Exploration d'un mode d'écriture de la généralité: l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905)

Anne Robadey

Exploration d'un mode d'écriture de la généralité: l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905)

Anne Robadey

Table des matières

L'article qui est à la base de cette étude est un article écrit par Poincaré en 1905, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* [Poincaré(1905b)], où il démontre le théorème suivant :

Théorème 1. *Sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.*[1]

Après avoir démontré ce résultat, Poincaré propose une deuxième démonstration de l'existence d'une géodésique fermée sans point double sur les surfaces convexes ; mais c'est la première qui retiendra surtout notre attention. Je parlerai donc de *la* démonstration (du théorème 1) pour désigner cette démonstration d'existence. Elle consiste plus précisément à montrer que le nombre de géodésiques est toujours impair, et que partant il est non nul.

Dans la section des Œuvres consacrée aux travaux de Poincaré en géométrie, l'article de 1905 apparaît très isolé. De plus, il est composé de plusieurs morceaux qui font appel à des techniques au premier abord très différentes, qui semblent n'être liés que par leur sujet commun, l'étude des géodésiques des surfaces convexes.

Or nous allons voir qu'en approfondissant la lecture de la démonstration du théorème 1 on met au jour des relations complexes entre le problème des géodésiques *stricto sensu*, qui constitue le sujet immédiat de l'article, et tout le travail de Poincaré en mécanique céleste, qui forme comme un arrière-plan dont l'importance réelle au regard de l'article se révèlera au fur et à mesure de notre étude. Nous verrons ainsi apparaître progressivement, grâce à cet éclairage, l'unité du texte de 1905. De plus, ces liens permettent de mettre en évidence une expression assez particulière de la généralité. Plutôt que par une formulation abstraite, c'est en effet grâce à l'utilisation d'un paradigme[2] que Poincaré expose ici une méthode dont le domaine d'application dépasse le seul problème sur lequel elle est présentée.

Mon article s'appuie sur une analyse précise de cette démonstration. J'en exposerai dans le corps de mon texte les points clefs sur lesquels s'appuie mon commentaire. Cependant, le lecteur qui voudrait aller plus loin trouvera dans les annexes B et C une présentation plus détaillée qui lui permettra, je l'espère, un accès plus facile au texte original.

L'annexe A donne quant à elle le plan général de l'article de Poincaré, et donne un bref aperçu du contenu des sections qui ne sont pas au centre de mon étude.

[1] C'est moi qui donne à ce résultat le titre de théorème. Dans l'article de Poincaré, ce résultat est seulement énoncé, dans un paragraphe séparé et en italique, à la fin de la démonstration.

Par ailleurs, un mathématicien aujourd'hui rajouterait l'adjectif *générique* aussi bien dans l'énoncé du théorème (« le nombre de géodésiques fermées sans point double sur une surface convexe *générique* est impair ») qu'à plusieurs endroits dans la démonstration. En effet, pour certaines surfaces convexes, comme la sphère ronde, le nombre de géodésiques fermées sans point double est infini : il n'est donc ni pair ni impair... C'est cependant un vocabulaire bien postérieur à Poincaré, et ce n'est pas mon propos dans cet article d'étudier la façon dont Poincaré traite les cas particuliers comme la sphère. J'ai bien l'intention cependant de revenir sur ce point à une autre occasion.

[2] J'emploie le terme de paradigme non au sens de Kuhn, mais dans le même sens qu'en grammaire, où l'on présente par exemple la conjugaison des verbes du premier groupe sur le paradigme « chanter ».

Mon principal but ici est donc d'exposer les arguments qui m'amènent à penser que ce travail de Poincaré sur les géodésiques entretient des liens extrêmement forts avec ses recherches en mécanique céleste. Concernant ces dernières, je m'appuierai surtout sur les *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*[3] [Poincaré(1892–1899)], et particulièrement le chapitre III, où Poincaré s'intéresse aux solutions périodiques des équations différentielles de la dynamique. En réalité, ce chapitre reprend pour une large part ce que Poincaré avait déjà exposé deux ans plus tôt dans son mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* [Poincaré(1890)].

Les liens que je mettrai en évidence sont à double sens, et leur exploration est l'objet des deux premières parties de cette étude.

D'une part, les travaux de Poincaré en mécanique céleste influencent profondément le traitement qu'il donne des géodésiques des surfaces convexes, tant dans la problématique choisie, à savoir l'étude des géodésiques *fermées*, que dans la méthode utilisée pour démontrer leur existence. Cette méthode vient, comme nous le montrerons, directement des travaux de mécanique céleste.

D'autre part, Poincaré ne se contente pas d'appliquer des résultats ou des méthodes établis en mécanique céleste au problème des géodésiques, comme une simple rentabilisation d'un outil puissant. La façon dont il rédige ce mémoire montre que la question des géodésiques y est abordée comme un cas particulier plus maniable sur lequel appliquer une méthode esquissée dans les *Méthodes Nouvelles*, afin de la développer. Le lien n'est pas univoque, avec un simple transfert de méthode d'un domaine à un autre, mais réciproque, puisque la théorie développée en mécanique céleste donne une méthode d'attaque de la question des géodésiques, qui à son tour est utilisée comme un paradigme grâce auquel Poincaré développe plusieurs points exposés seulement de façon théorique et succinte dans les *Méthodes Nouvelles*.

Cette étude de cas nous permettra de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques de la forme d'expression de la généralité qu'on rencontre dans cet article sur les géodésiques. Dans la dernière partie de mon étude, je montrerai que ces caractéristiques sont loin d'être propres au texte de 1905. Elles rencontrent en effet la description que donne Poincaré du travail du mathématicien dans ses œuvres philosophiques ainsi que d'autres marques de style de son écriture mathématique. On les retrouve en particulier dans un autre passage où Poincaré utilise également un paradigme. Dans ce dernier texte, notre auteur justifie ce choix d'écriture d'une façon qui vient renforcer nos conclusions.

Tout ceci s'intègre dans la perspective de travaux récents sur les différentes modalités de la recherche de généralité qu'on rencontre dans les textes mathématiques [4]. En particulier, cette lecture de Poincaré vient renforcer la thèse selon laquelle la généralité n'est pas nécessairement liée à l'abstraction.

1 L'article sur les géodésiques et la clef de lecture donnée par la mécanique céleste

Nous commencerons par donner une première lecture de la démonstration du théorème 1, en suivant simplement le texte de 1905. Derrière cette première

[3] Dans la suite, j'abrégerai ce titre en *Méthodes Nouvelles.*

[4] Voir en particulier [Chemla(2003)] et [Chemla(1998)].

lecture s'en cachent beaucoup d'autres, que nous déploierons dans la suite de l'étude, au fur et à mesure de l'explicitation des liens qu'entretient cet article de Poincaré avec ses travaux de mécanique céleste.

La première étape de cet enrichissement de notre lecture consistera à reconnaître l'importance de la prise en considération des travaux de Poincaré en mécanique céleste pour comprendre la construction de la démonstration qu'il donne dans son article de 1905.

Ce rapprochement nous permettra d'abord de mettre en lumière l'unité de cette démonstration, dont les deux parties apparaissent d'abord être de nature très différente. Nous approfondirons ensuite l'analyse des liens qu'entretient chacune avec les travaux de mécanique céleste, de façon à mieux comprendre la spécificité de chaque partie.

Ainsi, le cadre conceptuel que constitue la mécanique céleste va se révéler essentiel pour une compréhension fine de l'article de 1905.

1.1 Première lecture de la démonstration

La démonstration proposée par Poincaré se compose de deux parties distinctes, dont je vais présenter maintenant succintement les grandes lignes. Je me limiterai ici à ce qui est nécessaire pour comprendre les niveaux de lecture successifs que je proposerai ensuite. Le lecteur qui veut rentrer dans les détails de l'argumentation de Poincaré trouvera en annexe (annexes B et C) une analyse plus précise.

1.1.1 Géodésiques d'un sphéroïde

La première partie de la démonstration[5] établit le théorème 1 pour les surfaces suffisamment proches de la sphère, auxquelles Poincaré donne le nom de *sphéroïdes*. Il s'agit d'étudier ce que deviennent les géodésiques de la sphère, qui sont toutes fermées[6], lorsqu'on déforme très peu la sphère. Poincaré cherche à caractériser les géodésiques qui restent fermées dans ce processus.

Il s'agit donc d'une étude que nous qualifierions auourd'hui de « locale » à deux titres : la surface considérée doit être proche de la sphère, et les géodésiques fermées sont cherchées au voisinage des géodésiques — fermées — de la sphère. Dans la suite, je parlerai parfois de « l'étude locale » ou du « résultat local » pour désigner cette première partie de la démonstration de Poincaré.

En suivant d'aussi près que possible les termes de Poincaré, ce premier résultat s'énoncerait ainsi : *le nombre de géodésiques fermées sur un sphéroïde qui subsistent aussi petite que soit la déformation de la sphère*[7] *est impair.*

[5]La première partie de la démonstration correspond à la section 3 de l'article de Poincaré, intitulée *Géodésiques d'un sphéroïde* dans l'article de Poincaré (voir Annexe A).

[6]Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

[7]Poincaré ne fait aucune allusion, dans cette étude locale, à la question des points doubles que peut posséder une géodésique fermée (si par exemple elle a la forme d'un 8). Il se contente de remarquer, à la fin de la section, que ce qu'il a fait ne concernait que les « géodésiques fermées qui subsistent quelque petit[e] que soit » la déformation de la sphère. Lorsqu'il réutilise ce résultat dans la section suivante, c'est dans le contexte des géodésiques fermées sans point double. Or les géodésiques fermées de la sphère sont sans point double, et Poincaré a montré entre temps que le nombre de points doubles ne peut pas changer quand on suit une géodésique fermée au cours d'une déformation. C'est donc sans doute cette remarque sur les géodésiques « qui subsistent aussi petit[e] que soit » la déformation qui justifie aux yeux de Poincaré l'utilisation de ce résultat dans le cadre de l'étude des géodésiques sans point double.

Poincaré représente la déformation de la sphère comme une famille analytique de sphéroïdes paramétrée par un réel μ, de telle façon qu'on obtienne la sphère lorsque $\mu = 0$. Il travaille d'abord au premier ordre par rapport à μ, c'est-à-dire qu'il étudie le problème linéarisé par rapport à μ. Enfin son objectif est d'étudier les géodésiques fermées qui subsistent au cours de la déformation.

Il met en œuvre pour ce faire une méthode inspirée par la méthode de variation des constantes de Lagrange pour l'étude de la trajectoire d'une planète sous l'effet des perturbations dues aux autres planètes.

Lagrange considérait d'abord le mouvement d'une planète seule autour du soleil. Son mouvement est une orbite elliptique, il est décrit par des *éléments elliptiques*. Lorsque la planète est seule, un seul de ces éléments est variable, il décrit la position de la planète sur l'orbite. Les autres éléments ne dépendent que des conditions initiales, et décrivent l'orbite elle-même. Lorsqu'on prend en compte l'influence d'autres planètes, les éléments qui décrivent l'orbite sont lentement variables. Au temps t, ils repèrent l'orbite elliptique, dite *orbite osculatrice*, que suivrait la planète si on l'affranchissait à cet instant de l'influence des autres planètes.

Par analogie, Poincaré étudie les géodésiques d'une surface proche de la sphère comme des perturbations des grands cercles de la sphère. Il utilise dans ce but des « éléments de l'orbite osculatrice »[8], définissant le mouvement d'un point, inspirés des éléments elliptiques qui définissent le mouvement képlérien d'une planète dans la méthode de Lagrange.

Les géodésiques de la sphère ronde étant les grands cercles parcourus à vitesse constante, il adopte les coordonnées position–vitesse (ou *éléments de l'orbite osculatrice* ; voir figure 1) suivantes sur la sphère :

θ, longitude du nœud de l'orbite circulaire décrite par le point considéré si on le laisse se mouvoir sans contrainte avec la vitesse initiale considérée ;

i, inclinaison de cette orbite sur l'équateur ;

λ, distance du point au nœud sur l'orbite ;

ω, vitesse de circulation sur l'orbite.

Lorsque μ est nul, les solutions des équations des géodésiques sont, dans ces coordonnées : $i = i_0$; $\theta = \theta_0$; $\omega = \omega_0$; et $\lambda = \omega_0 t$. λ peut donc être pris comme variable à la place du temps. Lorsque μ n'est plus nul, la méthode de Lagrange consiste à considérer que i, θ varient lentement par rapport à la variable λ (une propriété des équations des géodésiques permet de se débarasser de la variable ω).

Grâce à cette description du problème, et en négligeant les quantités d'ordre deux et plus en μ, Poincaré montre que les géodésiques fermées qui subsistent quand μ est non nul sont celles qui correspondent aux couples (i_0, θ_0) qui sont des points critiques d'une fonction $R(i, \theta)$. C'est par un renvoi au chapitre III des *Méthodes Nouvelles* qu'il justifie ensuite le passage de l'étude linéarisée (*i.e.* au premier ordre en μ) au résultat pour μ suffisamment petit. Il utilise enfin un résultat d'*Analysis Situs* qu'il a établi dans un précédent mémoire pour conclure que ces géodésiques sont en nombre impair.

[8] Poincaré utilise donc ici le même vocabulaire qu'en mécanique céleste, comme on peut le voir par exemple dans sa présentation de la méthode de Lagrange, p. 90 ss. de ses *Leçons de Mécanique Céleste* [Poincaré(1905a)].

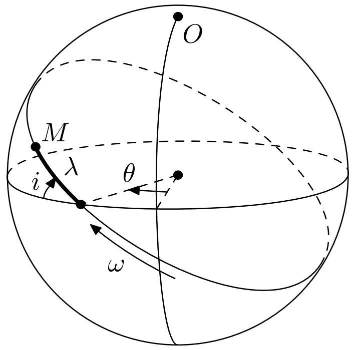


FIG. 1 – Nouvelles coordonnées définies par analogie avec les éléments elliptiques de la méthode de Lagrange.

1.1.2 Le principe de continuité analytique

Dans la deuxième partie, Poincaré, quoique sans renvoyer aux *Méthodes Nouvelles*, suit de très près une argumentation qu'il y développait déjà. Il s'agit de montrer que la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double est constante lorsqu'on déforme continuement (et analytiquement) une surface convexe. Cette ligne directrice est annoncée par le titre que Poincaré donne à cette section de son article : « Le principe de continuité anaytique ».

L'étude ne se restreint donc plus aux surfaces suffisamment proches de la sphère. Poincaré considère au contraire une surface convexe quelconque Σ_1. Il admet l'existence d'une famille analytique de surfaces Σ_t reliant Σ_1 à un sphéroïde Σ_0. Le résultat local précédent s'applique donc à Σ_0. Poincaré montre que l'ensemble des géodésiques fermées sur les surfaces Σ_t (où t varie entre 0 et 1) forme une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace de paramètres convenablement choisi, dont l'intervalle de variation de t forme une dimension.

Poincaré explique enfin que la situation est celle que nous pouvons résumer[9] par la figure 2 : pour une branche donnée de la courbe analytique $\mathcal{C}$, au voisinage d'un de ses points d'abscisse t_0, il y a seulement deux comportements qualitatifs possibles. Soit la branche de courbe présente un point pour chaque valeur de t (comme au voisinage du point A de la figure 2), soit il y a deux tels points pour les valeurs de t inférieures à t_0, qui se confondent en un seul en t_0 (comme en B), puis disparaissent pour les valeurs supérieures à t_0, ou l'inverse (comme en C). Ainsi, les géodésiques fermées apparaissent et disparaissent par couples. Autrement dit, la parité du nombre de géodésiques appartenant à une même branche de la courbe $\mathcal{C}$ reste constante au cours de la déformation paramétrée par t.

Il reste, pour obtenir un résultat sur les géodésiques *sans point double*, à étudier quels types de géodésiques on peut rencontrer sur la même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré montre que le nombre de points doubles ne varie pas lorsqu'on suit une branche de $\mathcal{C}$, ce qui lui permet de conclure, comme nous l'avons annoncé, que si l'on considère seulement les branches de $\mathcal{C}$ correspondant

[9]Poincaré ne fait pas de figure, mais il me semble que c'est une représentation utile pour comprendre le phénomène mathématique décrit par Poincaré. Voir l'annexe pour plus de détails sur la figure 2 et la définition de la courbe $\mathcal{C}$.

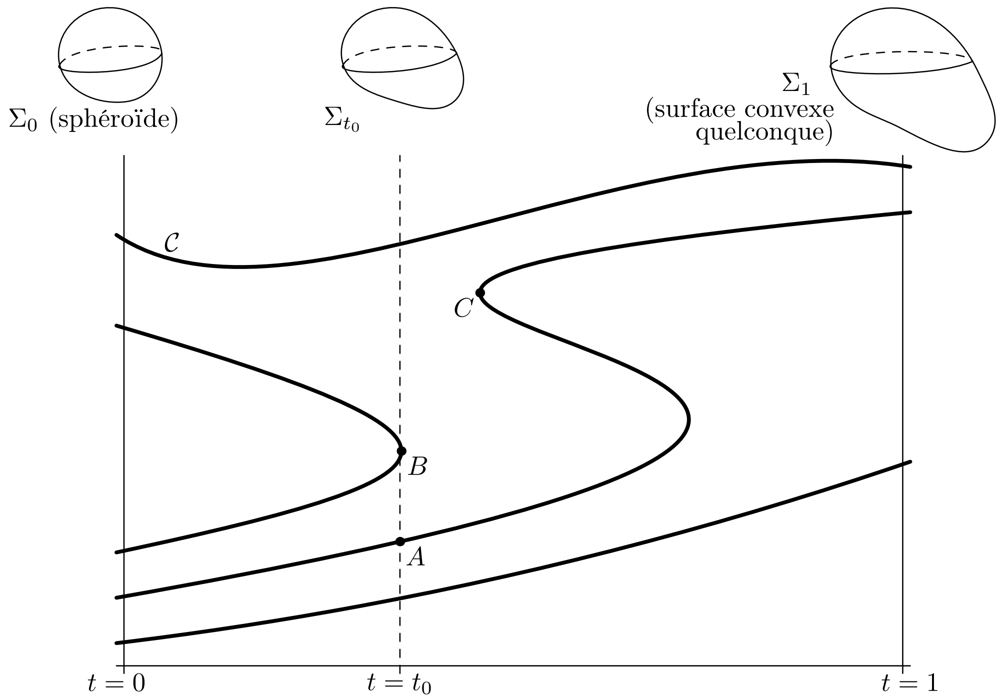


FIG. 2 – Courbe analytique $\mathcal{C}$ représentant les géodésiques fermées sans point double sur les surfaces de la famille Σ_t.

aux géodésiques sans point double, on a la situation résumée par la figure 2. Il écrit ainsi :

> « Donc le nombre total des géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or nous avons vu au paragraphe précédent que pour un sphéroïde ce nombre est impair. De plus, on peut passer d'un sphéroïde à une surface convexe quelconque d'une manière continue.
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.* »[10]

1.2 L'influence de la mécanique céleste : vers une deuxième lecture

À plusieurs reprises dans son article, Poincaré fait référence à ses travaux de mécanique céleste. D'abord dans l'introduction, où ils sont présentés comme une motivation de l'étude des géodésiques des surfaces convexes ; nous y reviendrons

[10][Poincaré(1905b)], p. 60 dans l'édition des Œuvres, [Poincaré(1916–1954)]. C'est Poincaré qui souligne ; dans la suite, je respecterai l'usage de l'italique des auteurs cités, sauf mention contraire.

plus loin (voir partie 2.1). Dans la première partie de la démonstration, ensuite, il fait référence explicitement au chapitre III des *Méthodes Nouvelles*.

Nous allons voir maintenant que la comparaison des principes exposés dans ce chapitre III des *Méthodes Nouvelles* avec la démonstration que nous venons de présenter se révèle très précieuse pour mieux comprendre la construction de cette dernière. En effet, les liens entre ces deux travaux ne se réduisent pas à l'utilisation d'un résultat établi dans les *Méthodes Nouvelles* à la fin de la première partie de la démonstration de 1905. Cette dernière, comme la problématique même qui conduit à énoncer le théorème 1, est en effet profondément influencée par les idées présentées dans le chapitre des *Méthodes Nouvelles* consacré aux solutions périodiques. Nous découvrirons que l'étude de cette influence permet de mettre à jour l'unité entre les deux parties de la démonstration de 1905 aussi bien que la spécificité de chacune, qui explique leur apparente disparité.

1.2.1 Une problématique issue de la mécanique céleste

La première empreinte de la mécanique céleste sur la façon dont Poincaré aborde la question des géodésiques se manifeste dans la problématique adoptée, celle des géodésiques fermées.

La principale contribution, avant 1905, dans une direction proche de cette problématique est celle de Hadamard, dans son article sur *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* [Hadamard(1897)]. Il avait entrepris une classification et une étude des géodésiques en fonction de leurs caractéristiques topologiques[11], ce qui l'avait amené à étudier entre autres les géodésiques fermées.

Mais c'est bien la mécanique céleste, et non la topologie, qui donne le bon contexte pour comprendre l'attention portée par Poincaré en 1905 aux géodésiques fermées. En effet, en mécanique céleste, Poincaré avait exprimé non seulement ce souci d'étudier *qualitativement* les solutions des équations, mais plus précisément la conviction que l'étude des solutions *périodiques* est d'une importance toute particulière. Il écrivait à ce propos dans les *Méthodes Nouvelles* :

> « Il semble d'abord que ce fait [l'existence de solutions périodiques] ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme *orbite intermédiaire*, pour employer le langage de M. Gyldén.
>
> Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.
>
> Étant données des équations de la forme [12] définie dans le nu-

[11] Il attribue d'ailleurs à Poincaré la paternité de la problématique, en se référant à l'insistance de celui-ci pour l'étude *qualitative* des solutions d'équations différentielles.

[12] Poincaré considérait dans ce paragraphe 13 des équations sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{dF}{dy_i}; \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{dF}{dx_i}. \quad (1)$$

méro 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »[Poincaré(1892–1899), p. 82]

Cette insistance particulière sur les trajectoires périodiques se traduit par l'étude exclusive, dans l'article de 1905, des géodésiques fermées, et de leurs propriétés de stabilité (donc des géodésiques proches des géodésiques périodiques), à la différence de ce que faisait Hadamard.

Les géodésiques périodiques n'apparaissent donc plus comme l'un des types topologiques de géodésiques, mais comme *le* type de géodésiques qui offre une première prise à l'étude.

On a donc ici la marque nette d'une problématique issue des travaux de Poincaré en mécanique céleste, qui oriente la façon dont il aborde la question des géodésiques sur les surfaces convexes.

1.2.2 Une origine de la démonstration dans les travaux de mécanique céleste

L'influence de la mécanique céleste sur le travail de 1905 va encore bien plus loin. Nous venons de montrer que la problématique de 1905 est suggérée par les travaux de mécanique céleste. La première partie de la démonstration est également marquée par la mécanique céleste de façon très visible : d'abord par l'utilisation de l'analogie avec la méthode de Lagrange, puis par le renvoi explicite au chapitre III des *Méthodes Nouvelles* pour justifier la dernière étape. Or on découvre, en se reportant à ce chapitre III, qu'il entretient également des liens très étroits avec la partie « globale »[13] de l'étude des géodésiques fermées, c'est-à-dire la partie sur le principe de continuité analytique.

Je vais maintenant présenter les « principes exposés dans le chapitre III du tome 1 de [s]on ouvrage, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* »[14], auxquels Poincaré renvoie au cours de la première partie de la démonstration de 1905. Ceci nous permettra de préciser les rapports avec chacune des deux parties de la démonstration qui nous intéresse. Nous découvrirons ainsi que l'influence de la mécanique céleste sur ce traitement du problème des géodésiques est bien plus profonde que ce que laisse apparaître l'analogie avec la méthode de Lagrange à la première lecture. C'est en effet la démonstration entière qui reprend les principes exposés dans les *Méthodes Nouvelles* au chapitre III, tandis que la méthode de Lagrange n'est qu'un outil utile pour une des étapes.

Après une introduction où Poincaré précise ce qu'il appelle solutions périodiques, le chapitre III des *Méthodes Nouvelles* est consacré au problème suivant :

[13] Ce qualificatif est justifié plus longuement dans la partie 1.3.
[14] [Poincaré(1905b)], p. 54

« Supposons que, dans les équations $[\frac{dx_i}{dt} = X_i]$, les fonctions X_i dépendent d'un certain paramètre μ ; supposons que dans le cas $\mu = 0$ on ait pu intégrer les équations, et qu'on ait reconnu ainsi l'existence d'un certain nombre de solutions périodiques. Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? »[Poincaré(1892–1899), p. 81]

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que la formulation est extrêmement proche du problème que traite Poincaré dans la première partie, la partie perturbative, pour les sphéroïdes. Jusque dans le choix des notations, le problème est posé de façon similaire. Poincaré considère en effet dans cette première partie de la démonstration de 1905 une famille de surfaces paramétrée par un réel μ, ce qui se traduit par le fait que les équations des géodésiques sont sous la forme considérée dans les *Méthodes Nouvelles*. Dans le cas $\mu = 0$, on sait intégrer ces équations : les solutions sont les géodésiques de la sphère, qui sont les grands cercles, c'est-à-dire des solutions périodiques. On cherche à savoir si les équations possèdent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, c'est-à-dire s'il existe encore des géodésiques fermées sur les sphéroïdes paramétrés par les petites valeurs de μ.

Poursuivons la lecture du chapitre III des *Méthodes Nouvelles*.

Poincaré considère donc des équations $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ où les X_i sont fonctions des x_i, de μ, et périodiques[15] de période 2π par rapport au temps t. Il fait l'hypothèse que, pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période 2π, $x_i = \varphi_i$, où $\varphi_i(2\pi) = \varphi_i(0)$.

Il définit ensuite les fonctions ψ_i par la propriété que la solution valant $\varphi_i(0) + \beta_i$ pour $t = 0$ vaut $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ pour $t = 2\pi$. D'après le théorème de régularité par rapport aux paramètres des solutions d'équations différentielles que Poincaré a démontré dans un chapitre précédent, les ψ_i sont des fonctions holomorphes de μ et des β_i.

En d'autres termes, les fonctions $\psi_i(\beta_1, ..., \beta_n, \mu)$ mesurent le défaut de périodicité de la solution de conditions initiales $(\varphi_i(0) + \beta_i)_i$. Ainsi les ψ_i sont nulles en $\mu = \beta_i = 0$, puisque, par hypothèse, $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une solution périodique des équations pour $\mu = 0$. Et la condition pour que les équations comportent encore une solution périodique lorsque μ n'est plus nul est qu'on puisse trouver $\beta_1, ..., \beta_n$ tels que $\psi_i(\beta_1, ..., \beta_n, \mu) = 0$.

Le problème est donc ramené à l'application du théorème des fonctions implicites.

La condition d'application de ce théorème dans sa forme usuelle est que le déterminant fonctionnel (ou jacobien) des ψ_i soit non nul. En pareil cas, il existe une fonction continue qui à chaque valeur de μ proche de 0 associe les valeurs des β_i qui correspondent aux conditions initiales d'une solution périodique. La condition de non nullité du déterminant fonctionnel peut également être traduite par le fait que les équations $\psi_i = 0$ admettent pour $\mu = 0$ le système $\beta_i = 0$ comme solution *simple*.

[15] Dans un deuxième temps, Poincaré traite le cas où les X_i ne dépendent pas du temps, comme c'est le cas pour les géodésiques. Ce cas est légèrement plus compliqué, mais modulo quelques aménagements, l'analyse de Poincaré dans les *Méthodes Nouvelles* se développe de façon parallèle dans les deux cas. J'ai donc choisi de présenter les grandes lignes de cette analyse dans le cas le plus simple, c'est-à-dire dans le cas dépendant du temps.

Dans le chapitre II des *Méthodes Nouvelles*, Poincaré avait donné une démonstration du théorème des fonctions implicites, d'abord dans sa forme habituelle, puis dans une forme raffinée qui permet de traiter également certains cas où le déterminant fonctionnel dont il est question ci-dessus est nul, c'est-à-dire où la solution connue pour $\mu = 0$ n'est pas simple.

Si donc on a pour $\mu = 0$ une solution d'ordre m supérieur à 2 mais fini, suivant la parité de m, on est dans l'un des deux cas suivants, représentés sur la figure 3 : si m est impair, il y a une solution pour chaque valeur suffisamment petite de μ, comme dans le cas où le déterminant est non nul ; si m est pair, il y a deux solutions pour $\mu < 0$, et aucune pour $\mu > 0$, ou bien le contraire.

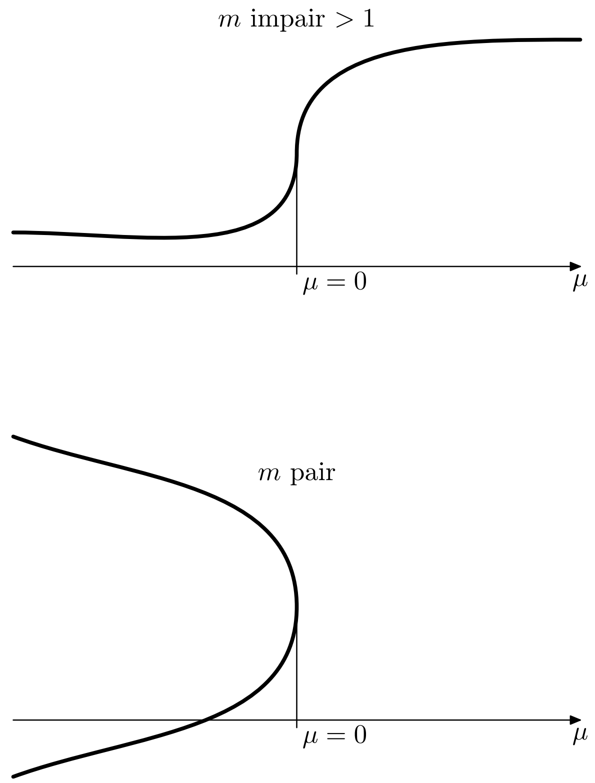


FIG. 3 – Cas où le déterminant fonctionnel est nul, mais où la solution reste d'ordre fini.

À ce stade de la présentation, Poincaré tire une première conclusion :

> « Une solution périodique ne peut donc disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.
>
> En d'autres termes, *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.* »[16]

En utilisant un théorème d'élimination des variables démontré dans le chapitre précedent, Poincaré montre ensuite que les équations $\psi_i = 0$ peuvent être

[16] [Poincaré(1892–1899)], p. 83.

ramenées à une seule équation $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$, où Φ est holomorphe et s'annule en $\beta_n = \mu = 0$. Il interprète ensuite cette équation comme celle d'une courbe analytique dans le plan des β_n et μ. Il précise : « à chaque point de cette courbe correspond une solution périodique »[17].

J'interromps ici pour l'instant la lecture du chapitre III des *Méthodes Nouvelles*. On arrive en effet à la fin d'une unité dans le § 37, consacré aux équations dépendant du temps. La représentation par une courbe analytique permet à Poincaré de ramener le problème à l'étude de la forme de cette courbe au voisinage de l'origine. Il poursuit ensuite cette étude dans plusieurs cas particuliers. Nous reviendrons sur le premier dans la partie suivante.

D'ores et déjà, ce que nous venons de rapporter nous permet de mettre en lumière l'unité de la démonstration de 1905, dans la continuité avec ce que Poincaré avait écrit dans les *Méthodes Nouvelles* une douzaine d'années plus tôt.

Nous voyons en effet que l'idée de représenter les solutions périodiques par une courbe dans un espace de paramètres est déjà présente, bien qu'encore assez peu développée, dans les *Méthodes Nouvelles*. Nous avons vu que Poincaré en fera la base du principe de continuité grâce auquel, dans la deuxième partie de la démonstration de 1905, il étend le résultat de parité obtenu pour le sphéroïde à toute surface convexe.

De plus, nous constatons que l'argument donné par Poincaré pour justifier, dans l'article de 1905, les deux comportements qualitatifs possibles (représentés par les points A et B de notre figure 2) est exactement celui qu'il donne dans le chapitre II des *Méthodes Nouvelles* pour démontrer la forme raffinée du théorème des fonctions implicites qu'il utilise ensuite dans le chapitre III pour montrer que « *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.* »

Ainsi, même si Poincaré ne renvoie pas explicitement, dans la deuxième partie de sa démonstration du théorème 1, au chapitre III des *Méthodes Nouvelles*, l'argument qu'il y déploie est très proche. Il utilise le même élément principal, à savoir l'utilisation d'une version raffinée du théorème des fonctions implicites. On y trouve de plus la même idée de représenter l'ensemble des trajectoires périodiques par une courbe. Enfin le résultat obtenu est comparable : Poincaré montre dans les *Méthodes Nouvelles* que « *les solutions périodiques disparaissent par couples* », et dans l'article de 1905 que « Le nombre de ces points [les points d'intersection d'une branche de $\mathcal{C}$ avec le plan $t = t_0$] ne peut varier que (...) de deux unités »[18]

L'utilisation du théorème des fonctions implicites est par ailleurs précisément l'étape pour laquelle Poincaré renvoie aux *Méthodes Nouvelles* à la fin de la première partie de la démonstration. Il conclut en effet cette partie ainsi :

> « Une question reste à traiter. L'existence des géodésiques fermées dont nous venons de parler a été établie par un calcul approximatif, puisque nous avons négligé μ^2. Cette existence peut-elle être démontrée rigoureusement ? Ou plutôt cette démonstra-

[17] [Poincaré(1892–1899)], p. 84.
[18] [Poincaré(1905b)], p. 56.

tion rigoureuse ne peut-elle pas se tirer directement de notre calcul approximatif ? Oui, cela peut se faire et par un procédé connu ; on n'a qu'à appliquer les principes exposés dans le chapitre III du tome 1 de mon Ouvrage, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* »[Poincaré(1905b), p. 54]

Cette lecture du début du chapitre III des *Méthodes Nouvelles* nous a donc permis de mettre en évidence la continuité qui existe entre l'étude des trajectoires périodiques qu'on y trouve et la démonstration de 1905.

Nous avons vu également que les deux parties de cette démonstration ont toutes deux leur fondement dans la question qui ouvre le chapitre III des *Méthodes Nouvelles*, « Dans quelles conditions a-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques ? » Il s'agit ensuite dans les deux cas d'appliquer de façon adéquate le théorème des fonctions implicites pour répondre à cette question.

1.3 Le lien spécifique de chaque partie avec les *Méthodes Nouvelles*

Le chapitre III des *Méthodes Nouvelles* se poursuit par ces mots :

> « Un cas particulier intéressant est celui où, pour $\mu = 0$, les équations différentielles admettent une infinité de solutions périodiques.[19] »[Poincaré(1892–1899), p.84]

Il considère donc une famille continue de solutions périodiques, paramétrée par un réel h, donnée par des fonctions $\varphi_i(t, h)$: pour chaque valeur de h, les $x_i(t) = \varphi_i(t, h)$ sont périodiques par rapport à t et vérifient les équations $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ lorsqu'on fait $\mu = 0$.

Dans ce cas, Poincaré montre que la courbe définie plus haut, $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$, contient la droite $\mu = 0$, qui représente la famille de solutions existant pour $\mu = 0$ (voir la figure 4). En d'autres termes, l'équation $\Phi = 0$ contient μ en facteur : $\Phi = \mu\Phi_1$. Pour étudier les trajectoires périodiques qui subsistent lorsque μ n'est plus nul, c'est donc l'équation $\Phi_1 = 0$ qu'il faut étudier.

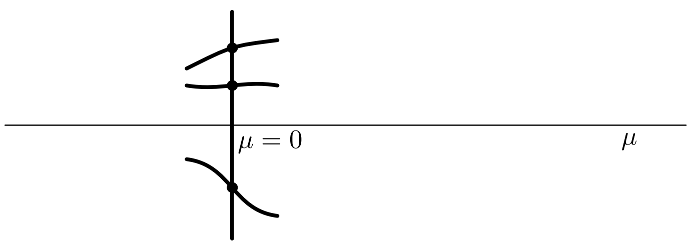


FIG. 4 – La courbe $\Phi = 0$ dans le cas où il existe, pour $\mu = 0$, une famille de solutions périodiques.

[19]La suite montre que Poincaré entend par là, non l'existence d'une infinité de solutions périodiques quelconques (si on admet une période arbitrairement grande, il existe toujours une infinité de solutions périodiques sur une surface convexe, Poincaré le remarque d'ailleurs à une autre occasion), mais l'existence d'une famille *continue* de solutions périodiques.

Mais, continue Poincaré, « cette courbe $\Phi_1 = 0$ ne passe pas toujours par l'origine », contrairement à la courbe $\Phi = 0$ étudiée précédemment. Il conclut :

> « *Nous devons donc avant tout disposer de la constante arbitraire h de façon que cette courbe passe par l'origine.* »[Poincaré(1892–1899), p. 84]

Autrement dit, chacune des trajectoires périodiques existant pour $\mu = 0$ ne donnera pas une trajectoire périodique pour $\mu \neq 0$, mais seulement celles correspondant à certaines valeurs de h. Ce sont ces valeurs de h qu'il faut déterminer.

L'étude que fait Poincaré dans la première partie de la démonstration de 1905 relève de ce cas particulier. Sur la sphère en effet, il existe une famille continue de géodésiques fermées, puisqu'elles le sont toutes ! Plus précisément, les géodésiques fermées sont tous les grands cercles, qu'on peut paramétrer par les deux angles i et θ de la figure 1. Le couple (i, θ) correspond donc exactement au paramètre h introduit par Poincaré dans les *Méthodes Nouvelles*. Et la première partie de la démonstration consiste justement à déterminer les valeurs à donner à ces deux paramètres i et θ pour que le grand cercle correspondant persiste sous forme d'une géodésique fermée lorsque μ n'est plus nul[20].

Ainsi, Poincaré traite dans la première partie de notre démonstration ce cas particulier pour lequel il donnait seulement dans les *Méthodes Nouvelles* le but intermédiaire à atteindre, « *disposer de la constante arbitraire h de façon que [la] courbe [$\Phi_1 = 0$] passe par l'origine* ». Le travail de 1905 suit cette indication, et propose de plus une méthode, adaptée de la méthode de Lagrange, pour y parvenir.

Pour cette étude particulière, qui dépend de la situation en $\mu = 0$ bien plus que les cas généraux où le théorème des fonctions implicites s'applique directement, soit dans sa forme usuelle, soit dans sa forme raffinée, Poincaré met à profit la géométrie des géodésiques de la sphère, en introduisant les « éléments de l'orbite osculatrice », par analogie avec la technique introduite par Lagrange. Bref, il emploie des arguments particuliers spécifiques au cas singulier qu'il étudie.

En revanche, la partie que Poincaré appelle « principe de continuité analytique » se place implicitement dans le cas d'une famille de surfaces suffisamment

[20] Quelques détails pour les lecteurs qui ont lu l'annexe B et veulent comprendre la correspondance exacte entre l'analyse des *Méthodes Nouvelles* et la démonstration de 1905 :

Les équations (5) (voir page 37), intégrées sur une période de λ, montrent que les ψ_i définis dans les *Méthodes Nouvelles* valent ici :

$$\psi_1(i,\theta) = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dR}{d\theta} + o(\mu); \quad \psi_2(i,\theta) = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dR}{di} + o(\mu). \tag{2}$$

Remarquons que le choix des variables a conduit à ce que les paramètres naturels de la famille de solutions périodiques en $\mu = 0$ soient les variables dans lesquelles sont écrites les équations. Si on note $\Phi = 0$ le système d'équations $\psi_1 = 0; \psi_2 = 0$, on reconnaît que μ est en facteur dans ces équations, si bien qu'on peut écrire $\Phi = \mu\Phi_1$, où le système d'équations $\Phi_1 = 0$ s'écrit, après simplification par $\sin i$,

$$\frac{dR}{d\theta} + o(\mu) = 0; \frac{dR}{di} + o(\mu) = 0.$$

Choisir (i, θ) point critique de R, c'est donc bien s'assurer que la courbe $\Phi_1 = 0$ passe par l'origine.

générale[21]. Il suppose en effet qu'on ne rencontre que des cas où le théorème des fonctions implicites s'applique directement, soit dans sa forme usuelle, soit dans sa forme raffinée. Il exclut par exemple que l'une des surfaces Σ_t soit une sphère, une surface de révolution, etc.

En réalité, il y a une hypothèse implicite semblable dans l'étude locale. En effet, si la perturbation de la sphère est très particulière, et consiste par exemple en une homothétie, il y a toujours une infinité des géodésiques fermées pour toutes les valeurs de μ. Ceci correspond au fait que la fonction R est constante, si bien que tous les points sont points critiques de R. Mais l'hypothèse de généralité, dans l'étude locale, intervient seulement à la fin de la démonstration, pour la parité du nombre de points critiques de R, tandis que l'hypothèse de généralité est au fondement de l'argument employé dans l'étude globale.

Poincaré n'explicite pas directement cette hypothèse. Peut-être cependant faut-il interpréter dans ce sens l'adjectif « quelconque » qui figure dans la formulation du résultat, à la fin de la section 4 de son article : « *Sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée (...)* ».

Ainsi, au contraire de la première partie qui portait sur un cas particulier, la deuxième ne prend en compte que les surfaces suffisamment générales.

Une deuxième caractéristique importante de cet argument de continuité analytique est qu'il consiste à appliquer un théorème simulanément en chaque point t de la courbe $\mathcal{C}$. C'est seulement l'hypothèse de généralité qui assure qu'on peut appliquer le théorème (dans sa forme raffinée) en chaque point de la courbe. Il en résulte que la seule possibilité de variation du nombre de géodésiques fermées sans point doubles est de croître ou décroître d'un multiple de 2. Ceci permet enfin de conclure que la parité est constante. Il y a donc là une approche globale très importante, qui est rendue possible par l'hypothèse implicite de généralité des surfaces considérées.

En résumé, la première partie de la démonstration est locale, particulière, et fait donc appel à des outils (méthodes de Lagrange, géométrie de la sphère) particuliers, adaptés à ce cas précis. Au contraire, la deuxième partie est globale, et elle s'appuie dès le début sur une hypothèse implicite de généralité.

Or nous avons vu que ces deux parties consistent l'une comme l'autre à mettre en œuvre la méthode indiquée dans les *Méthodes Nouvelles*, méthode basée sur l'application du théorème des fonctions implicites pour étudier le devenir d'une solution périodique quand on perturbe le système. Mais ceci se fait selon des modalités très différentes. La spécificité de chacune des deux parties de la démonstration se traduit par des liens différents avec les passages correspondants des *Méthodes Nouvelles*. La première partie, concernant le cas particulier de la sphère, peut exploiter la géométrie de cette dernière pour suivre le chemin indiqué dans les *Méthodes Nouvelles*. La deuxième partie, quant à elle, est basée sur une hypothèse de généralité des surfaces considérées. Elle ne peut donc pas faire appel à des propriétés spécifiques. En revanche, Poincaré y reprend l'argument de parité en entier, en utilisant beaucoup plus la représentation par une courbe analytique, dont la place restait réduite dans la présentation des *Méthodes Nouvelles*. C'était en effet seulement dans un deuxième temps, et après

[21] On préciserait aujourd'hui que pour une famille à un paramètre Σ_t *générique*, on est bien toujours dans l'un des cas que Poincaré considère ; on peut même se restreindre aux cas où l'ordre m est 1 ou 2.

l'élimination de $n-1$ variables, qu'il proposait de représenter les solutions périodiques par une courbe dans un plan. Dans l'article de 1905, cette représentation par une courbe analytique vient au tout début de la démonstration, et sert de fondement à tout le raisonnement.

2 L'orientation de cette étude des géodésiques vers un approfondissement des méthodes mises au point en mécanique céleste

Nous avons donc mis en évidence la dépendance, selon plusieurs modes, de ces travaux sur les géodésiques par rapport aux travaux antérieurs en mécanique céleste.

Il nous faut maintenant poursuivre l'analyse de la démonstration que fait Poincaré de l'existence de géodésiques fermées. L'étude de la structure de la démonstration va en effet nous conduire à réévaluer les liens entre cet article et les travaux de mécanique céleste. Une deuxième direction pour ces liens va se dégager : il ne s'agit pas seulement d'une exportation de méthodes de mécanique céleste vers la géométrie et l'étude des géodésiques, mais aussi d'une importation de l'exemple des géodésiques comme paradigme pour développer ces méthodes.

2.1 L'introduction de l'article

Dès l'introduction, Poincaré [(1905b), p. 38] laisse entendre qu'il étudie les géodésiques comme un cas simple d'équations de la dynamique, plutôt que comme un problème géométrique pour lui-même.

Poincaré inscrit en effet explicitement son article dans une problématique de recherche en mécanique céleste. L'étude des géodésiques des surfaces convexes constitue le problème le plus simple qui s'apparente suffisamment au problème des trois corps. Il dit de ce dernier : « à côté de la difficulté principale, celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. » Le problème des lignes géodésiques en revanche « est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique ; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis, si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle ; dans le problème des lignes géodésiques, en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une donnée de la question. » [Poincaré(1905b), p. 38–39]

Poincaré motive enfin son choix d'étudier les surfaces *convexes*, parce qu'elles sont plus ressemblantes de ce point de vue que les surfaces à courbures opposées étudiées par Hadamard (voir [Hadamard(1897)] :

> « ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.
>
> J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; (...) »
> [Poincaré(1905b), p. 39]

Ceci éclaire d'ailleurs les raisons de la spécificité de l'approche de Poincaré que nous relevions déjà plus haut (1.2.1) : si la problématique suivie dans l'article de 1905 est spécifiquement l'étude des géodésiques fermées, problématique issue de la mécanique céleste, c'est bien parce que Poincaré étudie les géodésiques des surfaces convexes comme un cas simple d'équations de la dynamique comparables à celles qu'on rencontre en mécanique céleste.

Le problème des géodésiques est donc présenté par Poincaré comme une sorte de cas particulier dont l'étude est utile à une meilleure compréhension des phénomènes de dynamique. Ceci le conduit à s'intéresser au problème des géodésiques *fermées* sur les surfaces *convexes*.

Telle est donc la motivation donnée par Poincaré en introduction. Ceci peut sembler à première lecture quelque peu rhétorique, ou relever encore de l'exportation de méthodes de mécanique céleste. Une telle exportation est en effet d'autant plus fructueuse que l'analogie est plus forte entre les deux problèmes : géodésiques sur les surfaces *convexes* et mécanique céleste. On serait d'autant plus tenté de se relier à cet avis que cette introduction est suivie par une partie très géométrique, où Poincaré s'inscrit dans la suite des travaux sur les géodésiques au XIX^{e} siècle, comme le montre l'analyse de P. Nabonnand [Nabonnand(1995)] : étude du lieu conjugué, du lieu de coupure, etc. Il n'est donc pas immédiatement évident que cette étude des géodésiques fermées est, comme l'affirme pourtant Poincaré, réellement tournée vers une meilleure compréhension des problèmes et des méthodes de mécanique céleste. Or, l'analyse de la structure de la démonstration va nous conduire à noter une singularité que n'expliquerait pas l'étude des géodésiques des surfaces convexes pour elle-même. Il s'avère qu'un long développement est en fait inutile, ce que Poincaré sait parfaitement. Or seul son intérêt vis-à-vis de la mécanique céleste peut en rendre compte. Cette disproportion permet donc de mesurer l'importance de cette deuxième facette du lien entre géodésiques et mécanique céleste, et va nous conduire à une réévaluation du statut du mémoire de 1905.

2.2 But de la première partie de la démonstration

La démonstration, nous l'avons vu, se déroule en deux parties. Il s'agit de montrer que le nombre de géodésiques fermées sans point double est impair. La deuxième partie établit que la parité de ce nombre est constante, en reprenant l'idée déjà développée dans les *Méthodes Nouvelles* : les géodésiques fermées apparaissent et disparaissent par couples. L'essentiel de cette partie (en longueur) est dédié à la spécification de ce résultat général. Il s'agit en particulier de montrer qu'il s'énonce de la même façon quand on se restreint aux géodésiques sans point double. Ainsi, ce qui s'ajoute par rapport aux *Méthodes Nouvelles* est la discussion sur les types de géodésiques qu'on peut rencontrer sur une même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré prouve donc que le nombre de géodésiques fermées sans point double est soit toujours pair, soit toujours impair.

La fonction de la première partie, quant à elle, est explicitement de trancher en faveur de l'une ou l'autre possibilité. Poincaré y prouve que le nombre de géodésiques fermées sans point double sur un sphéroïde est impair. Il peut donc appliquer la deuxième partie de la démonstration à un chemin reliant une surface convexe quelconque à un sphéroïde. Le point clef de la première partie est donc d'établir la parité du nombre de géodésiques sur un sphéroïde afin de l'utiliser dans la deuxième partie. C'est bien ainsi que Poincaré l'entend, lui qui conclut la démonstration par :

> « Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or nous avons vu au paragraphe précédent que pour un sphéroïde ce nombre est impair. De plus, on peut passer d'un sphéroïde à une surface convexe quelconque d'une manière continue.
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.* »[Poincaré(1905b), p. 60]

Or, et c'est là le point clef pour comprendre toute la portée de cette partie de la démonstration de Poincaré, il n'avait pas du tout besoin de cette étude locale au voisinage de la sphère. Jacobi avait en effet réussi à intégrer complètement les équations des géodésiques sur un ellipsoïde. Poincaré sait donc que sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, il y a exactement trois géodésiques fermées sans point double. Il fait d'ailleurs référence à ce résultat, mais seulement comme une illustration de son théorème. Celui-ci repose quant à lui sur le résultat de la première partie, comme le montre la citation précédente, dont voici la suite :

> « Par exemple, pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie. »

Cette formulation donne bien à l'exemple de l'ellipsoïde un rôle illustratif, presque comme une vérification. Or Poincaré aurait pu s'affranchir de tout le calcul perturbatif, c'est-à-dire de toute la première partie — relativement technique — de sa démonstration. Il lui suffisait d'utiliser l'exemple de l'ellipsoïde pour initier le principe de continuité plutôt que d'en faire une illustration du théorème, en écrivant par exemple :

> Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie.[22]
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.*

C'est d'ailleurs un argument de ce type qu'il emploie plus loin dans ce même article, dans la partie 5, *Stabilité et instabilité* : « *Donc, si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double, l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant*[23] *; il est donc le même que pour l'ellipsoïde, il est donc égal à 1.* » [Poincaré(1905b), p. 66]

Cet argument montre que non seulement la première partie de la démonstration est inutile, mais que Poincaré en est parfaitement conscient. C'est par un choix délibéré que Poincaré développe l'étude des géodésiques du sphéroïde

[22]Je me suis contentée ici d'inverser l'ordre des éléments dans le texte de Poincaré, sans ajouter de formules qui ne soient de lui.

[23]Ce résultat a été prouvé par Poincaré d'une façon tout à fait analogue au principe de continuité analytique pour le nombre des géodésiques ; l'idée est que lorsque deux géodésiques fermées se confondent et disparaissent, l'une est stable et l'autre instable.

plutôt que d'utiliser l'exemple de l'ellipsoïde pour calculer la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double.

Pourquoi Poincaré a-t-il choisi d'exposer ce calcul compliqué, et inutile pour le but précis qui paraît être le sien dans l'article de 1905 ? Cet écart révèle que Poincaré poursuit un autre objectif. La thèse que je propose pour rendre compte de cette singularité est qu'il faut lire la démonstration comme l'exposé, sur le paradigme des géodésiques des surfaces convexes, d'une méthode dont la portée est plus générale.

Nous avons déjà vu que le cas « où pour $\mu = 0$ les équations différentielles admettent une infinité de solutions périodiques » était présenté très succintement dans les *Méthodes Nouvelles*. Poincaré y indiquait seulement le but à poursuivre, à savoir « *disposer de la constante arbitraire h de façon que [la] courbe [$\Phi_1 = 0$] passe par l'origine.* » C'est ce travail qui permet de déterminer lesquelles des trajectoires fermées présentes initialement persistent pour μ non nul. Mais après avoir indiqué ce but, il ne détaillait pas du tout de procédure pour y parvenir. La question posée tout au long de ce chapitre III des *Méthodes Nouvelles*, « Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? » restait donc pour une large mesure en suspend dans ce cas particulier.

Au contraire, dans l'article de 1905, Poincaré mène à bien la recherche des valeurs des constantes arbitraires i et θ pour lesquelles une géodésique fermée subsiste lorsque μ n'est plus nul. Or nous avons constaté que ces grandeurs i et θ jouent le même rôle que la constante h des *Méthodes Nouvelles*. En montrant comment adapter la méthode de Lagrange au cas des géodésiques, Poincaré présente donc plus largement une méthode pour atteindre le but seulement indiqué par les *Méthodes Nouvelles*.

Ainsi, pour un cas semblable dans un autre problème de dynamique, on saura qu'une idée fructueuse est d'adapter la méthode de Lagrange, en faisant un changement de variable de façon à faire apparaître comme variable(s) le(s) paramètre(s) qui décrivent la famille de solutions périodiques connues en $\mu = 0$.

Nous constatons de plus que cet article sur les géodésiques a conduit Poincaré à étudier une situation plus générale que celle présentée dans les *Méthodes Nouvelles*. Il ne considérait en effet dans cet ouvrage qu'une famille à un paramètre de solutions périodiques, tandis que la sphère possède une famille à deux paramètres de géodésiques fermées.

Cette généralisation s'accompagne d'une généralisation semblable de l'idée de représenter les solutions périodiques par une courbe analytique dans un espace de paramètres convenable. Dans les *Méthodes Nouvelles*, Poincaré ne considérait cette représentation que dans un plan. En 1905 en revanche, il considère un espace dont la dimension est seulement déterminée par la dimension de l'espace des paramètres nécessaires pour décrire une trajectoire donnée.

Le troisième point sur lequel l'article de 1905 témoigne d'une attention portée à la généralité est celui vers lequel pointe tout particulièrement la disproportion mise en évidence ci-dessus.

L'argument perturbatif se révèle n'être pas nécessaire dans le cas des géodésiques des surfaces convexes. En effet, on sait intégrer complètement les équations non seulement pour la sphère, mais également pour l'ellipsoïde. Or nous avons vu que l'ellipsoïde est une surface suffisamment générale pour permettre de déterminer directement la valeur de la parité cherchée. La sphère, elle, est une surface singulière, et si l'on veut partir des géodésiques de la sphère, il faut mettre en œuvre l'argument perturbatif présenté dans la première partie de la démonstration de 1905.

En revanche, dans un problème de dynamique plus général, cet argument perturbatif peut retrouver toute son importance. En effet, pour un problème plus compliqué, il est improbable qu'on sache intégrer complètement un cas suffisamment général. On ne saura le plus souvent intégrer que les cas extrêmement particuliers pour lesquels il existe une famille continue de trajectoires périodiques, voire pour lesquels toutes les trajectoires sont périodiques, comme les géodésiques de la sphère. Dans un tel cas, le racourci que permet la connaissance des géodésiques de l'ellipsoïde n'existe plus. Le schéma d'étude proposé dans l'article de 1905 pour mettre en œuvre la méthode décrite dans les *Méthodes Nouvelles* prend alors toute sa valeur. Il faut commencer par étudier le système au voisinage d'une situation singulière intégrable, en adaptant la méthode de Lagrange, avant d'étendre les résultats par un principe de continuité analytique.

Le choix que fait Poincaré de ne pas utiliser le résultat connu sur les géodésiques de l'ellipsoïde permet donc de donner à la démonstration une portée plus générale.

De plus, Poincaré montre dans l'article de 1905 l'enjeu de ce type de calcul perturbatif, pour lequel il fournit une méthode, adaptée de celle de Lagrange. Ce cas qui apparaissait comme un cas particulier, peut-être anecdotique, dans les *Méthodes Nouvelles*, est ici inséré dans la démonstration d'un résultat global. Le chapitre III des *Méthodes Nouvelles* montrait comment appliquer le théorème des fonctions implicites dans différents cas pour étudier la persistance de trajectoires périodiques. Ce travail sur les géodésiques est l'occasion pour Poincaré de montrer comment ces différents cas d'application peuvent être articulés de façon à prouver un théorème valable pour tous les systèmes dynamiques d'une certaine forme, ici pour les géodésiques fermées sans point double des surfaces convexes.

Cette analyse nous permet donc de mettre en évidence trois aspects par lesquels l'article de 1905 développe et enrichit la méthode présentée dans les *Méthodes Nouvelles*.

Il apporte tout d'abord un complément d'ordre technique. Il explicite en effet *comment* traiter les cas où il y a pour $\mu = 0$ une famille de solutions périodiques.

Il montre ensuite, en présentant une démonstration complète inspirée des principes formulés dans les *Méthodes Nouvelles*, comment les différents cas présentés dans ce dernier ouvrage peuvent être articulés. Ceci permet à Poincaré de montrer l'enjeu que peut représenter dans certaines situations le calcul perturbatif de la première partie. Nous trouvons là l'expression d'un avantage que présente l'exposition d'une méthode sur un paradigme plutôt qu'abstraitement. La méthode proposée dans les *Méthodes Nouvelles* est mise en situation dans l'article de 1905, ce qui permet de montrer en particulier *pourquoi* l'étude du devenir des trajectoires fermées appartenant à une famille continue est importante. Cette mise en situation est un premier avantage de l'écriture par paradigme.

Enfin, nous avons relevé un gain de généralité sur plusieurs points. À première vue, l'étude des géodésiques des surfaces convexes semble impliquer une perte de généralité par rapport à l'étude d'un système d'équations quelconques $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ présentée dans les *Méthodes Nouvelles*. Pourtant, nous avons montré que, sur ce paradigme des géodésiques, Poincaré présente des méthodes de portée plus générale. En effet, il étudie le cas particulier où il y a une famille continue de trajectoires périodiques dans un cadre plus général que celui qui était présenté dans les *Méthodes Nouvelles*, puisqu'il ne se restreint plus à une famille à un paramètre. Il développe également la représentation par une courbe analytique. Enfin, le choix de ne pas utiliser les résultats connus pour l'ellipsoïde lui permet de proposer une méthode qui reste valide beaucoup plus généralement, et qui donne des outils pour traiter des cas plus généraux que les exemples déjà donnés dans les *Méthodes Nouvelles*. Le paradigme des géodésiques permet donc paradoxalement un gain en généralité.

Ainsi le problème des géodésiques n'est pas véritablement un exemple d'utilisation d'une méthode développée par ailleurs dans les *Méthodes Nouvelles*. Il fonctionne plutôt comme un paradigme grâce auquel Poincaré continue à développer les idées qu'il avait commencé à exprimer dans les *Méthodes Nouvelles*. Autant la démarche que la nature de la situation rapprochent les deux textes. C'est seulement le mode d'écriture qui diffère. Dans les *Méthodes Nouvelles*, Poincaré avait exposé ses idées en considérant des équations générales abstraites $\frac{dx_i}{dt} = X_i$. Il développe ensuite les mêmes idées en les formulant sur le paradigme des géodésiques. La généralité se présente autrement : non dans le mode d'expression, mais dans le champ d'application possible de la méthode exposée.

2.3 L'importance de la signification géométrique : un rôle d'interprétation

Notre étude nous a permis de proposer une nouvelle lecture de la démonstration de Poincaré, en y reconnaissant l'utilisation du problème des géodésiques des surfaces convexes comme un paradigme pour développer une méthode élaborée en mécanique céleste. Or le texte de cette démonstration présente une autre caractéristique que nous n'avons pas encore exploitée : il utilise de façon massive des interprétations géométriques.

À deux reprises, Poincaré interrompt l'argument calculatoire sur les géodésiques du sphéroïde pour donner aux quantités qui apparaissent dans le calcul une signification géométrique.

Poincaré commence par étudier les géodésiques des sphéroïdes grâce à leur équation différentielle, donnée par la mécanique : une géodésique est décrite comme la trajectoire d'un mobile astreint à rester sur la surface sans autre contrainte.

Après plusieurs étapes de calculs qui permettent de simplifier progressivement ces équations, Poincaré est ammené à introduire une quantité S_1, qui joue approximativement le rôle d'une énergie cinétique. Après quelques transformations supplémentaires des équations, il s'interrompt en écrivant : « Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1. »[Poincaré(1905b), p. 50]

Il revient alors à une approche plus géométrique du sphéroïde, faisant intervenir un plongement de celui-ci dans l'espace ambiant, une correspondance bijective avec la sphère, des éléments de longueur sur le sphéroïde et sur la sphère. De plus, il donne un caractère encore plus visuel à cette interprétation géométrique en choisissant la correspondance entre la sphère et le sphéroïde de façon à pouvoir utiliser « le langage de la Géodésie ». Ceci lui permet de donner une formule pour S_1 en fonction des éléments de longueur sur la sphère et sur le sphéroïde. Cette formule fait donc intervenir la géométrie du sphéroïde, alors que S_1 apparaissait d'abord seulement comme un auxiliaire de calcul dans un contexte mécanique plus que géométrique.

Les deux pages d'interprétation géométrique se caractérisent non seulement par ce changement de références mathématiques, passant de calculs menés en des termes issus de la mécanique à une approche plus géométrique, mais également par une rupture nette du style de discours. La partie calculatoire est caractérisée par les expressions : « Formons l'équation », « suppposons », « posons », « nos équations deviendront », « nous pouvons écrire », « nous pouvons remplacer », « on conservera », « on remplacera ». Toutes ces expressions sont des expressions directives. Au contraire, lorsque Poincaré cherche la signification géométrique de S_1, le texte devient descriptif, il montre un état de fait : « Rendons-nous compte », « nous voyons », « on aura », « Il est manifeste », « i et θ désigneront », etc. Seules quelques lignes de calcul dans le passage sur la signification géométrique contiennent à nouveau des tournures directives. Cette section du texte est de plus encadrée par une formule d'ouverture et une formule de clôture : « Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1 » puis « Telle est la signification géométrique de S_1. »[Poincaré(1905b), p. 50 et 52]

Ainsi, tant au niveau du sens que de la formulation, il y a bien un changement très net de type de discours.

Après cette première digression géométrique, Poincaré reprend les équations auxquelles il était parvenu. Le texte prend un style démonstratif, avec l'emploi à deux reprises de la formule « Il faut et il suffit ». Poincaré est alors ammené à introduire une nouvelle quantité, R, valeur moyenne de S_1. Comme S_1 précédemment, R apparaît donc d'abord comme un auxiliaire naturel du calcul. Le raisonnement de Poincaré lui permet de montrer que « les géodésiques fermées correspondent aux maxima, aux minima et aux minimax de la fonction R. »[Poincaré(1905b), p. 52]

À nouveau, Poincaré s'interrompt sur ces mots : « Il faut d'abord rechercher la signification géométrique de la fonction R. »[Poincaré(1905b), p.53]

Ici encore, il utilise le langage de la géodésie pour donner une signification concrète aux objets qui interviennent. Ceci lui permet finalement d'interpréter la fonction $R(i, \theta)$ comme la différence entre la longueur des grands cercles de la sphère et la longueur du « grand cercle astronomique » C, l'équivalent sur le sphéroïde du grand cercle de coordonnées i et θ.

La délimitation de la partie sur la signification géométrique de R est un peu moins nette que celle concernant S_1 précédemment, d'autant que Poincaré utilise dans la fin de la démonstration des objets qu'il a introduit dans le paragraphe sur l'interprétation géométrique de R. Cependant, on peut noter la reprise du résultat obtenu juste avant le début de l'interprétation géométrique, « Les géodésiques fermées répondront donc aux maxima, au minima et aux minimax de la fonction R », en utilisant l'interprétation géométrique : « Ainsi les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C. »[Poincaré(1905b), p.53] Là encore, l'interprétation géométrique de la fonction R se trouve donc finalement assez bien délimitée entre ces deux formules, et constitue une partie du texte distincte de la démonstration à proprement parler.

Cette dernière s'achève ensuite par le renvoi à un résultat d'*analysis situs* sur le nombre de points critiques d'une fonction définie sur la sphère, comme c'est le cas de R.

En résumé, on peut mettre en évidence deux parties du texte de la section 3, *Géodésiques d'un sphéroïde*, qui se distinguent du corps de la démonstration tant par les thèmes dominants, géométrie et langage de la géodésie *versus* calculs issus de la mécanique, que par le mode d'écriture. Ces deux passages sont nettement délimités, et on observe une rupture de style, directif et argumentatif *versus* descriptif, particulièrement forte au niveau du premier de ces deux passages. Enfin Poincaré donne explicitement le but de ces deux passages : « chercher la signification géométrique ».

Par ailleurs, à l'exception d'une référence, tout à fait à la fin de la démonstration, à un terme introduit seulement dans la signification géométrique, du point de vue logique ces deux passages ne sont pas nécessaires à la démonstration. On peut suivre l'argument analytique qui montre que les géodésiques fermées du sphéroïde correspondent aux extremums de la fonction R, puis utiliser le résultat d'*analysis situs* pour conclure qu'elles sont en nombre impair, sans savoir ce que représente cette fonction. Et dans la plupart des articles de géométrie aujourd'hui, quand il y a lieu de donner une interprétation géométrique, elle est plutôt placée en introduction, ou en commentaire. Pourtant, Poincaré souligne l'importance qu'elle a à ses yeux, et sa volonté de s'y intéresser dans le corps même de la démonstration, quand il écrit : « *Il faut d'abord*[24] rechercher la signification géométrique de R. »[Poincaré(1905b), p. 53]

Ainsi, le texte de Poincaré nous invite à nous poser la question du rôle de ces deux développements, en lien bien sûr avec la lecture que nous avons proposée, qui reconnaît dans cette démonstration une écriture sur paradigme. Or nous allons voir que non seulement notre lecture rend compte de cet intérêt porté à l'interprétation géométrique, mais que c'est même un avantage capital de ce mode d'écriture sur paradigme que d'offrir cette possibilité d'interpréter les étapes du calcul. De plus, cette importance de l'interprétation géométrique permise par le paradigme va nous permettre de ressaisir l'ensemble de l'article et d'en percevoir un principe unificateur.

Les caractéristiques des passages sur la signification géométrique relevées ci-dessus vont nous permettre de comprendre le rôle que jouent ces deux passages. Nous avons en effet montré :

- que ces passages sont descriptifs, et ne participent pas aux calculs ni à l'argumentation ;
- qu'ils sont cependant insérés au fur et à mesure des étapes de la démonstration ;
- qu'ils portent sur des quantités, S_1 et R, qui sont introduits comme des auxiliaires de calcul ;
- qu'ils concentrent l'utilisation des propriétés géométriques des objets étudiés, au contraire de la démonstration à proprement parler, laquelle est surtout calculatoire, et basée sur des principes de mécanique.

[24] C'est moi qui souligne.

Il me semble qu'on peut en conclure qu'il s'agit dans ces passages d'exploiter le caractère géométrique des objets étudiés pour *interpréter* au fur et à mesure les quantités que l'application de la méthode inspirée par celle de Lagrange conduit à introduire. Le vocabulaire choisi par Poincaré est celui de *signification géométrique*. Il s'agit donc de donner *sens* à la suite de calculs proposée. Ainsi le paradigme choisi fournit un domaine d'interprétation grâce auquel Poincaré peut, non seulement exposer la méthode de recherche des trajectoires fermées qui subsistent quand on perturbe un système qui en possède une famille continue, mais encore proposer une interprétation des étapes successives du calcul.

Le paradigme permet ainsi de mettre en lumière de l'intérieur la méthode proposée : on rend compte de cette façon de l'insistance de Poincaré à donner la signification géométrique avant même de poursuivre la démonstration.

Nous avions relevé dans la partie 2.2 comment le paradigme permet de *mettre en situation* une méthode, et montre ainsi comment différents cas peuvent être articulés en vue d'un résultat global. Il s'agissait là d'un éclairage de la méthode que nous pourrions qualifier d'extérieur : à partir d'une méthode indiquant comment traiter le cas d'une famille infinie de trajectoires fermées d'une part, le cas où les trajectoires fermées sont isolées et d'ordre fini d'autre part, l'application de cette méthode au problème des géodésiques montre comment articuler ces différents cas pour prouver un résultat sur le nombre de géodésiques. L'importance du cas d'une famille infinie de trajectoires périodiques en ressort éclairée : ce cas n'est pas seulement un cas anecdotique, il peut servir à initier un principe de continuité analytique.

Ici nous voyons un éclairage interne de la méthode : ce sont les étapes successives du calcul prescrit par cette méthode qui prennent sens.

Cette investigation du rôle de ces passages de signification géométrique souligne donc un avantage important que présente l'exposition d'une méthode grâce à un paradigme plutôt que de façon abstraite. En retour, nous découvrons donc une motivation probable des choix d'écriture de Poincaré. Il justifie en introduction son choix d'étudier les géodésiques convexes par le fait que c'est le problème « le plus simple » sur lequel mettre en œuvre de nouvelles méthodes d'étude des solutions périodiques des systèmes d'équations de la dynamique. On voit maintenant qu'à cette raison s'ajoute peut-être l'avantage que présente ce problème grâce à l'interprétation géométrique qu'on peut faire, non seulement des résultats, mais aussi de la méthode elle-même. Le choix d'un problème qui peut se formuler aussi bien en termes mécaniques qu'en termes géométriques ouvre un domaine d'interprétation qui permet une meilleure compréhension du raisonnement, du rôle et du sens de chacune des étapes du calcul. Le mode d'écriture par paradigme est donc intimement lié à cette insistance à donner la signification géométrique des quantités qui interviennent : le paradigme permet l'interprétation, qui permet en retour au paradigme de donner tous ses fruits.

Cette utilisation des propriétés géométriques des objets auxquels Poincaré applique ici des techniques de mécanique céleste ne se borne pas à cette section 3 de son article. Et nous allons voir que cette clef de lecture que nous proposons se révèle très fructueuse, puisqu'elle permet de mieux comprendre l'unité de l'article de Poincaré, non plus seulement au niveau des deux parties de la démonstration inspirée de la mécanique céleste, mais à l'échelle de l'article entier.

Dans les parties qui suivent la démonstration à laquelle je me suis particulièrement intéressée, Poincaré étudie les propriétés de stabilité des géodésiques dont il vient de montrer l'existence. Là encore, le vocabulaire vient des *Méthodes Nouvelles* : géodésiques *stables*, *instables de première, deuxième, troisième catégorie*. Poincaré revendique explicitement le parallèle entre les deux démarches, puisqu'il écrit : « L'analyse qui précède ne diffère pas de celle du n°347 du tome III de mon Ouvrage sur *les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. »[Poincaré(1905b), p. 63] Mais Poincaré peut en outre, dans l'article de 1905, exploiter le champ d'interprétation fourni par l'utilisation d'un paradigme.

C'est ainsi qu'il fait intervenir des notions géométriques spécifiques aux géodésiques pour interpréter les différentes sortes de stabilité. Remarquons d'ailleurs qu'il s'agit là d'une nouvelle forme d'interprétation. Celle que nous avons mise en évidence dans la section 3 de l'article de Poincaré consistait en une interprétation des étapes d'une méthode. Il s'agit maintenant d'éclairer le sens d'une propriété mathématique, de montrer à quoi correspond géométriquement la définition de la stabilité.

Poincaré utilise pour cela une partie des résultats qu'il prouve au début de son article, dans la partie 2, *Foyers et caustiques*. On pourrait à première vue trouver cette section inutile, ou du moins sans rapport direct avec le reste de l'article. Elle forme en effet une sorte de préambule purement géométrique, qui aborde la question des géodésiques d'une façon beaucoup plus traditionnelle[25]. Elle se rapproche de fait, par les thèmes abordés et les méthodes employées, des travaux du XIX^e siècle sur les géodésiques des surfaces plus que des travaux de mécanique céleste. Au contraire, nous avons mis en évidence la dépendance importante des sections suivantes de l'article de 1905 vis-à-vis des *Méthodes Nouvelles* en particulier. Mais l'utilisation de quelques uns des résultats établis dans cette première section pour interpréter géométriquement la notion de stabilité dans les sections suivantes montre en fait une grande cohésion. L'exploration préliminaire de propriétés géométriques de son paradigme permet à Poincaré de lui donner une plus grande force d'interprétation, et donc de se doter d'un outil plus puissant pour mettre ensuite en lumière les méthodes et les notions de mécanique céleste qu'il met en œuvre sur ce paradigme.

Nous pouvons relever enfin un dernier point d'interfécondation de la géométrie et de la mécanique céleste dans la deuxième démonstration que propose Poincaré de l'existence d'au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. Nous avons vu que la partie sur les géodésiques du sphéroïde prouve que les géodésiques fermées qui subsistent quand on déforme la sphère sont celles qui correspondent aux points critiques de la fonction R. Or l'interprétation géométrique de cette dernière conduit à y reconnaître, à un coefficient près, la longueur de certaines courbes correspondant aux grands cercles de la sphère, ces courbes que Poincaré appelle « grands cercles astronomiques ». En d'autres termes, on a fait apparaître une famille de courbes sur le sphéroïde, ces « grands cercles astronomiques » C, candidates pour représenter les géodésiques fermées qui subsistent. Ces dernières correspondront aux courbes C dont la longueur est minimale, maximale, ou minimax dans la famille.

Or l'idée-clef de la deuxième démonstration proposée par Poincaré est précisément de chercher une géodésique fermée sans point double sur une surface

[25] Voir [Nabonnand(1995)].

convexe quelconque comme la courbe de longueur minimale parmi une classe convenable de courbes sur cette surface. Il est donc possible que l'interprétation géométrique donnée par Poincaré dans la section 3 soit à l'origine de cette deuxième démonstration, qui fait l'objet de la section 7.

Une étude détaillée permettrait ensuite de montrer que cette deuxième démonstration est à nouveau une occasion pour Poincaré de creuser l'étude de la correspondance entre la notion de stabilité et les propriétés géométriques des géodésiques.

On voit donc en conclusion que les liens entre mécanique céleste et géodésiques dont témoigne le texte de 1905 sont riches et subtils. On ne peut en aucun cas subordonner entièrement cet article de Poincaré à ses recherches en mécanique céleste, en n'y voyant que l'exposé de méthodes qui lui sont destinées. Poincaré démontre des résultats de grand intérêt sur les géodésiques des surfaces convexes. Certains arguments employés, principalement dans la section sur les foyers et les caustiques, puis dans la deuxième démonstration, sont purement géométriques. Cependant, mon analyse révèle à quel point Poincaré semble lier fortement les deux domaines, et dans quelle mesure les parties plus géométriques sont utilisées ensuite dans une perspective de mécanique céleste, pour interpéter les méthodes et les notions présentées. En retour, cette interprétation de la première démonstration est peut-être à l'origine de l'idée, géométrique, de la deuxième démonstration. Il y a ainsi un jeu constant de fécondation réciproque, qui n'est pas exactement symétrique : les aspects géométriques ont une fonction plutôt interprétative, orientée vers une meilleure compréhension des méthodes et définitions techniques fournies, elles, par la mécanique céleste.

3 Perspectives

3.1 Paradigme et intuition : un éclairage sur le style de Poincaré

Notre étude de l'article de 1905 nous a amenés à mettre à jour un style d'écriture très particulier. Poincaré utilise les possibilités offertes par le paradigme des géodésiques des surfaces convexes pour développer et interpréter une méthode et des notions issues de ses travaux de mécanique céleste.

Cette prise en compte d'un style d'écriture particulier nous a permis un approfondissement progressif extrêmement fructueux de notre lecture de l'article de 1905. Nous avons pu ainsi éclairer les liens entre les diverses sections de cet article, mettre en lumière son unité, et mieux comprendre la nature des rapports qu'il entretient avec la mécanique céleste.

La question qui se pose naturellement maintenant est de savoir si ce type d'écriture est marginal chez Poincaré, ou si nous en tenons là une des clefs de ses techniques de travail. Je ne peux bien sûr pas donner une réponse exhaustive, n'ayant étudié qu'une petite part de son œuvre, mais on peut d'ores et déjà relever plusieurs résonances de cette écriture paradigmatique, qui semblent indiquer qu'on a affaire à un phénomène plus général que le seul article de 1905.

Les possibilités d'interprétation fournies par le paradigme, et l'aide à la compréhension qui en résulte rencontrent en effet l'accent que Poincaré met régulièrement sur l'intuition. Il le formule explicitement dans ses travaux philosophiques, particulièrement au début de *La valeur de la science* [Poincaré(1970)]. L'enjeu affirmé en est bien la compréhension :

> « L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et veut savoir pourquoi il l'a choisie.
>
> (...)
>
> Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur ; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur. » [Poincaré(1970), p. 36–37]

Ainsi, pour Poincaré, il ne s'agit pas seulement de démontrer, mais aussi de comprendre ; et ceci non seulement pour celui qui trouve la démonstration, mais encore pour celui qui veut la lire. Le procédé d'écriture que nous avons reconnu dans l'article de 1905, et l'insistance de Poincaré à donner l'interprétation géométrique des quantités introduites au fur et à mesure, se place dans la même perspective : il permet au lecteur de *comprendre* le sens des calculs et non seulement leur validité.

Nous pouvons relever de nombreuses autres particularités du style de Poincaré qui concourent à donner prise à l'intuition, et/ou à mieux faire comprendre.

Il y a d'abord un soin apporté explicitement au choix du vocabulaire.

Nous avons déjà relevé l'utilisation du « langage de la géodésie » dans les passages sur la signification géométrique de S_1 et R. On peut même remarquer que c'est un choix de Poincaré, celui de la correspondance entre les points de la sphère et ceux du sphéroïde, qui lui permet d'employer ce vocabulaire. Poincaré reconnaît cette liberté : « Le choix de cette correspondance est arbitraire dans une assez large mesure ». Ensuite, après avoir fixé une correspondance, il montre que son choix rend possible l'utilisation d'un vocabulaire adapté, plus imagé : « Dans ces conditions, si l'on veut me permettre le langage de la Géodésie, u et v représenteront sur le sphéroïde la colatitude et la longitude *astronomiques.* » [Poincaré(1905b), p. 50]

Dans la section 2 du même article de 1905, Poincaré utilise également un vocabulaire imagé emprunté cette fois à l'art des chemins de fer. Il distingue ainsi plusieurs types de foyers en fonction de l'allure de la courbe sur laquelle ils se trouvent : foyers *en pointe, en talon.*

C'est peut-être la même volonté de faire comprendre qui s'exprime dans la rédaction d'un autre passage de l'étude des géodésiques. Poincaré montre au début de la section 4 que les géodésiques fermées forment une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace convenablement choisi. L'argument qu'il donne, tel quel, est très imprécis, et même faux si l'on adopte un point de vue plus rigoureux. Roger Garnier, en éditant le tome 6 des Œuvres de Poincaré, juge d'ailleurs nécessaire de le préciser par une longue note. Cependant, l'argument de Poincaré va directement à l'idée essentielle, et fixe immédiatement l'intuition. Poincaré montre ainsi l'existence de cette courbe analytique en quelques mots en évitant les détails techniques qui peuvent retarder le lecteur sans nécessité réelle pour la compréhension de l'essentiel de la démonstration.

Ainsi, la rédaction de Poincaré privilégie l'exposition des idées et la description des phénomènes, aux dépens de l'exactitude formelle. Ce mode d'exposition est d'ailleurs encore couramment utilisé aujourd'hui, particulièrement dans les présentations orales. Le but visé n'est pas alors de présenter tous les détails techniques, mais d'aller rapidement aux idées importantes. Ce procédé, qui consiste à montrer les idées importantes en laissant de côté les points techniques non essentiels rejoint un des avantages de l'utilisation d'un paradigme : l'étude d'un exemple permet en effet souvent de limiter l'appareillage technique nécessaire à l'expression d'un théorème ou d'une démonstration dans un cadre abstrait.

Nous voyons ainsi apparaître, à différents niveaux du texte de 1905, des caractéristiques qui tendent toutes à *montrer* les phénomènes mathématiques en jeu, plus qu'à assurer la rigueur logique de la démonstration : utilisation d'un vocabulaire imagé, définition rapide de la courbe $\mathcal{C}$, exploration de la signification géométrique. Nous avons montré combien la dernière caractéristique est particulièrement liée à l'utilisation d'un paradigme, et combien tous ces aspects du texte de Poincaré semblent renvoyer à une même volonté de faire comprendre.

Or Poincaré utilise un paradigme à une autre occasion, de façon explicite, en motivant lui-même ce choix par la volonté de faire comprendre.

On trouve dans les publications de Poincaré deux démonstrations du théorème de récurrence des trajectoires : dans le mémoire *sur le Problème des trois corps et les équations de la dynamique*[26], puis quelques années plus tard dans le troisième tome des *Méthodes Nouvelles*. La présentation de la démonstration entre les deux rédactions a changé sensiblement, précisément dans le sens de ce que nous venons de rencontrer.

La première version, celle du mémoire *sur le problème des trois corps ...*, est écrite dans des termes abstraits, et porte directement sur le problème des trajectoires d'un système d'équations différentielles. Dans les *Méthodes Nouvelles*, en revanche, Poincaré choisit d'exposer d'abord la démonstration dans un autre contexte : au lieu de travailler sur l'ensemble des trajectoires d'un système d'équations différentielles, il considère le mouvement d'un liquide dans un vase. De cette façon, les deux conditions principales d'application du théorème, à savoir la conservation du volume (ou d'un invariant intégral plus général), et le fait que les trajectoires restent dans un espace borné, sont directement saisies par l'intuition physique : la conservation du volume résulte de l'incompressibilité du liquide, et le confinement dans une région bornée de l'espace est matérialisé par le vase qui contient le liquide.

Poincaré, ici, précise la raison de ce choix d'exposition : « Pour mieux faire comprendre le principe de la démonstration, je vais d'abord prendre un exemple simple. Considérons un liquide enfermé dans un vase de forme invariable et qu'il remplit complètement. (...) » [27]. Il présente donc la démonstration sur ce qu'il

[26] Voir [Barrow-Green(1994)] pour l'histoire de ce texte. Le théorème de récurrence figure également dans la première version, non publiée, de ce mémoire, mais seulement sous une forme plus faible qui nous intéresse moins ici. Je reviendrai à une étude plus précise des trois versions dans un travail ultérieur.

[27] [Poincaré(1892–1899)], tome III, p. 142.

appelle explicitement un « exemple », avant de poursuivre : « Jusqu'ici, nous nous sommes bornés à un cas très particulier, celui d'un liquide incompressible (...). Mais tous les résultats précédents sont encore vrais dans des cas beaucoup plus étendus sans qu'il y ait rien à y changer, non plus qu'aux raisonnements qui y conduisent. (...) [Il énonce ensuite le résultat dans un cadre plus général] Il n'y a d'ailleurs rien à changer aux démonstrations qui précèdent. Nous retrouverons, par exemple, l'inégalité (...). Nous pouvons en déduire les mêmes conséquences. »[28]

Il y a donc un choix explicite de présenter la démonstration sur un exemple, plutôt qu'abstraitement. Et ce choix est renforcé par le fait que dans un texte antérieur, Poincaré écrit la même démonstration directement dans une formulation plus abstraite.

Poincaré motive lui-même ce choix, en présentant la deuxième rédaction, en des termes que nous pourrions appliquer à l'article de 1905. Il s'agit de « mieux faire comprendre le principe de la démonstration ». Poincaré insiste ensuite sur le fait que la démonstration dans le cas général se déroule exactement de la même façon, et souligne ainsi la portée générale de la démonstration effectuée dans le cas particulier. Il ne donne d'ailleurs pas de nouvelle démonstration après avoir formulé le théorème général, mais se contente de réécrire quelques résultats intermédiaires particulièrement intéressants. Poincaré se prononce donc sur l'avantage net, pour la compréhension, qu'il trouve à présenter la démonstration sur un paradigme.

La façon dont se manifeste cet avantage pour la compréhension est très claire dans cet exemple. La présentation de la démonstration permet en effet à Poincaré de mettre en relief, mieux que ne saurait le faire l'expression abstraite, la façon dont interviennent les hypothèses. Le texte en porte la marque, puisque Poincaré, tout au long de la démonstration, souligne l'équivalence entre l'incompressibilité du liquide et l'existence d'un invariant intégral : nous lisons par exemple « L'incompressibilité du liquide ou, ce qui revient au même, l'existence de l'invariant intégral nous montre (...) ». Or l'existence de l'invariant intérgral est la forme abstraite que prend l'hypothèse dans le théorème général. Poincaré annonce donc ainsi la généralisation qu'il a en vue tout en interprétant cette condition à l'aide de son paradigme.

Nous trouvons donc dans cette deuxième rédaction du théorème de récurrence une confirmation de notre analyse du mémoire sur les géodésiques. Une démonstration peut être présentée sur un paradigme plutôt qu'abstraitement sans que sa généralité soit altérée : Poincaré le souligne à propos du théorème de récurrence, et nous avions reconnu que c'est dans cette lumière qu'il faut lire l'article de 1905. De même, les caractéristiques qui sont mises en évidence au sujet du théorème de récurrence rejoignent l'analyse que nous avons faite de l'utilisation du paradigme des géodésiques. Poincaré souligne en effet dans les *Méthodes Nouvelles* la simplicité de l'exemple du liquide dans le vase, comme il insiste sur le fait que le problème des géodésiques est le plus simple des problèmes de dynamique. La considération du mouvement d'un liquide dans un vase lui permet ensuite de donner un sens physique concret aux hypothèses abstraites du théorème général, de même que nous avons montré l'importance qu'il donne à l'interprétation géométrique dans l'article de 1905, qui permet de donner le sens géométrique des étapes successives du calcul. C'est donc bien la volonté de

[28]Ibid, p. 155-156.

faciliter la compréhension qui le conduit en 1905 à adopter un mode d'écriture comparable à celui du théorème de récurrence dans les *Méthodes Nouvelles*.

Notre étude révèle donc tout un ensemble de caractéristiques jouant à différents niveaux et dans plusieurs textes de Poincaré, qui sont toutes orientées vers la compréhension des phénomènes mathématiques étudiés. Dans la démonstration du théorème de récurrence, l'utilisation du paradigme fait appel de façon particulièrement évidente à l'intuition sensible, puisqu'elle permet de faire apparaître les hypothèses principales d'un théorème en termes physiques. Ainsi cet ensemble de textes où Poincaré exprime sa conception de l'activité mathématique. Il serait intéressant de comparer plus avant cette pratique que l'on peut mettre au jour en étudiant la production mathématique avec les ouvrages philosophiques de Poincaré : nous touchons là à un point charnière où philosophie des sciences et histoire des mathématiques peuvent s'éclairer l'une l'autre.

Relevons d'ailleurs que Poincaré donne le titre de *Méthodes* à son ouvrage principal de mécanique céleste. Il annonce donc d'emblée qu'il ne vise pas à exposer une *théorie* des équations de la dynamique ou de la mécanique céleste. Ce choix de terminologie est sans doute à mettre en lien avec la forme de généralité que nous avons rencontrée dans l'article sur les géodésiques comme dans la démonstration du théorème de récurrence. Une *méthode* est, sans doute plus qu'une théorie, susceptible d'être appliquée à diverses situations ; et si ces méthodes sont annoncées comme orientées vers la mécanique céleste, nous avons montré que Poincaré ne juge pas toujours nécessaire de les présenter sur des problèmes de mécanique céleste.

3.2 Un mode de pratique des mathématiques à part entière

Poincaré n'est pas le seul mathématicien à percevoir l'intérêt qu'il peut y avoir à exprimer la généralité grâce à un paradigme plutôt que par l'abstraction. Cette distinction épistémologique entre généralité et abstraction a déjà été mise en évidence dans l'étude de traditions tout à fait différentes. K. Chemla [Chemla(2003)] montre que les textes chinois anciens, quoique ne traitant à première vue que de problèmes particuliers, pour lesquels ils donnent des procédures permettant de trouver la solution, visent une certaine généralité. C'est en tout cas ce qu'en attendent leurs lecteurs, comme le prouve le commentaire de Lui Hui (IIIe siècle) aux *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (*Jiuzhang suanshu*, Ier siècle). K. Chemla étudie en détail l'unique cas où le texte ancien donne une procédure qui utilise des particularités du problème considéré pour donner une résolution plus simple. Le commentateur relève cette faiblesse et ajoute une procédure plus générale — exprimée cependant sur le même exemple particulier. K. Chemla montre ainsi que chaque algorithme exposé sur un problème particulier est conçu comme devant résoudre tous les problèmes similaires.

Nous retrouvons là précisément le phénomène rencontré dans l'article de Poincaré. C'est en effet en constatant que notre auteur n'exploite pas le cas de l'ellipsoïde pour conclure plus rapidement le principe de continuité analytique que nous avons été amenés à reconnaître la portée plus générale de cette démonstration. De même, c'est l'application avec laquelle Lui Hui s'attache à ne pas utiliser les particularités du problème étudié qui montre l'importance qu'il accorde à la généralité des procédures présentées.

K. Chemla cite ensuite un passage où les commentateurs chinois expliquent les raisons à leurs yeux de présenter les algorithmes en relation avec les paradigmes que constituent les problèmes particuliers :

> « Cette procédure est universelle, mais il est difficile de la faire comprendre avec des expressions abstraites *(kongyan)* ; c'est pourquoi elle est délibérément liée au cas des millets pour éliminer cet obstacle. »

Cette explication ne peut pas manquer de rappeler la façon dont Poicnaré introduit l'exemple du mouvement d'un liquide pour présenter la démonstration du théorème de récurrence : « pour mieux faire comprendre le principe de la démonstration, ... ». La suite du commentaire de K. Chemla s'applique tout aussi bien à Poincaré. Cette remarque du commentateur chinois montre la valeur qu'il accorde à l'abstraction, de même que la première rédaction par Poincaré de la démonstration du théorème de récurrence, ou encore que l'exposé théorique sur l'étude des solutions périodiques dans les *Méthodes Nouvelles*. Cependant, les deux mathématiciens considèrent que cette valeur est en conflit avec une autre exigence, celle de permettre au lecteur de comprendre le mécanisme de la procédure ou de la démonstration. L'utilisation d'un paradigme fournit, elle, un domaine d'interprétation qui permet d'éclairer la signification des étapes successives de la procédure ou de la démonstration.

3.3 Problématiques ouvertes par ce type d'écriture mathématique

L'écriture de la généralité au moyen d'un paradigme suppose que le lecteur reconnaisse cette caractéristique du texte, et détermine lui-même le champ d'application de la méthode présentée. Nous avons vu que Poincaré rend explicite la généralité de la démonstration du théorème de récurrence qu'il présente sur un paradigme dans les *Méthodes Nouvelles*. Par contre, dans l'article sur les géodésiques, les indices qui nous ont conduits à cette lecture sont plus discrets. L'introduction annonce une perspective plus générale que les géodésiques, puis la non-exploitation du cas particulier de l'ellipsoïde conduit à remettre en cause le statut apparent de la démonstration. Le commentaire de Roger Garnier à cet article de 1905 dans le tome VI des Œuvres signale qu'il « trouve son origine dans les problèmes difficiles posés par les solutions périodiques de la Mécanique céleste », mais la suite témoigne que la lecture de R. Garnier diffère de celle que j'ai proposée ici. Il écrit en effet :

> « L'idée maîtresse du Mémoire est l'application d'une méthode de continuité : envisageons une famille continue de surfaces convexes analytiques, dépendant analytiquement d'un paramètre t (ou μ) et reliant une surface donnée ($t = 1$) à la sphère ou à l'ellipsoïde ($t = 0$). Pour t (ou μ) infiniment petit, on peut procéder comme en Mécanique céleste (§ 3) et l'on peut chercher à étendre par continuité les résultats obtenus au cas de t quelconque (§ 4). » [Poincaré(1916–1954), tome VI, p. 85]

Ainsi, R. Garnier n'a pas accordé la même importance que moi au choix explicite de Poincaré de relier une surface quelconque à un *sphéroïde*, et justement pas à une *sphère* ni à un *ellipsoïde*. En partant d'une sphère, Poincaré aurait perdu l'hypothèse de généralité implicite dans la partie sur le principe de continuité analytique[29] ; en utilisant l'ellipsoïde, il aurait perdu la portée générale de la démonstration, en rendant inutile la section 3. R. Garnier considère d'autre part le lien avec la mécanique céleste essentiellement par l'utilisation de la méthode de Lagrange, puisque qu'il cantonne ce lien à la section 3, sans reconnaître l'origine, dans les *Méthodes Nouvelles*, des *deux* sections 3 et 4.

Ce sixième volume des Œuvres paraît en 1953, donc déjà un demi-siècle après la rédaction de l'article sur les géodésiques ; il serait intéressant de trouver des témoignages de la lecture qu'ont fait les contemporains de Poincaré de l'article de 1905 : ont-ils reconnu l'usage d'un paradigme ? C'est une question pour laquelle nous devons chercher des matériaux.

D'autre part, c'est probablement cette lecture différente qui a conduit les éditeurs des Œuvres à inclure ce texte dans la section consacrée à la géométrie. Or l'article de 1905 apparaît très isolé dans cette petite section des Œuvres. Au contraire, j'ai montré à quel point la démonstration que nous avons étudiée est à la fois issue de, et tournée vers, la mécanique céleste : elle vient compléter la présentation faite dans les *Méthodes Nouvelles* d'un procédé qui permet d'étudier le comportement d'une trajectoire périodique quand on perturbe le système. Plus généralement, nous avons vu que cette orientation vers la mécanique céleste, même si elle ne rend pas compte de tous les résultats contenus dans cet article de Poincaré, imprègne l'article entier, et qu'elle est explicite dans l'introduction.

D'ailleurs, quand on parcourt le texte écrit en 1901 par Poincaré à la demande de Mittag-Leffler pour présenter ses travaux scientifiques, on remarque que Poincaré ne parle de géodésiques que dans la section consacrée à la mécanique céleste[30]. Malheureusement, ce texte a été écrit avant l'article *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*. Nous ne pouvons donc pas savoir comment Poincaré lui-même aurait situé ce dernier dans son œuvre.

Il me semble cependant assez clair que cet article, du point de vue de l'œuvre de Poincaré, aurait trouvé un contexte plus pertinent dans le tome 7 des Œuvres, avec les travaux de mécanique céleste. C'est en tous cas ce contexte qui permet de l'interpréter véritablement.

Au-delà de la question précise de la place de *cet* article dans les Œuvres de Poincaré — question sans conséquence tant qu'il n'y a pas de projet de réédition des œuvres complètes de Poincaré, notre travail invite à une réflexion sur les modalités du rattachement d'un article à tel ou tel domaine des mathématiques. Je laisse de côté ici les problèmes posées par la différence entre les catégories employées par les auteurs et les nôtres. Le mode d'écriture sur paradigme que nous avons mis en évidence pose en effet une autre question, qui a peut-être été moins étudiée. En effet, lorsqu'un auteur choisit de présenter un théorème, une méthode, un type de calcul, sur un exemple paradigmatique, le texte produit relève de deux domaines distincts, avec autant de légitimité. Le développement

[29] Voir p. 15. R. Garnier reproche d'ailleurs ensuite à la démonstration de Poincaré d'oublier les cas particuliers qui peuvent se produire.

[30] [Poincaré(1921)], p. 106.

du paradigme reçoit toute sa force de l'exploitation parallèle du domaine d'interprétation d'où est tiré l'exemple, et de celui qui fournit la méthode, ou auquel elle est destinée, comme nous l'avons montré à la fin de la partie 2.3.

Plus largement, face à ce mode d'écriture, nous avons été conduits à adopter une lecture qui distingue la méthode du domaine d'application, de façon à faire ressortir leurs contributions respectives. Il me semble qu'une clef de lecture semblable permettrait d'aborder le texte de la *Commentatio* de Riemann[31] d'une façon nouvelle. Si ce mémoire traite en effet de la conduction de la chaleur, il contient toute une deuxième partie qui fait l'objet d'un débat historiographique. Certains y lisent un développement de ses idées géométriques, tandis que d'autres contestent cette lecture. Effectivement, les calculs exposés dans la deuxième partie répondent à la fois à la question sur la conduction de la chaleur proposée par l'Académie, et au problème que pose la classification des géométries. J'ai l'intention, dans un prochain article, d'exploiter la piste de lecture développée grâce à l'article de Poincaré pour proposer une nouvelle approche de ce mémoire de Riemann.

En conclusion, ce travail montre la diversité des lectures qu'on peut faire d'un même texte. L'éclairage apporté par un contexte se révèle capital, et complexe. Il ne s'agit pas seulement en effet de donner un cadre de lecture, mais d'analyser les liens entre le texte étudié et le contexte proposé. Les différences que nous avons notées entre la lecture de R. Garnier et celle que nous proposons montrent combien cet éclairage n'est pas donné d'avance. Le deuxième enjeu qui se dégage est le développement d'un type de lecture particulier pour saisir la portée réelle du discours. En effet, comme nous l'avons constaté, la compréhension du contenu scientifique lui-même ne met pas seulement en jeu des connaissances mathématiques. Il est nécessaire d'interroger le texte pour en évaluer la portée, et mettre à jour des niveaux de généralité qui ne sont pas nécessairement apparents.

Annexes

A. Plan global du mémoire

1. *Introduction*
2. *Foyers et caustiques*

   Poincaré aborde tout d'abord le problème des géodésiques sur les surfaces convexes d'une façon assez traditionnelle, en étudiant les foyers et les caustiques (dans le langage moderne, le lieu conjugué), puis les lignes de partage (lieu de coupure).

   Je renvoie à l'article de P. Nabonnand [Nabonnand(1995)] pour plus de détails sur la place de cette étude de Poincaré dans l'exploration, dès la première partie du XIX^{e} siècle, des propriétés du lieu conjugué[32] et du lieu

[31] Il s'agit d'un mémoire soumis par Riemann en 1861 pour un prix de l'Académie des Sciences de Paris, sur la conduction de la chaleur. Le titre entier est « Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab Ill$^{\mathrm{ma}}$ Academia Parisiensi propositae : [Suit l'énoncé de la question, en français] ». Ce travail de Riemann n'a été publié qu'en 1876 dans ses œuvres complètes [Riemann(1876)].

[32] Au XIX^{e} siècle, le lieu conjugué apparaît sous l'appellation de points d'intersection de géodésiques infiniment proches, ou d'enveloppe des géodésiques.

de coupure.

3. *Géodésiques d'un sphéroïde*
   (Voir 1.1.1 et annexe B)
4. *Le principe de continuité analytique*
   (Voir 1.1.2 et annexe C)
5. *Stabilité et instabilité*
   Par analogie avec la mécanique céleste, Poincaré distingue géodésiques stables et instables parmi les géodésiques fermées dont il a montré l'existence au paragraphe précédent. La stabilité est définie ici en fonction du comportement des géodésiques proches de la géodésique fermée que l'on étudie, suivant les catégories définies dans les *Méthodes Nouvelles* : géodésiques stables, géodésiques instables de première, deuxième, ou troisième catégorie. Il cite d'ailleurs explicitement les chapitres correspondants du troisième tome des *Méthodes Nouvelles*. Par un argument de continuité analytique du même type que celui de la partie 4, il démontre :

   > « *(...) si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double, l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant;* il est donc le même que pour l'ellipsoïde, *il est donc égal à* 1.
   >
   > *Sur une surface convexe, il y a donc toujours au moins une géodésique fermée stable sans point double.* »[33]

6. *De quelques types de géodésiques fermées*
   Ici encore, Poincaré énonce des résultats en renvoyant aux *Méthodes Nouvelles* pour les détails de méthode. Il montre en particulier comment les séries continues qui contiennent des géodésiques fermées stables engendrent de nouvelles séries continues : il suppose qu'on fait varier le paramètre t de la famille de surfaces Σ, et qu'on suit une géodésique fermée stable au cours de la déformation. Pour chaque valeur de t telle que le produit de la longueur de cette géodésique par son exposant caractéristique[34] est commensurable avec $i\pi$, deux nouvelles géodésiques fermées apparaissent pour $t > t_0$ (ou bien pour $t < t_0$). Ces deux géodésiques se confondent entre elles, et avec la géodésique initiale parcourue n fois, pour $t = t_0$; elles appartiennent à une même série continue, dite série continue engendrée par celle de la géodésique initiale (voir figure 5) ; l'une est instable et l'autre stable (cette dernière engendrera donc à son tour de nouvelles séries continues suivant le même processus). Il étudie ensuite le nombre de points doubles de ces deux nouvelles géodésiques, ainsi que le nombre de leurs points d'intersection avec la géodésique de la série initiale.
7. *Existence d'une géodésique fermée*
   Poincaré présente une deuxième démonstration du fait qu'il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double sur une surface convexe. Elle repose sur la propriété qu'une géodésique fermée sans point double partage la surface en deux régions, et que la courbure totale de chacune de ces deux régions est 2π (formule de Gauss-Bonnet). Il propose donc :

[33] [Poincaré(1905b)], p. 66.

[34] L'exposant caractéristique est une quantité qui apparaît dans la définition de la stabilité ; pour les solutions stables, il est imaginaire pur.

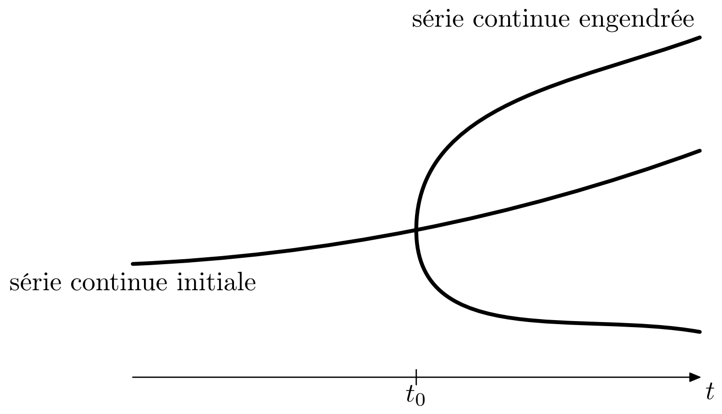


Fig. 5 – Les nouvelles séries continues engendrées par les branches de géodésiques stables.

> « Considérons maintenant toutes les courbes fermées sans point double qui partagent la surface en deux régions dont la courbure totale est 2π. La longueur de l'une de ces courbes fermées ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée ; car si cette courbe se réduisait à un contour infiniment petit, la courbure totale de l'une des régions limitées par ce contour serait elle-même infiniment petite.
>
> Parmi ces courbes, il y en a donc une qui est plus courte que toutes les autres, et je dis que c'est une géodésique. »
> [Poincaré(1905b), p. 73–74]

Il donne un aperçu de la démonstration du fait qu'une telle courbe est bien une géodésique, puis envisage deux objections que l'on pourrait faire à ce raisonnement, et détaille la réponse à l'une d'elles, renvoyant à des travaux de Hilbert pour l'autre.

8. *Discussion du minimum*

   Poincaré continue à étudier les propriétés de la courbe de longueur minimum trouvée dans la partie précédente. Il avait jusque là utilisé la condition de premier ordre exprimant le fait qu'on a un minimum ; c'est ce qui lui avait permis de montrer que la courbe obtenue est une géodésique sans point double. Il exploite dans cette dernière partie la condition de deuxième ordre, qui distingue un minimum d'un extremum quelconque.

   Il en déduit des liens entre les propriétés de stabilité et certaines propriétés géométriques de la géodésique obtenue dans la section précédente.

B. Démonstration du résultat local : 3. *Géodésiques d'un sphéroïde*

Description de l'argument principal

Poincaré commence par mettre les équations des géodésiques sous la forme canonique de Hamilton. Sur la sphère, il utilise le système de coordonnées qui lui servait déjà dans la première partie de son article à étudier les propriétés des foyers et des caustiques : à partir d'un point fixe O d'une surface, et d'une géodésique de référence issue de ce point, on repère un point M de la surface en se donnant u, longueur de l'arc OM sur une géodésique reliant O à M, et v, angle sous lequel cette géodésique coupe la géodésique de référence en O (voir figure 6). Ce sont en somme des coordonnées polaires géodésiques sur la surface (un même point est en général repéré par plusieurs couples (u, v)). L'élément d'arc est alors de la forme $ds^2 = du^2 + \sin^2 u \, dv^2$.

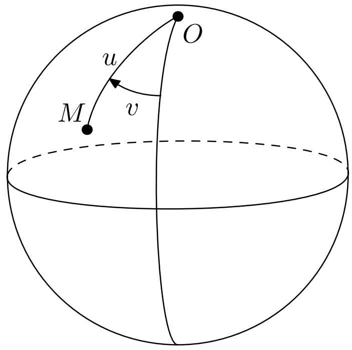


FIG. 6 – Coordonnées géodésiques polaires.

Pour une surface quelconque sur laquelle on a des coordonnées (u, v), l'élément d'arc est $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$, et l'énergie cinétique d'un point mobile est donc de la forme $T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)$. Poincaré introduit alors les coordonnées canoniques : $U = \frac{dT}{du'}$ et $V = \frac{dT}{dv'}$, dans lesquelles l'énergie cinétique s'écrit $T = \frac{1}{2}(\mathcal{E}U^2 + 2\mathcal{F}UV + \mathcal{G}V^2)$. Dans ce système de coordonnées, les équations des géodésiques s'écrivent sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{dT}{dU}; \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{dT}{dV}; \ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{dT}{du}; \ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{dT}{dv}.$$

Poincaré décrit ensuite la déformation de la sphère ronde de départ comme une variation des paramètres $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, c'est-à-dire de la métrique donnée par les paramètres E, F, G, qui leur sont liés. Il écrit ainsi $T = T_0 + \mu T_1$, où T_0 est l'énergie cinétique sur la sphère : $T_0 = \frac{1}{2}(U^2 + \frac{1}{\sin^2 u}V^2)$, et $T_1 = \frac{1}{2}(eU^2 + 2fUV + gV^2)$, où e, f et g sont des fonctions quelconques de u et v.

Il introduit ensuite de nouvelles coordonnées, par analogie avec les éléments elliptiques de la méthode de Lagrange.

Les géodésiques de la sphère ronde étant les grands cercles parcourus à vitesse constante, il prend comme coordonnées position–vitesse sur la sphère (voir figure 1, page 6) :

θ, longitude du nœud de l'orbite circulaire décrite par le point considéré si on le laisse se mouvoir sans contrainte depuis la position u, v avec la vitesse u', v' ;

i, inclinaison de cette orbite sur l'équateur ;

λ, distance du point au nœud sur l'orbite ;

ω, vitesse de circulation sur l'orbite.

Il pose ensuite $G = \omega \cos i$, et constate qu'alors $\omega \mathrm{d}\lambda + G\mathrm{d}\theta - U\mathrm{d}u - V\mathrm{d}v$ est une différentielle exacte[35], ce qui prouve que les coordonnées $\lambda, \omega, \theta, G$ sont encore des coordonnées canoniques, dans lesquelles les équations du mouvement, *i.e.* les équations d'une géodésique, s'écrivent donc :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{dT}{d\omega}; \ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{dT}{dG}; \ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{dT}{d\lambda}; \ \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\frac{dT}{d\theta}. \tag{3}$$

Le changement de variables a été défini pour la sphère ronde, mais comme Poincaré a défini les coordonnées de position u, v sur le sphéroïde à partir de celles sur la sphère, en considérant un changement de métrique, et non en donnant un sens géométrique à u et v sur le sphéroïde, le sphéroïde est paramétré par u et v sur le même domaine des paramètres[36], et l'on peut prendre les mêmes dépendances de $\lambda, \omega, \theta, G$ par rapport à u, v, U, V que pour le cas de la sphère, ce qui définit un nouveau système de coordonnées sur le sphéroïde[37]. La condition pour que le changement de variable soit canonique est bien entendu conservée (c'est le même changement de variables !), et les équations des géodésiques du sphéroïde dans les nouvelles coordonnées sont donc les mêmes, avec la différence que la dépendance de T par rapport aux coordonnées $\lambda, \omega, \theta, G$ a changé.

Poincaré remarque ensuite que u, v, $\frac{u'}{\omega}$, $\frac{v'}{\omega}$, $\frac{U}{\omega}$, $\frac{V}{\omega}$, donc aussi $\frac{T}{\omega^2}$, ne dépendent plus de ω. Il effectue donc le changement de variable $\omega t = \tau$, $T = \omega^2 S$, $T_j = \omega^2 S_j$.

Ce changement de variable conduit à l'équation $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 2S + \frac{dS}{di} \operatorname{cotg} i$, soit encore $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 1 + 2\mu S_1 + \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{di}$ en tenant compte de la valeur de S_0. Poincaré constate donc que, puisque μ est très petit, λ a comme valeur approchée $\tau +$ const, et qu'il est « préférable de prendre λ pour variable indépendante », ce qui conduit aux équations :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{\mathrm{d}\lambda}}{1 + 2\mu S_1 + \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{di}}; \ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{-\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di}}{1 + \mu S_1 + \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{di}}. \tag{4}$$

Comme Poincaré raisonne au premier ordre en μ, les équations (4) se réécrivent :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{d\lambda}; \ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di}. \tag{5}$$

Comme on considère μ très petit, les variations de i et θ au long d'une période de λ sont très petites, si bien qu'au premier ordre, on peut remplacer dans les seconds membres i et θ par leurs valeurs approchées (constantes)[38].

[35] Un peu de trigonométrie sphérique suffit ; Poincaré ne reproduit pas le calcul. En fait, l'expression en question est même identiquement nulle.

[36] Par exemple $u \in [0, \pi]$ et $v \in [0, 2\pi[$.

[37] C'est moi qui détaille ici : Poincaré se contente de dire qu'il prend sur le sphéroïde « des coordonnées nouvelles $\lambda, \omega, \theta, G$ qui sont liées à u, v, U, V par les mêmes relations que dans le cas de la sphère. » Il revient un peu plus loin sur la définition de u et v sur le sphéroïde, à l'occasion de la discussion sur la signification géométrique de S_1.

[38] Poincaré fait cette remarque avant d'écrire les équations 4, en même temps qu'il constate que λ a comme valeur approchée $\tau +$ const.

À cet endroit de son raisonnement, Poincaré s'interrompt et insère l'interprétation géométrique de S_1, que je reprendrai plus loin de façon à donner d'abord l'argument analytique en entier.

Ainsi, les seconds membres de (5) sont des fonctions périodiques de λ. Pour que la géodésique soit fermée — au premier ordre en μ toujours —, *i.e.* pour que i et θ soient également des fonctions périodiques de λ, il faut et il suffit que la valeur moyenne par rapport à λ de ces seconds membres soit nulle.

Pour étudier cette valeur moyenne, on développe S_1 suivant les cosinus et les sinus des multiples de λ, c'est-à-dire en série de Fourier, et on note R la valeur moyenne, c'est-à-dire le terme indépendant de λ :

$$S_1(\theta, i, \lambda) = R(\theta, i) + \sum_{n>0} (a_n(\theta, i) \cos n\lambda + b_n(\theta, i) \sin n\lambda)$$

Alors $\frac{dR}{di}$ est la valeur moyenne de $\frac{dS_1}{di}$ et $\frac{dR}{d\theta}$ celle de $\frac{dS_1}{d\theta}$; celle de $\frac{dS_1}{d\lambda}$ est nulle.

La condition de fermeture de la géodésique s'écrit donc au premier ordre :

$$\frac{dR}{di} = \frac{dR}{d\theta} = 0.$$

Les géodésiques fermées correspondent donc aux maxima, minima et minimax[39] de R.

Là encore, Poincaré insère un paragraphe d'interprétation géométrique de R ; j'y reviendrai plus bas.

Poincaré regarde R comme une fonction sur S^2, dont les valeurs en deux points opposés sont égales[40]. Dans un autre mémoire (*Sur les courbes définies par les équations différentielles* [Poincaré(1881)]), il a déjà étudié les points critiques d'une fonction sur la sphère, et il a montré que si a est le nombre de maxima, b le nombre de minima, et c le nombre de minimax d'une telle fonction, alors $a + b = 2 + c$. On en déduit que $a + b + c = 2 + 2c$; De plus, dans ce cas a, b et c sont des nombres pairs, et on obtient en divisant tout par 2 le nombre total de grands cercles qui sont points critiques de R : $a' + b' + c' = 1 + 2c'$ est un nombre impair.

Pour donner l'argument pertubatif d'un seul coup, j'ai sauté deux passages de cette partie du mémoire de Poincaré : avant d'écrire la condition de fermeture d'une géodésique, Poincaré fait une pause de deux pages pour réfléchir à « la signification géométrique de la fonction S_1 » qu'il a introduite à la place de la demi-force vive (énergie cinétique) T ; un peu plus loin, il s'en sert pour interpréter géométriquement la fonction R. Comme mon analyse le montre (voir 2.3), c'est une lecture réductrice de cette démonstration. Mais mon but dans cette annexe est seulement de présenter plus avant les mathématiques de l'article de 1905 pour le lecteur désireux de suivre la démonstration de Poincaré.

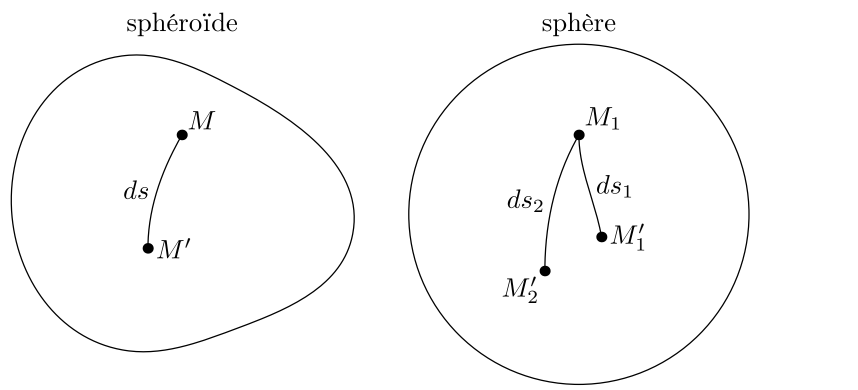
[39]Les minimax sont les points critiques qui ne sont ni des minima, ni des maxima, comme par exemple les points cols.

[40]Aujourd'hui on constaterait que les quantités i et θ sont les coordonnées d'un grand cercle de S^2, donc que R est une fonction définie sur $\mathbb{P}^2$, espace des grands cercles de S^2.

Signification géométrique de S_1

Le sphéroïde étant donné *a priori* comme une surface convexe de $\mathbb{R}^3$, il faut pour interpréter S_1 faire « correspondre les points du sphéroïde à ceux de la sphère », correspondance qui fixera la dépendance de T par rapport à μ. Poincaré signale que le choix de cette correspondance est largement arbitraire, mais que le plus simple est de faire correspondre les points où le plan tangent a même direction[41].

Ainsi si on considère un point M du sphéroïde, il lui correspond un point M_1 de la sphère. Sur la sphère, M_1 est repéré par des coordonnées (u, v), qu'on utilise également pour repérer M. Cela ne nous suffit pas puisque pour étudier les équations des géodésiques (comme les équations de la dynamique de façon générale), qui sont de degré deux, on utilise des coordonnées position–vitesse de façon à se ramener à des équations du premier degré. On considère donc deux points infiniment voisins M et M' sur le sphéroïde, de coordonnées (u, v) et $(u + u'dt, v + v'dt)$ auxquels correspondent M_1 et M_1' sur la sphère de mêmes coordonnées. Au couple de points (M, M') correspondent également des coordonnées (u, v, U, V) définies à partir de (u, v, u', v') par les formules classiques $U = \frac{dT}{du'}$ et $V = \frac{dT}{dv'}$. En revanche, sur la sphère, c'est T_0 qu'il faut utiliser dans ces formules, et les coordonnées (u, v, U, V) correspondent donc à un nouveau couple de points (M_1, M_2'). Les coordoonnées $(\lambda, \omega, \theta, i)$ ont été définies par les formules de changement de variables en fonction de (u, v, U, V) sur la sphère, elles sont donc les mêmes pour les couples de points (M, M') et (M_1, M_2'). Poincaré définit enfin u_0' et v_0' tels que (u, v, u_0', v_0') soient les coordonnées de (M_1, M_2') (voir figure 7).



$(M, M') : (u, v, u', v')$ $(M_1, M_2') : (u, v, u_0', v_0')$ $(M_1, M_1') : (u, v, u', v')$
(u, v, U, V) (u, v, U, V)
$(\lambda, \omega, \theta, i)$ $(\lambda, \omega, \theta, i)$

FIG. 7 – Correspondance des coordonnées sur la sphère et sur le sphéroïde.

Si l'on note maintenant ds l'arc MM', ds_1 l'arc M_1M_1' et ds_2 l'arc M_1M_2', l'énergie cinétique d'un mobile de coordonnées (u, v, u', v') sur le sphéroïde est

[41] Il s'agit donc d'utiliser l'application de Gauss pour mettre en bijection la sphère et le sphéroïde.

$T = \frac{ds^2}{2}$.

Poincaré pose ensuite $T_0 = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 \sin^2 u) = \frac{{ds_1}^2}{2}$, ce qui est une définition différente de celle du début de cette partie sur les géodésiques du sphéroïde. Je vais donc noter $T"_0$ à la place de T_0 pour éviter les confusions[42]. Il définit d'autre part $T'_0 = \frac{1}{2}({u'_0}^2 + {v'_0}^2 \sin^2 u) = \frac{{ds_1}^2}{2}$.

Il considère ensuite T_1, que je vais noter $T"_1$ pour la même raison que précédemment, tel que $T = T"_0 + \mu T"_1$. Il note enfin T'_1 ce que devient $T"_1$ quand on remplace u' et v' par u'_0 et v'_0[43].

Un calcul, au premier ordre en μ, dont les principaux ingrédients sont l'homogénéité de T, et un développement de Taylor par rapport à la différence $(u' - u'_0)$ — qui est de l'ordre de μ — le conduit à la formule : $T"_0 = \frac{\omega^2}{2} - 2\mu T"_1$. Il utilise alors la formule $T = T"_0 + \mu T"_1$ pour en déduire que $T = T'_0 - \mu T"_1$.

Il en tire $2T = T'_0 + T"_0$, d'où

$$2ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Puis il reprend la valeur de S_1 définie plus haut — donc à partir du T_1 initial, et non de $T"_1$ [44] :

$$S_1 = \frac{T - \omega^2}{\mu\omega^2}.$$

Il remplace alors T et ω^2 par ds^2 et ds_2^2 respectivement[45], ce qui donne[46] :

$$S_1 = \frac{ds^2 - ds_2^2}{\mu ds_2^2}.$$

En négligeant les puissances supérieures de μ, ceci conduit à la signification géométrique de S_1 qu'il cherchait[47] :

$$S_1 = \frac{2}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds_1}$$

Interprétation géométrique de R

La définition de R comme valeur moyenne de S_1 (en tant que fonction périodique de λ) donne directement :

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_1 d\lambda.$$

On intègre à i et θ constants, sur une période de λ, ce qui signifie que le point M_1 de la sphère décrit un grand cercle, et que le point M correspondant

[42]On attendrait $T_0 = \frac{1}{2}(U^2 + \frac{1}{\sin^2 u}V^2)$, c'est-à-dire $T_0 = \frac{1}{2}({u'_0}^2 + {v'_0}^2 \sin^2 u)$; on a donc ici $T'_0 = T_0$ (avec mes conventions), tandis que la quantité qu'il vient d'introduire, que je note $T"_0$, est différente.

[43]On vient de voir que $T_0 = T'_0$. En revanche, T'_1 est définit à partir de $T"_1$, et non par la formule $T = T'_0 + \mu T'_1$. Les quantités T'_1 et T_1 n'ont donc rien à voir.

[44]Poincaré fait une erreur d'un facteur 2 : la valeur exacte est $S_1 = \frac{T_1}{\omega^2} = \frac{T - T_0}{\mu\omega^2} = \frac{T - \omega^2/2}{\mu\omega^2}$.

[45]Avec à nouveau la même erreur d'un facteur 2 : T est égal à $\frac{ds^2}{2}$, et non à ds^2.

[46]La valeur exacte est $S_1 = \frac{ds^2 - ds_2^2}{2\mu ds_2^2}$.

[47]En réalité : $S_1 = \frac{1}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds_1}$.

du sphéroïde décrit ce que Poincaré appelle un « grand cercle astronomique » et qu'il note C, le lieu des points[48] du sphéroïde où le plan tangent est parallèle à une droite donnée, la droite de direction (i, θ).

Remplaçant S_1 par la valeur qu'on a calculée précédemment, on obtient[49] :

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{grand cercle}} \frac{2}{\mu} \frac{ds_1 - ds}{ds_1} d\lambda,$$

soit, en remarquant que $d\lambda = ds_1$ à μ près :

$$R = \frac{1}{\pi\mu}(s_1 - s),$$

où $s_1 = 2\pi$ est la longueur du grand cercle, et s celle de la courbe C. Ainsi, les minima, maxima et minimax[50] de R sont ceux de la longueur de la courbe C, et on retrouve la caractérisation des géodésiques comme extrêmales de la longueur parmi les courbes fermées sur le sphéroïde.

C. Démonstration du résultat global : 4. *Le principe de continuité analytique*

Poincaré veut maintenant étendre ce résultat local à toutes les surfaces convexes (strictement). Il appelle conditions A les conditions qu'il suppose satisfaites par toutes les surfaces qu'il va considérer : être convexe, analytique, avec des rayons de courbure restant compris entre des limites déterminées[51].

Il commence par énoncer sans démonstration qu'« *on peut toujours passer d'une telle surface à une autre d'une manière continue* », et plus précisément par une déformation analytique : il existe une fonction analytique $F(x, y, z, t)$ telle que $F(x, y, z, 0) = 0$ est l'équation de la première surface, $F(x, y, z, 1) = 0$ celle de la seconde, et que pour tout t, $F(x, y, z, t) = 0$ est l'équation d'une surface satisfaisant elle aussi aux conditions A. Poincaré note Σ la surface variable ainsi construite. Nous préciserons, quant à nous, Σ_t pour désigner la surface $F(x, y, z, t) = 0$ obtenue pour la valeur t du paramètre de déformation.

Poincaré donne ensuite une ébauche d'argument pour montrer que l'ensemble des géodésiques fermées sur la surface variable Σ est une courbe analytique dans un espace bien choisi :

Il considère une géodésique sur une surface Σ_t de la famille donnée par des équations $y = \varphi(x); z = \psi(x)$, qu'il repère par des données initiales y_0, z_0, y'_0, et z'_0 (les dérivées sont prises par raport à x) en $x = 0$. Le fait que cette géodésique soit fermée se traduit par des relations analytiques entre y_0, z_0, y'_0, z'_0 et t, relations qui définissent une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans l'espace à cinq dimensions considéré.

Cet argument est très rapide : pour qu'une géodésique soit définie par des équations $y = \varphi(x), z = \psi(x)$, il faut localiser à deux titres. C'est vrai seulement

[48] On peut aussi voir C comme le contour apparent du sphéroïde dans la direction (i, θ).

[49] La bonne valeur serait $R = \frac{1}{2\pi\mu}(s_1 - s)$.

[50] On voit bien ici qu'un facteur multiplicatif différent dans S_1 n'influe pas sur le nombre d'extremums.

[51] Implicitement, il demande que ces limites soient strictement positives. La convexité est donc toujours stricte, et les surfaces considérées sont compactes.

pour une portion de la géodésique, et seulement pour un voisinage d'une donnée initiale convenable, puisqu'il faut s'arranger (quitte à déplacer les surfaces Σ_t convenablement), pour que le plan $x = 0$ soit transverse à chacune d'elles, et que la direction donnée par y'_0 et z'_0 ne soit pas tangente au plan $x = 0$. De plus, Poincaré ne précise pas les relations analytiques qui définissent $\mathcal{C}$.

Roger Garnier, en éditant ce volume des *Œuvres*, rajoute une note pour rendre l'argument plus précis : il utilise une représentation paramétrique $x = x(u, y0, z0, m); y = y(u, y_0, z_0, m); z = z(u, y_0, z_0, m)$ où $m = \frac{y'_0}{z'_0}$, des géodésiques. La condition de fermeture se traduit par les relations $y(u, y_0, z_0, m) = y_0$ et $z(u, y_0, z_0, m) = z_0$ pour un u convenable. Après élimination du paramètre u, il obtient une équation en m. Il propose de définir C comme une courbe analytique dans l'espace à 4 dimensions $(y_0, z_0, m = y'_0/z'_0, t)$ au lieu de l'espace à 5 dimensions de Poincaré, ce qui laisse de côté les géodésiques pour lesquelles $z'_0 = 0$, et ne tient toujours pas compte des problèmes de transversalité.

Même ainsi, on prouve l'existence d'une courbe analytique seulement dans l'espace des paramètres incluant u ; la courbe $\mathcal{C}$ définie par Garnier est la projection d'une courbe analytique, qui n'est pas nécessairement une courbe analytique ; elle peut en particulier être dense sur la sous variété (de dimension 3) des $(y_0, z_0, y'_0, z'_0, t)$ représentant des vecteurs tangents aux Σ_t. Il faut donc garder le paramètre u dans la définition de $\mathcal{C}$. L'inconvénient est que ceci introduit dans $\mathcal{C}$ une infinité de représentants de chaque géodésique fermée, chacun correspondant au parcours de la géodésique un nombre de fois donné. Ces précisions ne changent rien à la validité de la suite de la démonstration de Poincaré.

Poincaré regarde ensuite plus précisément une branche de cette courbe analytique, $\mathcal{B}$. Au voisinage d'un point de $\mathcal{B}$ dans l'hyperplan $t = t_0$, il montre que les paramètres y_0, z_0, y'_0, z'_0 sont susceptibles d'un ou plusieurs développements, autant que de branches de $\mathcal{C}$ passant par le point considéré, chacun suivant les puissances de $(t - t_0)^{\frac{1}{q}}$. Si q est impair, il y a un point de la branche $\mathcal{B}$ pour chaque valeur de t dans un voisinage de t_0 ; en revanche, si q est pair, il y a deux points de la branche $\mathcal{B}$ pour $t < t_0$ et aucun pour $t > t_0$, ou inversement (voir figure 3, page 11).

Ainsi, si on regarde maintenant la branche $\mathcal{B}$ globalement, le nombre de géodésiques de cette branche sur une surface Σ_t ne peut varier que de deux unités quand on passe de $t < t_0$ à $t > t_0$ (il y a variation de deux unités pour les valeurs de t_0 où l'exposant q est pair). Poincaré dit de deux géodésiques d'une même surface Σ_t qui appartiennent à la même branche $\mathcal{B}$ qu'elles font partie d'une même *série continue*. Il conclut alors que :

> « *Le nombre des géodésiques fermées d'une surface Σ_t qui font partie de une, deux ou plusieurs séries continues déterminées est constamment pair ou constamment impair.* »[Poincaré(1905b), p. 56]

L'étape suivante de l'étude est de préciser quelles géodésiques peuvent se trouver dans une même série continue : Poincaré classe les géodésiques suivant le nombre et la disposition des points doubles, en faisant appel à l'*Analysis Situs*. En particulier, il montre que « *dans une même série continue, le nombre des points doubles d'une géodésique fermée demeure constant.* »[Poincaré(1905b), p. 56]. La seule possibilité de variation de ce nombre, compte tenu des propriétés géométriques des géodésiques, serait la dégénérescence d'une géodésique à points doubles en une géodésique qui possède moins de points doubles parcourue plusieurs fois, comme un limaçon de Pascal qui se réduirait à un cercle parcouru deux fois (voir figure 8).

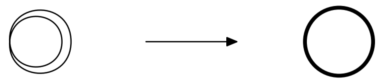


FIG. 8 – Dégénérescence d'une géodésique à un point double en une géodésique sans point double parcourue deux fois.

Poincaré montre alors en étudiant les coefficients d'un développement suivant les puissances de $(t - t_0)^{\frac{1}{q}}$ qu'une telle dégénérescence est possible, mais seulement pour une valeur ponctuelle de t_0, la géodésique retrouvant son aspect initial (et le nombre de ses points doubles) pour les valeurs suivantes de t (voir figure 9). Ainsi, « même dans ce cas, le nombre de points doubles ne peut varier ».

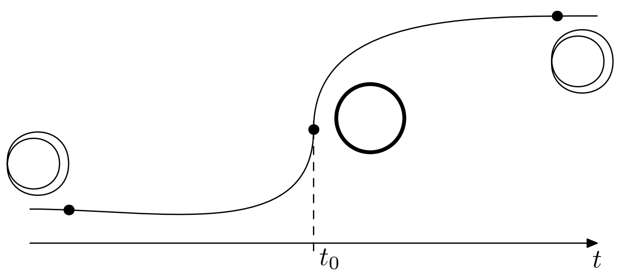


FIG. 9 – Une telle dégénérescence n'a lieu que pour une valeur ponctuelle du paramètre.

Après le nombre de points doubles, Poincaré étudie leur disposition, puis s'intéresse au nombre de points d'intersection entre deux géodésiques de deux séries continues déterminées, et montre qu'il est invariable.

Vient enfin l'application de ces principes : si l'on étudie les géodésiques fermées sans point double, on voit qu'elles forment une ou plusieurs séries continues : en vertu des propriétés énoncées précédemment, dans une série continue contenant une géodésique sans point double, aucune des géodésiques n'a de points doubles. Donc le nombre de telles géodésiques ne change pas de parité. Or on sait d'après la partie précédente que sur un sphéroïde, ce nombre est impair. Poincaré conclut donc :

> « *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double, et il y en a toujours un nombre impair.* »[Poincaré(1905b), p. 60]

Références

[Barrow-Green(1994)] June Barrow-Green. Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem. *Archive for History of Exact Sciences*, 48 : p. 107–131, 1994.

[Chemla(1998)] Karine Chemla. Lazare carnot et la généralité en géométrie. variations sur le théorème dit de Menelaus. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 : p. 163–190, 1998.

[Chemla(2003)] Karine Chemla. Generality rather than abstraction. The general expressed in terms of the particular in ancient China's mathematics. À paraître, 2003.

[Hadamard(1897)] Jacques Hadamard. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. *J. de Math. Pures et Appliquées*, 3(5) : p. 331–388, 1897. *Œuvres* [Hadamard(1968)], t. 4 : p. 1749–1806.

[Hadamard(1968)] Jacques Hadamard. *Œuvres*. Éditions du CNRS, Paris, 1968.

[Nabonnand(1995)] Philippe Nabonnand. Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIX^e siècle. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 1 : p. 159–200, 1995.

[Poincaré(1881)] Henri Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Journal de Liouville*, 7(3) : p. 405, 1881. *Œuvres* [Poincaré(1916–1954)], t. 1 : p.29.

[Poincaré(1890)] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique. *Mémoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar* II *de Suède*. *Acta Mathematica*, 13 : p. 1–270, 1890. *Œuvres* [Poincaré(1916–1954)], t. 7 : p. 262–479.

[Poincaré(1892–1899)] Henri Poincaré. *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899. Abrégé en *Méthodes Nouvelles*.

[Poincaré(1905a)] Henri Poincaré. *Leçons de mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1905a.

[Poincaré(1905b)] Henri Poincaré. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 : p. 237–274, 1905b. *Œuvres* [Poincaré(1916–1954)], t. 6 : p. 38–84. C'est la pagination de l'édition des Œuvres que j'utilise.

[Poincaré(1916–1954)] Henri Poincaré. *Œuvres*. Gauthier-Villars, 1916–1954.

[Poincaré(1921)] Henri Poincaré. Analyse de ses travaux scientifiques, par Henri Poincaré. *Acta Mathematica*, 38 : p. 3–135, 1921.

[Poincaré(1970)] Henri Poincaré. *La valeur de la science*. Flamarion, 1970. Cité dans la réédition de 1970.

[Riemann(1876)] Bernhard Riemann. *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* H. Weber et R. Dedekind, éditeurs. Teubner, 1876. Cité dans la seconde édition de 1892, avec le supplément de M. Noether et W. Wirtinger (1902), réimprimée en 1990 conjointement par Springer Verlag et Teubner, sous le titre *Gesammelte mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Collected papers.*