# Comment on a écrit les nombres dans le sous- continent indien, histoires et enjeux

Agathe Keller

Comment on a écrit les nombres dans le sous- continent indien, histoires et enjeux

*Cette présentation expose les débats qui ont eu lieu au cours du XIXème et au début du XXème siècle concernant l'origine de la numération positionnelle décimale. Elle se focalisera en particulier sur les échos que ce débat eut dans le sous-continent Indien, notamment les échanges qu'eurent G. R Kaye et Saradakanta Ganguly. Ces enjeux historiographiques confrontés à un ensemble de textes sanskrits du VIIème - XIIème siècle, soulèveront des questions sur la notion de position dans l'écriture des nombres.*

Dans le tome 2 de l'Inde classique, le manuel que Jean Filliozat composa avec Louis Renou, il y a deux parties, séparées, consacrées à l'histoire des nombres. L'une se trouve dispersée dans les pages sur l'histoire des sciences en Inde. L'autre dans des annexes, associée à des questions épigraphiques.
On peut supposer que l'auteur de ces textes est Jean Filliozat. Dans la partie consacrée à l'histoire des mathématiques, après avoir évoqué des «spéculations numériques » dans les Védas et Védāṅgas, il aborde le travail d'Āryabhaṭa, l'astronome du Vème siècle. Il précise, ayant évoqué non pas la définition de la numération positionnelle

décimale que donne cet auteur, mais la procédure d'extraction de racine[1] :

> « Il existait donc déjà un système de notation numérique différent de celui qui était en usage dans les inscriptions pour l'expression des nombres en dehors des opérations de calcul. (…) . Il est possible que les calculs aient été primitivement (ou accessoirement) éxécutés au moyen d'une abaque à colonnes remplies de sable sur lequel les chiffres étaient marqués, des colonnes étant laissées vides pour représenter les zéros. Le procédé est en tout cas attesté (tardivement, mais il est peut être ancien) à côté de la notation numérique ordinaire. »

Par ailleurs, dans l'appendice paléographique, une partie est dévolue aux chiffres. Outre des considérations d'histoire épigraphique c'est ici qu'on voit apparaître le nom de tout un ensemble de savants, nottamement G. R. Kaye, et leurs opinions conflictuelles. Je vous lis le paragraphe qui conclut cette partie[2].

> « Cependant le débat sur la priorité indienne ou hellinistique est vain. En effet, l'originalité du système est dans l'attribution aux chiffres d'une valeur de position et dans l'emploi du zéro ; or dans le système babylonien, à date ancienne la valeur de position était employée ; au

[1] Renou, Louis et Filliozat, Jean *L'Inde Classique*, *Manuel des études indiennes,* tome II, EFEO, Paris, 1953. Réédition EFEO, 1996, p. 173.

[2] *Ibid*, p. 704.

> temps des Séleucides, ou même antérieurement, un zéro étant figuré, du moins en position médiane (Thureau-Dangin). L'origine de la notation indienne pourrait être dans l'adaptation au système décimal d'une notation sexagésimale babylonienne. On peut remarquer à ce sujet que l'ordre dans lequel sont écrits les chiffres indiens, ordre opposé à celui de leur énoncé en sanskrit, est précisément celui des notations babylonienes et vieux-perse. » .

Mon objectif, dans cette présentation, va être de donner un arrière fond à la fois historiographique et philologique à ces affirmations de Jean Filliozat ; de décrire les débats auxquels il répond et de tenter de comprendre cet étrange éclatement des données sur l'histoire des nombres. Finalement, mon objectif sera d'expliquer le peu de place qui dans l'historiographie a été consacrée à comprendre comment le nombre est conçu et pensé dans les textes savants en sanskrit. Cette présentation s'achèvera en se penchant sur trois traités sanskrits du VIIème au XIIème siècle, l'*Āryabhaṭīya* (Ab-Vème siècle), le *Pāṭīgaṇita* (PG- VIIème-VIIIème siècle ) et la *Līlāvatī (Lī- XIIème siècle)*, en observant ce qu'ils laissent entrevoir de l'idée de position.

Avant cela, quelques précisions pour ne perdre personne. La notation positionnelle décimale, à une première caractéristique, c'elle d'être écrite en base dix.

C'est à dire que noter 1023 c'est une autre manière d'écrire $1.\ 10^3 + 0.\ 10^2 + 2.10^1 + 3.\ 10^0$. En d'autres mots, cette notation repose sur une décomposition des nombres en puissances de dix. Par ailleurs, c'est une notation positionnelle, c'est à dire que la décomposition en puissance de dix est notée grace à l'emplacement des chiffres.

J'appelle chiffres les nombres compris entre zéro et neuf, que je distingue de leur notation qui peut utiliser des symboles (arithmogrammes) particuliers pour noter les chiffres, symboles qui peuvent également être des abréviation ou des lettres.

En Inde, le premier texte érudit définissant la notation positionnelle décimale est l'*Āryabhaṭīya*, qui date de la fin du Vème siècle. Les textes savants qui l'ont suivi ont contenu de telles définitions ou incluent des algorithmes qui impliquent son existence. C'est au cours du XIXème siècle et tandis que ces débats faisaient rage que ces textes ont été étudiés. L'existence de la définition de la notation positionnelle décimale dans ces textes a été clairement affirmée par S. Ganguly et Datta & Singh, à la fin des années 30 du 20 ème siècle.

La partie historiographique de ma communication regardera un momment de la manière dont on a écrit l'histoire de la numération positionnelle dans le sous continent indien, en soulignant comment des enjeux internes à la discipline mais aussi politiques ont fait que les chercheurs se sont concentrés sur un certain type de problème plutot que de se poser la question de l'idée de la position. Nous allons donc examiner comment l'historiographie de l'histoire des nombres en Inde va se focaliser presque uniquement sur la question épigraphique des symboles utilisés pour noter les chiffres, laissant de côté, ce qui dans les textes savants, non seulement relève d'une définition de la notation positionnelle, mais également exprime une pensée sur son mode de fonctionnement.

*Partie Historiographique*

Pourquoi a t on écrit ainsi une histoire éclatée des nombres dans le sous-continent indien ? Pourquoi s'est on intéressé à l'histoire de l'expression des nombres en sanskrit, alors qu'il existe des systèmes fascinants dans les langues vernaculaires du sous-continent indien, nottament en tamoul, qui ont donné lieu comparativement, à très peu d'études[3] ? Pourquoi n'a t on que peu travaillé sur la conception savante des nombres ?

Je n'ai pas de réponse simple à ces questions. Mon objectif ici va être de vous montrer que ces questions historiographiques sont complexes et mettent en jeu l'émergence à la fois de la discipline de l'indianisme, celle de l'histoire des sciences, et d'autres réseaux de personnes qui ont aussi eu leur mot à dire sur le savoir en Inde en général, ce qui au XIXème siècle à imanquablement eu une dimension politique.

Je vais me concentrer sur le momment où les premiers chercheurs indiens arrivent sur la scène des débats, entre 1860 et les années 30 du XXème siècle.

---

[3] On notera que J. Filliozat y fait référence dans son article sur « l'Inde antique », dans René Taton (ed.), *Histoire Générale des Sciences, Volume 1 : la science antique et médiévale*, Chapitre V, PUF, 195, p172.

Dhruv Raina et F. Charrette[4] ont montré qu'en Europe au début du XIXème siècle un debat oppose des philologues anglais et des astronomes/mathématiciens français pour savoir qui possède la véritable autorité intellectuelle pour écrire une histoire de l'astronomie et des mathématiques en Inde. Cette opposition s'est jouée plus ou moins tout au long du XIXème siècle, comme une sorte de variation de la plus importante opposition entre « orientalistes » et « anglicistes », dont le débat portait sur le type d'éducation que la couronne britanique doit impartir à ces sujets indiens. Les philologues anglais, dont le modèle seraient Wilkinson ou Colebrooke, étant au départ plus « orientalistes », c'est à dire plus enchanté avec la culture indienne que les scientifiques français, tels que Jean Baptiste Biot, plus sceptiques en ce qui concerne la richesse scientifique du savoir existant dans le sous-continent indien. Cependant, lorsqu'on observe les arguments que les uns et les autres s'opposent, on est frappé qu'ils sont essentiellement de nature philologique. C'est à dire que les mathématiciens eux mêmes sont peu préocupés par une pensée du nombre, comme si les critères pour définir ce concept et son usage étaient clairs, évidents et pas sujets à discussion.

---

[4] Charette, François, Orientalisme et histoire des sciences*: l'historiographie européenne des sciences islamiques et hindoues, 1784-1900*, Mémoire de maitrise, Université Montréal: 1995.

Raina, D. (1999). *Nationalism, Institutional Science and the Politics of Knowledge ; Ancient Indian Astronomy and Mathematics in the Landscape of French Enlightenment Historiography*, Göteborgs University.

Raina, D. (2000). "Jean-Baptiste Biot on the History of Indian Astronomy (1830-1860): The Nation in the Post-Enlightenment Historiography of Science." *IJHS* 35(4): 319-346.

Le XIXème siècle voit un changement radical dans la manière dont est pensée l'origine des nombres que nous utilisons aujourd'hui. Si, au début du siècle, il semble claire à tous qu'ils sont d'origine indienne, à la fin du siècle, la question de l'origine indienne des « nombres arabes », de leur scripte à l'usage de la numération positionnelle décimale est remise en question.

Le debat sur la question de l'origine des nombres, fait parti d'un ensemble plus vaste de questions d'origines, qui ont agité le milieu de l'histoire des mathématiques et de l'astronomie au XIXème siècle : il y avait la question de l'origine de l'algèbre, celle de l'algèbre diophantienne ou l'origine des signes du zodiac. La manière dont la question des nombres s'articule aux autres demeure à être étudié.

Ces débats peuvent par momment être très vigoureux.

L'un des plus virulent oppose à la fin des années 1830, Guillaume Libri et Michel Chasles à l'académie des sciences, à Paris. Ce debat est provoqué par un manuscrit apocryphe de la Géométrie de Boèce, qui induit Chasles à défendre une origine Pythagoricienne contre l' origine « Indienne » ou « Arabe » des nombres[5]. Libri, qui fréquentait les millieux orientalistes, et connaissait les travaux des anglophones Colebrooke, Stratchey et Taylor, et qui par ailleurs soupçonna la fraude, s'opposa à lui. Le débat s'éteignit dans la plus grande confusion une fois que d'un côté l'existence d'un faux fut établie tandis que de l'autre G. Libri en 1848 fut accusé

[5] C. Chasles, 'Sur le passage du premier livre de la géométrie de Boèce relatif à un nouveau système de numération', Bruxelles, 1836.

du vol de plus de 30 000 manuscrits dans des bibliothèques publiques. Voleurs et faussaires, tensions politiques- Libri étant un républicain et nationaliste italien notoire, et institutionelles-Chasles brigait le siège de Libri à l'académie- étaient ainsi conviés à cette histoire [6].
Ce débat met en lumière le réseau des savants des différentes académies parisiennes. La dispute Libri-Chasles a, en effet, inspiré Joseph Toussaint Reinaud, un professeur d'arabe au Langues Orientales et un membre de l'academie des inscriptions et des belles lettres, qui était un ami de Libri à prêter attention et inclure dans ces publications ce qu'il pourrait compiler de sources arabes sur l'Inde concernant les mathématiques et en particulier les nombres.
ll publie ainsi à partir du milieu des années 1840 des informations sur Al-Bīrūnī, un astronome persan du XI siècle, dont les remarques sur le système de numération utilisé en Inde ont souvent par la suite été citées pour défendre l'origine indienne de la notation positionnelle décimale. Le texte d'Al-Bīrūnī est jusqu'à ce jour un témoignage de référence sur l'histoire de mathématiques et de l'astronomie en Inde pendant le XIème siècle.

Le débat sur l'histoire des nombres avait trois volets.

---

[6] Voir Charette, op. cit., . J. Pfeiffer, France, dans *Writing the History of Mathematics, Its Historical Development*, J. W. Dauben and C. J. Scriba (eds.), Basel, Boston, Berlin, 2002, 20-22. K. Chemla, *Chasles*, in Dauben and Scriba (eds.) *op. cit.*, 396-398.

Le premier volet revenait à mettre en question les différentes traces de notations alphabétiques pour les nombres en Inde, en se demandant si elles avaient des origines grecques, latines ou non. Les notations alphabétiques sont celles qui utilisent une lettre (en Sanscrit en fait une syllabe) pour représenter un nombre. Elle enchaînera ainsi des lettres comme en un mot (et permettra parfois des jeux de mots) afin de représenter un nombre. En Inde, parfois ces notations étaient positionnelles, parfois pas. Les astronomes savants ont quelquesfois inventé de telles notations pour faire des tables de données numériques plus faciles à retenir. Les premiers savants européens, tel James Prinsep, qui ont remarqués ces inventions ont été tentés de déduire d'eux la trace d'une première influence grecque, puisque les Grecs ont eu l'habitude de noter les nombres avec des lettres[7].

Le deuxième volet du débat concernait l' « invention » de zéro et de la numération positionnelle décimale, en se demandant si elle venait d'Inde. De nombreuses façons de noter les nombres ont été trouvés épigraphiquement. Il existait nottament un système particulier pour noter les grands nombres sur les inscriptions de plaque de cuivre de même que dans les textes savants, nottament ceux d'astronomie. Si les nombres

[7] Voir, par exemple, J. Prinsep, 'On the ancient sanskrit numerals.' *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, 1834. Réimprimé ensuite dans J. Prinsep, E. Thomas, et al. *Essays on Indian antiquities, historic, numismatic, and paloographic, of the late James Prinsep, to which are added his useful tables, illustrative of Indian history, chronology, modern coinages, weights, measures, etc.* Londres, 1858.

d'habitude étaient notés comme nous le faisons, avec le plus petit chiffre sur la droite en avançant de droite à gauche, la liste de chiffres qui était fournie nominalement avec ces notations afin d'assurer qu'aucune erreur de transmision ne s'y glissait, énumérait les chiffres dans l'ordre de lecture de inverse, de gauche à droite. Prennons un exemple tiré du premier commentaire que nous connaissons de l'*Ab*, celui qu'en fit de Bhāskara en 628 après Jésus-Christ.
A la fin de son commentaire sur les vers 32 et 33 du chapitre 2, en résolution d'un exercice, Bhāskara écrit l'expression suivante[8] :
*sūnyāmbarodadhiviyad-agni-yamākāśa-śara-śarādri-śūnyendu-rasāmbarāṅgāṅkādri-svarendavaḥ*

qui se traduit littéralement par

zéro-zéro-quatre-zéro-trois-deux-zéro-cinq-cinq-sept-zéro-un-six-zéro-six-neuf-sept-sept-un

Cette expression est suivie dans l'édition du texte, comme dans les manuscrits, de la notation 1 779 606 107 550 230 400

On voit donc comment l'énumération se lit dans un sens ⇨
et se note dans l'autre ⇦ .

[8] Shukla, K. S. (1976). *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa, with the commentary of Bhāskara I and Someśvara*, Indian National Science Academy. p. 155.

Cette façon d'exprimer les grands nombres est une preuve de l'usage de notation positonnelle décimale. Des disputes interminables sur le dates et la fiabilité des copies des plaques de cuivre ont alimenté de nombreux échanges. Je dois avouer qu'à ce jour, je ne sais pas parmis les premiers témoignages épigraphiques de zéro en Inde, lesquels sont datés de manière certaine. Une bonne partie du débat c'est de nouveau focalisé sur les traces épigraphiques plutôt que sur ce que des textes savants, traitant de *gaṇita* (les mathématiques), ont pu en dire.
Il faut noter que ces textes n'étaient pas tous connus et édités au millieu du XIXème siècle. Mais ce n'est pas pour autant que ceux qui l'étaient ont été étudiés dans cette perspective.

Finalement, le troisième volet du débat concernait l'utilisation à date ancienne d'une abaque en Inde. Son existence a été vue par quelques uns comme une condition nécessaire pour l'usage d'une notation positionnelle décimale, signe que le débat aurait pu bénéficier de quelques réflexions sur la nature des nombres et de leur notation. Il faut souligner que sous le nom d'abaque sont désignés des objets aussi divers que le boulier, ou l'abaque à colonne (qui est en fait tout simplement un mode de calcul à la main). On voit d'où vient la remarque que j'ai lue au début de Jean Filliozat.

Nous pouvons observer une lente évolution du niveau du débat d'une recherche naïve pour de très vieilles inscriptions utilisant des chiffres tels que nous les écrivons aujourd'hui, avec une notation positionnelle décimale et un zéro, à l'analyse compliquée d’inscriptions régionales et la façon dont ils représentent les chiffres.

Il y a de plus une dimension politique à ce débat que je vais brièvement évoquer ici

En juillet 1907 G. R. Kaye, du « Bureau of Education », Simla (Inde du nord) publie un article dans le Journal of the Asiatic Society of Bengal qui s’intitule : « Notes on Indian Mathematics- the arithmetical notation »[9]. G. R. Kaye publiera continuellement dans les annés suivantes avant de sortir en 1915 une synthèse sur «les Mathématiques indiennes». Ce texte sera d’abord publié en Inde[10], puis dans le journal américain *Isis*[11], la bible des historiens des science. Kaye se consacrera alors à l'étude d'un manuscript en bois de bouleau, le *Manuscrit Bhakshālī* qu'il éditera et publiera en 1927. C’ est à peu près à ce momment là que ses opinions inciteront une réaction véhémente de Saradakanta Ganguly puis de Bibhutisan Datta et Avadesh Narayan Singh.

Le dessein de Kaye était, en effet, de montrer que les chiffres et la notation décimale de position n'étaient pas d’origine indienne. Il le fera en essayant d'annuler les arguments mis en avant dans les trois fils que j’ai énuméré précedemment. Comme le temps me manque, je vais laisser de

[9] Kaye, G. R, "Notes on Indian Mathematics- Arithmetical Notations.", *Journal of the Asiatic Society of Bengal, New Series* (III), pp. 475-508, 1907.

[10] Kaye, G. R, *Indian Mathematics*, Thacker, Spink & co, Calcutta& Simla : 1915.

[11] Kaye, G. R. Indian Mathematics. Isis 2: 326-356, 1919.

côté les arguments qu'il utilise, en nottant qu'un grand nombre de ces arguments reposent sur des faux sens dans sa lecture des textes et sur le « sens sémitique » de la notation[12].

Dhruv Raina dans un article publié en 1994 a montré que la naissance de l'histoire des sciences en Inde est étroitement liée à la « renaissance bengalie », et de manière plus globale avec l'emergence d'un nationalisme indien[13].

Quand Datta et Ganguly entrent en scène pour confronter Kaye, le champ de l'histoire des mathématiques en Inde connait déjà un certain nombre de lettrés indiens, tels que Bhau Daji ou Bapu Deva Sastri, qui publient déja dans le *Journal of the Asiatic Society of Bengal*. Leurs travaux sont presque exclusivement consacré à l'édition de textes sanscrit et à la traduction de synthèses et d'éditions dans des langues vivantes du sous continent indien. Les textes publiés par ces auteurs indiens sont toujours très cordiaux, réservés et polis et contrastent avec les débats très durs qui opposent leurs homologues européens. Du moins est ce le cas dans leurs publications en anglais. Il faudrait sans doute regarder le contenu des publications en Hindi, Bengali, Malayalam et

---

[12] Les arguments de Kaye, seront explicités dans un article plus détaillé que je prépare dans le cadre d'un projet autour d'une l'histoire de l'arithmétique écrite par l'algebriste ecossais Gregory Peacock au début du XIXème siècle, en collaboration avec D. Raina et M. J. Durand-Richard.

[13] Raina, Dhruv. *The early years of P. C. Ray : the inauguration of the School of Chemistry and the social history of science (1885-1907).* Nistads Mimeograph. 1994.

tamoul nottament pour savoir le type de débats qui s'y reflétaient.

Les publications de Kaye, font intervenir sur la scène des échanges en langue anglaise une nouvelle génération d'historiens des mathématiques. Ils sont indiens, et plutôt mathématiciens de formation. Et ils n'hésitent pas à défier Kaye, frontalement. S. Ganguly est ainsi professeur de mathématique. Il publie en 1932 un premier article dans l'américain Mathematics Monthly intitulé « On the modern place-value notation in the Aryabhatiyam »[14]. Dans cet article il explique clairement que son dessein est de contrarier le point de vue de Kaye. Les arguments qu'il avance sont presque uniquement basées sur des textes de la tradition savante qui avaient été édités et publiés dans les 50 années précèdentes. Il inaugure ainsi un mouvement qui poussera lentement les données épigraphiques de côté pour se concentrer sur la dimension technique et mathématique des textes. Cependant, là encore, si Ganguly et trois ans plus tard à sa suite Datta & Singh (dans leur manuel sur l'histoire des mathématiques hindoues, la partie sur les nombres compte 121 pages)[15] se concentrent à prouver l'inaninté des affirmations de Kaye, ils ne s'intéressent pas pour autant à décrire la cohérence que

---

[14] Ganguly, S. (1927). "On the modern place-value notation in the Aryabhatiyam." *American Mathematical Monthly* XXVII.

[15] Datta, B. & Singh, A. N. *History of Hindu mathematics, a source book*. 2 volumes Lahore, Motilal Banarsi Das, 1935-1938. Réimprimé par Bharatiya Kala Prakashan, New Delhi, 2001. Dans l'édition réimprimée, la partie consacrée à la « notaion des nombres (« Numeral notation ») couvre les pages 1 à 121.

les auteurs de traités techniques pouvaient donner à l'idée de position.

Essayons donc de comprendre les difficultés rencontrées, lorsqu'on se tourne vers les textes, dans l'optique d'élaborer une image des conceptions des nombres dans les textes mathématiques.

*Partie Histoire*

Dans ce qui suit je vais énoncer beaucoup d'évidences, mais je suis persuadée qu'elles sont bonnes à dire pour les collègues non-mathématiciens, pour ceux qui ne sont pas familiers du sanskrit (dans une perspective comparatiste) et finalement aussi pour poser les jalons d'une compréhension de la notion de position, telle qu'elle est utilisée par les différents auteurs de textes sanskrits auxquels nous pourront dans la suite nous interesser.
Je commence par une première évidence qui a été soulignée par Jean Filliozat dans le passage que je vous ai lu au début de ma communication: il faut distinguer la tradition savante, des traditions populaires et officielles, même si elles peuvent bien entendu être liées entre elles. Les textes sanskrits que nous regardons, sont donc des témoignages particuliers, car ce sont ceux de la tradition savante, technique.

Je me propose ici d'aborder les textes, non pas en me posant la question de la graphie des nombres, ou celle de leurs noms, mais en me posant celle de la conception de la position.

Mon idée est d'alimenter une hypothèse, qui m'a été soufflée par K. Chemla au tout début de mon travail sur l'histoire des mathématiques en Inde, et qui est la suivante : la numération de position ne serait-elle qu'un momment dans une pratique plus vaste de la position en arithmétique et en algèbre ?
Répondre à cette question revient à réfléchir sur comment la position est définie et utilisée dans les textes. Les procédures pour écrire les nombres, qu'on y trouve souvent, n'y sont qu'un volet d'une pratique plus vaste d'écritures tabulaires servant à appliquer des algorithmes arithmétiques et algébrique. La communication de F. Patte, y fait sans aucun doute référence. Ici cependant nous allons nous restreindre à la position des chiffres lorsqu'on écrit un nombre au moyen de la notation positionnelle décimale. On a jusqu'à présent évoqué cette notation sans y acoler l'idée de « système positionnel décimal », ma question devient donc : est ce que dans cette numérotation, l'usage de la position fait système ?

J'ai décidé ici de me focaliser sur trois textes phares, l'Ab, le PG et le Lī de la période qui m'intéresse, c'est à dire le Vème-XIIème siècle. On peut dire qu'ils nous montrent l'évolution de la pensée mathématique entre ces deux dates, tout en ayant l'avantage de donner un algorithme ou une définition pour la numérotation positionnelle décimale. Les définitions qu'ils proposent sont donnés en annexe, avec une traduction française.
Une première chose est frappante, lorsqu'on les lit. La forme de la règle est la même dans ces trois cas : il s'agit d'une liste suivie d'un principe algorithmique. Cette forme

particulière nous fait donc hésiter sur la nature de la règle, elle est à la fois algorithmique et définissante.

Je ne vais pas ici traiter de la question des noms qui sont énumérés dans cette liste, car la plupart des auteurs se sont focalisés sur ce point. T. Hayashi dans son édition du Manuscrit Bakhshālī a fait un ensemble de tableaux qui synthétise l'évolution de ces noms[16]. Charlotte Pollet a aussi fait il y a quelques années maintenant un mémoire de maitrise à Lille sur ce sujet[17]. J'ai traduit, de manière tout à fait forcée, les noms des nombres en français, effaçant ainsi les relations spécifiques que leurs noms tisse en Sanskrit, pour accentuer l'autre partie de la règle, celle qui nous dit quelque chose sur ce que désignent ces noms (des places, des rangs, des valeurs ?) et sur les dispositions que la notation exige.

Au delà de leur apparente limpidité, ces définitions sont peu discutées dans la littérature secondaire. Peut être est-ce du en partie au fait que les commentaires sanskrits qui accompagnent ces règles sont souvent succintes et parfois difficiles à comprendre. Les discussions y sont courtes et ils ne font pas l'objet des traitement habituels, avec glose mot à

---

[16] Hayashi, Takao. *The Bakhshālī Manuscript. An ancient Indian mathematical treatise*. Egbert Forsten, 1995, pp. 66-70.

[17] *Les origines indiennes du système moderne de numération : hypothèses et controverses sur la datation, le jeu des influences et l'évolution du graphisme.* Dirigé par Lyne Bansat-Boudon et Bernard Joly, Lille III, 1997. Ce travail évoque les travaux de G. R. Kaye et Datta & Singh. Je n'y ai malheureusement pas eu accès.

mot et réflexion syntaxicale suivie d'une liste d' « exemples[18] » résolus auxquels les commentaires nous habituent.

Dans le premier commentaire mathématique que nous connaissons pour cette époque, un commentaire à l'Ab fait par un certain Bhāskara I (VIIème siècle), l'auteur se montre quelque peu prolixe.
Il nous explique ainsi que les places sont conventionnelles[19] :

> Ici, ceci peut être demandé:
> Quel est le pouvoir (*śakti*) de cette place, ce [pouvoir qui fait ] qu' une unité devient dix, cent et mille? Vraiment si ce pouvoir existait, les marchands auraient des parts de biens très désirés, et en suivant leur désir il y en aurait peu ou beaucoup. S'il en était ainsi, les choses seraient différentes dans les affaires du monde.

> *atraitat praṣṭavyam – kā eṣām sthānānām śaktiḥ, yat ekam rūpam daśa śatam sahasram ca bhavati/ satyām caitasyām sthānaśaktau krāyakāḥ viśeṣeṣṭakrayyabhojanāḥ syuḥ/ krayyam ca vivakṣātaḥ alpam bahu ca syāt/ evam ca sati lokavyavahārān yathābhāvaprasaṅgaḥ /*

[18] Nous aurons implicitement, d'ample illustrations de cette règle.

[19] Shukla, K. S., *Āryabhaṭīyabhāṣya of Bhāskara I, edited with notes*, INSA, New Delhi, 1976 : p. 47.

C’est donc que cette notation est une convention propre au domaine savant, aux traités, car elle n’a pas d’existence réelle. Mais par ailleurs, les places n’existent que dans un rapport à une autre place, *anya sthāna*. Ceci est amplifié par les adverbes qui ponctuent l’ensemble de ces définitions, adverbes que j’ai mis en gras dans les textes en annexe afin d’en souligner la portée. Glosant l’expression utilisée par Āryabhaṭa, Bhāskara I explicite[20]:

> De place en place on doit décupler, celà revient à, d'une place à une autre place déculpée, [en partant] d'une place que l'on a choisi soi-même, à gauche, la place est déculpée.
>
> *sthānāt sthānam daśaguṇam syāt / sthānāt sthānam anyat daśaguṇam svaparikalpitasthānāt uttaram sthānam daśaguṇam bhavati iti yāvat/*

On pourraît méprendre ce commentaire pour de la paraphrase sans intérêt. Pourtant ce point est important, c’est lui qui souligne que les places font partie d’une structure. Ces places sont liées entre elles, unes à unes, et dans un ordre.

Lorsqu’on regarde la manière dont les places sont traitées dans les algorithmes des opérations élémentaires que je n’ai pas le temps de vous présenter ici, il en va de même : elles n’existent pas en elles mêmes mais dans une suite ordonnée. Lorsqu’il s’agit de carrer, de cuber ou d’extraire des

[20] Op-cit. p. 46.

racines, il y a une première place et une dernière place. Ces places sont par ailleurs aussi caractérisées par des propriétés portant sur leur valeur : il existe des places paires ou impaires, carrées ou non-carées, cubes ou non-cubes.

Or pour nos auteurs la manière dont ce système ordonné de places est liée à leur ordre de grandeur n'est jamais explicité directement, car il n'existe pas de mots distinguant l'un de l'autre.
En d'atures termes, les auteurs concernés ne distinguent pas toujours dans leur vocabulaire, la valeur du nombre (dix), le nombre écrit (10), le rang d'une position dans une suite ordonnée (il s'agit de la deuxième place) et la place (cette place à la valeur dix). Les définitions mises en annexes concatènent ensemble une série de choses distinctes : le nom qui désigne un rang ,la valeur de ce rang et finalement que ce rang est symbolisé par une place. Il s'agit là bien sur d'un procédé habituel de rédaction des aphorismes. Certaines sont parfois un peu éclairées par les commentaires qui accompagnent ces textes. Ainsi dans le commentaire de Bhāskara I, le rapport entre ordre et rang est explicité :

> Un et dix et cent et mille. Ce sont respectivement pour ceux ci, pour un, dix, cent et mille les première, deuxièmes, troisièmes et quatrièmes places. (…) Pour dix mille, la cinquième place (etc.)

*ekam ca daśa ca śatam ca sahasram | eteṣām ekadaśaśatasahasrāṇām prathamadvitīyatṛtīyacaturthāni sthānāni | (…) ayutasya pañcamam sthānam …*

Dans le commentaire anonyme qui accompagne le PG, c'est la valeur et sa notation qui sont explicités, puisque le commentateur juxtapose le nom (dix, cent, mille) et sa notation (10, 100, 1000).

On peut se demander si au cours du temps les auteurs ont préféré mettre l'accent sur un point plutot qu'un autre. Le petit tableau en annexe montre que Śridhāra quand à lui n'exprime pas le mot place (*sthāna*). Par ailleurs, l'expression adverbiale qu'il utilise (*uttara*) est ambivalente car elle signifie tout autant accroitre qu'elle désigne un lieu, « la gauche ». L'expression de Śridhāra est donc plus dense encore que celle d'Āryabhaṭa. Bhāskara II lui est un peu plus explicite. Il semble adopter une expression qui s'inspire de Śridhāra (*daśaguṇaṃ uttaraṃ* se compare avec *yathottaraṃ daśaguṇaṃ* ) mais indique que les noms de la première partie du vers désignent des places. Regardons d'un peu plus près l'expression utilisée par Bhāskara II, pour expliciter le rapport entre la première partie du vers et la seconde. Il dit : *saṃkhyāyāh sthanānām samjnāḥ*. En m'inspirant de la traduction de F. Patte[21] j'ai traduit cette expression par « les noms des places des nombres ». Mais elle peut aussi se

[21] Patte, François, *Le Siddhantasiromani : l'oeuvre mathématique et astronomique de Bhaskaracarya = Siddhantasiromanih : Sri-Bhaskaracarya-viracitah,* Droz, Genève : 2004. Volume II, p 73.

traduire par « le nom de la valeur des places ». Il s'agit en effet de l'apposition de deux génitifs, et le terme *saṃkhyā* peut aussi bien signifier nombre que valeur. On voit ainsi comment le flou peut être entretenu entre le nom des nombres ou l'expression de leur valeur. Il faudrait sans doute observer de près les usages du terme *saṃkhyā* par rapport à d'autre termes proches, tels que *rāśi*[22], chez nos différents auteurs, afin de mesurer s'il existe des distinctions de l'une ou l'autre qui nous auraient échappés jusqu'à présent.

C'est de cette difficulté, liée à l'abscence de mot distincts pour parler de choses distinctes que nait le lien distendu, inexprimé, entre les deux partie du vers. Bhāskara I, notre premier commentateur d'Āryabhaṭa, en tire une réflexion sur les compositions des sūtras, sur laquelle Pierre-Sylvain Filliozat a publié un article recemment[23].

Nous avons donc vu que la formulation de la numération positionnelle décimale repose chez nos auteurs sur d'une part une liste donnant l'ordre et le nom [des ordres de grandeurs] des places, et de l'autre sur un algorithme qui lie deux

---

[22] Chez Bhāskara I, le commentateur d'Āryabhaṭa, très clairement c'est ce dernier terme qui signifie quantité, valeur, tandis que *saṃkhyā* désigne le nombre qui exprime la quantité.

[23] Filliozat, Pierre-Sylvain, "Ancient Sanskrit mathematics : an oral tradition and a written literature", Chemla, Karine (éds.) *History of Science, History of Text*, Dordrecht, Springer, pp 137-157, 2004.

places consécutives. Cette formulation met trois propriétés de la numération positionnelle décimale en valeur :
Elle repose sur une base 10
Elle repose sur des ordres de grandeurs données par une liste ordonnée de places, dont les noms et les valeurs se confondent.
Finalement elle lie la position à ces ordres de grandeurs.
Il est étonnant, au-delà de la question épigraphique du nom technique des grandes valeurs et que plus on avance dans le temps, plus la liste de ces valeurs s'allonge, qu'il y ait une si grande stabilité de l'expression dans l'idée de système positionnel en base dix. Signe probablement que l'expression de la distinction entre nom, rang et valeur n'était pas jugée indispensable.

*Conclusion*

Pour revenir à Jean Filliozat, on peut saluer la finesse avec laquelle il avait finement distingué manière d'écrire épigraphique et notation savantes, principe positionnel, ordre de grandeur, et questions autour de l'abaque.J'aurais voulu conclure, pour achever cet hommage à Jean Filliozat, souligner comment une étude historiographique permet de renouveler ainsi des études philologiques et ainsi saluer non seulement le J. Filliozat historien des sciences, mais aussi le J. Filliozat historiographe de l'indianisme.

# Règles de la numération positionnelle décimale

## En Sanskrit

| Āryabhaṭa (499) | Śridhāra (ca. 850-950) | BhāskaraII (1121) |
|---|---|---|
| Ab.2.2 ekaṃ ca daśa ca śataṃ ca sahasraṃ tv ayutaniyute **tathā** prayutam/ koṭyarbudaṃ ca vṛndaṃ **sthānāt sthānaṃ daśaguṇaṃ** syāt// | PG.7-8 ekaṃ daśaśataṃ asmāt sahasraṃ ayutaṃ tataḥ paraṃ lakṣam/ arbudam abjaṃ kharvaṃ nikharvaṃ ca //7// **tasmān** mahāsarojaṃ śaṅkuṃ saritām patiṃ tatas tv antyam / madhyaṃ parārddham āhur **yathottaraṃ daśaguṇaṃ** tajjñāḥ//8// | Lī. 10-11 ekaṃ daśaśatasahasrāyuta lakṣaprayutakoṭayaḥ **kramaśaḥ**/ prayutaṃ koṭim athārbudam abjakharvanikharvam ahāpadmśaṅkavas **tasmāt**//10// jaladhiś ca antyaṃ madhyaṃ parārddham iti **daśaguṇaṃ uttaraṃ saṃjñāḥ/ saṃkhyāyāḥ sthānānāṃ** vyavahārārthaṃ kṛtāḥ pūrvaiḥ//11// |

Règles de la numération positionnelle décimale,

Traduction française

| Āryabhaṭa (499) | Śridhāra<br>(ca. 850-950) | BhāskaraII<br>(1121) |
|---|---|---|
| Ab.2.2 Un et Dix et Cent et Mille et Dix mille et **ainsi** Cent mille/<br>Un million Dix millions et Cent millions, **de place en place on doit décupler**// | PG.7-8 Ceux qui savent, on dit: Un, Dix, Cent, et de là, Mille, Dix mille, puis Cent mille, puis un Million/<br>Dix millions, Cent millions, Mille millions, et Dix mille millions //7//<br>**Et de là** Cent mille millions, un Milliard, Dix milliards, Cent milliards, Mille milliards//<br>Dix mille milliards, Cent mille milliards **ainsi on va croissant par décuple**//8// | Lī. 10-11 Un, Dix, Cent, Mille, Dix mille, Cent mille, un Million, dix Millions, **successivement**/<br>Cent millions, Mille millions, Dix mille millions, Cent mille millions, un Milliard, Dix milliards//10//<br>**Et de là** Cent milliards, Mille milliards, Dix mille milliards, Cent mille milliards, **tels sont les noms des places des nombres, croissant par déculple,** élaborés par les anciens pour l'usage courrant.//11// |