais da Mecânica para o caso geral de um problema de equilíbrio tridimensional.

Conhecidas em cada ponto as forças mássicas actantes \underline{f} , a geometria, as propriedades dos materiais e as condições de apoio, o objectivo consiste em determinar os deslocamentos \underline{u} em todos os pontos da estrutura (o campo de deslocamentos é um campo vectorial, logo há que determinar três componentes de deslocamento em cada ponto).

Conhecidos os deslocamentos em cada ponto, é possível calcular as deformações com base na equação de compatibilidade e as tensões a partir da equação constitutiva.

Como se pode observar na figura, as equações a respeitar em cada ponto P (considerando a hipótese mais geral de equilíbrio tridimensional), constituem um sistema de 15 equações diferenciais (três equações de equilíbrio, seis equações de compatibilidade e seis equações constitutivas) a 15 incógnitas (três componentes de deslocamento por ponto, seis componentes de deformação e seis componentes de tensão).

EQUILÍBRIO TRIDIMENSIONAL

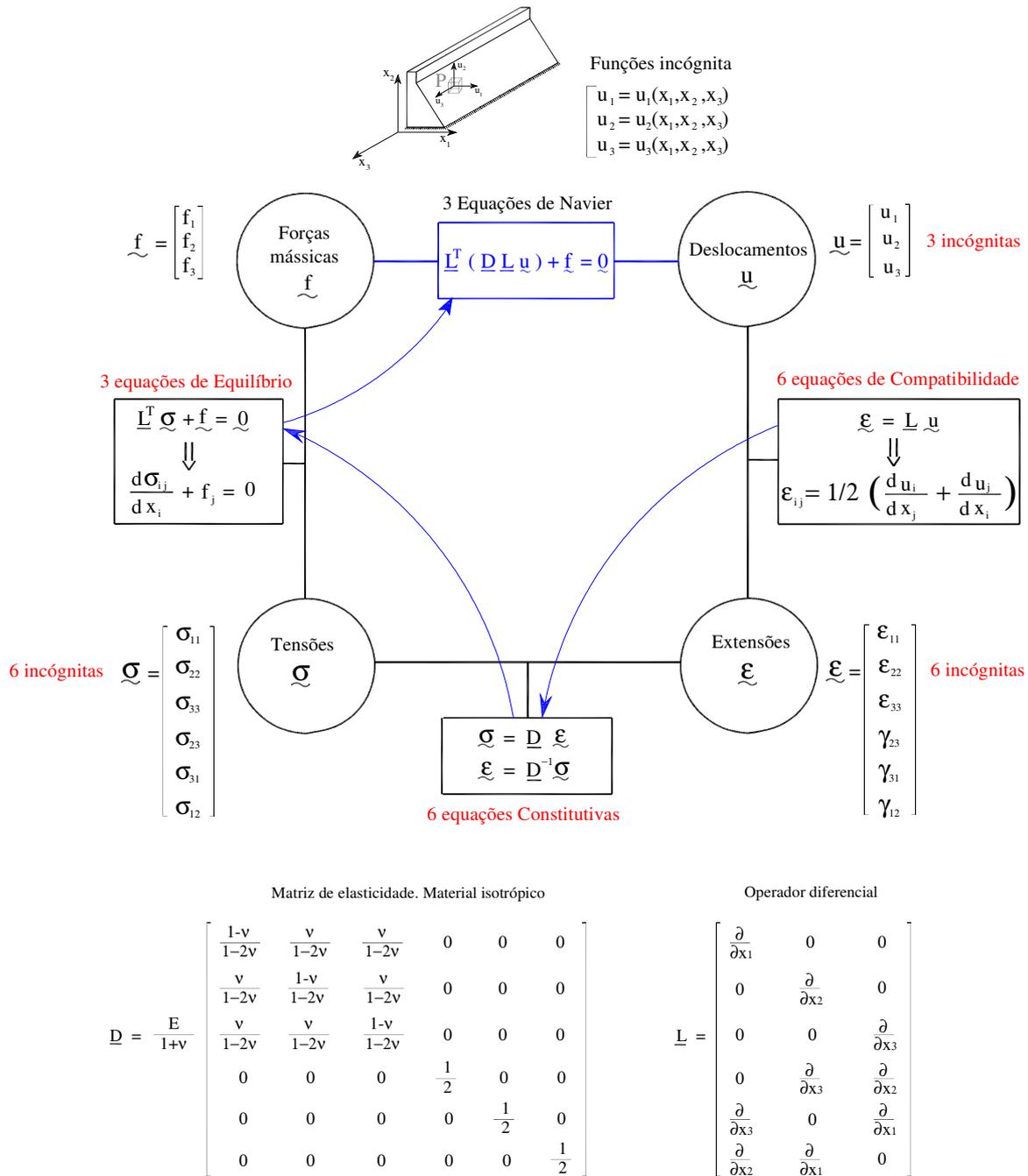


Figura 4.1: Incógnitas e equações fundamentais da Mecânica dos Sólidos (adaptado de [Oliveira e Mendes, 2009]).

As equações de equilíbrio estabelecem a relação entre as tensões e as forças mássicas, as equações de compatibilidade (considerando a hipótese de pequenos deslocamentos), relacionam as deformações com os deslocamentos \underline{u} através do operador diferencial \underline{L} que se descreve na Figura 4.1 e, as equações constitutivas estabelecem a ligação entre as tensões e as

deformações a partir da matriz de elasticidade \underline{D} , que, considerando a hipótese de comportamento elástico linear e material isotrópico é dada pela matriz que se apresenta na Figura 4.1.

Este conjunto de 15 equações diferenciais a 15 incógnitas pode ser expresso apenas em termos dos deslocamentos, reduzindo-se então a um sistema de 3 equações com 3 incógnitas ($u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$) – equações de Navier (Figura 4.1).

Com excepção de alguns casos elementares, não é possível obter uma solução analítica exacta para estas equações diferenciais, respeitando as condições de fronteira. Deste modo, recorre-se a métodos numéricos, nomeadamente ao Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) que é actualmente, o método mais utilizado para obter soluções aproximadas das equações da Mecânica, em problemas de qualquer tipo de complexidade.

Neste capítulo apresentam-se os fundamentos do M.E.F., efectuando a análise estática e dinâmica de estruturas bidimensionais, considerando uma discretização com elementos finitos de 4 pontos nodais, recorrendo a um exemplo simples para apresentar os conceitos.

Em seguida, apresentam-se elementos finitos de placa com 8 pontos nodais e elementos finitos tridimensionais com 20 nós e mostram-se resultados de cálculos de estruturas bidimensionais e tridimensionais simples para testar um programa de elementos finitos desenvolvido no âmbito deste trabalho.

É de salientar que, a aplicação do M.E.F. à análise do comportamento dinâmico de estruturas corresponde a uma generalização dos conceitos apresentados na análise estática.

Antes de avançar para a introdução dos conceitos básicos do M.E.F., é importante notar que a formulação baseada num equilíbrio de forças onde é estabelecida uma equação diferencial com três incógnitas u_1 , u_2 e u_3 (equações de Navier), é denominada por formulação forte. Porém, esta formulação não é a mais adequada quando se pretende obter uma solução numérica pelo M.E.F. (de facto, a forma forte é adequada para obter soluções numéricas pelo M.D.F.).

Para se utilizar o M.E.F. deve-se então partir de uma formulação integral (ou formulação fraca), equivalente à anterior, a qual pode ser obtida matematicamente aplicando à referida equação diferencial o Lema Fundamental do Cálculo Variacional ou, pode ser obtida

fisicamente a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), como se mostra no esquema da figura seguinte.

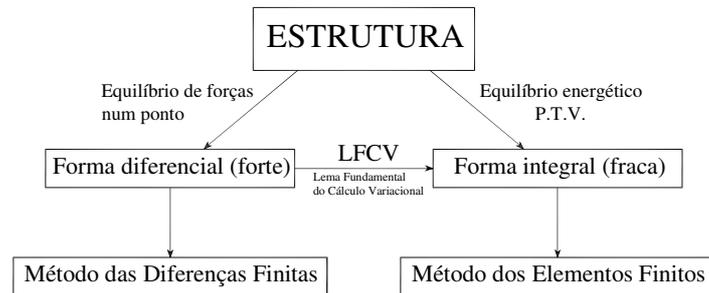


Figura 4.2: Equações de equilíbrio na análise de estruturas e sua resolução por métodos numéricos. A solução numérica pelo M.E.F. obtém-se a partir da forma integral.

4.2 Formulação do Método dos Elementos Finitos

4.2.1 Considerações gerais

O Método dos Elementos Finitos é um poderoso método numérico para a resolução computacional das equações diferenciais da Mecânica dos Sólidos. O desenvolvimento deste método surgiu no final da década de 40, na sequência de trabalhos enquadrados no programa de exploração espacial dos Estados Unidos da América [Zienkiewicz, 1967; Pedro, 1977].

Neste método, a estrutura a analisar é dividida num número discreto de elementos finitos, ligados entre si por pontos nodais, formando-se deste modo uma malha de elementos finitos.

Neste trabalho adopta-se a formulação do M.E.F. em deslocamentos pela sua eficiência computacional no cálculo de grandes estruturas, sendo as principais incógnitas a determinar os deslocamentos dos pontos nodais (graus de liberdade).

Na análise estática e dinâmica de estruturas de engenharia civil surgem em geral problemas de equilíbrios tridimensionais, no entanto, há vários tipos de estruturas que podem ser analisadas com base em modelos planos. É o caso por exemplo das barragens de gravidade, como a apresentada na figura seguinte. Neste caso, é aceitável utilizar um modelo plano e a hipótese de um equilíbrio de placa (estado plano de deformação).

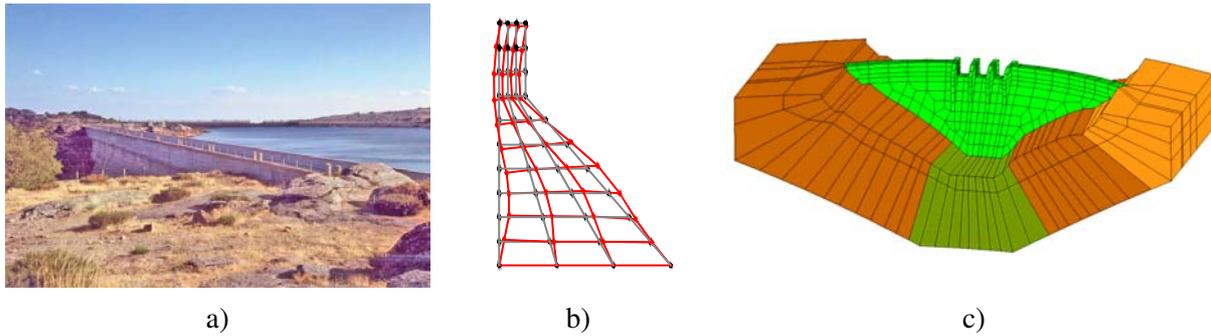


Figura 4.3: a) Barragem de gravidade. b) Modelo plano. c) Modelo tridimensional.

4.2.2 Fundamentos do M.E.F. Deformação de um cabo elástico

O problema da deformação de um cabo elástico (Figura 4.4) submetido a uma força de tracção S e à acção de uma carga uniformemente distribuída f (como por exemplo, o peso próprio) é adequadamente descrito por uma das mais simples equações diferenciais da Teoria da Elasticidade (na hipótese de pequena flecha). Fisicamente verifica-se que a função $u = u(x)$ que descreve o deslocamento vertical de cada ponto x do cabo, tem uma curvatura constante que é proporcional ao valor da carga f e inversamente proporcional à força de tracção S (o sinal da carga é sempre contrário ao da curvatura), ou seja:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{f}{S} \quad (4.1)$$

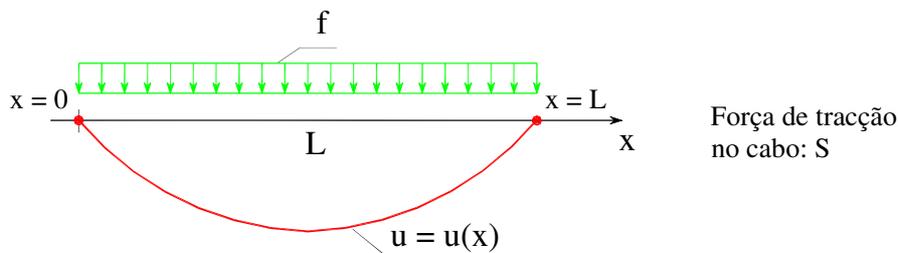


Figura 4.4: Deformação de um cabo elástico apoiado nas extremidades.

Este problema da deformação de um cabo elástico apoiado nas duas extremidades corresponde matematicamente ao seguinte problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} S \frac{d^2u}{dx^2} + f = 0 & , \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

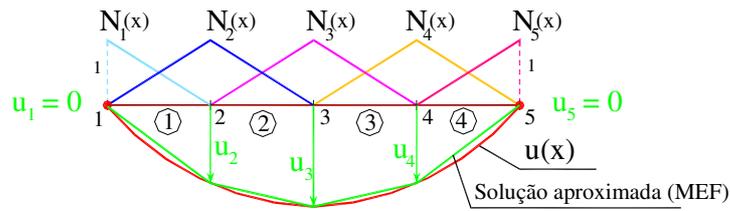
Trata-se de um problema unidimensional muito simples (a sua solução pode ser determinada analiticamente por primitivação directa) de grande interesse para ilustrar a aplicação Método dos Elementos Finitos à resolução de equações diferenciais, como se mostra em seguida.

A resolução numérica de uma equação diferencial como a anterior, definida num dado domínio (neste caso trata-se de um domínio unidimensional: $[0,L]$), exige que se comece por considerar uma dada discretização do domínio em vários sub-domínios ou elementos finitos, ligados entre si pelos denominados pontos nodais (Figura 4.5).

O objectivo principal é, portanto, determinar o valor dos deslocamentos $u = u(x)$ nos pontos nodais. Desta forma o problema da resolução numérica de uma equação diferencial é reduzido, como veremos, à determinação da solução de um sistema de equações algébricas em que as incógnitas correspondem aos valores dos deslocamentos nos pontos nodais. A dimensão deste sistema dependerá, portanto, do número de pontos nodais considerados na discretização do domínio.

A ideia fundamental do M.E.F. consiste em admitir que a solução $u(x)$ pode ser aproximada através da combinação linear de funções simples $N_i = N_i(x)$, definidas, neste caso, por troços lineares (funções de interpolação): por cada ponto nodal i define-se uma função $N_i(x)$ que assume valor unitário nesse ponto nodal e valores nulos nos restantes pontos nodais (ver Figura 4.5).

Para o caso da discretização em quatro elementos finitos apresentada na Figura 4.5, a resolução numérica pelo M.E.F. consistirá em determinar apenas os valores dos deslocamentos nodais u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 (neste caso, tendo em conta as condições de fronteira dadas, sabe-se que deverá ser $u_1 = 0$ e $u_5 = 0$). Para tal há que obter um sistema com cinco equações algébricas que envolvam, como incógnitas, os pretendidos deslocamentos nodais.



$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) & N_5(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad u(x) = \underline{N} \underline{u}$$

Figura 4.5: Discretização do cabo em quatro elementos finitos e representação de uma solução aproximada dada pela combinação linear de funções simples definidas por troços lineares (funções de interpolação, $N_i(x)$).

Assim é fundamental transformar a equação diferencial em análise (forma forte) na correspondente forma integral (forma fraca) o que se consegue matematicamente aplicando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional⁽⁵⁾ (LFCV) à equação diferencial que se pretende resolver (esta pretendida forma integral também pode ser obtida fisicamente recorrendo ao P.T.V.):

Tomando $F(x) = S \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0$ e tendo em conta as condições de fronteira, a aplicação do

LFCV permite escrever a seguinte equivalência:

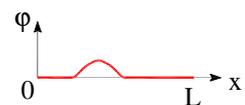
$$\begin{cases} S \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0, & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^L \left(S \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) \varphi(x) dx = 0, & \forall \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(]0, L[) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

ou,

⁽⁵⁾ Lema Fundamental do Cálculo Variacional (LFCV)

Se $F(x)$ é uma função contínua definida em $]0, L[$ então,

$$F(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \Leftrightarrow \int_0^L F(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \text{para toda a função de teste } \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(]0, L[)$$



Nota: as funções de teste aqui φ referidas neste Lema correspondem ao conceito de campos de deslocamentos virtuais $u_v = u_v(x)$ utilizado no enunciado do conhecido Princípio dos Trabalhos Virtuais.

$$\begin{cases} S \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0, & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2} S \varphi(x) dx = - \int_0^L f \varphi(x) dx, & \forall \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(]0, L[) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

ou ainda, integrando por partes,

$$\begin{cases} \left[\frac{du}{dx} S \varphi(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx} S \frac{d\varphi}{dx} dx = - \int_0^L f \varphi(x) dx, & \forall \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(]0, L[) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

e, por fim, uma vez que $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ (por definição de função de teste [Oden & Reddy, 1976])

$$\underbrace{\begin{cases} S \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0, & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}}_{\text{Forma Forte}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \int_0^L \frac{du}{dx} S \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^L f \varphi(x) dx, & \forall \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(]0, L[) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}}_{\text{Forma Fraca}} \quad (4.6)$$

Assim, a resolução numérica pelo M.E.F. da equação diferencial que descreve a deformação do cabo elástico, consiste em determinar os valores $u_1, u_2 \dots u_5$ por forma a que seja verificada, aproximadamente, a anterior forma fraca o que corresponde a admitir que se devem verificar as seguintes cinco equações:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} (u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 + u_5 N_5) S \frac{dN_i}{dx} dx = \int_0^L f N_i(x) dx, \quad \forall N_i, i=1,2,\dots,5 \quad (4.7)$$

em que as funções de teste são substituídas (por aproximação) pelas cinco funções de interpolação N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 . A verificação para estas cinco funções (entendidas como a base de um espaço linear de funções) corresponde a efectuar a verificação para todas as infinitas funções que resultam da sua combinação linear.

As cinco equações anteriores formam o pretendido sistema de equações algébricas em que as incógnitas correspondem aos deslocamentos nodais, u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 . Matricialmente o referido sistema assume a forma seguinte (adoptando a notação $N' = dN/dx$):

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \\ N_5' \end{bmatrix} S [N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4' \ N_5'] dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \int_0^L f \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} dx \quad (4.8)$$

o que, utilizando a conhecida notação de Zienkiewicz ($\underline{B} = [N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4' \ N_5']$) [Zienkiewicz, 1967] pode assumir a conhecida forma seguinte, mais compacta:

$$\underbrace{\int_0^L \underline{B}^T S \underline{B} dx}_{\substack{\text{Matriz de rigidez} \\ \text{da estrutura} \\ (5 \times 5)}} \cdot \underbrace{\underline{u}}_{\substack{\text{Vector dos} \\ \text{deslocamentos} \\ \text{nodais} \\ (5 \times 1)}} = \underbrace{\int_0^L f \underline{N}^T dx}_{\substack{\text{Vector das forças} \\ \text{nodais} \\ (5 \times 1)}} \quad (4.9)$$

Por fim é de referir que, como se mostra nos pontos seguintes, a resolução numérica pelo M.E.F. de uma equação diferencial que descreva o comportamento de uma qualquer estrutura de comportamento elástico linear corresponde sempre a montar e resolver um sistema de equações algébricas do tipo do anterior. Por questões de simplicidade e eficiência computacional, é usual adoptar uma metodologia em que a anterior análise é efectuada separadamente para cada um dos vários elementos finitos da discretização adoptada e, em seguida, é que a anterior equação é montada para toda a estrutura.

4.2.3 Aproximação Fundamental do M.E.F.

A aproximação fundamental do M.E.F. consiste em admitir que o deslocamento de um ponto P do interior de um elemento finito pode ser obtido de forma aproximada a partir dos deslocamentos dos pontos nodais \underline{u}^e , recorrendo a um método de interpolação.

Este conceito pode ser facilmente ilustrado para o caso de um elemento finito linear como se mostra na Figura 4.6.

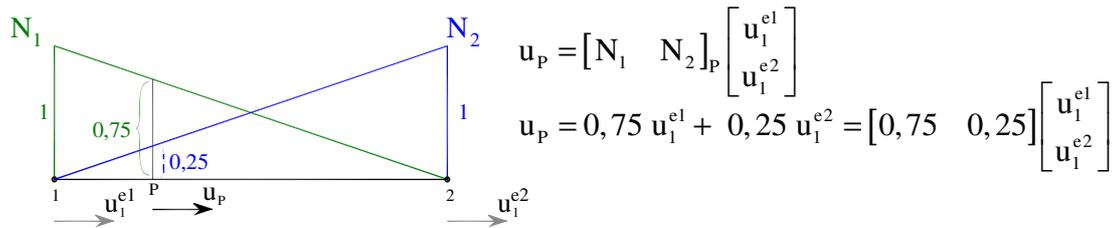


Figura 4.6: Conceito de funções de interpolação utilizando um elemento finito de barra com dois pontos nodais e um grau de liberdade de translação por nó.

Na figura seguinte ilustra-se este conceito para o caso de um elemento finito plano de 4 pontos nodais, com dois graus de liberdade por nó.

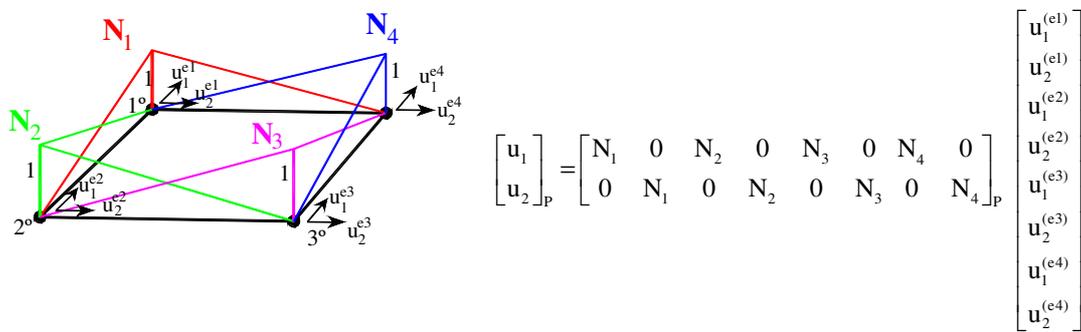


Figura 4.7: Conceito de funções de interpolação utilizando um elemento finito de placa com quatro pontos nodais e dois graus de liberdade de translação por nó.

Assim, no caso geral as componentes de deslocamento \underline{u}_p num ponto P do interior de um elemento finito obtêm-se, por interpolação, com base na seguinte relação (aproximação fundamental do M.E.F.):

$$\underline{u}_p = \underline{N}_p \cdot \underline{u}^e \quad (4.10)$$

onde, \underline{N}_p é a matriz que contém os valores das funções de interpolação (ou funções de forma) no ponto P e \underline{u}^e é o vector que contém os deslocamentos nos nós. As funções de interpolação, associadas a cada grau de liberdade (G.L.) de cada ponto nodal i de um elemento finito, assumem o valor unitário nesse ponto nodal i (e segundo o grau de liberdade considerado), e assumem o valor nulo nos restantes pontos nodais e valores intermédios nos pontos do interior do elemento finito.

4.2.4 Análise estática de uma estrutura plana pelo M.E.F.

Para ilustrar os fundamentos do M.E.F. será utilizado um exemplo de uma estrutura do tipo barragem de gravidade em betão, cujas características se apresentam seguidamente:

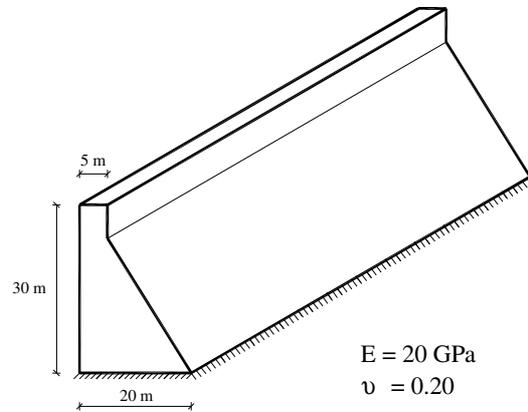


Figura 4.8: Barragem de gravidade em estudo.

Admitindo que a barragem apenas está sujeita ao seu peso próprio ($\gamma_{\text{betão}} = 25 \text{ kN/m}^3$), pretende-se efectuar uma análise estática da estrutura recorrendo ao M.E.F., determinando o campo de deslocamentos e de tensões.

Em seguida mostra-se uma sequência de etapas (E1 a E10) a considerar na análise de uma estrutura deste tipo pelo M.E.F.

E1. Escolha da aproximação a adoptar quanto ao tipo de equilíbrio

De acordo com a geometria da estrutura é aceitável analisar apenas uma secção plana admitindo a hipótese de equilíbrio de placa, ou seja, considera-se um modelo estrutural plano como se observa na figura seguinte.

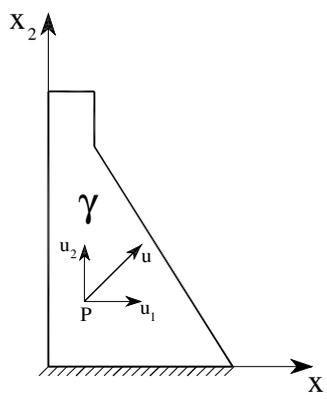


Figura 4.9: Modelo plano (equilíbrio de placa).

Em cada ponto há que determinar duas componentes de deslocamento, três componentes de deformação e três componentes de tensão:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

E2. Comportamento do material. Matriz de Elasticidade \underline{D}

Tratando-se de uma estrutura de betão é aceitável admitir a hipótese de material elástico e isotrópico.

Sendo a estrutura uma barragem de gravidade, as deformações segundo a direcção perpendicular à secção plana são praticamente nulas pois a estrutura é muito rígida nesta direcção. Deste modo, trata-se de um estado plano de deformação (E.P.D.) em que $\varepsilon_{33}=0$ e $\gamma_{23}=\gamma_{31}=0$. A tensão normal σ_{33} , segundo o eixo x_3 não será nula, e a matriz de elasticidade assume a seguinte forma [Chen & Saleeb, 1994]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (4.12)$$

E3. Escolha do tipo de elementos finitos

Para o caso de estruturas planas em equilíbrio de placa, há que adoptar uma discretização em elementos finitos com dois graus de liberdade por nó. Podem ser utilizados elementos finitos quadrangulares ou triangulares como os que se mostram na figura seguinte.

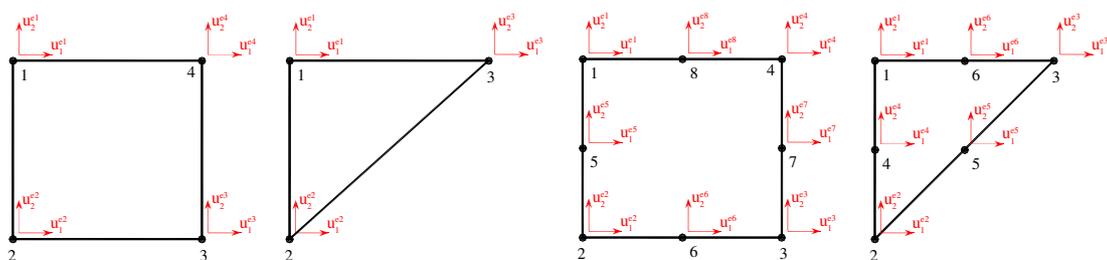


Figura 4.10: Possíveis tipos de elementos finitos com 2 G.L. de translação por nó para a análise de estruturas planas [Oliveira, 2003].

Neste caso serão utilizados elementos finitos quadrangulares de 4 nós com dois graus de liberdade por nó. Para estes elementos o deslocamento em cada ponto P do seu interior é obtido como uma média ponderada dos deslocamentos dos seus quatro nós, sendo os factores de ponderação correspondentes aos valores das funções de interpolação nesse ponto. Assim, as duas componentes de deslocamento são dadas por $u_1 = N_1 u_1^{e1} + N_2 u_1^{e2} + N_3 u_1^{e3} + N_4 u_1^{e4}$ e $u_2 = N_1 u_2^{e1} + N_2 u_2^{e2} + N_3 u_2^{e3} + N_4 u_2^{e4}$ (6), o que escrito na forma matricial corresponde à já referida equação que traduz a aproximação fundamental do M.E.F. para este tipo de elementos finitos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{\underline{N} \ (2 \times 8)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_2^{e1} \\ u_1^{e2} \\ u_2^{e2} \\ u_1^{e3} \\ u_2^{e3} \\ u_1^{e4} \\ u_2^{e4} \end{bmatrix}}_{(8 \times 1)} \quad (4.13)$$

E4. Discretização em elementos finitos

Dado tratar-se de um exemplo ilustrativo, opta-se por discretizar a estrutura em apenas quatro elementos finitos, como se mostra na Figura 4.11. É de notar que, na prática devem adoptar-se malhas com maior refinamento, por forma a obter soluções numéricas mais próximas da solução exacta. Neste exemplo, apenas se adoptaram quatro elementos por motivos de simplificação de cálculos.

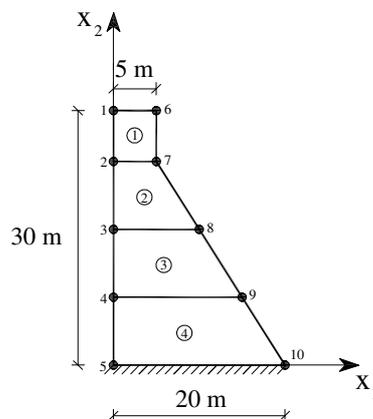


Figura 4.11: Malha de elementos finitos (discretização da estrutura).

(6) Os valores N_1, N_2, N_3 e N_4 são as funções de interpolação no ponto P do interior do elemento finito, sendo que $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$.

Nas tabelas que se mostram a seguir apresentam-se as coordenadas dos nós e a definição dos elementos (incidências).

Nó	x_1	x_2
1	0	30
2	0	24
3	0	16
4	0	8
5	0	0
6	5	30
7	5	24
8	10	16
9	15	8
10	20	0

a)

Elemento	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
1	1	2	7	6
2	2	3	8	7
3	3	4	9	8
4	4	5	10	9

b)

Tabela 4-1: a) Coordenadas dos nós da estrutura em estudo; b) definição dos elementos (tabela de incidências).

E5. Estabelecimento da equação de equilíbrio de um elemento finito recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) é um princípio energético segundo o qual é condição necessária e suficiente para que um corpo elástico esteja em equilíbrio, que o trabalho de todas as forças exteriores seja igual ao trabalho correspondente às forças interiores, para todo o campo de deslocamentos virtuais $u_v = u_v(x_1, x_2)$, ou seja,

$$W_{int} = W_{ext} \tag{4.14}$$

$$\int_V \underline{\underline{\varepsilon}}_v^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, dV = \int_V \underline{\underline{u}}_v^T \cdot \underline{\underline{f}} \, dV, \quad \forall u_v$$

Sabendo que em cada ponto do interior do elemento finito as equações de compatibilidade ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{u}}$) e as equações constitutivas ($\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$) têm que ser verificadas, e tendo em conta que estas podem ser escritas usando a aproximação fundamental do M.E.F. então, estas equações podem ser introduzidas na expressão geral do P.T.V. (4.14) de modo a obter-se a equação de equilíbrio de um elemento finito formulado em deslocamentos na forma $\underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}^e$, tal como se pode ver no seguinte esquema da Figura 4.12.

Neste caso concreto, para um elemento finito plano de 4 nós (com 2 G.L. de translação em cada nó), a equação de equilíbrio assume a forma matricial seguinte onde se indica a

dimensão da matriz de rigidez elementar, do vector elementar das forças nodais equivalentes e do vector de deslocamentos nodais,

$$\underbrace{\underline{\mathbf{K}}^e}_{(8 \times 8)} \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{u}}^e}_{(8 \times 1)} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}}^e}_{(8 \times 1)} \quad (4.15)$$

Considerando toda a estrutura, a equação de equilíbrio global é do mesmo tipo e obtém-se por sobreposição ou assemblagem das matrizes elementares anteriores. A dimensão da matriz de rigidez global, do vector global das forças nodais equivalentes e do vector de deslocamentos nodais depende do número total de graus de liberdade da discretização adoptada ($\text{NGL} = 2\text{NP}$), vindo assim,

$$\underbrace{\underline{\mathbf{K}}}_{(2\text{NP} \times 2\text{NP})} \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{u}}}_{(2\text{NP} \times 1)} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}}}_{(2\text{NP} \times 1)} \quad (4.16)$$

sendo NP o número total de pontos da estrutura.

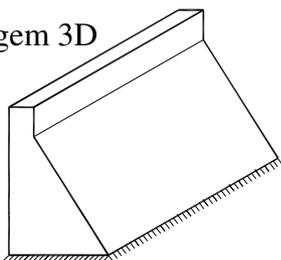
E6. Coordenadas gerais e coordenadas locais. Transformação de coordenadas

• Funções de interpolação em coordenadas locais

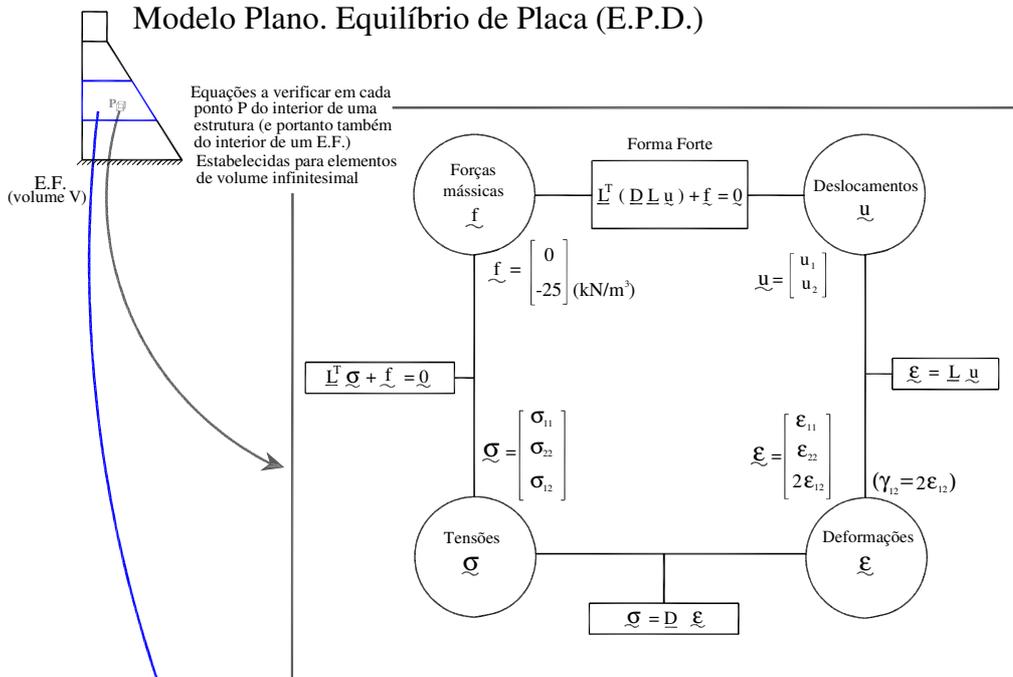
É conveniente proceder à transformação de coordenadas gerais (x_1, x_2) para um sistema de coordenadas locais (y_1, y_2) em que todos os elementos finitos são quadrados perfeitos com coordenadas y_1 e y_2 entre -1 e 1, para facilitar a análise de elementos do mesmo tipo mas com geometrias diferentes. Assim, as funções de interpolação são facilmente definidas em termos destas coordenadas locais.

Deste modo, considera-se um elemento finito tipo designado por elemento mestre, de dimensões de 2×2 , cujos eixos locais y_1 (por convenção este eixo intersecta o lado entre o primeiro e segundo nó) e y_2 têm origem no centro do elemento (Figura 4.13). As funções de interpolação para este caso são funções com variação linear segundo cada eixo como se mostra na Figura 4.13.

Barragem 3D



Modelo Plano. Equilíbrio de Placa (E.P.D.)



A equação de equilíbrio de um elemento de volume finito (E.F.) pode ser obtida pelo P.T.V.

$$W_{int} = W_{ext} \iff \int_V \underline{\underline{\epsilon}}_v^T \underline{\underline{\sigma}} \, dV = \int_V \underline{\underline{u}}_v^T \underline{\underline{f}} \, dV, \quad \forall \underline{\underline{u}}_v$$

Forma Fraca

Aproximação fundamental do M.E.F.

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{u}}^e$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{u}}^e = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^e$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_v = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{u}}_v$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^e$$

$$\underline{\underline{u}}_v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ N_i \end{bmatrix}$$

Resolução numérica pelo M.E.F.

A verificação da forma fraca para as infinitas funções de teste $\underline{\underline{u}}_v$ (ou deslocamentos virtuais) pode ser conseguida admitindo que estas podem ser aproximadas pela combinação linear das funções de interpolação. Basta verificar para as funções de interpolação (que formam a base de um espaço linear) para garantir que a forma fraca é verificada para as infinitas funções de teste (aproximadas pela combinação linear das funções de interpolação).

$$\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \, dV \underline{\underline{u}}^e = \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} \, dV$$

$$\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{u}}^e = \underline{\underline{F}}^e$$

Figura 4.12: Equação de equilíbrio: forma forte e forma fraca. Introdução da aproximação fundamental do M.E.F. na forma fraca para obtenção da equação de equilíbrio de um elemento finito [Oliveira, 2003; Oliveira e Mendes, 2009].

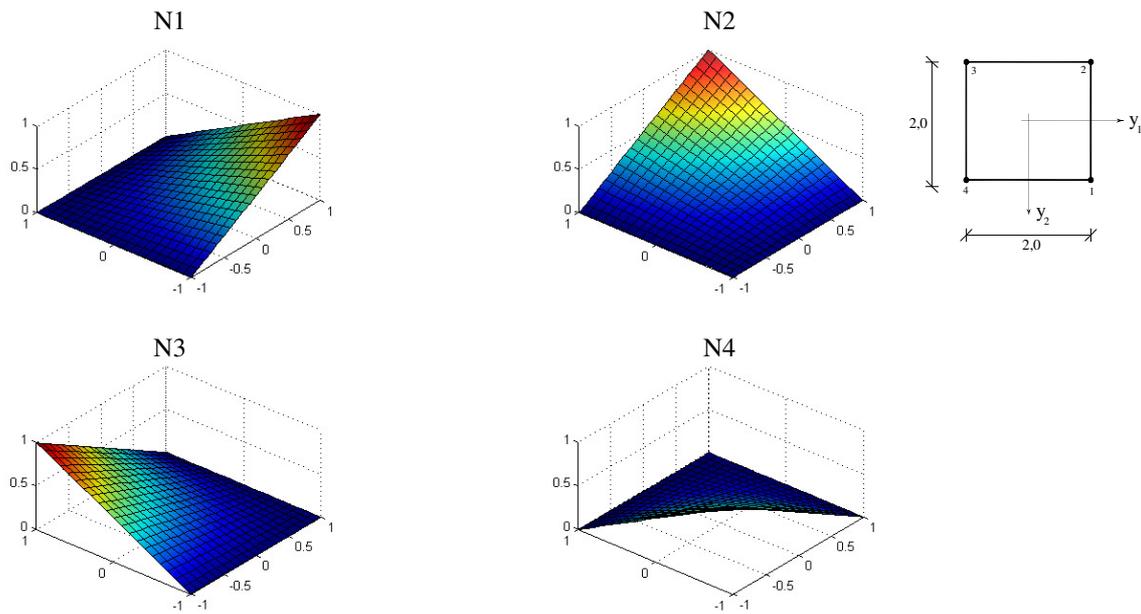


Figura 4.13: Funções de interpolação lineares para o elemento finito quadrangular com 2 G.L./nó representado.

De acordo com o sistema de eixos locais adoptado nesta figura, as funções de interpolação para cada nó assumem a seguinte forma em coordenadas locais,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1+y_1)(1+y_2), & N_1 &= 1 \text{ no nó 1 } (y_1 = y_2 = 1) \text{ e } 0 \text{ nos restantes nós} \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+y_1)(1-y_2), & N_2 &= 1 \text{ no nó 2 } (y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -1) \text{ e } 0 \text{ nos restantes nós} \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1-y_1)(1-y_2), & N_3 &= 1 \text{ no nó 3 } (y_1 = y_2 = -1) \text{ e } 0 \text{ nos restantes nós} \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-y_1)(1+y_2), & N_4 &= 1 \text{ no nó 4 } (y_1 = -1 \text{ e } y_2 = 1) \text{ e } 0 \text{ nos restantes nós}
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

O que corresponde à seguinte expressão geral,

$$N_i = \frac{1}{4}(1+y_1^{(i)}y_1)(1+y_2^{(i)}y_2)
 \tag{4.18}$$

em que, $y_1^{(i)}$ e $y_2^{(i)}$ representam as coordenadas locais do nó i .

• **Matriz Jacobiana da transformação de coordenadas e respectivo determinante**

A relação entre as coordenadas gerais e locais pode ser estabelecida através da matriz jacobiana \underline{J} . Atendendo a que se trata de um caso bidimensional, em cada ponto P do interior de um elemento finito, é necessário verificar a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz Jacobiana} \\ \underline{J}}} \cdot \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Dir.eixo local y_1 Dir.eixo local y_2

O determinante da matriz jacobiana $|\underline{J}|$ designa-se por jacobiano.

Na Figura 4.14 observa-se um elemento finito (com uma geometria qualquer) representado no referencial local (y_1, y_2) e geral (x_1, x_2) . Num ponto genérico P representam-se graficamente as componentes da matriz jacobiana (Figura 4.14 b). Pode-se verificar que a grelha quadrangular correspondente à representação em coordenadas locais (Figura 4.14 a) é distorcida para se adaptar à forma real do elemento finito em coordenadas gerais.

No caso geral de elementos finitos com geometrias irregulares, a matriz jacobiana varia de ponto para ponto no interior do elemento finito, tal como se pode constatar comparando a figura anterior com a Figura 4.15.

Para obter a matriz jacobiana em cada ponto de um elemento finito, é necessário conhecer as coordenadas gerais x_1 e x_2 dos pontos nodais e as derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas locais. A matriz jacobiana é dada pelo seguinte produto matricial:

$$\underbrace{\underline{J}}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{e1} & x_1^{e2} & x_1^{e3} & x_1^{e4} \\ x_2^{e1} & x_2^{e2} & x_2^{e3} & x_2^{e4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y_1} & \frac{\partial N_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y_1} & \frac{\partial N_4}{\partial y_2} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

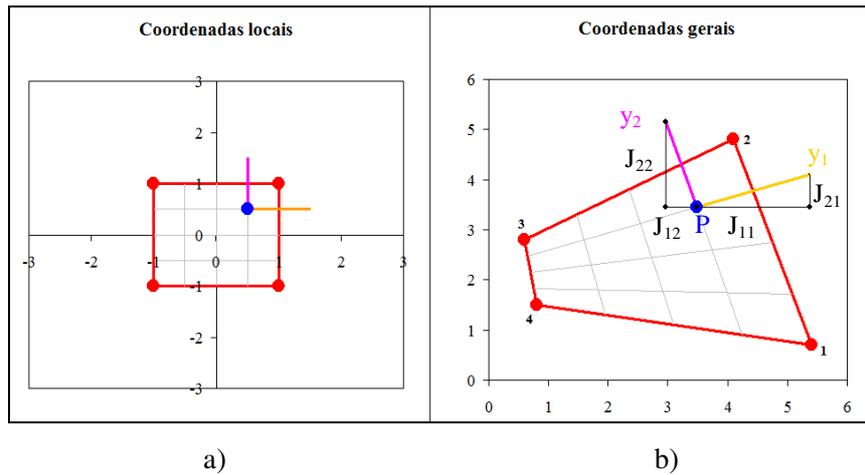


Figura 4.14: Representação das componentes da matriz jacobiana num determinado ponto P do interior do elemento finito: a) no referencial local (vectors unitários ortogonais) e; b) no referencial geral (vectors não unitários e não ortogonais).

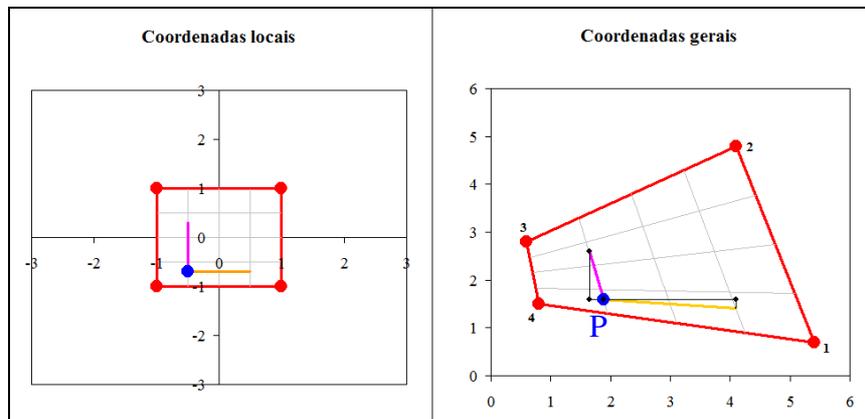


Figura 4.15: Representação das componentes da matriz jacobiana noutro ponto P. Variação da matriz jacobiana de ponto para ponto no interior do elemento finito.

Pode-se concluir que a matriz jacobiana traduz, em cada ponto, “o grau de distorção” do elemento finito no referencial geral relativamente ao elemento mestre (referencial local).

E7. Cálculo da matriz de rigidez elementar

Tal como se mostrou anteriormente, a matriz de rigidez de um elemento finito é calculada como o integral de uma matriz, dada pelo produto $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$, estendido ao volume do elemento finito,

$$\underline{\mathbf{K}}^e = \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.21)$$

sendo, $\underline{\mathbf{B}}$ a matriz com as derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais.

A expressão (4.21) pode ainda ser reescrita em termos de coordenadas locais ($dx_1 dx_2 = |J| dy_1 dy_2$), vindo,

$$\underline{\mathbf{K}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} |J| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (4.22)$$

Uma vez que se trata de uma estrutura plana, a expressão anterior pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{K}}^e = e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} |J| dy_1 dy_2 \quad (4.23)$$

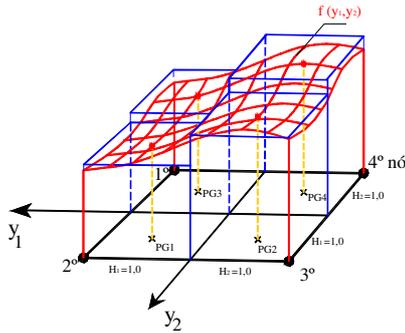
sendo e a espessura do elemento finito (no exemplo em análise correspondente ao modelo plano de uma barragem de gravidade pode-se usar $e = 1,0\text{m}$ para os quatro elementos finitos da discretização adoptada).

- **Integração numérica da matriz de rigidez elementar pelo método de Gauss**

Em geral, não é possível calcular analiticamente o integral da equação anterior, recorrendo-se deste modo ao método numérico de Integração de Gauss para efectuar o seu cálculo. Este método consiste em transformar o integral numa soma do volume de prismas em que se subdivide o volume sob o gráfico (Figura 4.16). Utilizando quatro pontos de Gauss, o integral corresponde à soma do volume de quatro prismas, cuja área da base é o denominado peso de Gauss e a altura é o valor da função a integrar nas coordenadas de cada ponto de Gauss.

Deste modo, o cálculo numérico da matriz de rigidez $\underline{\mathbf{K}}^e$ da equação (4.23) é dado pelo seguinte somatório estendido a um determinado número de pontos de Gauss por direcção (NPG = 2 no caso representado na Figura 4.16):

$$\underline{\mathbf{K}}^e = \sum_{i=1}^{\text{NPG}} \sum_{j=1}^{\text{NPG}} H_i H_j \underline{\mathbf{B}}_i^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}}_j |J| \quad (4.24)$$



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \underbrace{1,00}_{H_1 H_1} \cdot \underbrace{f(y_1, y_2)_{PG1}}_{\substack{y_1 = +0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} + \underbrace{1,00}_{H_2 H_1} \cdot \underbrace{f(y_1, y_2)_{PG2}}_{\substack{y_1 = -0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} \\ + \underbrace{1,00}_{H_1 H_2} \cdot \underbrace{f(y_1, y_2)_{PG3}}_{\substack{y_1 = +0,57735 \\ y_2 = -0,57735}} + \underbrace{1,00}_{H_2 H_2} \cdot \underbrace{f(y_1, y_2)_{PG4}}_{\substack{y_1 = -0,57735 \\ y_2 = -0,57735}}$$

Figura 4.16: Representação dos prismas em que se subdivide o volume sob o gráfico da função (integral). Pontos de Gauss e respectivos pesos [Oliveira, 2003].

Geralmente, para o caso de elementos finitos bidimensionais de placa com 4 nós, como os do presente exemplo, utilizam-se dois pontos de Gauss por direcção (NPG = 2), o que significa que no total recorre-se a 4 pontos de Gauss para efectuar a integração numérica da matriz de rigidez elementar. Assim, a equação anterior pode ser desenvolvida no seguinte somatório de 4 parcelas, cada uma correspondente a um ponto de Gauss:

$$\underline{K}^e = \underbrace{\overbrace{H_1 H_1}^{\text{Área da base}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}}_{\substack{\text{PG1} \\ y_1 = +0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} \underline{J} + \underbrace{\overbrace{H_1 H_2}^{\text{Área da base}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}}_{\substack{\text{PG2} \\ y_1 = -0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} \underline{J} + \underbrace{\overbrace{H_2 H_1}^{\text{Área da base}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}}_{\substack{\text{PG3} \\ y_1 = +0,57735 \\ y_2 = -0,57735}} \underline{J} + \underbrace{\overbrace{H_2 H_2}^{\text{Área da base}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}}_{\substack{\text{PG4} \\ y_1 = -0,57735 \\ y_2 = -0,57735}} \underline{J} \quad (4.25)$$

As coordenadas locais de cada ponto de Gauss (y_1, y_2) e os respectivos pesos (H_1, H_2) usados para o cálculo da área da base de cada prisma apresentam-se na tabela seguinte:

PG1	y	H
y1	+0,57735	1,00
y2	+0,57735	1,00

PG2	y	H
y1	-0,57735	1,00
y2	+0,57735	1,00

PG3	y	H
y1	+0,57735	1,00
y2	-0,57735	1,00

PG4	y	H
y1	-0,57735	1,00
y2	-0,57735	1,00

Tabela 4-2: Coordenadas e respectivos pesos dos 4 pontos de Gauss adoptados.

• **Determinação da matriz B**

Para concluir o cálculo da matriz de rigidez elementar falta apenas conhecer a matriz B. Esta matriz, definida em cada ponto, contém as derivadas parciais das funções de interpolação em relação às coordenadas gerais (x_1, x_2). Como se mostrou anteriormente, a matriz B é

obtida (tendo como base a equação de compatibilidade) através da aplicação do operador diferencial \underline{L} à matriz das funções de interpolação, isto é, $\underline{B} = \underline{L} \cdot \underline{N}$. As derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais obtêm-se através do produto da matriz das derivadas em ordem às coordenadas locais e da inversa da matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{PG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y_1} & \frac{\partial N_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y_1} & \frac{\partial N_4}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{PG} \times \underline{J}_{PG}^{-1} \quad (4.26)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} &= \frac{1}{4} y_1^{(i)} (1 + y_2^{(i)} y_2) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y_2} &= \frac{1}{4} y_2^{(i)} (1 + y_1^{(i)} y_1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Então, para cada ponto de Gauss e tratando-se do presente caso bidimensional de um elemento finito de placa com 4 nós, a matriz \underline{B} é dada por:

$$\underline{B}_{PG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Assim, a matriz de rigidez \underline{K}^c é uma matriz quadrada com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade do elemento, como se mostra na Figura 4.17.

$$\mathbf{K}^e = \begin{matrix} (8 \times 8) \\ \mathbf{K}^e \end{matrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{18} \\ \hline K_{21} & \cdot & & & & & & \cdot \\ \hline K_{31} & & \cdot & & & & & \cdot \\ \hline \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \hline \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ \hline \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ \hline K_{81} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{88} \\ \hline \end{array}$$

Figura 4.17: Representação da matriz de rigidez elementar para o elemento finito plano de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.

- **Assemblagem da matriz de rigidez global e introdução das condições de apoio**

Uma vez calculadas as matrizes de rigidez elementares, a matriz de rigidez global $\underline{\mathbf{K}}$ obtém-se através da sobreposição das várias matrizes de rigidez elementares. Este processo de sobreposição (ou assemblagem) exige o estabelecimento da correlação entre os graus de liberdade locais de cada elemento (G.L.E.) e os graus de liberdade gerais (G.L.G.) de toda a estrutura.

Na Figura 4.18 apresenta-se esquematicamente o processo de assemblagem para a estrutura em estudo.

A matriz de rigidez global é também uma matriz quadrada (simétrica) com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade em toda a estrutura (Figura 4.19). Por fim, ainda é necessário introduzir as condições de apoio na matriz $\underline{\mathbf{K}}$.

A existência de um apoio de rigidez K_a segundo um dado grau de liberdade, pode ser considerado numericamente adicionando o valor da rigidez desse apoio K_a , à diagonal da matriz $\underline{\mathbf{K}}$ na posição (linha e coluna) correspondente ao grau de liberdade apoiado.

No caso de se tratar de um apoio rígido, este pode ser encarado como um apoio elástico mas com uma rigidez muito elevada, como por exemplo 10^{15} ou 10^{20} kN/m.

E8. Cálculo do vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio

Na Figura 4.12 deduziu-se a equação que traduz o equilíbrio de um elemento finito (formulação em deslocamentos) em que o vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio era dado por:

$$\underline{\tilde{F}}^e = \int_v \underline{N}^T \underline{f} \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.29)$$

onde \underline{f} é o vector das forças mássicas actuantes (que neste caso equivale ao peso específico do material que constituí a estrutura).

Importa salientar que, pelo facto de o peso próprio ser uma acção permanente que se encontra distribuída ao longo de toda a estrutura, geralmente quando se refere a este vector é sempre em relação à acção do peso próprio.

Caso actuasse uma carga aplicada num dado ponto nodal da estrutura, a metodologia de cálculo seria diferente, como será abordado adiante.

De forma idêntica ao que foi apresentado para a matriz de rigidez elementar, o integral apresentado na equação (4.29) pode ser transformado no seguinte somatório a partir do método de integração de Gauss:

$$\underline{\tilde{F}}^e = \sum_{i=1}^{NPG} \sum_{j=1}^{NPG} H_i H_j \underline{N}^T \underline{f} \, |J| \quad (4.30)$$

e, desenvolvendo a anterior expressão, tendo em conta que se trata do caso bidimensional e que geralmente adoptam-se dois pontos de Gauss por direcção tem-se:

$$\underline{\tilde{F}}^e = \underbrace{H_1 H_1 \underline{N}^T \underline{f} \, |J|}_{\substack{\text{Área da} \\ \text{base} \\ \text{PG1} \\ y_1 = +0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} + \underbrace{H_1 H_2 \underline{N}^T \underline{f} \, |J|}_{\substack{\text{Área da} \\ \text{base} \\ \text{PG2} \\ y_1 = -0,57735 \\ y_2 = +0,57735}} + \underbrace{H_2 H_1 \underline{N}^T \underline{f} \, |J|}_{\substack{\text{Área da} \\ \text{base} \\ \text{PG3} \\ y_1 = +0,57735 \\ y_2 = -0,57735}} + \underbrace{H_2 H_2 \underline{N}^T \underline{f} \, |J|}_{\substack{\text{Área da} \\ \text{base} \\ \text{PG4} \\ y_1 = -0,57735 \\ y_2 = -0,57735}} \quad (4.31)$$

Assim, o vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio da estrutura apresenta um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade do elemento (Figura 4.20).

$$F^e = \begin{matrix} F_{1,H} \\ F_{1,V} \\ F_{2,H} \\ F_{2,V} \\ F_{3,H} \\ F_{3,V} \\ F_{4,H} \\ F_{4,V} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Nó 1} \\ \text{Nó 2} \\ \text{Nó 3} \\ \text{Nó 4} \end{matrix}$$

(8x1)

Figura 4.20: Representação do vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.

• **Assemblagem do vector global das forças nodais equivalentes ao peso próprio**

Para ter em consideração esta acção, aplicam-se forças equivalentes ao peso próprio em todos os pontos nodais da estrutura, como se pode observar na figura que se apresenta.

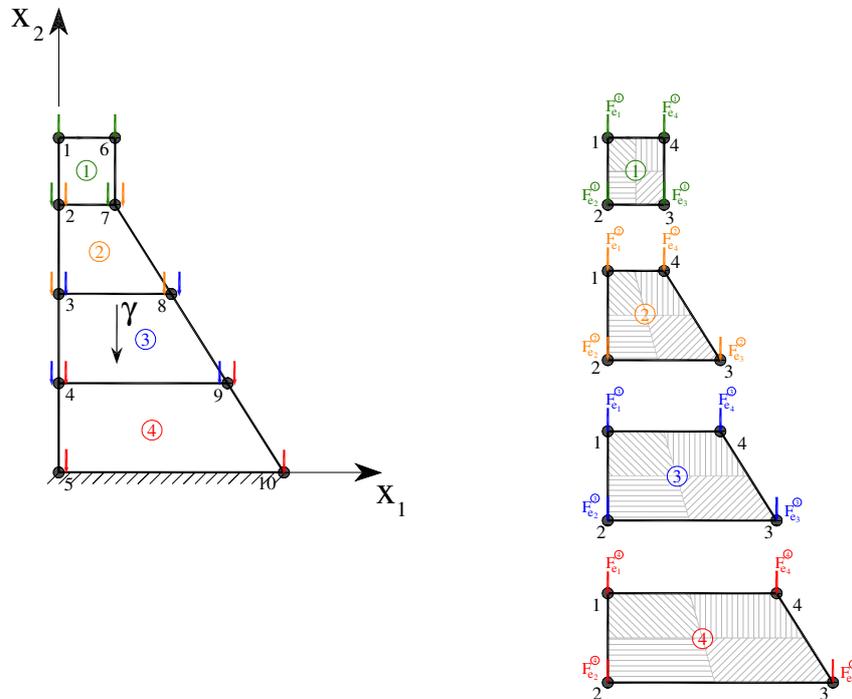


Figura 4.21: Forças nodais equivalentes ao peso próprio distribuídas pela estrutura. Processo de espalhamento das forças elementares no vector das forças globais equivalentes ao peso próprio.

Então, tal como se mostra na Figura 4.22, o vector das forças globais equivalentes ao peso próprio apresenta um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade em toda a estrutura.

$$\mathbf{F} = \begin{matrix} (2\text{NP} \times 1) \\ \begin{matrix} F_{1,H} \\ F_{1,V} \\ F_{2,H} \\ F_{2,V} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{\text{NP},H} \\ F_{\text{NP},V} \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{NP} - \text{número de pontos total da estrutura}$$

Figura 4.22: Representação do vector global das forças nodais equivalentes ao peso próprio para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.

Como já se referiu atrás, o vector das forças mássicas actuantes equivale ao peso próprio da estrutura pois é uma acção sempre actuante. Caso esta estivesse sujeita, para além do peso próprio, a outro tipo de forças (cargas concentradas ou distribuídas) aplicadas em determinados graus de liberdade da estrutura, era necessário introduzir os valores correspondentes a essas forças no vector global das forças, nos graus de liberdade onde estas são aplicadas.

E9. Cálculo dos deslocamentos nos pontos nodais da estrutura

Os deslocamentos nos pontos nodais da estrutura obtêm-se a partir da equação que traduz o equilíbrio global de toda a estrutura:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{u}} &= \underline{\mathbf{F}} \\
 \underline{\mathbf{u}} &= \underline{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{F}}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

tendo o vector de deslocamentos um número de linhas igual ao número total de graus de liberdade de toda a estrutura, como se mostra na Figura 4.23.

E10. Cálculo das tensões num ponto genérico P

Para determinar as tensões num ponto qualquer P utiliza-se a expressão obtida na Figura 4.12, em que:

$$\underline{\sigma}_P = \underline{D} \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (4.33)$$

A matriz \underline{B} apenas tem de ser calculada no ponto P e o vector com os deslocamentos nodais \underline{u}^e é o correspondente ao elemento no qual se considera o ponto.

$$\underline{u} = \begin{matrix} (2NP \times 1) \\ \begin{matrix} u_{1,H} \\ u_{1,V} \\ u_{2,H} \\ u_{2,V} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{NP,H} \\ u_{NP,V} \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{NP - número de pontos total da estrutura}$$

Figura 4.23: Representação do vector dos deslocamentos nos pontos nodais para o elemento finito quadrangular com 2 G.L. de translação por nó.

4.2.5 Análise dinâmica de uma estrutura plana pelo M.E.F.

Como se referiu anteriormente, a equação de Navier que traduz o equilíbrio entre forças elásticas internas e forças mássicas num ponto da estrutura e num dado instante de tempo é dada por:

$$\underline{L}^T (\underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u}) + \underline{f} = \underline{0} \quad (4.34)$$

No caso da actuação de um sismo, esta equação deve traduzir um equilíbrio dinâmico, pelo que, para além das já referidas forças elásticas, surgem também forças mássicas de inércia, proporcionais à aceleração e à massa ($f_I = m \cdot \ddot{u}_T$), e forças mássicas de amortecimento, proporcionais à velocidade e ao coeficiente de amortecimento ($f_D = c \cdot \dot{u}_T$). Desta forma, admitindo agora que não se considera o peso da estrutura, a equação de Navier (4.34), pode ser escrita do seguinte modo:

$$\underbrace{\underline{L}^T (\underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u})}_{\text{forças elásticas internas}} - \underbrace{(m \cdot \ddot{u}_T + c \cdot \dot{u}_T)}_{\text{forças mássicas}} = \underline{0} \quad (4.35)$$

Suponha-se agora que a estrutura é sujeita a um acelerograma sísmico $a_s = a_s(t)$ aplicado na base, apenas numa dada direcção ou com componentes nas três direcções. Tendo em conta o

que foi referido no capítulo 3 quando se analisou em pormenor a acção sísmica, em que se mostrou que a parcela de movimento de corpo rígido apenas envolve forças de inércia, associadas à aceleração sísmica $\underline{a}_s = \underline{a}_s(t)$, a anterior equação fica:

$$-\underline{L}^T (\underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u}) + m \cdot (\ddot{\underline{u}} + \underline{a}_s) + c \cdot \dot{\underline{u}} = 0 \quad (4.36)$$

ou,

$$-\underline{L}^T (\underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u}) + m \cdot \ddot{\underline{u}} + c \cdot \dot{\underline{u}} = -m \cdot \underline{a}_s \quad (4.37)$$

sendo,

m - massa específica do betão ($m = 2,5 \text{ ton/m}^3$);

c - amortecimento viscoso específico $\left[\left(\text{N} / \text{ms}^{-1} \right) / \text{m}^3 \right]$;

\underline{a}_s - vector com as três componentes de aceleração (parcela de aceleração de corpo rígido) em cada ponto da estrutura.

É de notar que, na parcela das forças elásticas internas, o vector de deslocamentos \underline{u} depende das coordenadas espaciais x_1 , x_2 e x_3 e do tempo, tal como a aceleração $\ddot{\underline{u}}$ e a velocidade $\dot{\underline{u}}$ dependem do tempo. Assim, a função incógnita desta equação diferencial depende das coordenadas espaciais x_1 , x_2 e x_3 , mas também de uma coordenada temporal t , ou seja, $\underline{u} = \underline{u}(x_1, x_2, x_3, t)$.

Visto que se obteve uma equação diferencial com derivadas em ordem ao tempo e em ordem às coordenadas espaciais, a sua resolução numérica pode ser efectuada em duas etapas: primeiramente é realizada uma integração no espaço utilizando, por exemplo, o M.E.F. e depois procede-se à integração no tempo recorrendo a um dos métodos abordados no capítulo 3.

Como já foi referido, a obtenção de uma solução numérica pelo M.E.F. deve partir da forma integral (fracca), a qual pode ser obtida de duas maneiras: i) aplicando o LFCV à equação de equilíbrio de forças escrita na forma diferencial ou; ii) utilizando o conhecido Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.).

Aplicando o LFCV à equação diferencial (4.37) obtém-se para cada instante t , a seguinte equação integral (para um elemento finito de volume V_e) que deve ser verificada para todas as funções de teste \underline{u}_v (equivalentes aos campos de deslocamentos virtuais referidos no P.T.V.):

$$\int_{V_e} \left(-\underline{L}^T \cdot (\underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u}) + m \cdot \ddot{\underline{u}} + c \cdot \dot{\underline{u}} \right)^T \cdot \underline{u}_v \, dV = \int_{V_e} \left(-m \cdot \underline{a}_s^T \right) \cdot \underline{u}_v \, dV, \quad \forall \underline{u}_v \in \mathcal{Q} \quad (4.38)$$

Aplicando o teorema de Green-Gauss (generalização da regra da integração por partes para funções definidas no espaço), conclui-se que esta equação é equivalente a:

$$\int_{V_e} (\underline{L} \cdot \underline{u})^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u}_v \, dV + \int_{V_e} m \cdot \ddot{\underline{u}}^T \cdot \underline{u}_v \, dV + \int_{V_e} c \cdot \dot{\underline{u}}^T \cdot \underline{u}_v \, dV = - \int_{V_e} m \cdot \underline{a}_S^T \cdot \underline{u}_v \, dV, \quad \forall \underline{u}_v \in \mathcal{Q}_v \quad (4.39)$$

Tendo em conta a hipótese fundamental do M.E.F., a função incógnita \underline{u} pode ser aproximada espacialmente através da combinação linear das funções de interpolação, ou seja $\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}^e$. Da mesma forma, também se pode admitir que as funções de teste \underline{u}_v (ou deslocamentos virtuais) podem ser aproximadas através da combinação linear das funções de interpolação⁽⁷⁾. Assim, não é necessário verificar a equação anterior para as infinitas funções de teste \underline{u}_v , bastando proceder à sua verificação apenas para as funções de interpolação que, na aproximação do M.E.F., formam a base dum espaço linear que contém as funções de teste aproximadas.

O vector das acelerações de corpo rígido em cada ponto, também pode ser escrito através da combinação linear das funções de interpolação, isto é, $\underline{a}_S = \underline{N} \cdot \underline{\zeta}^e \cdot \underline{a}_S$, onde $\underline{\zeta}^e$ representa o vector com a distribuição espacial das acelerações nodais (distribuição pelos vários G.L. da estrutura).

Deste modo, na aproximação do M.E.F., a verificação da equação (4.39) corresponde a verificar o seguinte conjunto de 8 equações para o elemento finito de placa de 4 pontos nodais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{V_e} (\underline{L} \cdot \underline{u})^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} m \cdot \ddot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} c \cdot \dot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} \, dV = - \int_{V_e} m \cdot \underline{a}_S^T \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} \, dV \\ \int_{V_e} (\underline{L} \cdot \underline{u})^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} m \cdot \ddot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} c \cdot \dot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix} \, dV = - \int_{V_e} m \cdot \underline{a}_S^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix} \, dV \\ \vdots \\ \int_{V_e} (\underline{L} \cdot \underline{u})^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_4 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} m \cdot \ddot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_4 \end{bmatrix} \, dV + \int_{V_e} c \cdot \dot{\underline{u}}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_4 \end{bmatrix} \, dV = - \int_{V_e} m \cdot \underline{a}_S^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_4 \end{bmatrix} \, dV \end{array} \right. \quad (4.40)$$

que, forma um sistema que se escreve na forma matricial seguinte (tendo em conta que

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}^e, \quad \dot{\underline{u}} = \underline{N} \cdot \dot{\underline{u}}^e, \quad \ddot{\underline{u}} = \underline{N} \cdot \ddot{\underline{u}}^e \text{ e } \underline{a}_S = \underline{N} \cdot \underline{\zeta}^e \cdot \underline{a}_S):$$

⁽⁷⁾ É importante notar que na aproximação do M.E.F., pode-se admitir que as infinitas funções de teste \underline{u}_v pertencem a um espaço linear de funções gerado por uma base formada pelas funções de interpolação (uma por cada grau de liberdade). Desde que seja verificada a expressão para as funções da base, então esta também fica garantida para as infinitas funções de teste (aproximadas de acordo com a discretização em E.F. adoptada).

$$\int_{V_e} \underbrace{\underline{L}^T \cdot \underline{N}^T}_{\underline{B}^T} \cdot \underline{D} \cdot \underbrace{\underline{L} \cdot \underline{N}}_{\underline{B}} \cdot \underline{u}^e dV + \int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot \ddot{\underline{u}}^e dV + \int_{V_e} c \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot \dot{\underline{u}}^e dV = - \int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot \underline{z}^e \cdot a_s dV \quad (4.41)$$

que se pode ainda escrever na forma,

$$\int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} dV \ddot{\underline{u}}^e + \int_{V_e} c \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} dV \dot{\underline{u}}^e + \int_{V_e} \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} dV \underline{u}^e = - \int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} dV \underline{z}^e \cdot a_s \quad (4.42)$$

ou,

$$\underline{m}_e \cdot \ddot{\underline{u}}^e + \underline{c}_e \cdot \dot{\underline{u}}^e + \underline{k}_e \cdot \underline{u}^e = - \underline{m}_e \cdot \underline{z}^e \cdot a_s \quad (4.43)$$

que é a conhecida equação que traduz o equilíbrio dinâmico de um elemento finito, em que

$\underline{m}_e = \int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} dV$ é a matriz de massas do elemento finito;

$\underline{c}_e = \int_{V_e} c \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} dV$ é a matriz de amortecimento do elemento finito;

$\underline{k}_e = \int_{V_e} \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} dV$ é a matriz de rigidez do elemento finito;

$\underline{f}_e = \int_{V_e} m \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot \underline{z}^e \cdot a_s dV$ é o vector das forças nodais elementares equivalentes às forças

mássicas devidas à aceleração na base.

A equação de equilíbrio global da estrutura é uma equação matricial que se obtém a partir da assemblagem das matrizes elementares:

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = - \underline{m} \cdot \underline{z} \cdot a_s \quad (4.44)$$

Esta equação global corresponde a um sistema de equações diferenciais envolvendo a variável tempo, cuja resolução pode ser efectuada através da integração no domínio do tempo, para o qual é conveniente utilizar as coordenadas modais, tal como se mostrou no capítulo 3.

A matriz de amortecimento global que se obtém a partir da sobreposição das matrizes de amortecimento elementares calculadas pela expressão deduzida atrás, em geral não é uma matriz diagonal e deste modo não permite o desacoplamento das várias equações diferenciais. É por esta razão que é conveniente optar por uma das metodologias apresentadas no capítulo 3 para garantir que a matriz \underline{c} calculada seja diagonal.

4.3 Elementos finitos planos com oito pontos nodais e elementos tridimensionais tipo cubo de vinte nós

Até este ponto foi analisada a aplicação do M.E.F. para o cálculo estático e dinâmico de estruturas considerando elementos finitos planos de 4 nós com dois graus de liberdade de translação por nó. Contudo, em determinadas situações, a utilização destes elementos exige a adopção de discretizações muito apertadas, nomeadamente quando se pretende simular efeitos de flexão. Assim, em muitos casos é preferível utilizar elementos finitos com mais pontos nodais, nomeadamente elementos finitos planos isoparamétricos de 8 nós ou, na análise de estruturas maciças, elementos tridimensionais isoparamétricos [Oliveira, 1991], tipo cubo, de 20 nós (Figura 4.24 a) e b).

Em termos de implementação computacional é imediata a generalização de um programa de elementos finitos de 4 nós para um programa de elementos de 8 e de 20 nós. A diferença principal resume-se às funções de interpolação, que dependem da topologia de cada elemento.

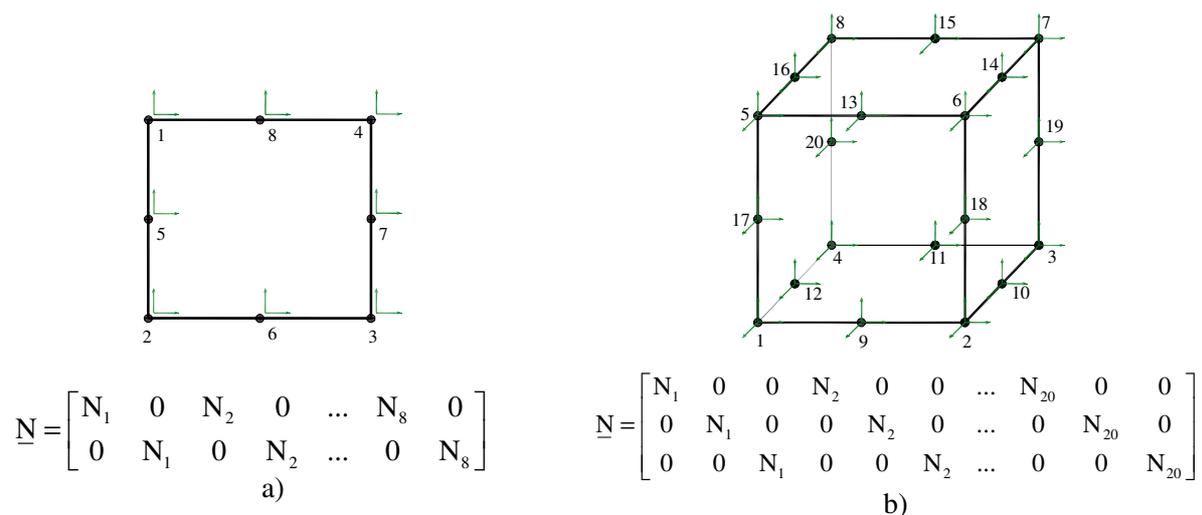


Figura 4.24: a) Elemento finito plano isoparamétrico de 8 pontos nodais com 2 G.L. de translação por nó e respectiva matriz com as funções de interpolação. b) Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo de 20 pontos nodais com 3 G.L. de translação por nó e respectiva matriz com as funções de interpolação.

Nas figuras seguintes apresentam-se os elementos finitos planos de 8 nós e os elementos tridimensionais de 20 nós, com as respectivas funções de interpolação, bem como a convenção referente à numeração dos pontos nodais.

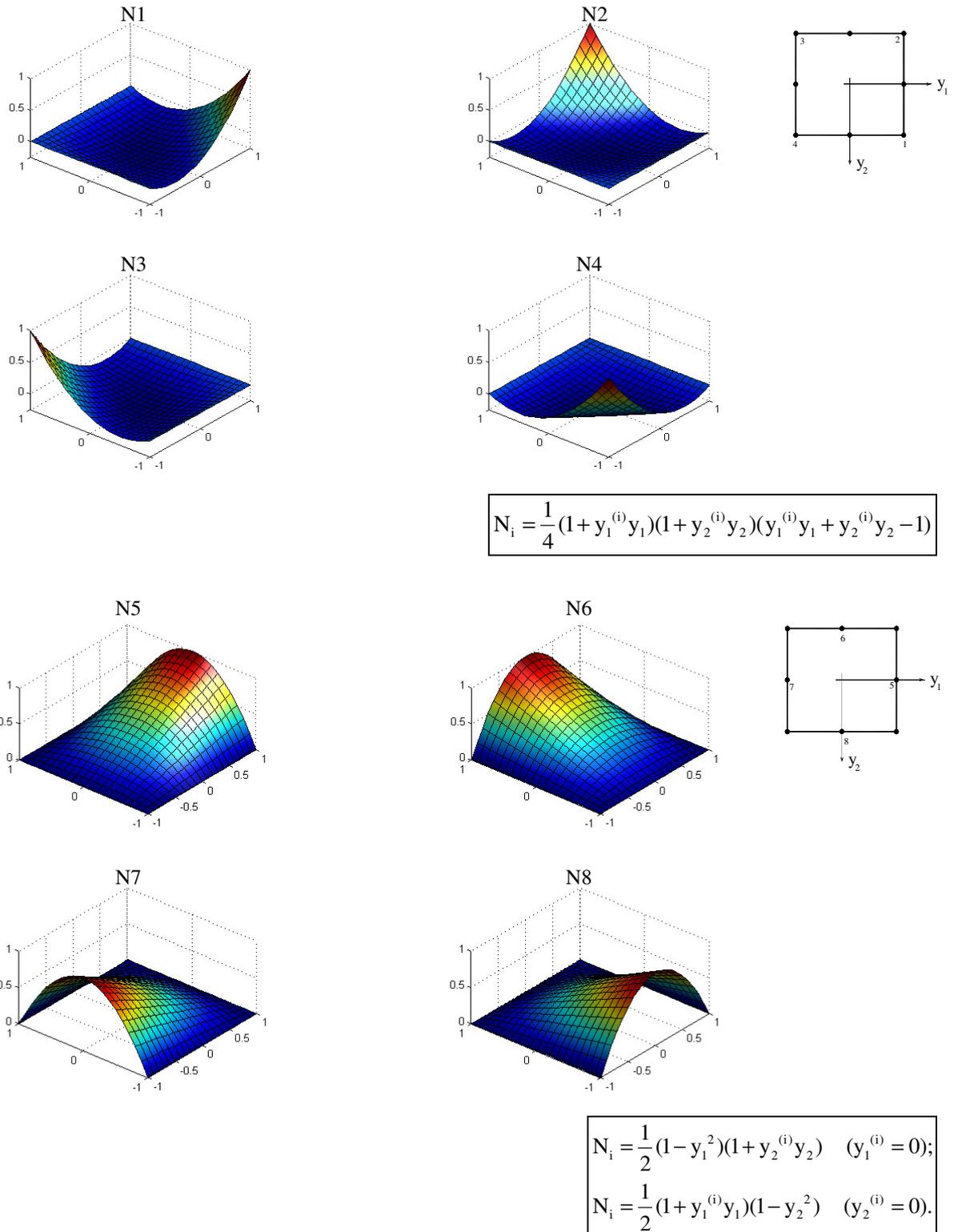
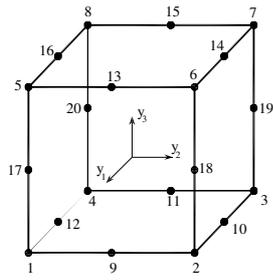


Figura 4.25: Elemento finito plano isoparamétrico de 8 pontos nodais. Representação dos eixos locais. Convenções adotadas para a numeração dos pontos nodais. Funções de interpolação.



$$N_i = \frac{1}{8}(1+y_1^{(i)}y_1)(1+y_2^{(i)}y_2)(1+y_3^{(i)}y_3)(y_1^{(i)}y_1+y_2^{(i)}y_2+y_3^{(i)}y_3-2) \quad (i=1,2,\dots,8);$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_1^2)(1+y_2^{(i)}y_2)(1+y_3^{(i)}y_3) \quad (i=10,12,14,16);$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_2^2)(1+y_3^{(i)}y_3)(1+y_1^{(i)}y_1) \quad (i=9,11,13,15);$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-y_3^2)(1+y_1^{(i)}y_1)(1+y_2^{(i)}y_2) \quad (i=17,18,19,20).$$

Coordenadas locais dos nós

Nó	y ₁	y ₂	y ₃	Nó	y ₁	y ₂	y ₃
1	1	-1	-1	11	-1	0	-1
2	1	1	-1	12	0	-1	-1
3	-1	1	-1	13	1	0	1
4	-1	-1	-1	14	0	1	1
5	1	-1	1	15	-1	0	1
6	1	1	1	16	0	-1	1
7	-1	1	1	17	1	-1	0
8	-1	-1	1	18	1	1	0
9	1	0	-1	19	-1	1	0
10	0	1	-1	20	-1	-1	0

Faces

Face	y _i	Pontos nodais								
1	y ₁ = 1	1	2	6	5	9	18	13	17	
2	y ₂ = 1	2	3	7	6	10	19	14	18	
3	y ₃ = 1	6	7	8	5	14	15	16	13	
4	y ₁ = -1	3	4	8	7	11	20	15	19	
5	y ₂ = -1	4	1	5	8	12	17	16	20	
6	y ₃ = -1	4	3	2	1	11	10	9	12	

Figura 4.26: Elemento finito tridimensional isoparamétrico tipo cubo com 20 pontos nodais. Representação dos eixos locais e das coordenadas locais dos nós. Convenções adotadas para a numeração de pontos nodais e faces. Funções de interpolação.

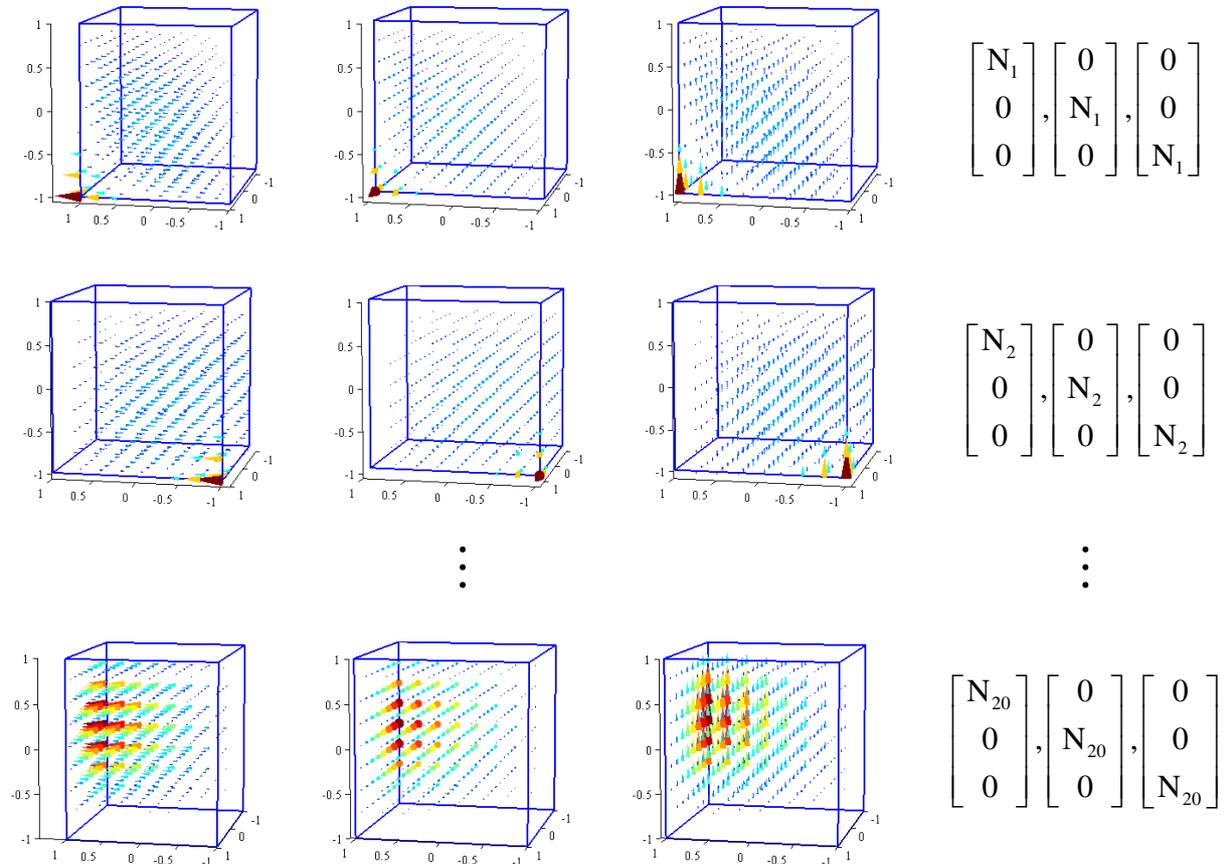


Figura 4.27: Representação das funções de interpolação segundo cada grau de liberdade para os pontos nodais 1, 2 e 20 do elemento finito tridimensional tipo cubo de 20 nós.

4.4 Desenvolvimento do programa MEFDIN3D de elementos finitos (2D e 3D) para análise estática e dinâmica de estruturas

No âmbito desta dissertação foi desenvolvido o programa MEFDIN3D em MATLAB (versão 7.1) de elementos finitos de placa de 4 e de 8 nós e elementos finitos tridimensionais, tipo cubo, de 20 nós para efectuar a análise estática e dinâmica de estruturas. O programa foi inicialmente desenvolvido para elementos finitos planos de 4 nós, com base nos pressupostos e na sequência de cálculos aqui abordados e, seguidamente foi generalizado para elementos planos de 8 nós e elementos tridimensionais de 20 nós, introduzindo as novas funções de interpolação e algumas modificações ao nível da introdução dos dados.

O programa permite efectuar a análise estática de estruturas 2D e 3D sob a acção de forças concentradas e de forças mássicas e, a análise dinâmica (sob acções sísmicas ou acções dinâmicas de qualquer outro tipo), no domínio do tempo (acções definidas por histórias de forças aplicadas nos vários graus de liberdade da estrutura ou histórias de acelerações impostas na base) e pelo método do espectro de resposta (acções definidas por intermédio do respectivo espectro de resposta em acelerações).

4.4.1 Algoritmo do programa MEFDIN3D

O algoritmo do programa MEFDIN3D de elementos finitos de placa de 4 e de 8 nós e elementos finitos tridimensionais de 20 nós para a análise estática e dinâmica de estruturas apresenta-se em seguida.

Na Figura 4.28 mostra-se o ambiente do programa MEFDIN3D em MATLAB e algumas das figuras que o programa está preparado para mostrar.

Apresentam-se igualmente alguns exemplos de estruturas bidimensionais e tridimensionais simples, para mostrar as potencialidades do programa e também para testar o cálculo estático e dinâmico (este teste apenas será efectuado para estruturas planas).

(1) - ANÁLISE ESTÁTICA

(1.1) - Leitura de dados:

- Características geométricas e topológicas da discretização estrutural em E.F.;
- Propriedades mecânicas dos vários materiais;
- Escalas para desenhos e animações;
- Valores máximos e mínimos para configuração das janelas de desenho;
- Leitura das coordenadas dos nós (matriz *coord*), apoios (matriz *apoio*) e forças concentradas nos nós (matriz *FC*);
- Leitura das incidências dos elementos (matriz *elem*) e do grupo do material (vector *Igrupo*).

(1.2) - Cálculo da matriz de elasticidade \underline{D} para os casos 2D ou 3D

(1.3) - Coordenadas dos pontos de Gauss e respectivos pesos

Para NNOE = 4 → NPG = 4; para NNOE = 8 → NPG = 9; para NNOE = 20 → NPG = 27

(1.4) - Matriz com os valores das funções de interpolação nos NPG pontos de Gauss

Esta matriz será utilizada para o cálculo das coordenadas gerais dos pontos de Gauss (desenho das tensões principais nos pontos de Gauss)

(1.5) - Desenho da malha de elementos finitos para os casos 2D ou 3D, numeração de cada nó e de cada elemento finito

(1.6) - Cálculo das derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas locais

(1.7) - Cálculo do Jacobiano

(1.8) - Cálculo da matriz \underline{B} , com as derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais

(1.9) - Cálculo das matrizes elementares \underline{K}^e , \underline{M}^e e do vector elementar das forças nodais equivalentes ao peso próprio \underline{F}^e

NOTA: A matriz \underline{M}^e será utilizada apenas no cálculo dinâmico

(1.10) - Assemblagem das matrizes de rigidez \underline{K} e de massas \underline{M} e do vector das forças nodais equivalentes ao peso próprio $\underline{F}_{\text{peso}}$ (processo de espalhamento das matrizes \underline{K}^e , \underline{M}^e e dos vectores \underline{F}^e)

(1.11) - Introdução das condições de apoio (apoios rígidos ou elásticos)

(1.12) - Cálculo do vector das forças globais: somatório do vector com as forças nodais equivalentes ao peso próprio $\underline{F}_{\text{peso}}$, com o vector com as forças concentradas nos nós FCN (vector organizado numa única coluna obtido através da matriz *FC*)

(1.13) - Cálculo dos deslocamentos nodais

(1.14) - Cálculo das tensões principais nos pontos de Gauss

(1.15) - Desenho da malha deformada e do campo de tensões principais nos pontos de Gauss para os casos 2D ou 3D

(2) - ANÁLISE DINÂMICA

(2.1) - Leitura das acções dinâmicas a actuar:

Opção 1 – Acelerogramas na base ; Opção 2 – Histórias de forças aplicadas directamente nos G.L. da estrutura

(2.1.1) - Opção 1

- Definição dos factores multiplicativos para os acelerogramas nas direcções x_n caso de trate de um equilíbrio de placa ou tridimensional
- Montagem da matriz *s* correspondente à distribuição espacial pelos G.L. das histórias de forças de inércia devido aos acelerogramas na base

(2.1.2) - Opção 2

- Montagem da matriz *s* correspondente à distribuição espacial pelos G.L. das histórias de forças aplicadas

- (2.2) - Cálculo dos valores próprios (matriz diagonal com as frequências angulares ao quadrado) e vectores próprios (modos de vibração)
- (2.3) - Cálculo das frequências naturais
- (2.4) - Montagem da matriz modal reduzida ao número de modos de vibração que se pretendem utilizar e que são considerados suficientes para obter uma boa aproximação da resposta da estrutura por sobreposição modal
- (2.5) - Cálculo da matriz de massa modal
- (2.6) - Normalização dos modos relativamente à matriz de massas
- (2.7) - Cálculo da matriz de rigidez modal
- (2.8) - Cálculo dos factores de participação modal para Opção 1 ou Opção 2
- (2.9) - Tipo de amortecimento:
Opção 0 – Amortecimento de Rayleigh ; Opção 1 – Amortecimento modal
- (2.9.1) - Opção 0
 - Introdução das constantes α e β na janela de comandos
 - Cálculo da matriz de amortecimento (a partir da combinação linear das matrizes de rigidez \underline{K} e de massas \underline{M})
 - Cálculo da matriz de amortecimento modal
 - Cálculo dos coeficientes de amortecimento modais relativos
- (2.9.2) - Opção 1
 - Introdução do valor do coeficiente de amortecimento modal relativo (igual para todos os modos) na janela de comandos
- (2.10) - Desenho das configurações modais para os casos 2D ou 3D
- (2.11) - Cálculo dos deslocamentos e velocidades modais ao longo do tempo a partir da fórmula recursiva para cálculo do integral de convolução (ou de Duhamel)
- (2.12) - Cálculo dos deslocamentos estruturais ao longo do tempo a partir da fórmula da sobreposição modal
- (2.13) - Desenho para a representação da resposta ao longo do tempo em termos de nuvens de pontos em dois planos correspondentes aos dois primeiros pares de coordenadas modais (u_1^*, u_2^*, u_3^* e u_4^*)
- (2.14) - Desenho das histórias de deslocamentos nos graus de liberdade escolhidos pelo utilizador
- (2.15) - Visualização de um filme com a deformação da estrutura e a variação do campo de tensões principais nos pontos de Gauss ao longo do tempo para a acção dinâmica escolhida em (2.1)
- (2.16) - Aplicação do módulo da Transformada de Fourier (FFT) para decompor em ondas as histórias de deslocamentos calculadas nos G.L. pretendidos; desenho dos respectivos espectros de amplitudes
- (2.17) - Cálculo sísmico pelo método do espectro de resposta:
 • Leitura do espectro de resposta da acção sísmica em acelerações absolutas;
 • Cálculo do espectro de resposta em pseudo-velocidades relativas e do espectro de resposta em pseudo-deslocamentos relativos;
 • Desenho dos três espectros de resposta referidos;
 • Cálculo dos factores de participação modal para a acção sísmica;
 • Definição dos factores multiplicativos para os espectros em acelerações nas direcções x_n caso de trate de um equilíbrio de placa ou tridimensional;
 • Cálculo das ordenadas do espectro de deslocamentos (por interpolação);
 • Cálculo dos valores máximos das coordenadas modais;
 • Desenho das elipses calculadas pelo método do espectro de resposta na figura definida em (2.13).

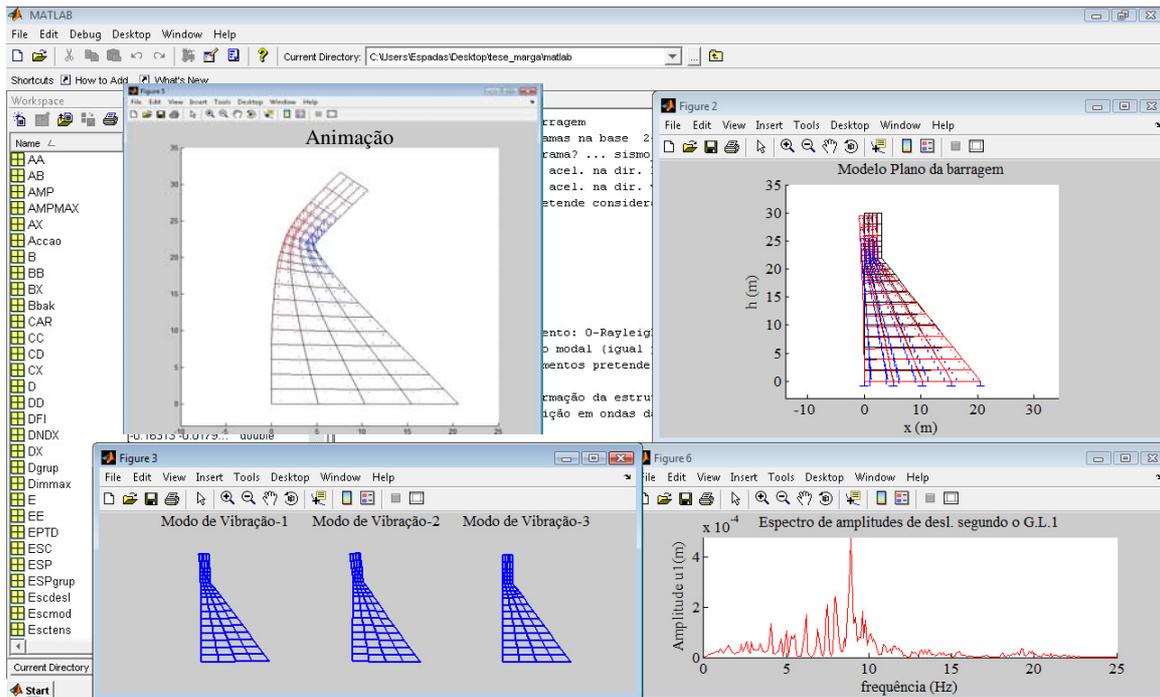


Figura 4.28: Ambiente do programa MEFDIN3D em MATLAB. Barragem de gravidade: deformada e campo de tensões principais num dado instante, tensões principais devidas ao peso próprio, modos de vibração e espectro de amplitudes do deslocamento horizontal ao nível do coroamento.

4.4.2 Análise estática. Exemplo de teste

O teste do cálculo estático que será aqui exemplificado refere-se a uma viga em consola, com um comprimento de 10,0m e uma secção de $1,0\text{m}^2$, estando apenas sujeita ao seu peso próprio, como se pode observar na figura seguinte.

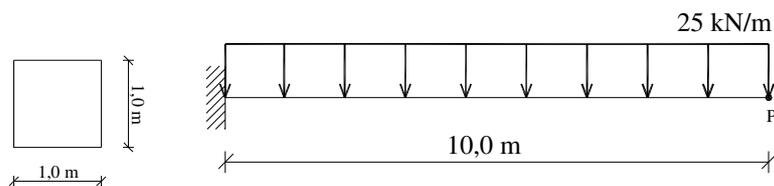


Figura 4.29: Viga em consola sujeita apenas ao seu peso próprio.

Na próxima figura apresenta-se a discretização adoptada em elementos finitos planos de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.

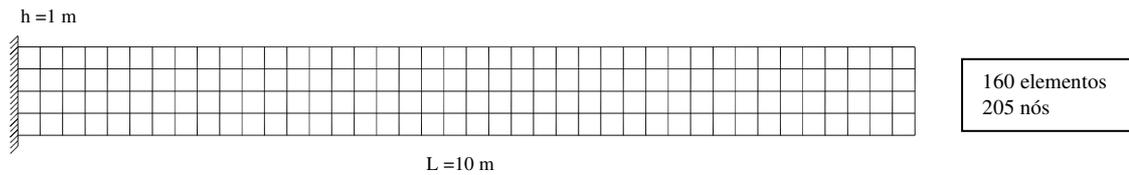


Figura 4.30: Malha de elementos finitos planos de 4 nós com 2 G.L. de translação por nó.

A consola, constituída por betão armado, apresenta um módulo de Elasticidade de 20 GPa e um coeficiente de Poisson de 0,20.

Após correr o programa MEFDIN3D obteve-se a seguinte deformada da estrutura e campo de tensões principais (nos 4 pontos de Gauss por elemento) (Figura 4.31).

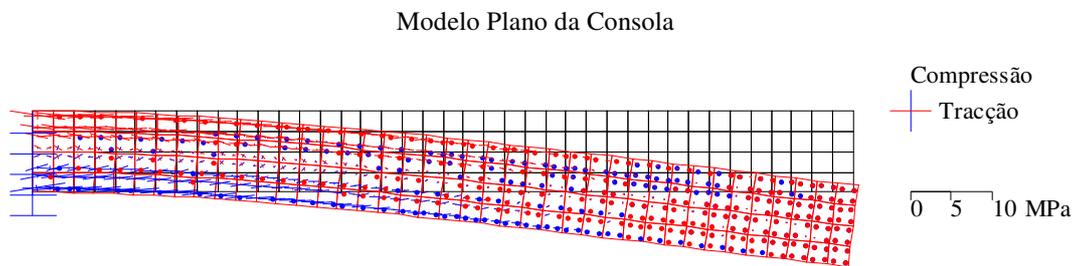


Figura 4.31: Deformada da estrutura e campo de tensões principais obtidos com o MEFDIN3D.

Pretende-se então determinar analiticamente as tensões principais nos pontos de Gauss mais próximos do encastramento e também o deslocamento vertical no ponto P da consola e comparar com os resultados obtidos com o MEFDIN3D.

Ora, o momento flector no ponto de Gauss mais próximo do encastramento é dado por:

$$M_{PG} = -25 \times \frac{9,9472^2}{2} = -1236,8 \text{ kN.m}, \text{ sendo o braço calculado da seguinte forma,}$$

$$b = 10 - \left[\frac{(2 - 0,57735 \times 2)}{2} \times 0,125 \right] = 9,9472 \text{ m}.$$

As tensões nos pontos de Gauss nas fibras superior e inferior (elementos 1 e 4) são então calculadas do seguinte modo:

$$\sigma_{PG3,elem1} = \frac{1236,8}{1 \times 10^3 / 12} \cdot \underbrace{0,4472}_y = 6637,2 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{PG1,elem4} = \frac{-1236,8}{1 \times 1^3 / 12} \cdot \underbrace{0,4472}_y = -6637,2 \text{ kPa}$$

sendo, $y = (0,57735 \cdot 0,125) + 0,125 + 0,25 = 0,4472\text{m}$.

Os valores das tensões obtidos com o programa MEFDIN3D foram:

$$\begin{cases} \sigma_{PG3,elem1} = 6597,3 \text{ kPa} \\ \sigma_{PG1,elem4} = -6597,3 \text{ kPa} \end{cases}$$

Comparando agora em termos do deslocamento vertical no ponto P da consola, obtém-se com o programa MEFDIN3D que o deslocamento vertical no nó 205 (o que corresponde ao grau de liberdade 401) é $u(410) = -0,0184\text{m}$.

Recorrendo a um programa em Excel para calcular deslocamentos em vários pontos de uma viga com determinadas condições de fronteira, verifica-se que o deslocamento vertical na extremidade da consola, é de $u_p = -0,01875\text{m}$.

Como se pode concluir, os resultados referentes ao cálculo estático da consola em estudo, obtidos analiticamente e com o programa MEFDIN3D revelam uma boa concordância.

4.4.3 Análise dinâmica. Exemplos de teste

Para testar a coerência dos cálculos dinâmicos obtidos com o programa de elementos finitos MEFDIN3D, utiliza-se a mesma viga em consola, mas com uma altura reduzida de 0,25m como se observa na Figura 4.33. Nestas condições, a estrutura enquadra-se nos conceitos da teoria das peças lineares. Assim, procede-se à comparação dos resultados analíticos, com base nas conhecidas expressões referentes à determinação das frequências naturais em peças lineares [Clough & Penzien, 1993], com os resultados numéricos obtidos com o MEFDIN3D considerando elementos finitos planos de 4 e de 8 nós.

Uma viga em consola, sujeita apenas ao seu peso próprio, teoricamente apresenta as seguintes frequências naturais e modos de vibração de flexão, tal como se observa na Figura 4.32.

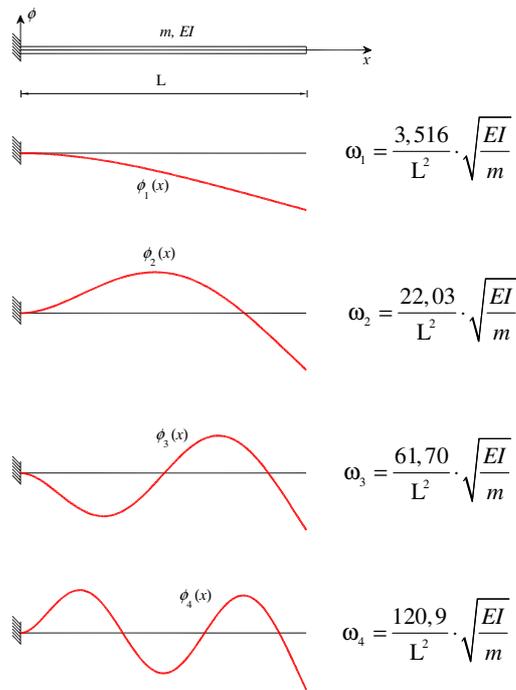


Figura 4.32: Frequências naturais e modos de vibração de flexão. Valores teóricos para uma viga em consola.

Sendo,

$$E = 20 \text{ GPa};$$

$$\nu = 0,20;$$

$$m = 0,625 \text{ ton/m};$$

$$A = 0,25 \text{ m}^2;$$

$$L = 10 \text{ m};$$

$$I = 0,00130 \text{ m}^4.$$

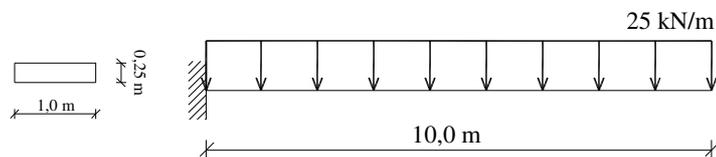


Figura 4.33: Viga em consola para efectuar o teste para o cálculo dinâmico.

então, as frequências naturais calculadas analiticamente e as que se obtiveram numericamente pelo programa MEFDIN3D resumem-se na Tabela 4-3.

Modo	Teoria das peças lineares f (Hz)	MEFDIN3D - E.F. isoparamétricos de 4 nós f (Hz)	MEFDIN3D - E.F. isoparamétricos de 8 nós f (Hz)
1	1,14	1,35	1,13
2	7,15	8,43	7,07
3	20,03	23,55	19,71
4	39,25	46,00	38,39

Tabela 4-3: Comparação dos valores das frequências naturais obtidos analiticamente e numericamente com o MEFDIN3D considerando elementos finitos planos de 4 e de 8 nós.

Analisando os resultados da tabela anterior, verifica-se que os valores das frequências naturais considerando elementos finitos de 8 nós, são da ordem de grandeza dos resultados obtidos analiticamente, a partir da teoria das peças lineares. Caso se utilizassem elementos finitos isoparamétricos tridimensionais tipo cubo com 20 nós, os resultados das frequências seriam ainda mais próximos dos valores teóricos, o que significa que a utilização de elementos finitos com mais pontos nodais conduz a resultados mais próximos da solução analítica. De facto, os valores registados nos elementos de 4 nós são relativamente semelhantes aos teóricos até ao 3º modo de vibração. No 4º modo já se verifica uma discrepância de valores, precisamente por se tratar de um modo de flexão mais notável.

Seguidamente mostram-se os modos de vibração obtidos com o programa MEFDIN3D considerando elementos finitos de 8 nós.

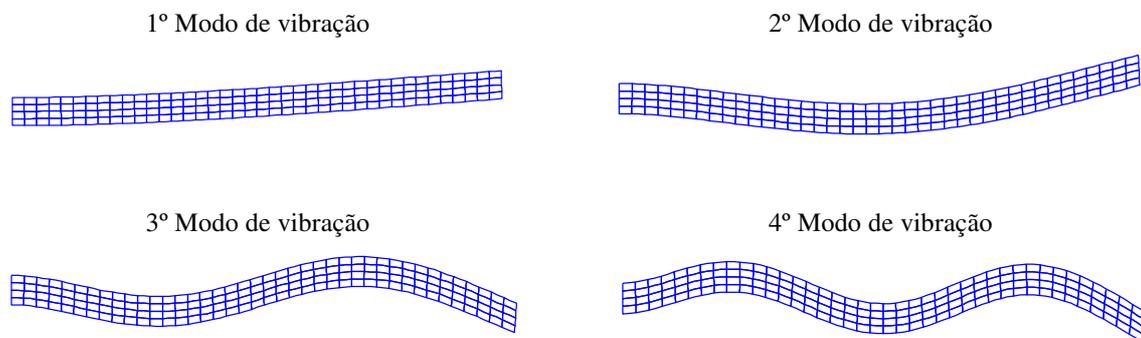


Figura 4.34: Quatro primeiras configurações modais da viga em consola em análise obtidas com o programa MEFDIN3D utilizando elementos finitos planos isoparamétricos de 8 nós.

Em seguida mostram-se resultados da análise dinâmica de uma consola tridimensional, com uma altura de 6,0m e uma secção de 0,5 x 0,6m² obtidos com o programa MEFDIN3D. Esta estrutura está sujeita ao seu peso próprio e a uma força concentrada, aplicada no topo de 250 kN. É constituída por betão, cujo módulo de Elasticidade é de 20 GPa e apresenta um coeficiente de Poisson de 0,20. Discretizou-se a consola em 6 elementos tridimensionais isoparamétricos tipo cubo de 20 nós, como se observa na Figura 4.35 a).

Na Figura 4.35 b) mostra-se a deformada da consola, sujeita às acções descritas anteriormente, assim como, o campo de tensões principais (nos 27 pontos de Gauss por elemento) obtidos com o MEFDIN3D.

A Figura 4.35 c) apresenta as quatro primeiras configurações modais da consola e também os valores que se obtiveram para as frequências naturais utilizando o MEFDIN3D.

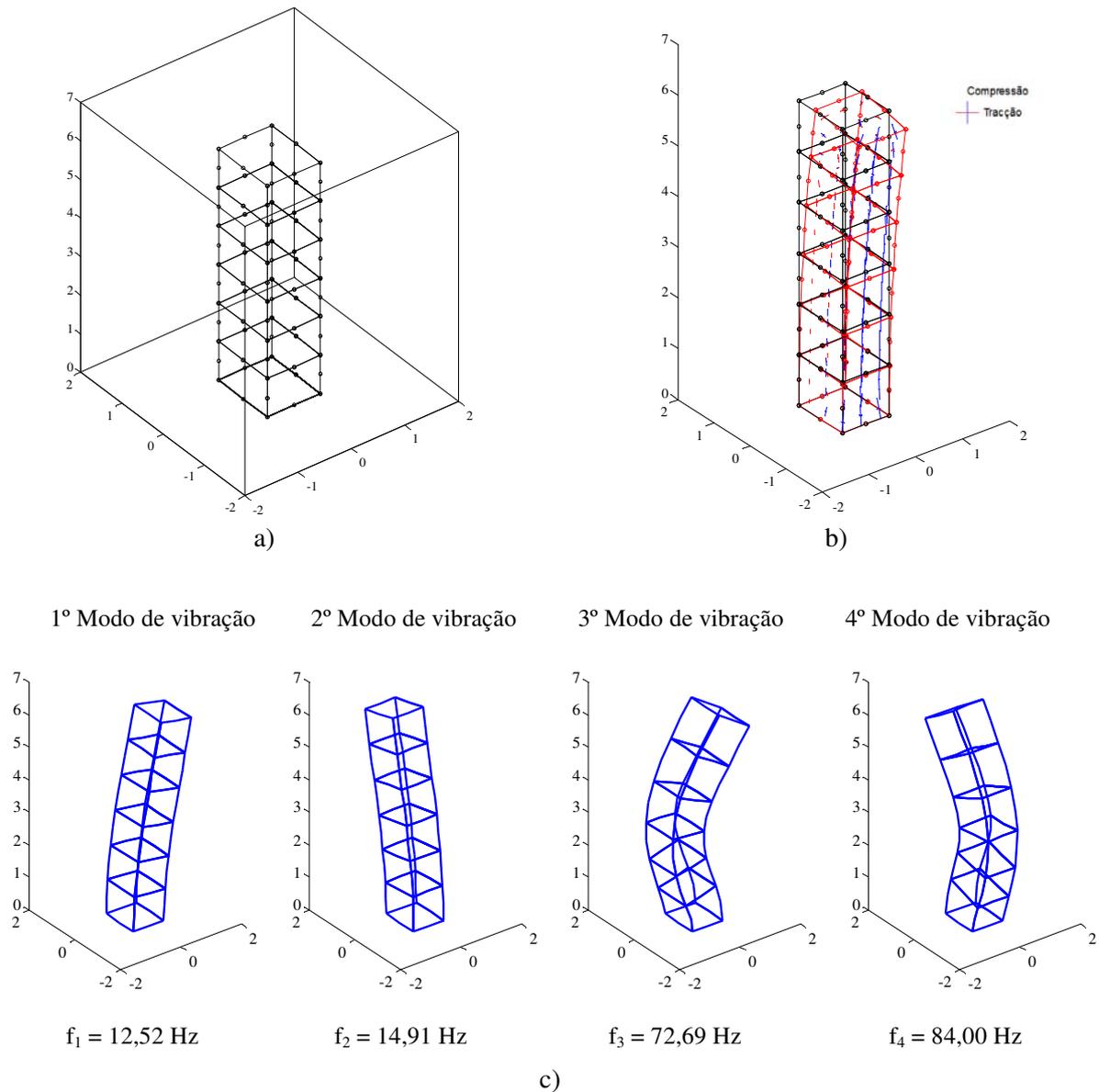


Figura 4.35: Cálculo dinâmico com o MEFDIN3D: a) malha de elementos finitos tridimensionais tipo cubo de 20 nós da consola em análise; b) deformada da consola e campo de tensões principais (nos 27 pontos de Gauss por elemento) e; c) frequências naturais e modos de vibração da consola (1º ao 4º modo).

4.5 Considerações finais

Neste capítulo apresentou-se a formulação do Método dos Elementos Finitos, com vista à modelação numérica do comportamento estático e dinâmico de estruturas, utilizando um exemplo simples de um modelo estrutural de uma barragem de gravidade discretizada em elementos finitos de placa de 4 nós, que ajudou a exemplificar a sequência de etapas a adoptar

neste método. Primeiramente apresentaram-se os conceitos referentes a análise estática de estruturas e, em seguida, generalizou-se para a análise dinâmica, abordando em particular a acção sísmica. Salientou-se a facilidade em generalizar, em termos de implementação computacional, o método de elementos finitos de placa com 4 nós para elementos finitos de placa com 8 nós e elementos finitos tridimensionais de 20 nós. Como se mostrou neste capítulo, as modificações a introduzir relacionam-se apenas com as funções de interpolação e com o número de pontos de Gauss a adoptar.

Na sequência do estudo efectuado neste capítulo, foi desenvolvido o programa MEFDIN3D em MATLAB, de elementos finitos de placa com 4 e 8 nós e elementos finitos tridimensionais tipo cubo de 20 nós, que permite efectuar a análise estática e dinâmica de estruturas (no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta).

Apresentaram-se alguns exemplos de estruturas simples, para as quais são conhecidas as soluções analíticas, para testar a fiabilidade do programa MEFDIN3D relativamente ao cálculo estático e dinâmico e também para mostrar as suas potencialidades.

Capítulo 5

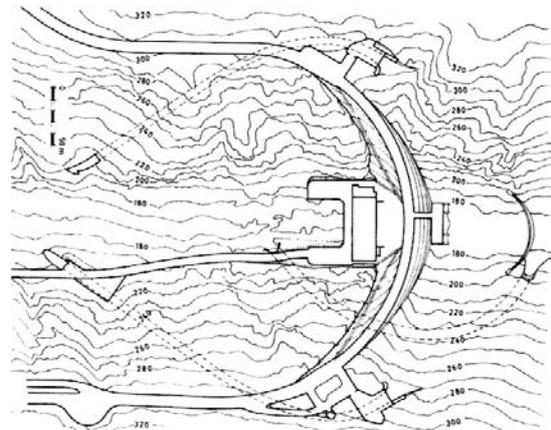
Aplicação à barragem do Cabril e à torre das tomadas de água

5.1 Considerações iniciais

A barragem do Cabril é, em termos de altura, a maior barragem de Portugal. Trata-se de uma barragem em abóbada de dupla curvatura (Figura 5.1 b), localizada no distrito de Castelo Branco no rio Zêzere e encontra-se em funcionamento desde 1954. Está fundada num maciço granítico e tem a particularidade de apresentar uma zona de maior espessura ao nível do coroamento. É uma barragem em betão, com uma altura máxima acima da fundação de cerca de 132m; a cota do coroamento é de 297m e o desenvolvimento entre encontros é de 290m (Figura 5.2 a).



a)



b)

Figura 5.1: a) Vista da barragem do Cabril e da albufeira. b) Planta geral da barragem [Site 3].

O aproveitamento do Cabril é constituído por quatro órgãos de grande importância, nomeadamente, a barragem, a central, a torre das tomadas de água e o sistema de evacuação de cheias.

A torre das tomadas de água é uma estrutura em betão armado com uma altura de 132m que se encontra ligada ao coroamento através de um passadiço em betão (Figura 5.2 b). A ligação

entre o passadiço e a barragem é materializada por intermédio de um apoio vertical com uma junta que permite os deslocamentos relativos entre a barragem e o passadiço na direcção montante-jusante.

A torre permite o controlo das comportas das duas tomadas de água para os grupos e da descarga de fundo (posicionada entre os grupos). A parte inferior da torre engloba as tomadas propriamente ditas com grades metálicas finas na entrada de água para os grupos e a descarga de fundo com uma grade de betão armado na entrada (Figura 5.3 b). A parte superior da torre é uma estrutura reticulada, que suporta no seu topo, acima do nível da água, os órgãos de manobra das comportas e das grades finas (Figura 5.3 a).

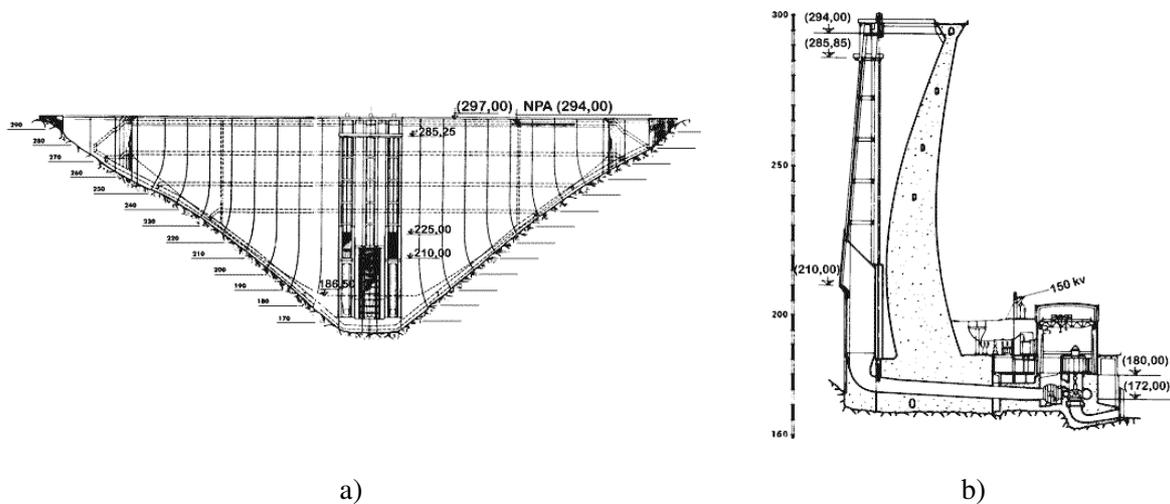


Figura 5.2: a) Vista de montante da barragem. b) Perfil da barragem com a torre das tomadas de água [Site 3].



Figura 5.3: a) Vista lateral da barragem e da torre das tomadas de água com os órgãos de manobra das comportas. b) Vista do paramento de montante da barragem e da torre das tomadas de água [Xerez, 1954].

É de notar que, o funcionamento dos grupos de produção, para determinadas situações de vibração, excitam de forma significativa a torre das tomadas de água. Este facto justifica em parte, o interesse do estudo do comportamento dinâmico da torre.

A análise de resultados experimentais obtidos com base em ensaios de vibração ambiental efectuados no corpo da barragem do Cabril em 2002, conduziu à identificação de frequências relevantes em torno de 1,0 Hz, que não tinham correspondência com as primeiras frequências naturais da barragem, mas que poderiam eventualmente estar relacionadas com o movimento oscilatório da torre das tomadas de água.

A análise espectral de um registo de acelerações obtido em Dezembro de 2008 no sistema de monitorização recentemente instalado [Mendes, 2009], que permite a observação em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril, confirmou novamente a existência de picos, supostamente correspondentes às frequências naturais da torre.

Assim, com o objectivo de averiguar a existência de fenómenos de interacção dinâmica entre o movimento oscilatório da torre e da própria barragem, considerou-se de todo o interesse nesta dissertação, analisar o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água. Para tal, foram realizados ensaios de vibração ambiental na torre e desenvolveram-se também três modelos numéricos de elementos finitos (dois modelos com o SAP 2000 e um com o programa MEFDIN3D), para simular o comportamento dinâmico da torre. Foi igualmente necessário realizar um ensaio de ultra-sons para determinar o módulo de elasticidade do betão da torre.

A utilização conjunta de resultados experimentais e numéricos é fundamental para possibilitar uma adequada caracterização do comportamento dinâmico da torre, até porque, na elaboração dos modelos numéricos são adoptadas hipóteses simplificativas face ao desconhecimento ou à complexidade da estrutura real e, os ensaios em obra permitem validar as hipóteses consideradas nos modelos numéricos e proceder à sua calibração.

Com os modelos numéricos devidamente calibrados, procedeu-se ao estudo da previsão do comportamento dinâmico da torre sob acções sísmicas impostas na base.

Para mostrar as potencialidades do MEFDIN3D, no final deste capítulo apresentam-se resultados de um cálculo sísmico da barragem do Cabril, com animações em 3D da evolução do campo de deslocamentos e de tensões durante a actuação do sismo considerado.

5.2 Observação e análise do comportamento dinâmico da barragem do Cabril

Nas grandes barragens de betão com uma idade média de cerca de 50 anos, como é o caso da barragem do Cabril que se encontra em funcionamento desde 1954, é fundamental obter informação que permita caracterizar o seu comportamento dinâmico ao longo do tempo, nomeadamente variações de frequências naturais e configurações modais, de forma a controlar a segurança destas estruturas. Muitas destas obras representam um elevado risco potencial devido à sua idade avançada, aos processos de deterioração que ocorrem ao longo do tempo devido a fenómenos como o da eventual expansão do betão ou devido a acções excepcionais, como por exemplo, acções sísmicas de intensidade elevada.

Na fase inicial de exploração da barragem do Cabril foi detectada uma significativa fissuração horizontal no paramento de jusante, numa faixa situada entre os 10 e os 20m abaixo do coroamento. Em 1981, depois de analisado o comportamento estrutural, de investigações complementares na fundação, de ensaios de materiais e de simulação por modelos físicos e numéricos para determinar as causas da fissuração, foi decidido levar a efeito trabalhos de reparação. Os referidos trabalhos consistiram no tratamento da fundação, na injeção das juntas de contracção e no tratamento das fendas com injeções de resina após a caracterização das respectivas aberturas e profundidades. Com o reenchimento da albufera verificou-se que a obra tornou a fissurar na mesma zona.

Desde então têm sido realizados no LNEC vários estudos sobre o comportamento da barragem do Cabril, no sentido de contribuir para um melhor conhecimento da fissuração observada nesta obra.

Durante a vida útil desta barragem efectuaram-se dois ensaios de vibração forçada (em 1981 e 1996) e mais recentemente três ensaios de vibração ambiental (entre 2002 e 2003).

O ensaio de vibração ambiental realizado na barragem em 20 de Fevereiro de 2002 [Oliveira et al., 2003; Mendes, 2005] com o apoio da EDP (entidade gestora do aproveitamento hidroeléctrico do Cabril), com a albufera à cota 267m, teve como objectivos: i) avaliar os níveis de vibração na zona superior da obra com os grupos em funcionamento (para diferentes potências de produção) e com os grupos desligados e; ii) identificar as frequências naturais e as configurações modais dos primeiros modos de vibração da obra.

Para o caso do ensaio de vibração ambiental realizado com os grupos desligados, a análise espectral das séries temporais medidas conduziu à identificação de dois picos em torno da frequência de 1,0 Hz que não estavam relacionados com as frequências naturais da barragem (Figura 5.4). De entre as várias hipóteses que foram avançadas no sentido de descobrir a origem desses picos espectrais, considerou-se que uma das mais plausíveis era a que sugeria que os referidos picos poderiam estar relacionados com o eventual movimento oscilatório da torre das tomadas de água que se poderia reflectir nos paramentos da barragem. Assim, considerou-se que seria de todo o interesse determinar as frequências naturais da torre para averiguar se poderiam ser da ordem dos 1,0 Hz.

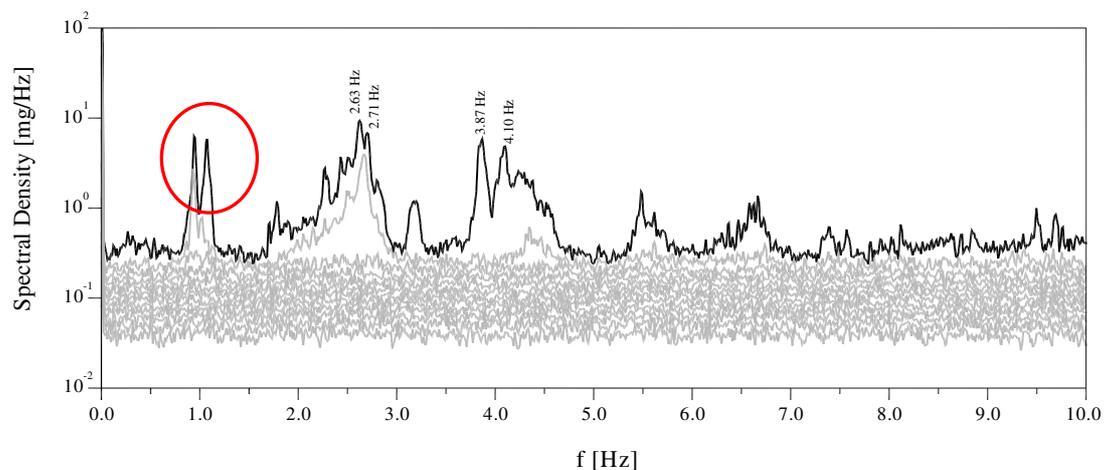


Figura 5.4: Espectro com os valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência obtido nos ensaios de vibração ambiental em Fevereiro de 2002 (adaptado de [Mendes, 2005]).

Na Figura 5.5 mostra-se a disposição dos 12 acelerómetros utilizados no ensaio (9 na galeria por baixo do coroamento e 3 na galeria imediatamente abaixo – situada sob a zona fissurada).

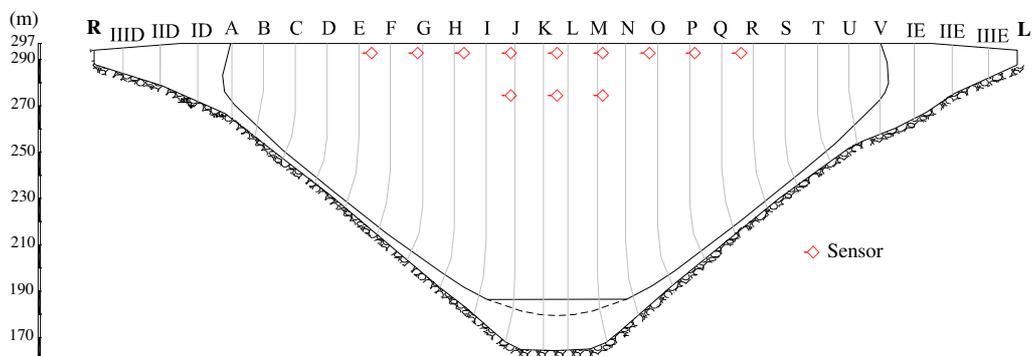


Figura 5.5: Ensaio de vibração ambiental de Fevereiro de 2002. Disposição dos 12 acelerómetros na barragem (adaptado de [Mendes, 2005]).

Na sequência destes estudos na barragem do Cabril foram realizados mais dois ensaios de vibração ambiental em 2003 com o objectivo de avaliar a influência da fissuração no comportamento da barragem, e para caracterizar o efeito das variações da cota de água na albufeira sobre as frequências naturais [Mendes, 2005].

Na Figura 5.6 apresentam-se as frequências naturais observadas nos dois ensaios de vibração forçada e nos três ensaios de vibração ambiental referidos. Com o objectivo de facilitar a interpretação dos resultados observados, também se apresentam nesta figura as linhas de influência calculadas numericamente com o modelo de elementos finitos tridimensionais, considerando a hipótese de fundação elástica e a inexistência de juntas.

Como se observa na Figura 5.6, ocorre um decréscimo das frequências naturais da barragem para cotas de água na albufeira superiores a 260m, pois a massa do sistema aumenta devido ao acréscimo da massa de água (para cotas de água inferiores a 260m, pode verificar-se um decréscimo das frequências naturais devido ao facto das juntas abrirem, o que corresponde a um decréscimo da rigidez global).

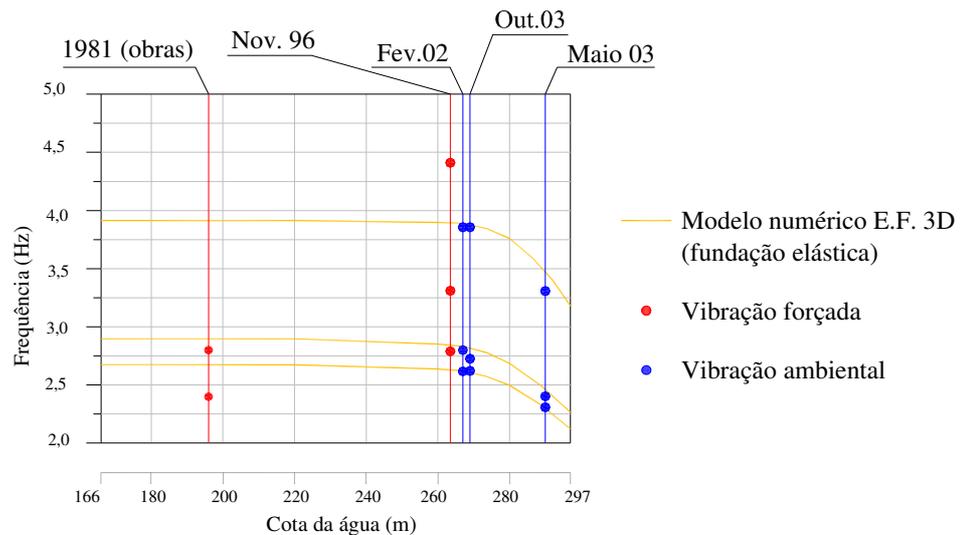


Figura 5.6: Efeito do nível da água na albufeira sobre as três primeiras frequências naturais identificadas em ensaios de vibração forçada e ambiental [Mendes, 2005].

No entanto, estes ensaios que têm sido efectuados esporadicamente, não permitem obter a quantidade de informação necessária para caracterizar adequadamente o comportamento dinâmico da barragem do Cabril, pois os parâmetros dinâmicos deste tipo de sistemas (barragem-fundação-albufeira) variam ao longo do tempo. Estas alterações devem-se essencialmente a variações da cota de água, a variações térmicas e devido a eventuais alterações estruturais, como por exemplo, a evolução de processos de fissuração.

Nesta perspectiva, desde 2008 que está a ser desenvolvido no LNEC, com apoio financeiro da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) e da EDP, e no âmbito do Plano Nacional de Re-Equipamento Científico [PRNC, 2002], um sistema pioneiro que permite a monitorização em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril [Mendes, 2009].

Com este sistema, que actualmente já se encontra em pleno funcionamento, obtêm-se registos de acelerações na barragem em contínuo, os quais são armazenados em ficheiros horários com uma frequência de amostragem de 50 pontos por segundo. Na análise de um desses registos obtido em Dezembro de 2008 com os grupos desligados e a água à cota 280m, identificaram-se, tal como no ensaio de Fevereiro de 2002, os picos que supostamente correspondem às primeiras frequências naturais da torre das tomadas de água. Na Figura 5.7 mostra-se o espectro até 6,0 Hz onde são visíveis os picos (eventualmente associados às frequências da torre) para além dos picos que correspondem às frequências naturais da barragem.

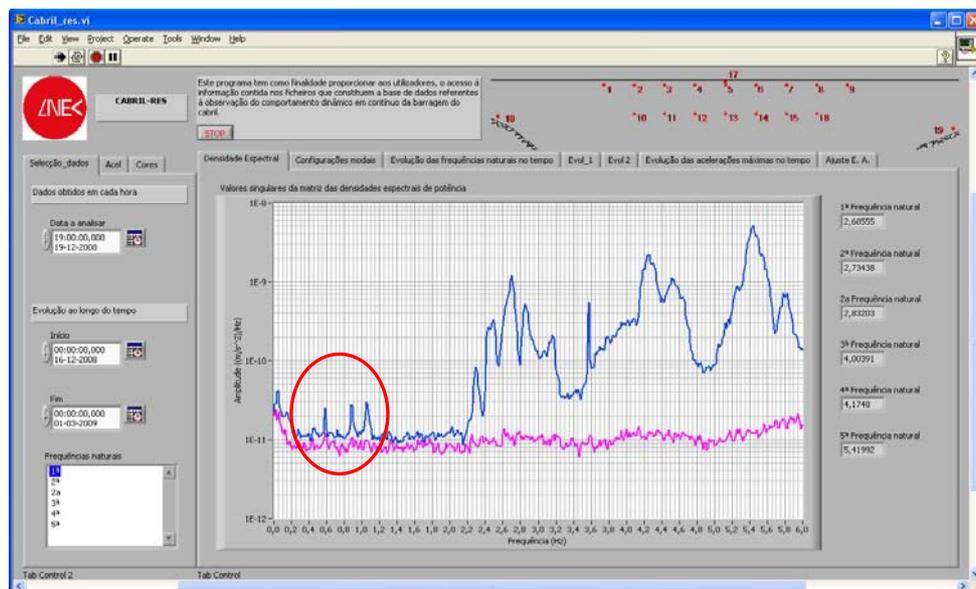


Figura 5.7: Espectro com os valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência obtidos num dos registos em Dezembro de 2008 no sistema de observação em contínuo do comportamento dinâmico da barragem do Cabril [Mendes, 2009].

Recorrendo ao programa MEFDIN3D para análise estática e dinâmica de estruturas pelo M.E.F. (2D e 3D) desenvolvido em MATLAB no âmbito deste trabalho (capítulo 4), apresentam-se em seguida as frequências naturais e modos de vibração da barragem do Cabril, obtidos com um modelo de elementos finitos tridimensionais tipo cubo de 20 pontos nodais. Neste modelo admitiu-se um módulo de Elasticidade para o betão de 32,5 GPa, um

coeficiente de Poisson de 0,20 e um peso específico para o betão de 24 kN/m^3 . O cálculo foi efectuado considerando a albufeira vazia e fundação rígida (apoios rígidos na superfície de inserção barragem-fundação).

A barragem foi discretizada em 32 elementos finitos (isoparamétricos do 2º grau) e em 277 pontos nodais (Figura 5.8), o que se considerou suficiente para a análise dinâmica pretendida.

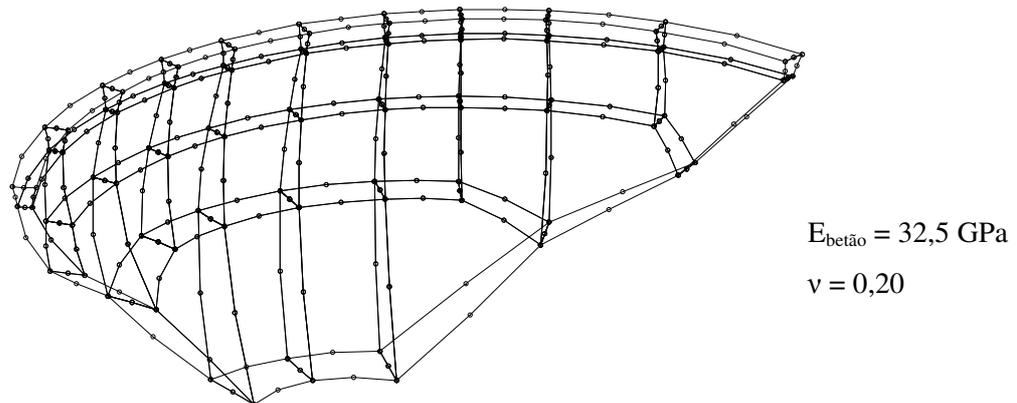


Figura 5.8: Análise dinâmica da barragem do Cabril com o programa MEFDIN3D. Malha de elementos finitos tridimensionais tipo cubo, de 20 nós.

As frequências naturais da barragem e os três primeiros modos de vibração que se obtiveram com o programa MEFDIN3D apresentam-se na Figura 5.9 (situação de albufeira vazia e hipótese de fundação rígida).

Observando a Figura 5.9, conclui-se que o 1º modo de vibração (frequência natural de 3,059 Hz) apresenta uma configuração anti-simétrica, com um nodo situado aproximadamente a meio do coroamento (numa vista em planta).

O 2º modo de vibração (frequência de 3,285 Hz) e o 3º modo (frequência de 4,440 Hz) apresentam configurações simétricas, tendo cada um dois nodos.

Na Figura 5.6 pode-se verificar que para a situação de albufeira vazia, as frequências naturais obtidas com um modelo numérico envolvendo a fundação da barragem (modelo com fundação elástica [Oliveira et al., 2003]), foram aproximadamente de 2,70 Hz, 2,88 Hz e 3,90 Hz. Comparando estes resultados com os obtidos com o programa MEFDIN3D considerando a fundação rígida, verifica-se, como seria de esperar, que as frequências naturais na hipótese de fundação rígida são ligeiramente superiores às que se obtêm com a hipótese de fundação elástica.

Apesar das hipóteses simplificativas adoptadas, os resultados obtidos com o presente modelo permitem afirmar que os picos identificados experimentalmente com base na análise espectral dos registos de acelerações medidas em obra (Fevereiro de 2002 e Dezembro de 2008) para frequências inferiores a 1,0 Hz, não correspondem a modos de vibração da barragem. A hipótese de que estes picos possam estar associados aos modos de vibração da torre das tomadas de água (o que significaria que existe um efeito de interacção dinâmica entre o movimento oscilatório da torre e o corpo da barragem), é analisada no ponto seguinte.

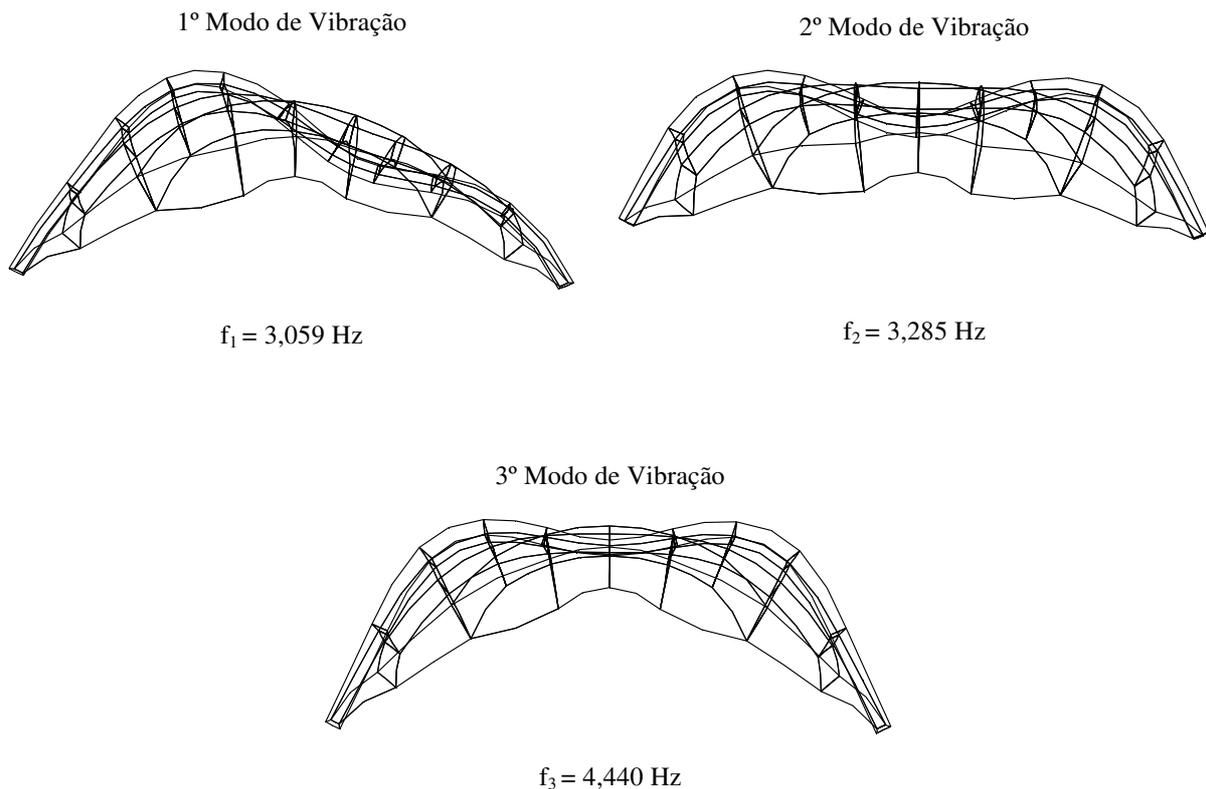


Figura 5.9: Três primeiras configurações modais e respectivas frequências naturais da barragem do Cabril obtidas com o programa MEFDIN3D considerando a albufeira vazia e a hipótese de fundação rígida.

5.3 Observação e análise do comportamento dinâmico da torre das tomadas de água

Neste ponto efectua-se o estudo do comportamento dinâmico da torre das tomadas de água da barragem do Cabril, com vista a analisar a hipótese atrás referida da possibilidade de ocorrência de fenómenos de interacção dinâmica entre a torre e a própria barragem, revelada nos espectros de acelerações medidas no corpo da barragem, em termos dos picos detectados para frequências inferiores a 1,0 Hz.

Para tal, efectuou-se um ensaio de vibração ambiental com medição de acelerações no topo da torre na direcção montante-jusante e na direcção margem esquerda-direita. Com vista à preparação do ensaio e posterior análise, foram desenvolvidos dois modelos numéricos de elementos finitos 2D e um modelo de elementos finitos 3D, para simular o comportamento dinâmico da torre.

5.3.1 Modelação numérica (2D e 3D)

Neste ponto apresentam-se os modelos numéricos (2D e 3D) que foram desenvolvidos para simular o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água, com base em resultados experimentais que vão ser apresentados em seguida.

Foi necessário realizar um estudo paramétrico nestes modelos para avaliar a influência da rigidez adoptada para a ligação passadiço-barragem de forma a obterem-se frequências naturais próximas das obtidas nos ensaios.

Como já se referiu no capítulo 4, foi desenvolvido o programa MEFDIN3D de elementos finitos de placa com 4 e 8 pontos nodais e elementos finitos tridimensionais (do tipo cubo) com 20 nós usando o programa MATLAB v.7.1. A análise dinâmica da torre das tomadas de água apenas foi efectuada considerando elementos finitos planos de 8 pontos nodais, que, como se mostrou no capítulo anterior, têm um melhor comportamento, comparativamente com os elementos de 4 nós, para simular os efeitos de flexão nas estruturas.

Foram também desenvolvidos dois modelos da estrutura em estudo utilizando o programa de cálculo automático SAP 2000 Nonlinear v.7.42.

O primeiro modelo construído em SAP 2000 permite efectuar uma análise bidimensional da estrutura (secção na direcção montante-jusante) e é constituído por elementos finitos do tipo placa com 4 nós. A construção deste modelo bidimensional em SAP serve essencialmente

para confirmar os resultados obtidos no programa de elementos finitos MEFDIN3D em MATLAB.

O modelo tridimensional em SAP 2000 permite a representação integral da estrutura, sendo constituído por elementos finitos de barra com 2 nós e elementos finitos de casca delgada de 4 pontos nodais.

É importante referir que foram consideradas algumas simplificações em todos os modelos, nomeadamente ao nível da estrutura, nas secções dos elementos, na ligação da torre ao solo de fundação e na ligação passadiço-barragem.

5.3.1.1 Determinação do módulo de elasticidade. Ensaio de ultra-sons

Em termos dos modelos numéricos um dos parâmetros fundamentais é o módulo de elasticidade do betão e por isso, procedeu-se à sua determinação experimental realizando um ensaio de ultra-sons “*in-situ*” num dos pilares da torre das tomadas de água.

O ensaio de ultra-sons para determinar o módulo de elasticidade do betão, consiste na determinação da velocidade de propagação dum impulso ultra-sónico entre dois pontos de medida, a qual pode ser correlacionada com o valor do módulo de elasticidade (E) pela seguinte expressão:

$$E = v^2 \cdot m \cdot \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \quad (5.1)$$

sendo,

v – velocidade de propagação do impulso;

m – massa específica do betão ($m = 2,5 \text{ ton} / \text{m}^3$);

ν – coeficiente de Poisson ($\nu = 0,20$).

No ensaio realizado na torre foi colocado um transdutor emissor numa face de um dos pilares e, o sinal ultra-sónico depois de atravessar o betão, foi captado por um transdutor receptor, colocado na face oposta. O tempo decorrido entre a emissão e a recepção (distância de 1,50m entre faces), é medido electronicamente numa unidade de medida central, sendo assim possível calcular a velocidade de propagação. O equipamento é composto por uma unidade central (onde se encontra o gerador de impulsos eléctricos e o circuito de leitura) e por dois transdutores (emissor e receptor), tal como se pode observar na Figura 5.10.

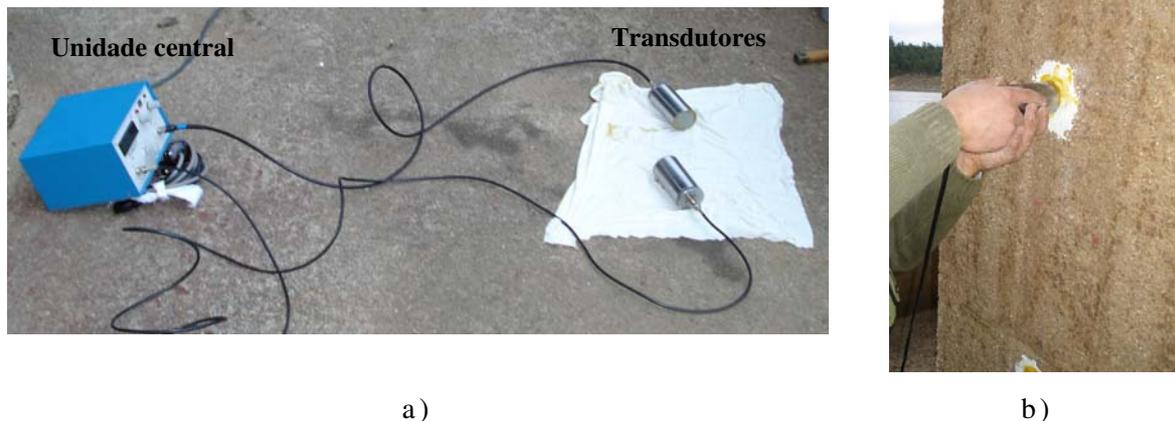


Figura 5.10: a) Equipamento dos ultra-sons constituído por uma unidade central e dois transdutores. b) Ensaio de ultra-sons num dos pilares da torre das tomadas de água da barragem do Cabril.

Após a realização de três medições, determinou-se que o tempo médio dispendido pelas ondas de ultra-sons para atravessar a espessura do pilar foi de 385 milissegundos, o que corresponde a uma velocidade média de 3896 m/s.

Substituindo este valor na expressão (5.1), obtém-se o resultado $E = 34,2 \text{ GPa}$ para o módulo de Elasticidade do betão da torre.

5.3.1.2 Análise 2D com o programa MEFDIN3D (MATLAB)

Descrição do modelo e hipóteses adoptadas

Com vista a estudar o comportamento dinâmico da torre na direcção montante-jusante, primeiramente foi desenvolvido um modelo plano de elementos finitos de placa de 8 pontos nodais (2 G.L. por nó).

Neste modelo considerou-se a hipótese de material isotrópico de comportamento elástico-linear com $E = 34,2 \text{ GPa}$, $\nu = 0,20$ e um peso específico para o betão armado de 25 kN/m^3 . Introduziu-se um apoio elástico na extremidade do passadiço (na zona de ligação à barragem) segundo a direcção montante-jusante ($K = 7500 \text{ kN/m}$) para simular a ligação passadiço-barragem, bem como um apoio fixo na direcção vertical.

Foram considerados encastramentos na ligação da torre à fundação (hipótese de fundação rígida).

A análise dinâmica da torre foi efectuada considerando apenas a massa do betão, tendo sido desprezada a influência da pressão hidrodinâmica da água sobre a torre.

A estrutura foi discretizada em 157 elementos finitos, o que corresponde a um total de 616 pontos nodais.

É de referir que o valor do parâmetro K, correspondente à rigidez do apoio elástico no passadiço na direcção montante-jusante, pode influenciar significativamente o comportamento dinâmico da torre. Assim, este valor foi ajustado por forma a que os valores das frequências naturais coincidissem com os resultados identificados nos ensaios de vibração ambiental.

Frequências naturais e modos de vibração

As três primeiras configurações modais e as respectivas frequências naturais que se obtiveram para a torre com este modelo apresentam-se na Figura 5.11.

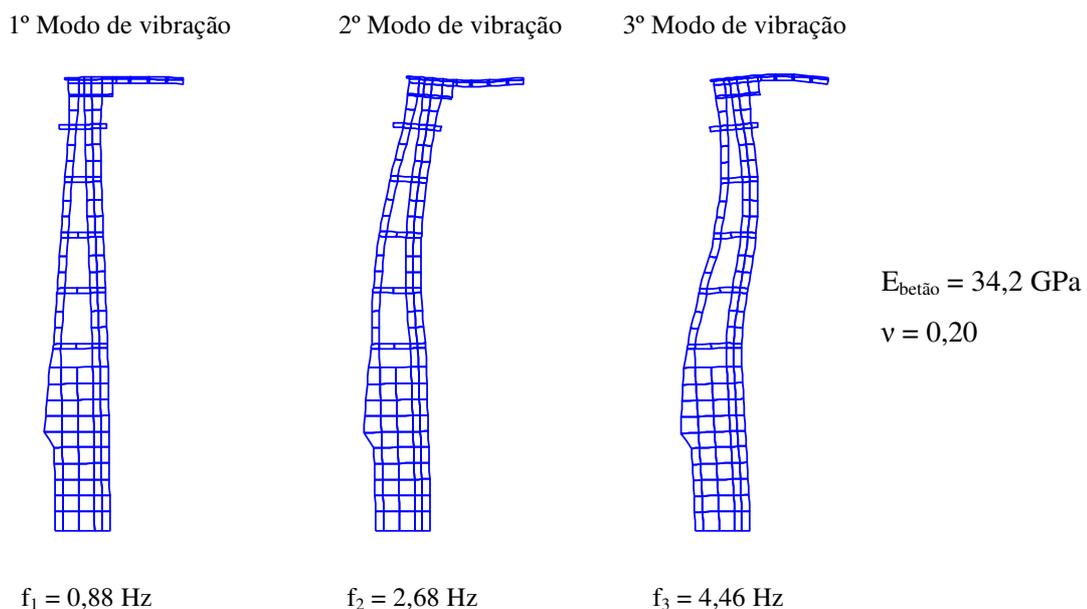


Figura 5.11: Três primeiros modos de vibração da torre (direcção montante-jusante) e respectivas frequências naturais obtidas com o programa MEFDIN3D considerando elementos finitos de placa de 8 nós.

5.3.1.3 Análise 2D com o SAP 2000

Descrição do modelo e hipóteses adoptadas

Com o objectivo de confirmar os resultados obtidos com o programa MEFDIN3D em MATLAB desenvolvido no âmbito deste trabalho, utilizou-se o programa SAP 2000 com o qual foi elaborado um modelo plano da torre, semelhante ao anterior, em que se utilizaram elementos finitos do tipo placa (formulação do SAP), tendo sido efectuada a sua análise dinâmica.

Consideraram-se as mesmas características mecânicas que foram adoptadas no modelo desenvolvido com o MEFDIN3D, idênticas condições de apoio e considerou-se um valor idêntico para a rigidez na ligação passadiço-barragem.

Adoptou-se uma discretização envolvendo 130 elementos finitos e 242 pontos nodais.

Frequências naturais e modos de vibração

Após efectuar a análise dinâmica da torre das tomadas de água, obtiveram-se as seguintes configurações modais e respectivas frequências naturais para os três primeiros modos de vibração (Figura 5.12).

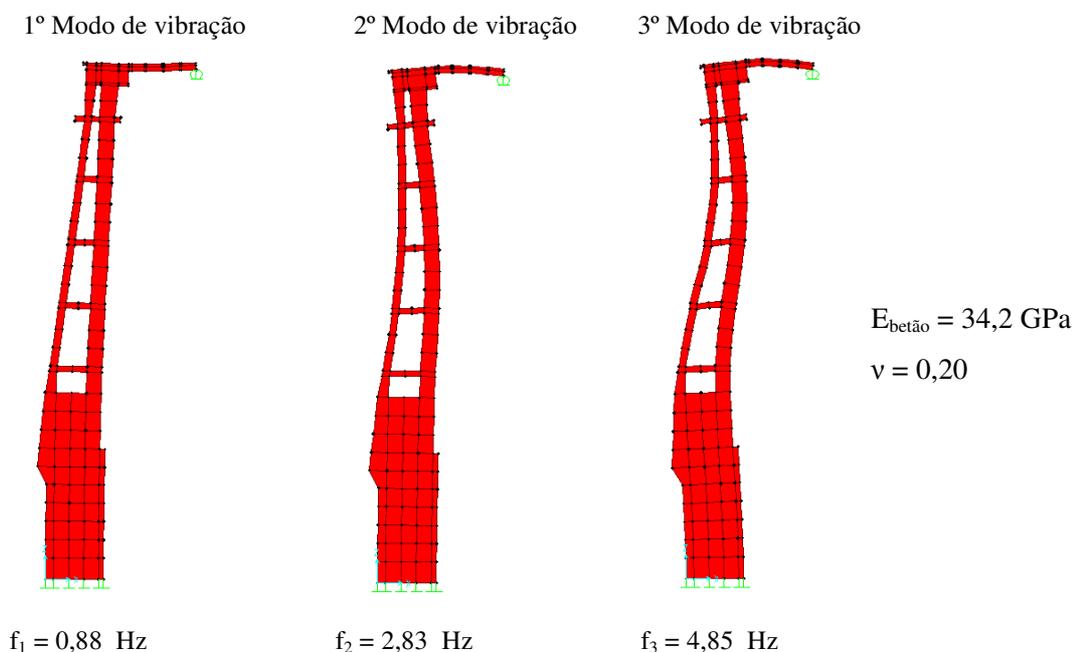


Figura 5.12: Configurações modais dos três primeiros modos de vibração e respectivas frequências naturais obtidas com o programa SAP 2000 numa análise bidimensional.

5.3.1.4 Análise 3D com o SAP 2000

Descrição do modelo e hipóteses adoptadas

Na sequência dos estudos dinâmicos efectuados com os anteriores modelos simplificados (modelos para simular o comportamento dinâmico da torre na direcção montante-jusante), foi desenvolvido em SAP 2000 um modelo tridimensional constituído por 276 elementos finitos de barra 3D (“frame elements”) e 342 elementos de casca delgada (“shell elements”) correspondente a uma discretização com 1075 pontos nodais. Trata-se de um modelo elástico linear com $E = 34,2 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,20$.

Com este modelo tridimensional, pretende-se conhecer as frequências naturais e os modos de vibração que, naturalmente se caracterizam por apresentarem componentes em ambas as direcções.

A ligação entre o passadiço e a barragem foi simulada por intermédio de apoios elásticos pontuais colocados na direcção margem esquerda - direita e na direcção montante - jusante ($K_{ME-MD} = 35000 \text{ kN/m}$ e $K_{M-J} = 32000 \text{ kN/m}$); na direcção vertical consideraram-se apoios fixos. Relativamente à ligação da torre ao solo considerou-se a hipótese de encastramento perfeito (fundação rígida).

Por simplificação, consideraram-se secções rectangulares para os pilares, e a parede localizada na parte inferior da torre definida em planta por contornos curvos, também foi simplificada, considerando-a definida por contornos rectos (Figura 5.13).

Os pilares e as vigas foram modelados com elementos de barra 3D e as lajes e paredes com elementos do tipo casca delgada.

A análise dinâmica da estrutura foi efectuada considerando apenas a massa do betão armado (peso específico de 25 kN/m^3) e desprezou-se a influência da pressão hidrodinâmica da água sobre a torre.

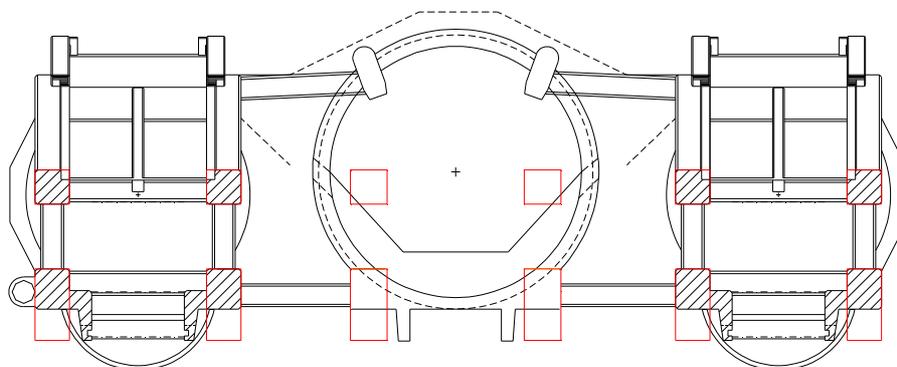


Figura 5.13: Torre das tomadas de água: vista em planta. Simplificações adoptadas na definição das secções dos pilares no modelo 3D em SAP 2000.

Frequências naturais e modos de vibração

Na Figura 5.14 apresentam-se as configurações modais e as frequências naturais que se obtiveram com o modelo tridimensional em SAP 2000.

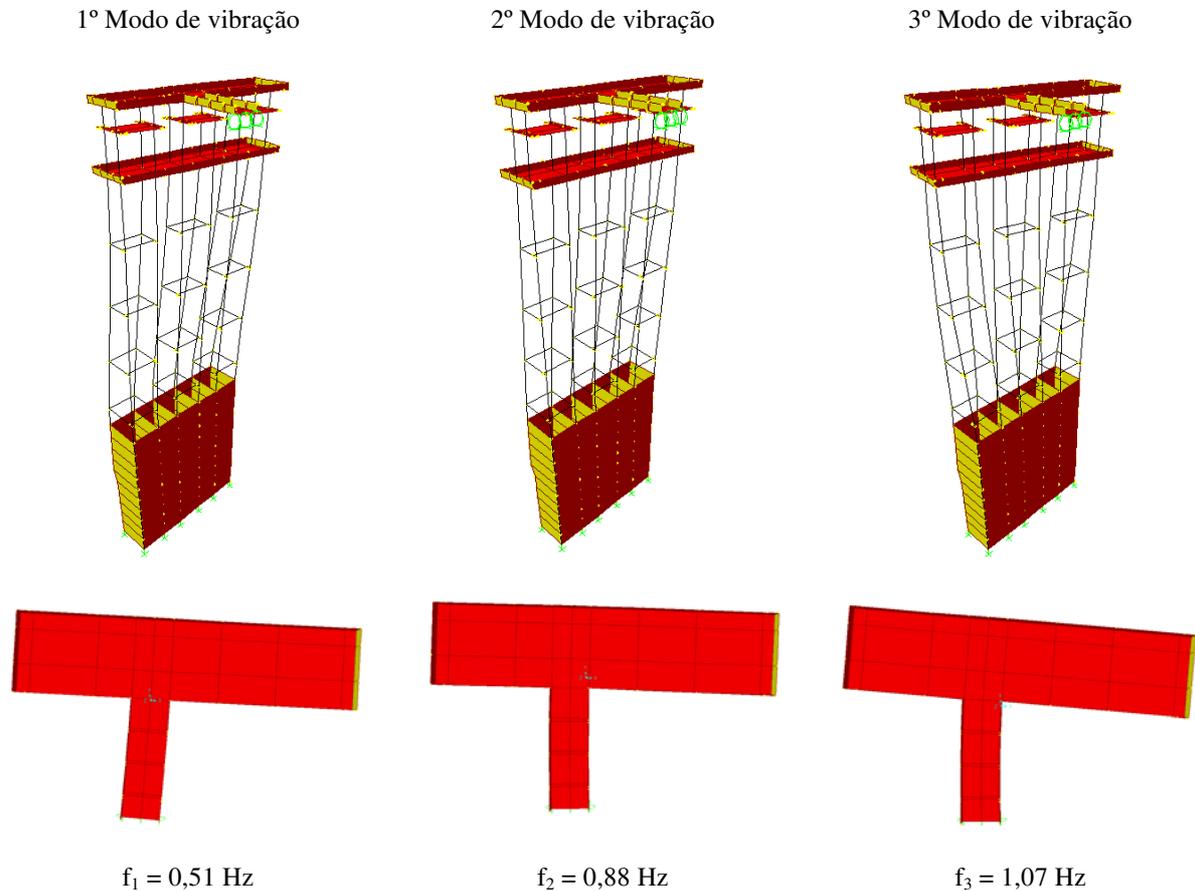
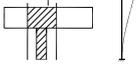
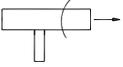


Figura 5.14: Configurações modais dos três primeiros modos de vibração e respectivas frequências naturais obtidas com o modelo tridimensional em SAP 2000.

5.3.1.5 Análise dos resultados obtidos com os modelos numéricos

Na Tabela 5-1 apresenta-se um resumo dos modos de vibração e das frequências naturais obtidas com os modelos numéricos 2D e 3D desenvolvidos para analisar o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água.

		Translação ⁽¹⁾ margem esq-dir (com torção)	Translação montante-jusante (com ligeira torção)	Torção	Translação montante-jusante (flexão em corte com 1 nodo)	Translação montante-jusante (flexão em corte com 2 nodos)
Modelos 2D	MEFDIN3D	—	1º Modo $f_1 = 0,88$ Hz 	—	2º Modo $f_2 = 2,68$ Hz 	3º Modo $f_3 = 4,46$ Hz 
	SAP 2000	—	1º Modo $f_1 = 0,88$ Hz	—	2º Modo $f_2 = 2,83$ Hz	3º Modo $f_3 = 4,85$ Hz
Modelo 3D (SAP 2000)		1º Modo $f_1 = 0,51$ Hz 	2º Modo $f_2 = 0,88$ Hz 	3º Modo $f_3 = 1,07$ Hz 	—	—

(1) - Esta translação refere-se ao movimento em planta da laje de topo da torre.

Tabela 5-1: Tabela resumo da comparação entre os resultados obtidos nos modelos numéricos 2D e 3D com o programa MEFDIN3D e o SAP 2000.

Com base nos resultados apresentados nesta tabela, verifica-se uma aceitável coerência entre os valores obtidos para as frequências naturais com os modelos 2D utilizando os programas MEFDIN3D e SAP 2000.

Como se pode observar na tabela, o 1º modo de vibração obtido na análise bidimensional, utilizando os programas MEFDIN3D e SAP 2000 corresponde ao 2º modo de vibração obtido com o modelo 3D em SAP 2000.

5.3.2 Ensaios de vibração ambiental

Com vista a caracterizar experimentalmente o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água da barragem do Cabril e a estudar a possível interacção entre a torre e a própria barragem, foram realizados ensaios de vibração ambiental com medição de acelerações no topo da torre. Nos ensaios realizados foi utilizado um sistema de medição de vibrações constituído por:

- Uma unidade de aquisição de dados com 4 canais de medida, a qual se mostra na Figura 5.15 a) (Modelo Basalt, Kinematics [Site 4]);
- 1 transdutor de aceleração uniaxial do tipo force balance (Modelo Episensor ES-U2, Kinematics), tal como se mostra na Figura 5.15 b);

- Cabo para alimentação do acelerómetro e transmissão do sinal ao sistema de aquisição;
- 1 computador portátil para a configuração e controlo do sistema.



a)



b)

Figura 5.15: a) Sistema de aquisição de dados (Modelo Basalt, Kinematics). b) Acelerómetro uniaxial (Modelo Episensor ES-U2, Kinematics).

Com os recursos disponíveis, foram realizados dois ensaios de vibração ambiental na torre com medição de acelerações segundo a direcção:

- Montante – Jusante e;
- Margem esquerda – Margem direita.

Os registos das acelerações foram efectuados com os seguintes parâmetros de aquisição:

- Frequência de amostragem de 50 Hz;
- Tempo de aquisição de 10 minutos (600 segundos).

5.3.2.1 Ensaio com medição de acelerações na direcção montante – jusante

Neste primeiro ensaio foi colocado o acelerómetro uniaxial na extremidade esquerda da laje de topo da torre das tomadas de água, de forma a obter medições no sentido montante – jusante da barragem, como se mostra na Figura 5.16.

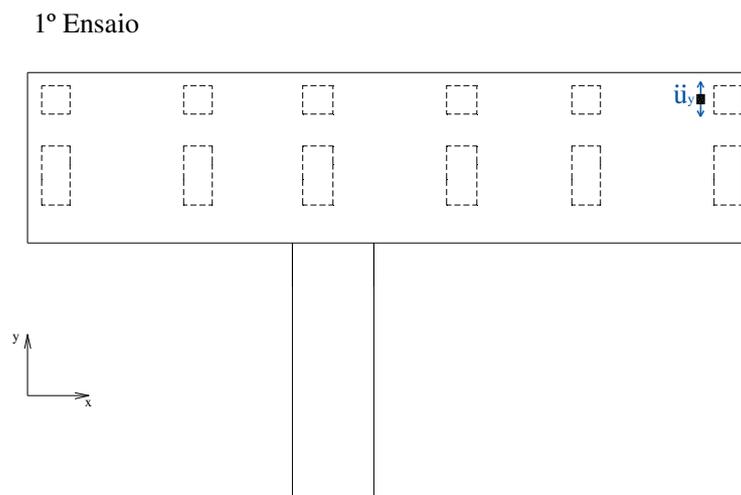


Figura 5.16: Esquema da colocação do acelerómetro uniaxial na direcção montante-jusante.

Em seguida apresenta-se o registo de acelerações obtido neste ensaio (duração de 600 s).

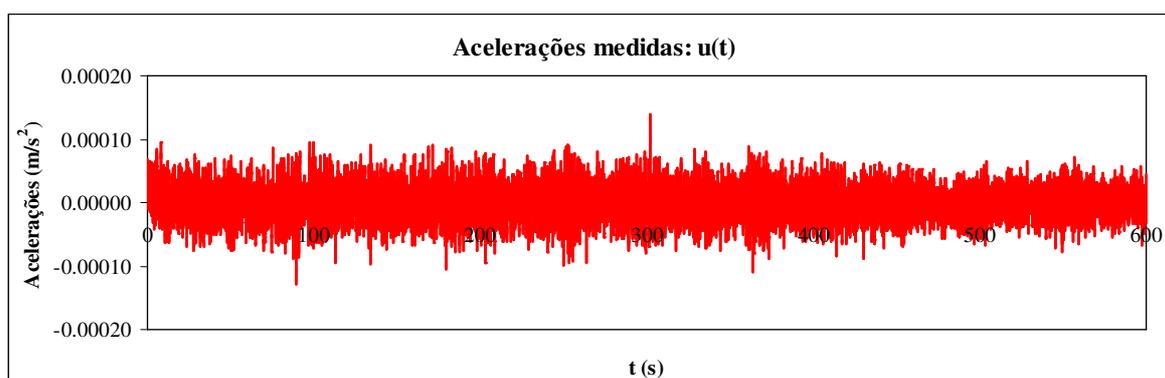


Figura 5.17: Registo de acelerações medidas na direcção montante-jusante.

A partir de uma subrotina em VisualBasic no Excel, foi possível decompor em ondas o acelerograma medido recorrendo à técnica das Séries de Fourier (tal como foi abordado no capítulo 3 desta dissertação), para calcular o espectro de amplitudes, como se mostra na Figura 5.18.

A análise deste espectro mostra que, de entre as várias ondas em que se decompõe o acelerograma medido, destacam-se claramente, pela sua maior amplitude, as ondas correspondentes às frequências naturais de 0,50 Hz, 0,89 Hz e 1,12 Hz.

O modo de vibração da estrutura segundo esta direcção, corresponde ao pico mais elevado deste espectro, que neste caso é a frequência de 0,89 Hz.

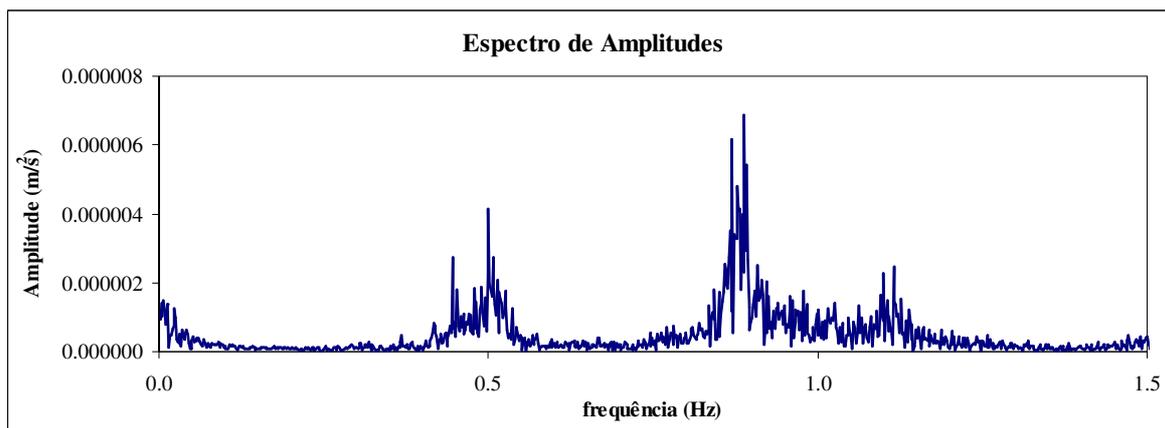


Figura 5.18: Espectro de amplitudes correspondente ao acelerograma medido na direcção montante-jusante.

Pela análise deste espectro, pode-se ainda retirar algumas conclusões sobre os outros modos de vibração da estrutura. De facto, o pico de maior amplitude corresponde, como seria de esperar, à frequência de 0,89 Hz (modo de translação na direcção das acelerações medidas, ou seja, na direcção montante-jusante). Contudo, são também notórios neste espectro, um pico na frequência de 0,50 Hz e na frequência de 1,12 Hz, o que significa que outros modos deverão ter componentes na direcção montante-jusante, o que de facto acontece com o 1º e 3º modos calculados numericamente. O 1º modo, sendo de translação segundo a direcção margem esquerda-direita, apresenta também uma significativa parcela de torção (o apoio na ligação passadiço-barragem quebra a simetria estrutural); já o 3º modo é claramente um modo de torção.

5.3.2.2 Ensaio com medição de acelerações na direcção margem esquerda – direita

Neste ensaio o acelerómetro foi colocado no mesmo ponto (laje de topo da torre) na direcção margem esquerda – margem direita tal como se mostra na Figura 5.19.

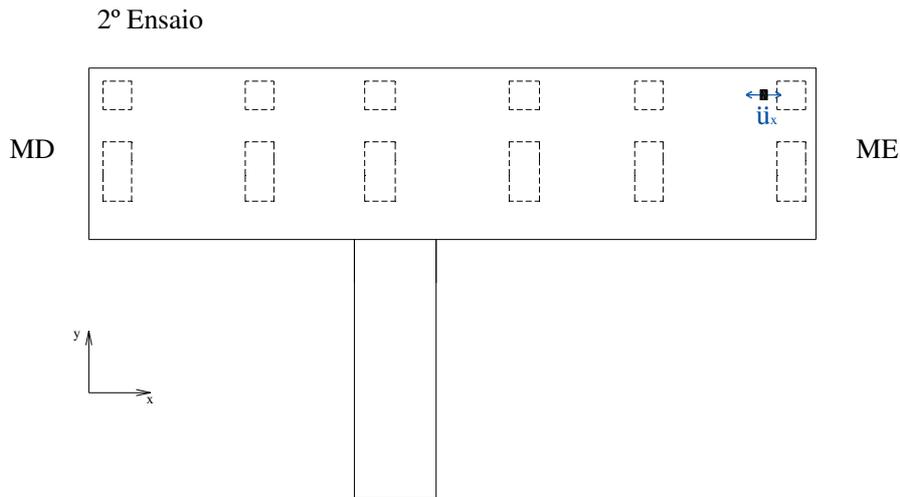


Figura 5.19: Esquema da colocação do acelerómetro uniaxial na direcção margem esquerda-direita.

Neste ensaio obteve-se o registo de acelerações que se apresenta na Figura 5.20.

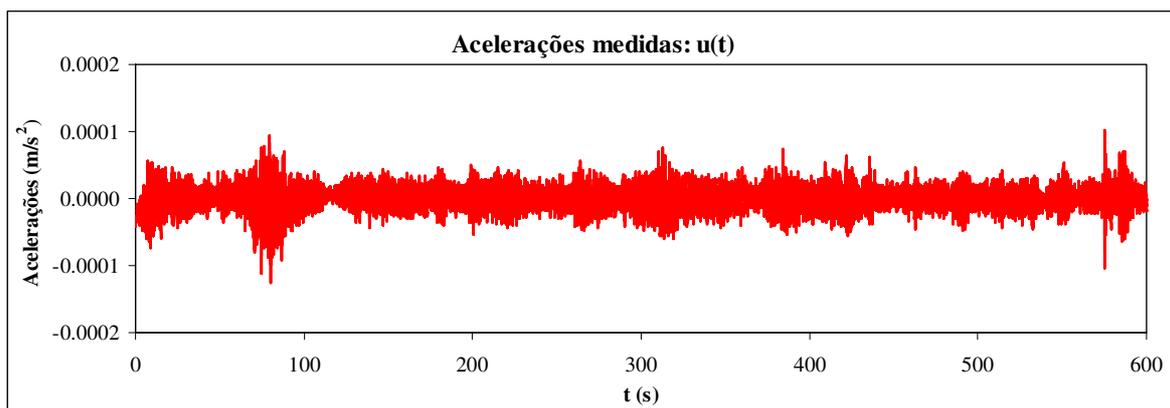


Figura 5.20: Registo de acelerações medidas na direcção margem esquerda-direita.

Utilizando a metodologia atrás descrita, obteve-se também o respectivo espectro de amplitudes, que se apresenta na Figura 5.21.

Neste espectro destaca-se claramente um pico para a frequência de 0,51 Hz. Este pico de maior amplitude corresponde à frequência do modo de vibração de translação segundo a direcção margem esquerda-direita (1º modo identificado com o modelo 3D em SAP 2000), o qual, como já se referiu, apresenta uma significativa componente de torção que se reflectiu no espectro das acelerações medidas na direcção montante-jusante.

É também de referir que nesta direcção a estrutura é mais flexível (dada a geometria dos pilares), pelo que seria de esperar, como se verifica, que a frequência deste modo de vibração fosse inferior à obtida para o modo na direcção montante-jusante.

Porém, evidencia-se também um pico de baixa amplitude na frequência de 0,89 Hz, o que significa que o 2º modo também não é um modo puramente de translação segundo a direcção montante-jusante, o que é confirmado numericamente.

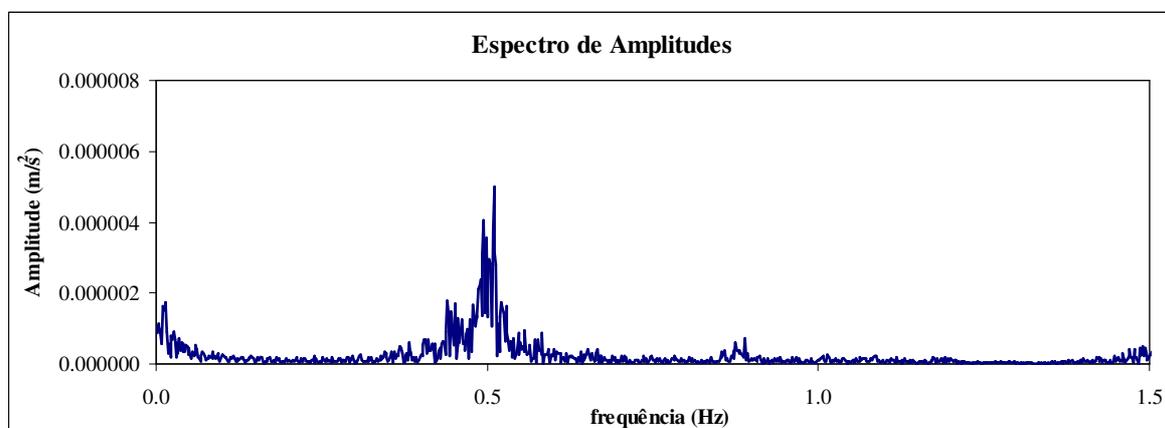


Figura 5.21: Espectro de amplitudes correspondente ao acelerograma medido na direcção margem esquerda-direita.

5.3.3 Comparação entre os resultados experimentais e numéricos

Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos para as frequências naturais com o modelo 3D em SAP 2000 e nos ensaios de vibração ambiental.

	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
Modelo 3D (SAP 2000)	0,51	0,88	1,07
Medição montante-jusante	0,50	0,89	1,12
Medição margem esq.-dir.	0,51	0,89	-

Tabela 5-2: Tabela resumo da comparação entre os resultados obtidos no modelo 3D em SAP 2000 e nos ensaios de vibração ambiental.

De acordo com os resultados dos ensaios de vibração ambiental na torre constata-se que, os três primeiros modos de vibração têm frequências naturais que correspondem aproximadamente aos valores obtidos com o modelo 3D desenvolvido em SAP 2000.

Neste ponto é de salientar que os valores médios das frequências naturais identificados com base nas medições efectuadas directamente na torre ($f_1 = 0,51$ Hz, $f_2 = 0,89$ Hz e $f_3 = 1,12$ Hz),

são idênticos aos valores das frequências dos primeiros picos registados nos espectros correspondentes às medições efectuadas no corpo da barragem. Portanto, isto significa que as vibrações da torre se reflectem nas vibrações da própria barragem, confirmando-se deste modo a anterior hipótese de interacção dinâmica entre a torre e a barragem.

Por fim, é de referir que a boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos permite concluir que o modelo numérico 3D da torre desenvolvido em SAP 2000, está devidamente calibrado e, por isso, será um modelo adequado para efectuar estudos de previsão do comportamento dinâmico da torre sob acções dinâmicas, nomeadamente acções sísmicas tal como se mostra no ponto seguinte.

5.4 Análise do comportamento sob acções sísmicas

Com vista a ilustrar as potencialidades do programa MEFDIN3D para o cálculo sísmico de estruturas 2D e 3D (no domínio do tempo e por espectro de resposta), apresentam-se neste ponto alguns resultados referentes à análise sísmica da torre das tomadas de água e da própria barragem do Cabril.

5.4.1 Comportamento sísmico da torre das tomadas de água. Análise no domínio do tempo e por espectro de resposta

O acelerograma sísmico considerado neste estudo, que se apresenta na Figura 5.22, foi estimado com base num modelo de rotura de falha [Carvalho, 2007] para um local situado na zona centro de Portugal. Como se pode observar, trata-se de um acelerograma não estacionário de 10s, definido com uma frequência de amostragem de 100 Hz, com uma aceleração de pico de $1,36 \text{ m/s}^2$ (aproximadamente 0,14g), e em termos espectrais a zona de maiores amplitudes de resposta situa-se entre os 4 e 8 Hz.

O método do espectro de resposta permite estimar a resposta sísmica máxima de uma estrutura com comportamento em regime elástico linear. Este método de análise é frequentemente utilizado em alternativa a uma integração das equações no domínio do tempo quando se pretende projectar ou avaliar o comportamento estrutural para as acções sísmicas.

A partir do método do espectro de resposta efectua-se o cálculo sísmico da torre das tomadas de água para os três modelos numéricos calibrados, estimando a resposta máxima da estrutura quando solicitada por uma acção sísmica aplicada na base. Procede-se também a uma análise

comparativa dos deslocamentos máximos obtidos através deste método para cada um dos modelos com o resultado que se obtém a partir das formulações no domínio do tempo. Os resultados são analisados em termos do deslocamento máximo de um ponto localizado no topo da torre das tomadas de água na direcção montante-jusante.

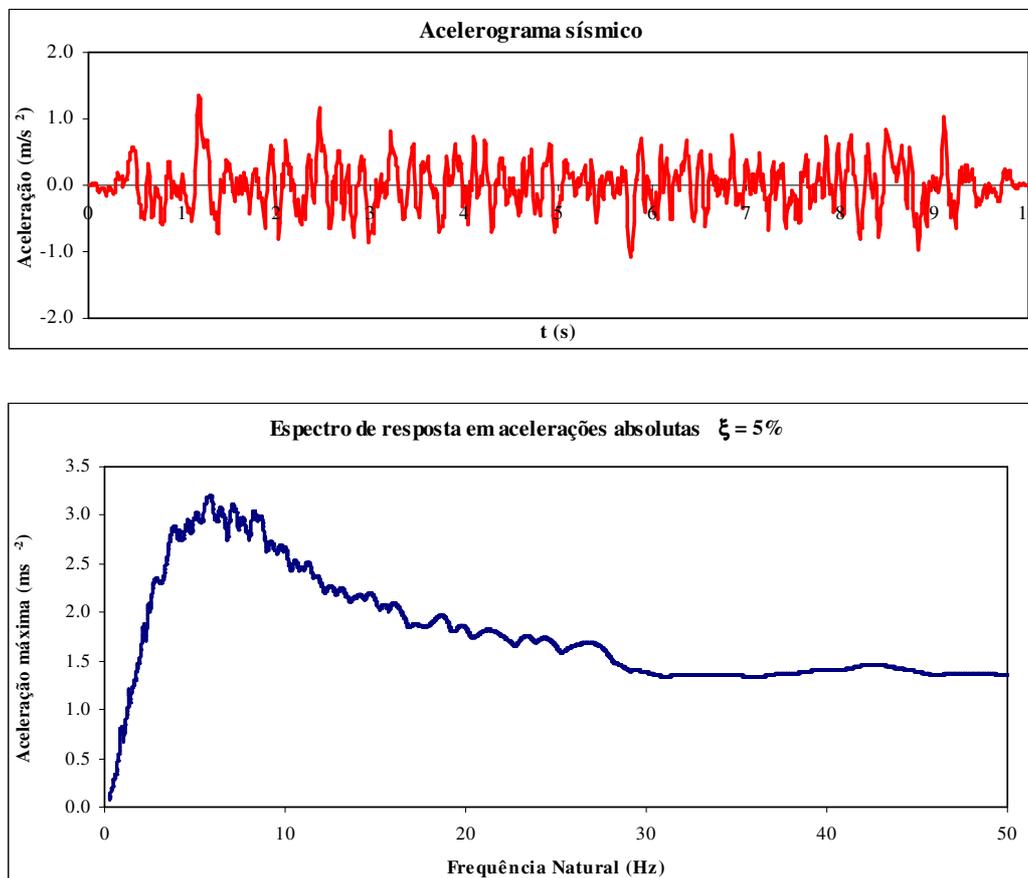


Figura 5.22: Acelerograma sísmico considerado e correspondente espectro de resposta em acelerações absolutas ($\xi = 5\%$).

5.4.1.1 Cálculo sísmico com o modelo 2D em MEFDIN3D (MATLAB)

O programa MEFDIN3D foi utilizado para efectuar a análise sísmica da torre com base no modelo bidimensional de elementos finitos planos de 8 nós atrás apresentado. Os deslocamentos modais são calculados para cada instante através da fórmula recursiva, apresentada no capítulo 3. Em seguida, os deslocamentos estruturais em cada instante são determinados com base no princípio de sobreposição modal, utilizando apenas os primeiros quatro modos de vibração.

Neste programa também foi desenvolvido um módulo que permite visualizar uma animação com a evolução no tempo da deformada da estrutura e do campo de tensões principais nos pontos de Gauss, devido à acção sísmica imposta (Figura 5.23).

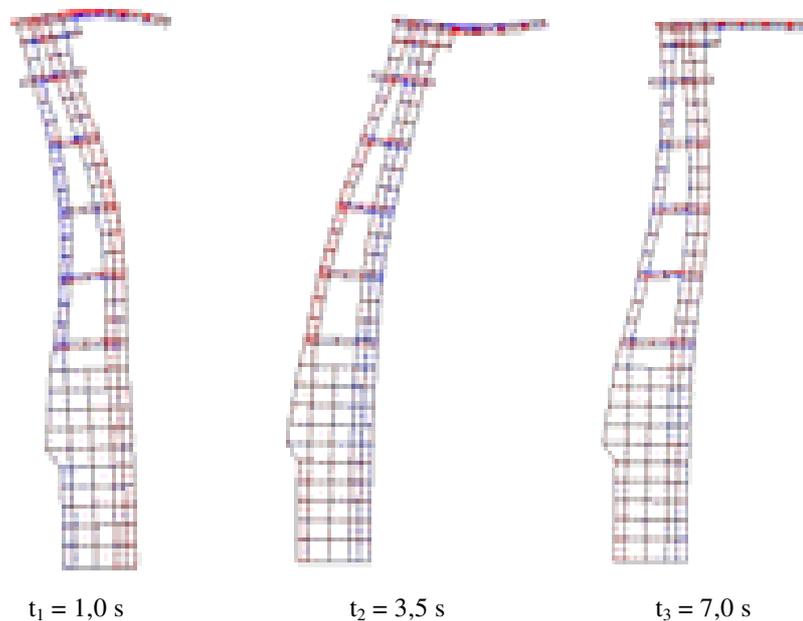


Figura 5.23: Deformada da estrutura e campo de tensões principais nos pontos de Gauss em três instantes de tempo durante a actuação do sismo considerado.

Na Figura 5.24 apresentam-se os espectros de resposta em acelerações absolutas, velocidades e deslocamentos relativos para o acelerograma sísmico em estudo, os quais foram calculados com base na metodologia apresentada no capítulo 3, admitindo um coeficiente de amortecimento relativo de 5% ($\xi = 5\%$). É de notar que no programa MEFDIN3D introduzem-se os dados relativos ao espectro de resposta em acelerações absolutas e, os espectros de resposta em velocidades e deslocamentos relativos são gerados a partir deste (dividindo por ω e por ω^2 , respectivamente), designando-se assim por pseudo-espectros, como é referido na Figura 5.24.

Para efectuar uma análise sísmica por espectro de resposta, primeiro é necessário determinar as coordenadas modais máximas relativas aos modos de vibração que contribuem significativamente para a resposta da estrutura.

Na Figura 5.25 apresenta-se uma comparação entre os valores das coordenadas modais (calculadas com base numa análise no domínio do tempo) referentes aos quatro primeiros modos de vibração, e os valores máximos dessas mesmas coordenadas modais calculadas pelo método do espectro de resposta. Como se pode verificar na Figura 5.25, as coordenadas

modais são representadas nos planos $u_1^* - u_2^*$ e $u_3^* - u_4^*$ através de pontos nesses planos. Os valores calculados no tempo correspondentes aos pontos (a verde) e os valores máximos calculados por espectro de resposta são utilizados para traçar as elipses (representadas a vermelho), as quais correspondem a uma envolvente que equivale à utilização da regra de combinação RQSQ (raiz quadrada da soma dos quadrados), como é referido em [Câmara, 1989], de acordo com uma contribuição original do Eng.º Ricardo Teixeira Duarte. Recorde-se que os valores máximos das coordenadas modais são calculados segundo o método do espectro de resposta, a partir da multiplicação dos deslocamentos máximos obtidos no espectro de deslocamentos, para cada modo de vibração, pelos respectivos factores de participação modal, como se mostra atrás na Figura 3.32.

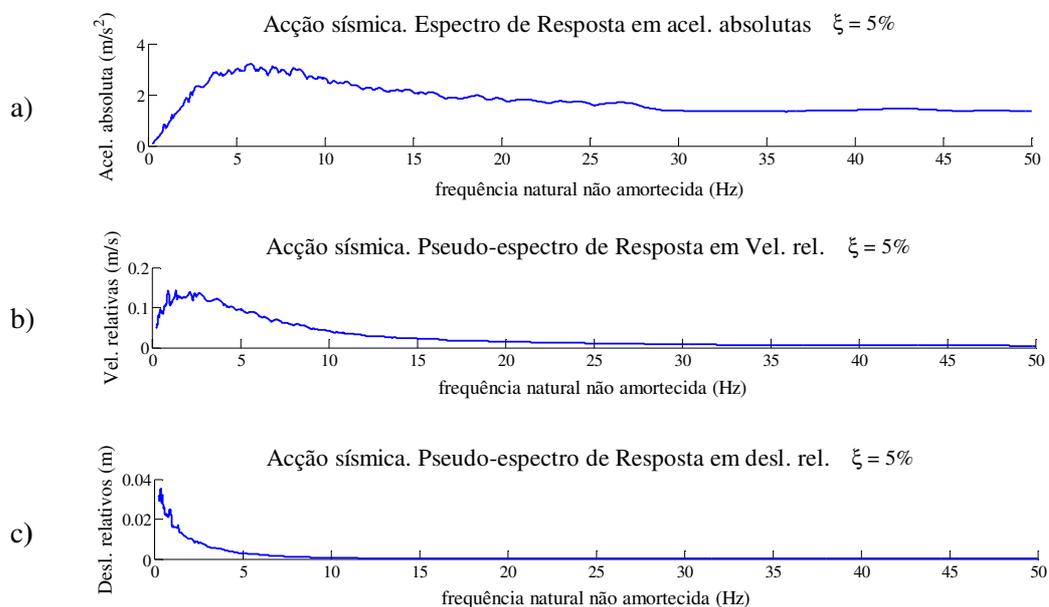


Figura 5.24: a) Espectro de resposta em acelerações absolutas; b) pseudo-espectro de resposta em velocidades relativas; c) pseudo-espectro de resposta em deslocamentos relativos para a acção sísmica apresentada na Figura 5.22, considerando $\xi = 5\%$.

Na Figura 5.25 pode-se verificar que as referidas elipses, cujos semi-eixos correspondem aos valores máximos das coordenadas modais calculadas pelo método do espectro de resposta, envolvem quase perfeitamente os pontos representados das coordenadas modais, calculadas com base na análise no domínio do tempo (para o acelerograma sísmico da Figura 5.22). É ainda de referir que, cada ponto (a verde) na Figura 5.25 corresponde a um instante de tempo, ao qual está associada uma dada deformada estrutural, como se mostra na figura para três instantes distintos.

Nesta figura, pode-se ainda constatar, pela análise das duas elipses, que o 3º e o 4º modos não têm uma contribuição muito significativa para a resposta total da estrutura (a segunda elipse – 3º e 4º modos – é claramente menor que a primeira), contrariamente ao 1º e 2º modos que revelam ser significativamente mais importantes, em particular o 1º modo (o semi-eixo longitudinal da primeira elipse é significativamente maior que o seu semi-eixo vertical). Por fim é de notar que, apesar das elipses envolverem a maioria dos pontos representativos das coordenadas modais para cada instante de tempo, alguns pontos estão ligeiramente fora das elipses (mas sempre no interior do rectângulo que contém a elipse), o que significa que a regra RQSQ neste caso, não envolve completamente todas as situações.

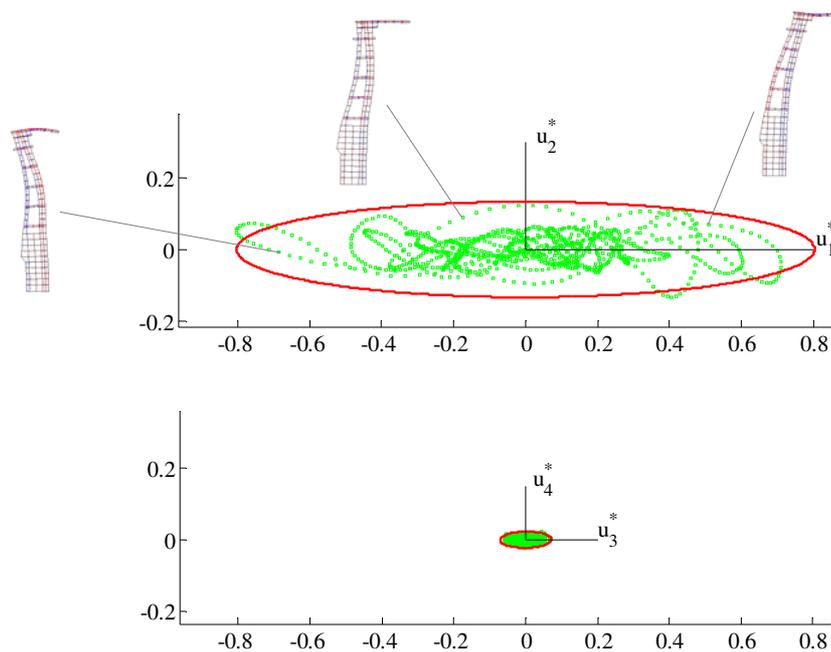


Figura 5.25: Representação das coordenadas modais para os quatro primeiros modos de vibração (nos planos $u_1^* - u_2^*$ e $u_3^* - u_4^*$). Representação das elipses envolventes determinadas pelo método do espectro de resposta e representação das coordenadas modais ao longo do tempo.

Métodos para combinação dos modos

A análise sísmica com base no método do espectro de resposta permite calcular os valores máximos da resposta da estrutura correspondentes aos modos mais significativos.

Os modos mais significativos para a torre das tomadas de água são sobretudo o 1º e o 2º modos e eventualmente o 3º e o 4º modos, apesar destes influenciarem de forma bem menos significativa a resposta dinâmica global da estrutura.

Desta forma, é suficiente considerar apenas os quatro primeiros modos de vibração para determinar a resposta máxima da estrutura sob a acção sísmica em análise.

Neste tipo de análise por espectro de resposta, é importante ter em conta que as diversas respostas modais máximas não ocorrem simultaneamente (a resposta máxima global não pode portanto, ser obtida através da soma directa dos máximos modais), sendo assim necessário a utilização de regras para efectuar a combinação dos modos considerados, sendo as mais utilizadas a já referida regra da Raiz Quadrada da Soma dos Quadrados (RQSQ) e a regra da Combinação Quadrática Completa (CQC).

- Regra da Raiz Quadrada da Soma dos Quadrados (RQSQ)

Esta regra estabelece que o valor máximo da resposta, em termos de uma determinada grandeza, pode ser estimado fornecendo valores conservativos, através da raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores máximos dessa grandeza calculados em cada modo [Chopra, 1995], ou seja:

$$u_{\text{máx}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\text{NMOD}} (u_{n_{\text{máx}}})^2} \quad (5.2)$$

sendo, NMOD o número de modos de vibração considerados e $u_{n_{\text{máx}}}$ os deslocamentos estruturais máximos correspondentes ao modo de vibração n.

Assim, para calcular o deslocamento máximo no topo da torre segundo a direcção montante-jusante (grau de liberdade 1) e considerando apenas os quatro primeiros modos de vibração, pode-se escrever:

$$u_{1_{\text{máx}}} = \sqrt{(\phi_{11} \cdot u_{1_{\text{máx}}}^*)^2 + (\phi_{12} \cdot u_{2_{\text{máx}}}^*)^2 + (\phi_{13} \cdot u_{3_{\text{máx}}}^*)^2 + (\phi_{14} \cdot u_{4_{\text{máx}}}^*)^2} \quad (5.3)$$

Esta regra de combinação modal permite obter resultados aceitáveis desde que o coeficiente de amortecimento relativo seja inferior a 5% e desde que as frequências naturais dos modos de vibração segundo a mesma direcção sejam relativamente afastadas.

- Regra da Combinação Quadrática Completa (CQC)

Esta regra é a mais adequada quando as frequências naturais dos modos numa mesma direcção estão relativamente próximas. Esta combinação é traduzida pela seguinte equação [Chopra, 1995]:

$$u_{\text{máx}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\text{NMOD}} \sum_{n=1}^{\text{NMOD}} \rho_{in} u_{i_{\text{máx}}} u_{n_{\text{máx}}}} \quad (5.4)$$

onde, ρ_{in} representa o coeficiente de correlação entre os modos i e n e é dado pela expressão que se apresenta em seguida, considerando um coeficiente de amortecimento relativo constante em todos os modos ($\xi_i = \xi_n = \xi$):

$$\rho_{in} = \frac{8\xi^2 (1 + \beta_{in}) \beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\xi^2 \beta_{in} (1 + \beta_{in})^2}, \quad \beta_{in} = \frac{\omega_i}{\omega_n} \quad \text{e} \quad 0 \leq \rho_{in} \leq 1 \quad (5.5)$$

sendo, $\rho_{in} = \rho_{ni}$ e $\rho_{in} = 1$ para $i = n$.

A regra CQC garante melhores resultados quando os modos segundo a mesma direcção têm frequências naturais muito próximas, pois considera a combinação do efeito da correlação entre as respostas dos vários modos, enquanto que a regra RQSQ assume que estas respostas são independentes. Contudo, não é por esta razão que os valores das respostas resultantes sejam superiores aos que se obteriam com outras regras, nomeadamente com a RQSQ.

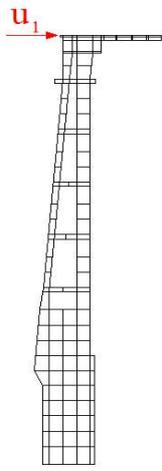
Na Figura 5.26 mostra-se a comparação dos resultados obtidos para o deslocamento máximo no topo da torre das tomadas de água (grau de liberdade 1) calculado no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta a partir das duas regras referidas.

É de referir que, alguns autores propõem que a resposta máxima pode ser obtida por uma média de valores fornecidos pelas duas regras aqui estudadas.

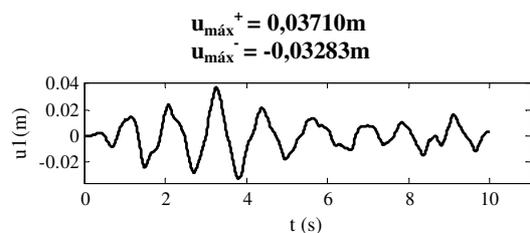
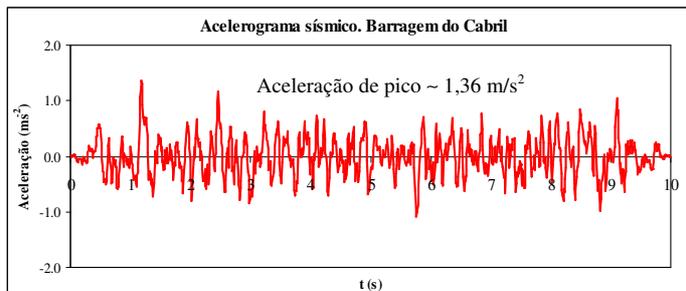
No presente caso da torre das tomadas de água, é de notar que as frequências calculadas para os quatro primeiros modos de vibração não são muito próximas, o que conduz a que o coeficiente de correlação ρ_{in} da regra CQC tende para zero quando $i \neq n$, o que significa que neste caso, a regra CQC é equivalente à regra da RQSQ, tal como se constata pela análise dos valores obtidos para os deslocamentos máximos calculados por estas duas regras de combinação de máximos modais (Figura 5.26).

Importa também salientar que os resultados apresentados na Figura 5.26 foram obtidos a partir do espectro de resposta que corresponde exactamente ao acelerograma sísmico em questão. Todavia, os espectros regulamentares usualmente adoptados em projecto, são representativos de um vasto conjunto de acelerogramas, constituindo portanto, uma envolvente espectral que tem em conta o período de retorno da acção sísmica, as incertezas na definição das acções, coeficientes de segurança, efeitos não lineares no comportamento das estruturas, etc. Deste modo, o valor máximo absoluto obtido no domínio do tempo utilizando

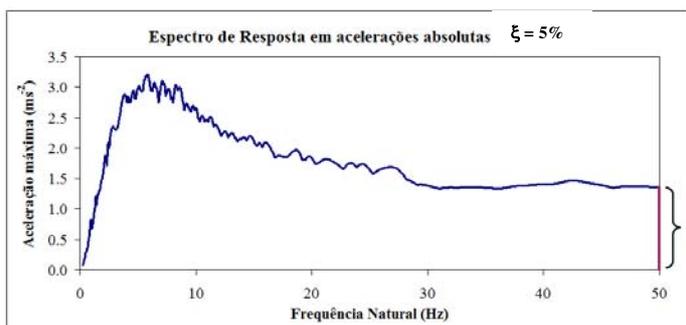
um único acelerograma sísmico, neste caso $+0,03710\text{m}$, pode não traduzir adequadamente a resposta máxima da estrutura.



Cálculo no Domínio do tempo



Cálculo por Espectro de Resposta



Métodos de Combinação dos Modos

• RQSQ • CQC

$u_{1,\text{máx}} = 0,03484\text{m}$ $u_{1,\text{máx}} = 0,03480\text{m}$

Figura 5.26: Análise comparativa do deslocamento máximo no topo da torre (grau de liberdade 1) obtido através de um cálculo no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (RQSQ e CQC) para o acelerograma apresentado.

Como se mostra na figura, o valor de pico do deslocamento u_1 (topo da torre, segundo a direcção montante-jusante) obtido no domínio do tempo, $u_{1,\text{máx}} = +0,03710\text{m}$, é bastante

próximo dos valores máximos obtidos pelo método do espectro de resposta ($u_{1,máx} = +0,03484\text{m}$ com a regra RQSQ e $u_{1,máx} = +0,03480\text{m}$ com a regra CQC).

5.4.1.2 Cálculo sísmico com o modelo 2D em SAP 2000

Para determinar o deslocamento máximo no topo da torre segundo o grau de liberdade horizontal (u_1), efectuando um cálculo no domínio do tempo com o SAP 2000, é necessário começar por fornecer ao programa um ficheiro que contém o acelerograma em análise com os valores das acelerações (em m/s^2) ao longo do tempo.

Após a definição da história de acelerações (considerando a hipótese de comportamento linear em todos os elementos durante a análise), é necessário definir os factores multiplicativos a adoptar para as direcções horizontal e vertical (modelo plano), tendo-se optado neste caso, por factores multiplicativos unitários (amplitudes das acelerações iguais nas direcções horizontal e vertical).

Na Tabela 5-3 apresenta-se o resultado obtido com o SAP 2000 correspondente ao valor máximo absoluto da história no tempo do deslocamento $u_1 = u_1(t)$.

Relativamente ao cálculo efectuado com o SAP 2000 utilizando o método do espectro de resposta, é necessário fornecer ao programa um ficheiro com o espectro de resposta em acelerações absolutas (em m/s^2) em função do período T (em seg.), para um dado coeficiente de amortecimento relativo ($\xi = 5\%$, neste caso).

Seguidamente há que escolher a regra de combinação de máximos RQSQ, CQC ou ambas. É de referir que no SAP 2000 é necessário preencher o campo relativo à combinação direccional dos espectros de resposta, sendo aconselhável optar por uma combinação do tipo RQSQ.

Consideraram-se factores multiplicativos unitários para os espectros de resposta em ambas as direcções (tal como na análise efectuada no domínio do tempo).

Na Tabela 5-3 mostram-se os resultados obtidos para o deslocamento $u_{1,máx}$ utilizando o modelo 2D em SAP 2000 e também os resultados obtidos com o modelo 2D utilizando o programa MEFDIN3D (resultados das análises no domínio do tempo e por espectro de resposta, com as regras RQSQ e CQC).

Como se observa nesta tabela, os valores de $u_{1,máx}$ obtidos com base nas análises no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (para as duas regras de combinações de máximos) nos modelos bidimensionais em MEFDIN3D e em SAP 2000, revelam uma boa

coerência, o que permite confirmar a fiabilidade do programa MEFDIN3D para a realização de análise sísmica de estruturas no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta.

Modelo bidimensional	Domínio do tempo	Método do espectro de resposta	
		RQSQ	CQC
MEFDIN3D	0,03710m	0,03484m	0,03480m
SAP 2000	0,03760m	0,03640m	0,03640m

Tabela 5-3: Comparação entre os resultados obtidos no domínio do tempo e segundo o método do espectro de resposta (RQSQ e CQC) nos modelos bidimensionais em MEFDIN3D (MATLAB) e em SAP 2000.

5.4.1.3 Cálculo sísmico com o modelo 3D em SAP 2000

O processo para definir a história de acelerações no modelo tridimensional em SAP 2000 é em tudo idêntico ao modelo bidimensional analisado anteriormente, sendo apenas necessário considerar o mesmo acelerograma com o factor multiplicativo unitário, segundo a direcção z. Da mesma forma referida atrás no modelo bidimensional, introduziu-se o espectro de acelerações absolutas (com um coeficiente de amortecimento relativo de 5%) e efectuou-se a análise sísmica para as regras RQSQ e CQC. Considerou-se tal como anteriormente, uma combinação direccional do tipo RQSQ e admitiram-se factores multiplicativos unitários para os espectros nas três direcções.

Na Figura 5.27 encontram-se os resultados obtidos em três pontos no topo da torre no modelo tridimensional em SAP 2000 para a análise no domínio do tempo e segundo o método do espectro de resposta para as duas combinações modais referidas, considerando 20 modos de vibração.

Como se observa nesta figura, verifica-se que em todos os pontos e segundo as direcções analisadas, os deslocamentos máximos (em valor absoluto) obtidos para o domínio do tempo são coerentes com os que se obtiveram pelo método do espectro de resposta, tanto com a regra CQC como pela RQSQ.

Constata-se ainda que, os deslocamentos máximos segundo a direcção y e em ambas as análises, decrescem do ponto 1 para o ponto 3, precisamente devido ao apoio excêntrico (passadiço) que provoca efeitos de torção.

Na direcção x os deslocamentos resultantes nos três pontos assinalados são praticamente idênticos, como seria de esperar, sendo por isso que se apresentam os deslocamentos nesta direcção apenas no ponto 1.

É importante salientar que estes resultados foram obtidos efectuando a análise dinâmica para 20 modos de vibração. Caso se escolhesse um maior número de modos a analisar, verifica-se que os valores dos deslocamentos máximos não sofrem alterações significativas.

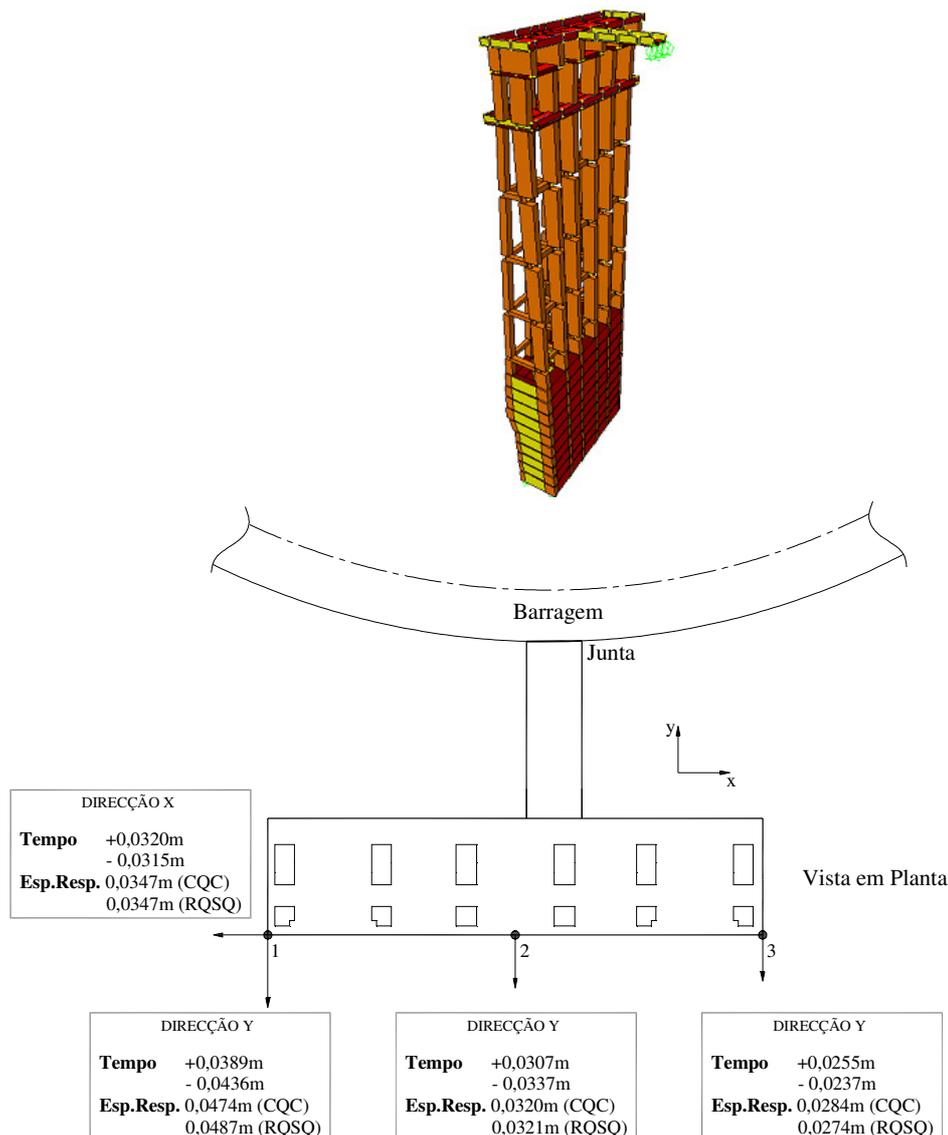


Figura 5.27: Deslocamentos sísmicos máximos em três pontos no topo da torre, utilizando o modelo 3D em SAP 2000. Análise no domínio do tempo e pelo método do espectro de resposta (regras CQC e RQSQ, considerando apenas 20 modos de vibração), utilizando o espectro que corresponde exactamente ao acelerograma adoptado.

Utilização de um espectro de resposta envolvente

Como já foi dito anteriormente, um espectro regulamentar é um espectro envolvente para uma dada zona onde se localiza a obra, que engloba um conjunto de acelerogramas sísmicos possíveis de ocorrer nessa mesma zona. Na prática, quando se pretende efectuar o cálculo sísmico de uma estrutura pelo método do espectro de resposta, considera-se um espectro envolvente (suavizado) à zona onde se encontra a obra. Nesta secção apresenta-se uma análise comparativa do comportamento sísmico da torre das tomadas de água para o modelo tridimensional em SAP 2000 (considerando 20 modos de vibração), entre um espectro de resposta envolvente (suavizado) e o espectro de resposta que corresponde exactamente ao acelerograma em estudo (Figura 5.28).

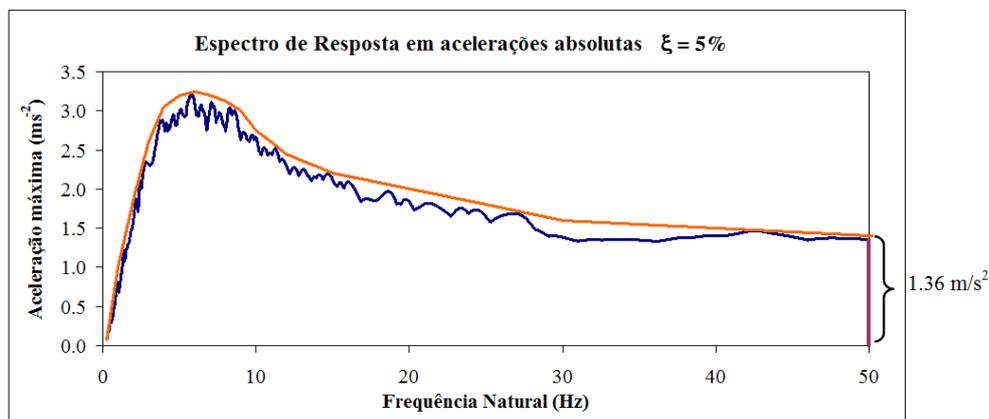


Figura 5.28: Comparação entre um espectro de resposta envolvente (suavizado) e o espectro de resposta (não suavizado) que corresponde exactamente ao acelerograma sísmico adoptado.

Utilizando o espectro de resposta envolvente da Figura 5.28, obtêm-se os resultados que se apresentam na Figura 5.29.

Tal como se constatou anteriormente, devido ao apoio excêntrico na ligação passadiço-barragem, os deslocamentos máximos no ponto 3 são inferiores aos deslocamentos na extremidade oposta da torre, tanto no domínio do tempo como pelo método do espectro de resposta.

A componente de deslocamento segundo a direcção x apresenta-se apenas para o ponto 1 dado que apresenta um valor semelhante nos outros pontos analisados.

Comparativamente com os deslocamentos máximos obtidos com o espectro de resposta não suavizado (que corresponde exactamente ao acelerograma sísmico em estudo), os

deslocamentos máximos agora obtidos com o espectro de resposta envolvente (suavizado) são bastante superiores, e conseqüentemente superiores aos valores da análise no tempo.

Visto tratar-se de um espectro envolvente (suavizado), é natural que os resultados obtidos sejam mais conservativos, o que mostra a importância da utilização de espectros envolventes (como os espectros regulamentares) nos estudos de verificação da segurança de estruturas sob acções sísmicas.

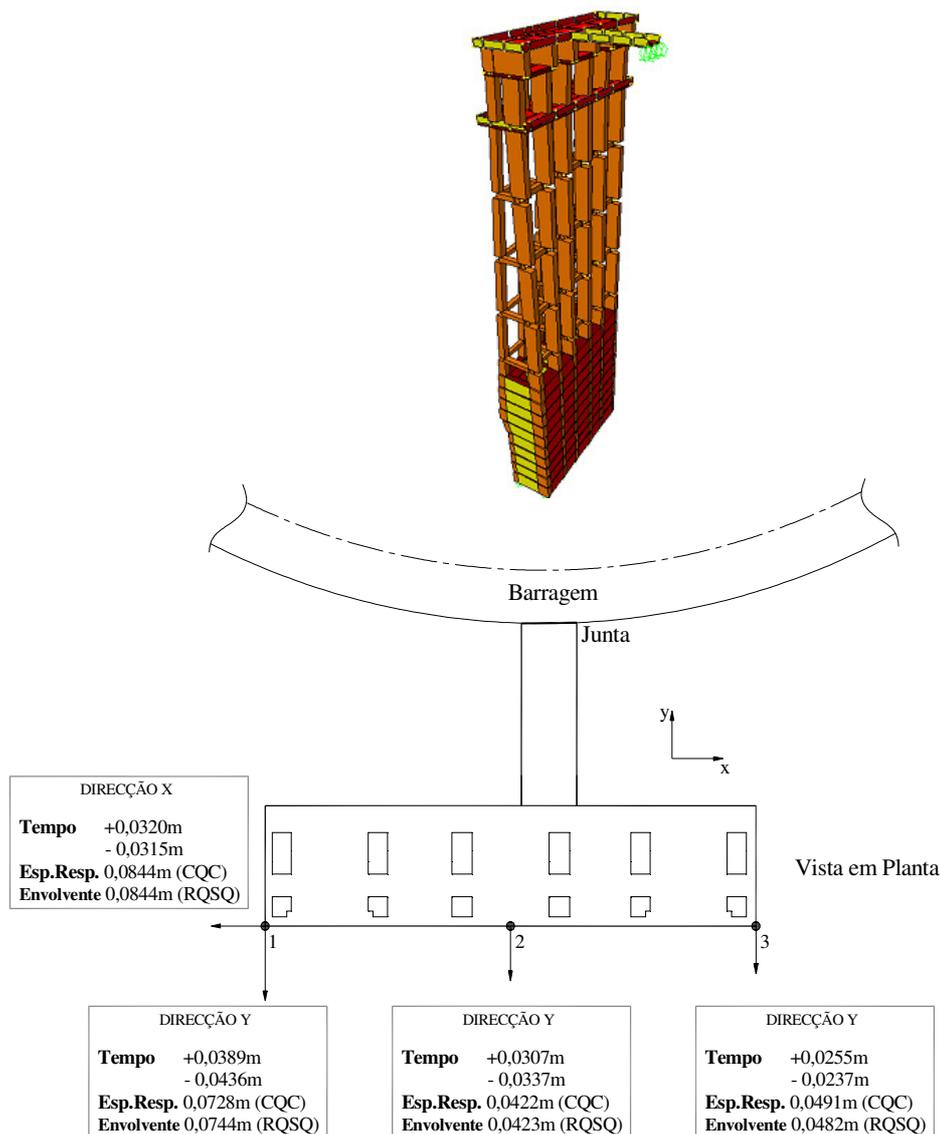


Figura 5.29: Deslocamentos sísmicos máximos em três pontos no topo da torre, utilizando o modelo 3D em SAP 2000. Comparação da análise no domínio do tempo e por espectro de resposta (regras CQC e RQSQ, considerando apenas 20 modos de vibração), utilizando um espectro de resposta envolvente.

5.4.2 Comportamento sísmico da barragem

Por fim, com o objectivo de mostrar as potencialidades do programa MEFDIN3D desenvolvido no âmbito desta dissertação, apresentam-se neste ponto alguns resultados referentes à análise dinâmica da barragem do Cabril, utilizando um modelo de elementos finitos tridimensionais com 20 pontos nodais (elementos isoparamétricos do 2º grau [Oliveira, 1991]), considerando uma discretização em 32 elementos finitos, a que corresponde um total de 277 pontos nodais (831 G.L.).

Como já foi referido no capítulo 4, o programa de elementos finitos MEFDIN3D em MATLAB permite também visualizar animações 3D que mostram, em cada instante, a deformada da estrutura e o campo de tensões principais (nos pontos de Gauss) durante o intervalo de tempo correspondente à duração do acelerograma sísmico adoptado.

Em seguida mostra-se a deformada da barragem em alguns instantes de tempo e o campo de tensões principais (nos 27 pontos de Gauss por elemento), quando esta é sujeita ao acelerograma sísmico em estudo.

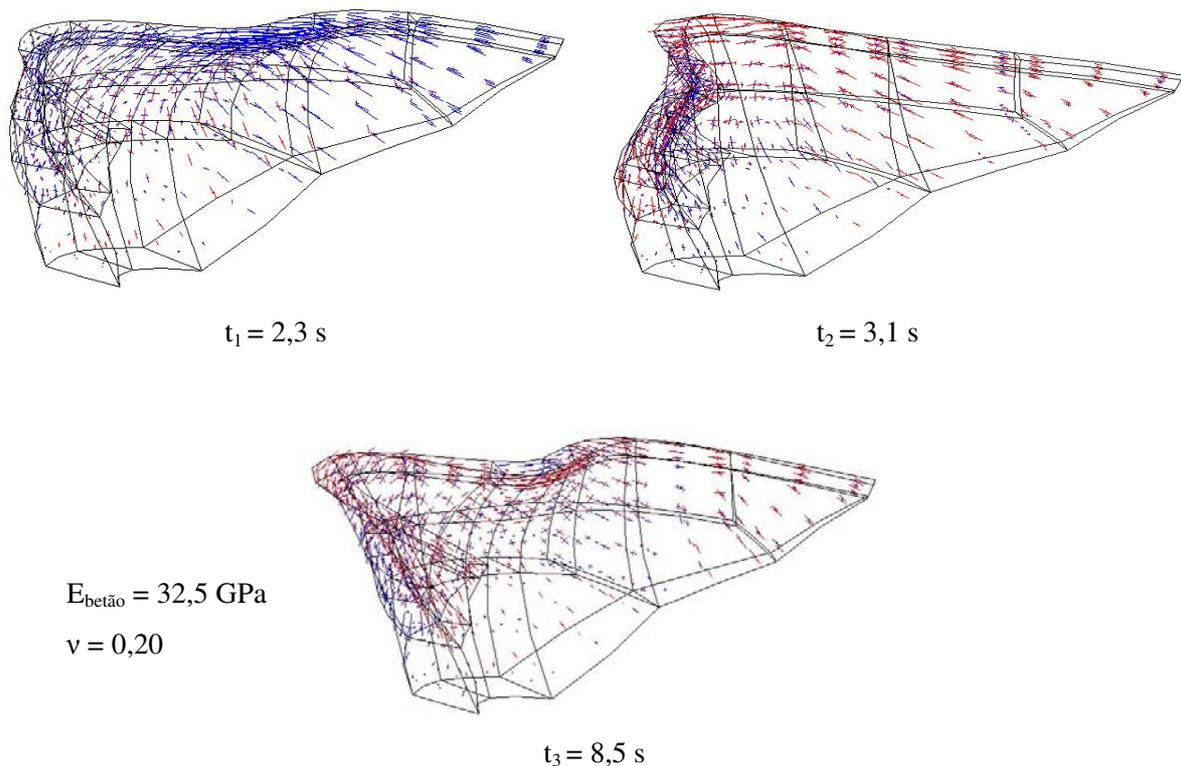


Figura 5.30: Barragem do Cabril. Deformada e campo de tensões principais em três instantes de tempo quando sujeita ao acelerograma sísmico em estudo.

Os anteriores resultados do cálculo sísmico da barragem do Cabril, foram obtidos considerando a hipótese de estrutura contínua, com material elástico e isotrópico com $E = 32,5 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,20$ e fundação rígida (encastramento perfeito na superfície de inserção betão-rocha).

5.5 Considerações finais

Neste capítulo foi analisado o comportamento dinâmico da torre das tomadas de água da barragem do Cabril. O interesse deste estudo justifica-se pelo facto de que, para além da acção sísmica, esta estrutura é solicitada por vibrações importantes devidas ao funcionamento dos grupos de produção. Por outro lado, a torre é uma estrutura bastante esbelta, em betão armado (que se encontra imersa), cuja resposta dinâmica pode reflectir-se na própria barragem.

Nesta perspectiva, analisou-se o comportamento dinâmico da torre (em termos de frequências naturais e configurações modais), com base em resultados numéricos de modelos de elementos finitos e com base em resultados experimentais obtidos a partir de ensaios de vibração ambiental efectuados no topo da torre (nas direcções montante-jusante e margem esquerda-direita) e no corpo da barragem, e a partir de resultados obtidos no sistema de observação em contínuo recentemente instalado na barragem. Pode-se concluir que a utilização conjunta de resultados observados e de resultados numéricos, permite calibrar as hipóteses admitidas nos modelos numéricos.

Foram desenvolvidos dois modelos 2D (secção de montante-jusante), utilizando o programa MEFDIN3D de elementos finitos de placa de 8 nós, e utilizou-se o programa SAP 2000 para confirmar os resultados obtidos com o MEFDIN3D. Apurou-se, mais uma vez, a fiabilidade do programa MEFDIN3D relativamente ao cálculo dinâmico, uma vez que os resultados obtidos com estes modelos revelaram uma boa concordância.

Foi necessário desenvolver também um modelo tridimensional de elementos finitos de barra e de casca delgada com o programa SAP 2000, para se obter os modos de vibração em ambas as direcções.

É de salientar que, com a realização dos ensaios de ultra-sons foi possível a obtenção do módulo de elasticidade do betão da torre, que, como se sabe, é um dos parâmetros fundamentais para calibrar os modelos numéricos.

Confirmou-se a hipótese da existência de interacção dinâmica entre a torre e a barragem, pois os picos que surgem nos espectros obtidos com a medição de acelerações na barragem e que

não são identificados como frequências da barragem, correspondem efectivamente às primeiras frequências naturais da torre.

Após a calibração dos modelos numéricos, estes foram utilizados para calcular o deslocamento máximo no topo da torre sob a acção sísmica, utilizando a técnica de análise por acelerograma aplicado na base (domínio do tempo) e por espectro de resposta.

Os resultados obtidos pelo método do espectro de resposta aproximam-se dos resultados obtidos no domínio do tempo, quando se utiliza o espectro de resposta (não suavizado) que corresponde exactamente ao acelerograma considerado. O valor do deslocamento máximo obtido com base no espectro envolvente (suavizado), foi superior como se esperava.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Síntese do trabalho

O controlo de segurança de barragens de betão (segurança estrutural, ambiental, hidráulica e operacional) e das estruturas auxiliares, assume actualmente uma enorme importância face às crescentes exigências de segurança e economia. Neste sentido, é fundamental instalar sistemas de observação adequados por forma a que se possa avaliar periodicamente as condições de segurança perante eventuais processos de deterioração e desenvolver modelos que permitam a interpretação e a previsão do comportamento das infra-estruturas em serviço. A observação e análise do comportamento dinâmico de barragens e estruturas auxiliares, com base na utilização integrada de resultados experimentais e de resultados numéricos, é uma metodologia de grande interesse no âmbito do controlo de segurança.

Com o objectivo de analisar o comportamento dinâmico de estruturas, apresentaram-se neste trabalho, os fundamentos da dinâmica na perspectiva das análises no domínio do tempo e no domínio da frequência. Salientou-se também a importância da utilização de metodologias de identificação modal no domínio da frequência para obtenção dos principais parâmetros modais (frequências naturais e configurações modais) que caracterizam uma estrutura.

Descreveram-se as formulações para efectuar a análise do comportamento de uma estrutura sob acções sísmicas através de acelerogramas aplicados na base (domínio do tempo) e pelo método do espectro de resposta.

Apresentaram-se os conceitos fundamentais do método numérico mais utilizado hoje em dia para efectuar a análise estática e dinâmica de estruturas - o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), e posteriormente foi desenvolvido o programa MEFDIN3D, em MATLAB, de elementos finitos planos de 4 e de 8 nós (equilíbrio de placa) e elementos finitos isoparamétricos de 20 nós (equilíbrio tridimensional).

O MEFDIN3D permite efectuar a análise estática de estruturas, sob a acção de forças concentradas e de forças mássicas, e a análise dinâmica sob a acção de acelerogramas sísmicos impostos na base, definidos no domínio do tempo ou através de espectros de

resposta, e também sob a acção de histórias de forças aplicadas no corpo da estrutura em qualquer grau de liberdade.

O programa permite visualizar animações em que se mostra a evolução no tempo da deformada e do campo de tensões (nos pontos de Gauss), durante a actuação da acção considerada.

Relativamente à observação e análise do comportamento dinâmico da torre das tomadas de água da barragem do Cabril, salientou-se a importância da utilização conjunta dos resultados da observação (obtidos através do tratamento das séries temporais de acelerações medidas, com recurso ao método básico no domínio da frequência) e dos resultados de modelos numéricos de elementos finitos. Os resultados obtidos nos ensaios de vibração ambiental permitiram calibrar os modelos numéricos, com vista a garantir a sua fiabilidade para a realização de estudos de verificação da segurança sob acções sísmicas.

A análise espectral das vibrações observadas na barragem (resultados de ensaios de vibração ambiental efectuados no corpo da barragem e resultados provenientes do sistema de observação em contínuo [Mendes, 2009] recentemente instalado na barragem do Cabril), revelou a existência de uma interacção entre o comportamento dinâmico da torre e da barragem. De facto, nos espectros obtidos com base nas acelerações medidas no corpo da barragem, surgem picos cujas abcissas correspondem exactamente às frequências naturais da torre que foram identificadas nos ensaios de vibração ambiental realizados directamente na torre.

Após a fase de calibração dos modelos numéricos, foi efectuado o estudo sísmico da torre, utilizando a técnica de análise no domínio do tempo através da aplicação de um acelerograma sísmico na base e por espectro de resposta, tendo-se mostrado a boa concordância entre os resultados obtidos.

6.2 Desenvolvimentos Futuros

Ao nível do programa MEFDIN3D de elementos finitos 2D e 3D verifica-se que é possível melhorar nos seguintes aspectos:

- i) facilitar o processo de introdução de massas de água associadas para simular simplificadaamente o efeito da pressão hidrodinâmica devido à interacção água-estrutura;

- ii) adaptar o programa e testá-lo para os casos 2D e 3D de modo a ser possível considerar elementos finitos de água, a partir da introdução do módulo de compressibilidade e do módulo de distorção (este deverá assumir valor nulo nos elementos finitos de água).

Uma vez verificada a interacção entre a barragem e a torre das tomadas de água, seria interessante desenvolver um modelo de elementos finitos do conjunto barragem-torre-fundação-albufeira.

Nos ensaios de vibração ambiental realizados no âmbito desta dissertação, apenas foi possível utilizar um acelerómetro uniaxial colocado inicialmente na direcção montante-jusante e, posteriormente na direcção margem esquerda-direita. Assim, seria interessante realizar outros ensaios efectuando medições sincronizadas em vários pontos e nas duas direcções, utilizando pelo menos três acelerómetros.

Seria também importante avaliar a evolução ao longo do tempo do estado de conservação da torre das tomadas de água, sobretudo ao nível da base dos pilares. Seria de todo o interesse, como actividade de controlo de segurança, efectuar inspecções visuais com câmaras subaquáticas, e acompanhar a evolução do comportamento dinâmico da torre, realizando periodicamente ensaios de vibração ambiental. Os resultados destes ensaios seriam também comparados com os resultados do sistema de observação em contínuo recentemente instalado na barragem que, como se referiu, também permite identificar as frequências naturais da torre.

Referências Bibliográficas

Bozorgnia, Y.; Bertero, V. (2004) – “*Earthquake Engineering: from engineering seismology to performance-based engineering*”. CRC Press.

Câmara, R. (1989) – “*Modelos para estudo do comportamento dinâmico de barragens de betão pelo método dos elementos finitos*”. Tese para Especialista, LNEC, Lisboa.

Carvalho, A. (2007) – “*Modelação estocástica da acção sísmica em Portugal continental*”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa (elaborada no LNEC), Lisboa.

Chen, W.; Saleeb, A. (1994) – “*Constitutive Equations for Engineering Materials*”, Vol. 1, Elsevier.

Chopra, A. K. (1995) - “*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”, Prentice Hall, New Jersey.

Clough, R.; Penzien, J. (1993) – “*Dynamic of Structures: 2ª Edição*”, McGraw-Hill, New York.

Computers & Structures Inc., (1998) – “*SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures*”, Berkeley, Califórnia, USA.

Cunha, A.; Caetano, E. (2006) – “*Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures*”, Sound and Vibration, Vol. 6, No. 40, pp.12-20.

Duarte, R. T. (1978) – “*Uma teoria linear do comportamento dinâmico das estruturas sujeitas a acções sísmicas*”. Tese para especialista, LNEC.

Housner, G. (1990) – “*Selected earthquake engineering papers of George W. Housner*”. ASCE, New York.

INAG (2001) – “*Curso de exploração e segurança de barragens*”. Instituto da Água, Lisboa.

MATLAB (2005) – “*The language of technical computing*”, Version 7.1.

Mendes, P. (2005) – “*Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão sob excitação ambiente*”. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

Mendes, P.; Oliveira, S. (2008) – “*Análise Dinâmica de Estruturas: Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos*”, Informação técnica Barragens, LNEC.

Mendes, P. (2009) – “*Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão*”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto (em fase de conclusão).

Monteiro, G. (2007) – “*Análise sísmica e avaliação da segurança estrutural de barragens gravidade de betão compactado com cilindro*”. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Newland, D. E. (1975) – “*An introduction to random vibration and spectral analysis*”. Longman Group Ltd, United Kingdom.

Newmark, N. M; Rosenblueth, E. (1971) – “*Fundamentals of earthquake engineering*”. Ed. Prentice-Hall.

Oden, J. T.; Reddy, J.N. (1976) – “*An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*”, Ed Wiley.

Oliveira, E. R. A. (1968) - “*Theoretical Foundations of the Finite Element Method*”. Int. J. Solids Struct., Vol. 4, pp. 929-952.

Oliveira, S. (1991) – “*Elementos finitos parabólicos para análise estática e dinâmica de equilíbrios tridimensionais*”. LNEC, Trabalho de síntese, Lisboa.

Oliveira, S. (2000) – “*Modelos para análise do comportamento de barragens de betão considerando a fissuração e os efeitos do tempo. Formulações de dano*”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Oliveira, S. (2003) – “*Folhas de apoio à disciplina de Mecânica dos Materiais III*”, ISEL.

Oliveira, S.; Rodrigues, J.; Mendes, P.; Campos Costa, A. (2003) – “*Monitorização e modelação do comportamento dinâmico de barragens de betão*”, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora.

Oliveira, S. (2007) – “*Folhas de apoio à disciplina de Matemática Aplicada a Engenharia Civil*”, ISEL, maecisel.googlepages.com.

Oliveira, S.; Mendes, P. (2009) – “*Análise dinâmica de estruturas pelo método dos elementos finitos. Dos fundamentos às aplicações*”. Ed. LNEC (em fase de conclusão).

Pedro, J.O. (1977) – “*Dimensionamento de barragens abóbada pelo método dos elementos finitos*”. LNEC, Tese para especialista (Memória nº479). Lisboa.

Pinheiro, A. (2006) – “*Tomadas de água em albufeiras*”. Estruturas hidráulicas. Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

Pinheiro, A. (2007) – “*Descarregadores de cheias em canal de encosta. Dimensionamento e implantação*”. Estruturas hidráulicas. Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

PNRC (LNEC-FEUP) (2002) - “*Estudo de processos de deterioração evolutiva em barragens de betão. Controlo da segurança ao longo do tempo.*” Programa de Candidatura ao Programa Nacional de Re-equipamento Científico da FCT.

RSB (2007) – “*Regulamento de Segurança de Barragens*”, Decreto-Lei nº 344/2007, Lisboa.

Xerez, C. (1954) – “*O aproveitamento do Cabril*”. Separata da “Técnica”.

Zienkiewicz, O.C. (1967) – “*The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*”, Ed. McGraw-Hill, London.

Sites consultados

Site 1: ICOLD – “*International Commission on Large Dams*”; <http://www.icold-cigb.net/>.

Site 2: Barragem de Hoover - http://olhares.aeiou.pt/barragem_de_hoover_foto721768.html.

Site 3: Barragens de Portugal - http://cnpqb.inag.pt/gr_barragens/gbportugal/index.htm.

Site 4: Kinematics - www.kinematics.com.