Structures de réalisabilité, RAM et ultrafiltre sur N

Jean-Louis Krivine

Structures de réalisabilité, RAM et ultrafiltre sur $\mathbb{N}$

Jean-Louis Krivine

Université Paris VII, C.N.R.S.

8 septembre 2008

Introduction

On montre ici comment transformer en programmes les démonstrations utilisant l'axiome du choix dépendant et l'existence d'un *ultrafiltre non trivial sur* $\mathbb{N}$ (qu'on peut, de plus, supposer *sélectif* [1]). La méthode est une extension de la technique de *réalisabilité en logique classique* introduite dans [3,4,5], et de la méthode du *forcing* bien connue en théorie des ensembles. Pour simplifier un peu l'exposé, on prend comme cadre axiomatique, l'arithmétique du second ordre classique avec axiome du choix dépendant (qu'on appelle aussi l'*Analyse*). En suivant les idées développées dans [2], on peut étendre ce résultat à la théorie ZF (avec axiome du choix dépendant) en ajoutant l'axiome de l'ultrafiltre : " il existe un ultrafiltre sur toute algèbre de Boole ". On le fera dans un prochain article, où on traitera également des axiomes comme : " il existe un bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dont tout segment initial est dénombrable ", ou " il existe un bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ".
En fait, il est clair que la même méthode permet de traiter l'axiome du bon ordre (c'est-à-dire l'axiome du choix). Mais, à ce jour, je n'en ai pas rédigé la démonstration.

La signification informatique de ces résultats est intéressante : on a vu, dans [3,4,5], que l'on pouvait interpréter l'axiome du choix dépendant en introduisant une nouvelle instruction de *signature* ou d'*horloge*. Pour interpréter l'axiome d'ultrafiltre ou de bon ordre, il faut maintenant ajouter des instructions de *lecture* et d'*écriture* dans une *mémoire globale* (appelée aussi " tas "ou " Random Access Memory "en informatique).
Mais la manipulation logique de ces instructions n'est possible qu'au prix d'une extension de la réalisabilité classique ; c'est pourquoi on introduit la notion générale de *structure de réalisabilité*.
Il est remarquable que les axiomes pour les conditions de forcing (semi-treillis) s'interprètent ici comme les indispensables *programmes de gestion de la mémoire.* Yves Legrand-gérard a fait le rapprochement avec les instructions telles que `malloc` et `free` dans le langage C. Or, la propriété essentielle de la mémoire globale est d'être indépendante de la pile, c'est-à-dire qu'elle n'est pas mémorisée par l'instruction `cc` associée au raisonnement par l'absurde.
Il est amusant de noter que cela explique, a posteriori, une constatation empirique bien connue des théoriciens des ensembles, qui est le " parfum intuitionniste "du forcing.

[1] Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ est dit *sélectif* (voir [1]) si, pour toute relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$, dont aucune classe n'est dans $\mathcal{U}$, il existe un élément de $\mathcal{U}$ qui choisit un élément de chaque classe.

Je remercie Yves Legrandgérard, dont les connaissances approfondies en programmation système et réseau ont été capitales pour l'appréhension du sens informatique des résultats énoncés ici.
Nous comptons développer ensemble ce sujet dans un prochain article.

La sémantique des programmes

Structures de réalisabilité

Une *quasi-preuve* est un λ-terme $t[x_1, \ldots, x_k]$ avec la constante cc. Les variables libres de $t[x_1, \ldots, x_k]$ se trouvent parmi $x_1, \ldots, x_k$. L'ensemble des quasi-preuves est noté QP, l'ensemble des quasi-preuves closes est noté QP_0.
Toute démonstration, en Analyse ou dans ZF, de $x_1{:}A_1, \ldots, x_k{:}A_k \vdash t{:}A$ donne une quasi-preuve $t[x_1, \ldots, x_k]$ (voir ci-dessous les règles de démonstration et de typage pour la logique classique du second ordre).

Une *structure de réalisabilité* est la donnée de trois ensembles $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi}$ (termes, piles et processus), avec les opérations suivantes :

- Une application $(\xi, \pi) \mapsto \xi \centerdot \pi$ de $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Pi}$ (*empiler*).
- Une application $(\xi, \pi) \mapsto \xi \star \pi$ de $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi}$ (*processus*).
- Une application $\pi \mapsto \mathsf{k}_\pi$ de $\mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Lambda}$ (*continuation*).

Une *substitution*, notée $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k]$ est, par définition, un ensemble fini de couples $\{(x_1, \xi_1), \ldots, (x_k, \xi_k)\}$, où $x_1, \ldots, x_k$ sont des variables *distinctes* et $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbf{\Lambda}$.
On fixe un ensemble $\mathcal{S}$ de substitutions qui contient la substitution vide (notée $[]$) et tel que si $[\xi/x, \xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$, alors $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$.

- Pour chaque quasi-preuve $t[x_1, \ldots, x_k]$ et chaque substitution $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$, on se donne $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathbf{\Lambda}$.

Remarque. Dans la plupart des structures de réalisabilité considérées ici, on pourra définir une opération binaire sur $\mathbf{\Lambda}$, analogue à *l'application* dans les λ-termes. Mais les axiomes de structure de réalisabilité ne comportent pas d'opération binaire sur $\mathbf{\Lambda}$.

On se donne un ensemble $\perp\!\!\!\perp$ de processus et on définit sur $\mathbf{\Lambda}$ une relation de préordre en posant : $\xi \leq \eta \Leftrightarrow (\forall \pi \in \mathbf{\Pi})(\eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp)$.
On suppose l'ensemble $\perp\!\!\!\perp$ *saturé*, ce qui veut dire qu'il a les propriétés suivantes :
1. Si $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$ et si $\xi_i \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, alors $x_i[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$; autrement dit $x_i[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \leq \xi_i$.
2. Si $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$ et si, pour tous $\xi'_1 \leq \xi_1, \ldots, \xi'_k \leq \xi_k$ avec $[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \in \mathcal{S}$, on a $t[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \star u[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, alors $tu[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
3. Si $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$ et si, pour tous $\xi' \leq \xi, \xi'_1 \leq \xi_1, \ldots, \xi'_k \leq \xi_k$ avec $[\xi'/x, \xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \in \mathcal{S}$, on a $t[\xi'/x, \xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ alors $\lambda x\, t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \xi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
4. Si $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$, et si $\xi \star \mathsf{k}_\pi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ alors $\mathsf{cc}[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \xi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
5. $\xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \mathsf{k}_\pi \star \xi \centerdot \pi' \in \perp\!\!\!\perp$.

En itérant la condition 3, on obtient :
3. Si $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$ et si quels que soient $\xi'_1 \leq \xi_1, \ldots, \xi'_k \leq \xi_k, \eta'_1 \leq \eta_1, \ldots, \eta'_l \leq \eta_l$

avec $[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k, \eta'_1/y_1, \ldots, \eta'_l/y_l] \in \mathcal{S}$, on a $t[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k, \eta'_1/y_1, \ldots, \eta'_l/y_l] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ alors $\lambda y_1 \ldots \lambda y_l\, t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \eta_1 \bullet \ldots \bullet \eta_l \bullet \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

Réalisabilité en arithmétique du second ordre

Les formules considérées sont écrites en logique du second ordre, avec $\forall, \to$ et $\perp$ comme seuls symboles logiques. Les variables d'individu sont notées $x, y, \ldots$, et les variables de prédicats $X, Y, \ldots$ Chaque variable de prédicat (on dira aussi variable de relation) a une *arité* qui est un entier. Une variable d'arité 0 est appelée *variable propositionnelle.*
A chaque fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est associé un symbole de fonction d'arité k, noté également f.
On utilisera la notation $A_1, A_2, \ldots, A_k \to A$ pour désigner la formule :
$A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_k \to A)))$.
Un paramètre du second ordre d'arité k est une application $\mathcal{X} : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$.
Une *interprétation* $\mathcal{I}$ est une application qui associe un individu (entier) à chaque variable d'individu et un paramètre d'arité k à chaque variable du second ordre d'arité k.
$\mathcal{I}[x \leftarrow n]$ (resp. $\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]$) est l'interprétation obtenue en changeant, dans $\mathcal{I}$, la valeur de la variable x (resp. X) et en lui donnant la valeur n (resp. $\mathcal{X}$).
Pour toute formule A, on désigne par $A^{\mathcal{I}}$ la *formule close avec paramètres* obtenue en remplaçant, dans A, chaque variable libre par la valeur donnée par $\mathcal{I}$.
On définit $\|A^{\mathcal{I}}\| \subset \mathbf{\Pi}$ pour toute formule $A^{\mathcal{I}}$ close avec paramètres ; c'est la *valeur de vérité de la formule $A^{\mathcal{I}}$.*
Pour $\xi \in \mathbf{\Lambda}$, $\xi \Vdash A^{\mathcal{I}}$ (lire " ξ réalise $A^{\mathcal{I}}$ ") est, par définition, $(\forall \pi \in \|A^{\mathcal{I}}\|)\, \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
La définition de $\|A^{\mathcal{I}}\|$ se fait par récurrence sur la longueur de la formule A :

- Si A est atomique, on a $A^{\mathcal{I}} \equiv \|\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)\|$, où $\mathcal{X}$ est un paramètre d'arité k et $t_1, \ldots, t_k$ des termes clos d'individu, qui ont donc respectivement les valeurs $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. On pose alors $\|A^{\mathcal{I}}\| = \mathcal{X}(n_1, \ldots, n_k)$.
- $\|(A \to B)^{\mathcal{I}}\|$ est, par définition, $\{\xi \bullet \pi ; \xi \Vdash A^{\mathcal{I}}, \pi \in \|B^{\mathcal{I}}\|\}$;
- $\|(\forall x\, A)^{\mathcal{I}}\|$ est, par définition, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A^{\mathcal{I}[x \leftarrow n]}\|$.
- $\|(\forall X\, A)^{\mathcal{I}}\|$ est, par définition, $\bigcup\{\|A^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}\| ; \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{\mathbb{N}^k}\}$.

Remarques.
i) Si $\xi \Vdash A^{\mathcal{I}}$ et $\xi' \le \xi$, alors $\xi' \Vdash A^{\mathcal{I}}$.
ii) On utilisera les notations $|\!|\!|A^{\mathcal{I}}|\!|\!|$ et $\xi \mathrel{|\!|\!\!\vdash} A^{\mathcal{I}}$ si on a déjà défini une autre structure de réalisabilité.

On donne ci-dessous les règles de démonstration et de typage en logique classique du second ordre (voir [3,4,5]) ; dans ces règles, Γ désigne un *contexte*, c'est-à-dire une expression de la forme $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$. Dans une expresssion comme " $t : A$ ", t est une quasi-preuve et A une formule du second ordre.

1. $\Gamma \vdash x_i : A_i \ (1 \le i \le n)$ (Axiome)
2. $\Gamma \vdash t : A \to B,\ \Gamma \vdash u : A \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash tu : B$ (Modus ponens)
3. $\Gamma, x : A \vdash t : B \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash \lambda x\, t : A \to B$ (Introduction de $\to$)
4. $\Gamma \vdash \mathsf{cc} : ((A \to B) \to A) \to A$ (Loi de Peirce)
5. $\Gamma \vdash t : A \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash t : \forall x\, A$ (resp. $\forall X\, A$) (Introduction de $\forall$)
si x (resp. X) n'est pas libre dans Γ.

6. $\Gamma \vdash t : \forall x\, A \Rightarrow \Gamma \vdash t : A[\tau/x]$ pour tout terme d'individu τ (Elimination de $\forall x$)
7. $\Gamma \vdash t : \forall X\, A \Rightarrow \Gamma \vdash t : A[F/Xx_1 \ldots x_k]$ pour toute formule F (Elimination de $\forall X$)

Théorème 1 (Lemme d'adéquation).
Si $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A$, *si* $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$ *et si* $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ $(1 \leq i \leq k)$, *alors* $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash A^{\mathcal{I}}$.
En particulier, si A *est close et si* $\vdash t : A$, *alors* $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash A$ *pour toute substitution* $[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}$. *On écrira cette propriété, en abrégé,* $t[\mathcal{S}] \Vdash A$ *ou même* $t \Vdash A$.

Démonstration par récurrence sur la longueur de la preuve de $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A$. On considère la dernière règle utilisée.

1. Axiome. On a $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ et donc $x_i[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$, d'après l'hypothèse 1 sur $\perp\!\!\!\perp$

2. Modus ponens. On a $t = uv$; $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash u : B \to A$ et $v : B$.
Etant donnée $\pi \in \|A^{\mathcal{I}}\|$, on doit montrer $(uv)[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après l'hypothèse 2 sur $\perp\!\!\!\perp$, il suffit de montrer :
$$u[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \star v[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$$
pour $\xi'_1 \leq \xi_1, \ldots, \xi'_k \leq \xi_k$ avec $[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \in \mathcal{S}$.
Or, on a $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ et donc $\xi'_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$, puisque $\xi'_i \leq \xi_i$. Par hypothèse de récurrence, on a : $v[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}}$ et par suite, $v[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \centerdot \pi \in \|B^{\mathcal{I}} \to A^{\mathcal{I}}\|$.
Or, par hypothèse de récurrence, on a aussi $u[\xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}} \to A^{\mathcal{I}}$, d'où le résultat.

3. Introduction de $\to$. On a $A = B \to C$, $t = \lambda x\, u$. On doit montrer :
$\lambda x\, u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}} \to C^{\mathcal{I}}$ et on considère donc $\xi \Vdash B^{\mathcal{I}}$, $\pi \in \|C^{\mathcal{I}}\|$. On est ramené à montrer $\lambda x\, u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \xi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Pour cela, d'après l'hypothèse 3 sur $\perp\!\!\!\perp$, il suffit de montrer $u[\xi'/x, \xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, quels que soient $\xi' \leq \xi, \xi'_1 \leq \xi_1, \ldots, \xi'_k \leq \xi_k$, tels que $[\xi'/x, \xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \in \mathcal{S}$.
Or, on a $\xi \Vdash B^{\mathcal{I}}$ et donc $\xi' \Vdash B^{\mathcal{I}}$, puisque $\xi' \leq \xi$. De même, $\xi'_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$; d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $u[\xi'/x, \xi'_1/x_1, \ldots, \xi'_k/x_k] \Vdash C^{\mathcal{I}}$, d'où le résultat, puisque $\pi \in \|C^{\mathcal{I}}\|$.

4. Loi de Peirce. On montre d'abord :

Lemme 2. *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbf{\Pi}$ *une valeur de vérité. Si* $\pi \in \mathcal{A}$, *alors* $\mathsf{k}_\pi \Vdash \neg\mathcal{A}$.

Soient $\xi \Vdash \mathcal{A}$ et $\rho \in \mathbf{\Pi}$; on doit montrer $\mathsf{k}_\pi \star \xi \centerdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est clair.
C.Q.F.D.

On doit montrer que $\mathsf{cc}[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash (\neg A \to A) \to A$.
Soient donc $\xi \Vdash \neg A \to A$ et $\pi \in \|A\|$. On doit montrer que $\mathsf{cc}[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \xi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \mathsf{k}_\pi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. D'après l'hypothèse sur ξ et π, il suffit de montrer que $\mathsf{k}_\pi \Vdash \neg A$, ce qui résulte du lemme 2.

5. Introduction de $\forall$. On a $A = \forall X\, B$, X n'étant pas libre dans A_i. On doit montrer : $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash (\forall X\, B)^{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{J}}$ avec $\mathcal{J} = \mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]$.
Or on a, par hypothèse, $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ donc $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{J}}$: en effet, comme X n'est pas libre dans A_i, on a $\|A_i^{\mathcal{I}}\| = \|A_i^{\mathcal{J}}\|$. L 'hypothèse de récurrence donne alors le résultat.

7. Elimination de $\forall X$. On a $A = B[F/Xx_1 \ldots x_n]$ et on doit montrer :
$t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B[F/Xx_1 \ldots x_n]^{\mathcal{I}}$ avec l'hypothèse $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash (\forall X\, B)^{\mathcal{I}}$.
Cela découle du :

Lemme 3. $\|B[F/Xx_1 \dots x_n]^{\mathcal{I}}\| = \|B\|^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}$ *où* $\mathcal{X} : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ *est défini par :* $\mathcal{X}(k_1, \dots, k_n) = \|F^{\mathcal{I}[x_1 \leftarrow k_1, \dots, x_n \leftarrow k_n]}\|$.

Preuve par récurrence sur B. C'est trivial si X n'est pas libre dans B. Le seul cas intéressant de la récurrence est $B = \forall Y\, C$, et on a donc $Y \neq X$. On a alors :
$\|B[F/Xx_1 \dots x_n]^{\mathcal{I}}\| = \|(\forall Y\, C[F/Xx_1 \dots x_n])^{\mathcal{I}}\| = \bigcup_{\mathcal{Y}} \|C[F/Xx_1 \dots x_n]^{\mathcal{I}[Y \leftarrow \mathcal{Y}]}\|$.
Par hypothèse de récurrence, cela donne $\bigcup_{\mathcal{Y}} \|C^{\mathcal{I}[Y \leftarrow \mathcal{Y}][X \leftarrow \mathcal{X}]}\|$, soit $\bigcup_{\mathcal{Y}} \|C^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}][Y \leftarrow \mathcal{Y}]}\|$ c'est-à-dire $\|(\forall Y\, C)^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}\|$.

C.Q.F.D.

Définitions.
i) La formule $x = y$ est, par définition, $\forall X(Xx \to Xy)$.
ii) Soit $\mathcal{E} \subset \mathbf{\Lambda}$ et $\mathcal{X} \subset \mathbf{\Pi}$ une valeur de vérité. On pose $\mathcal{E} \to \mathcal{X} = \{\xi \centerdot \pi;\ \xi \in \mathcal{E}, \pi \in \mathcal{X}\}$.
Cela permet de donner une valeur de vérité à des " formules généralisées ", du genre : $\forall x \forall X[\mathcal{E}(x, X) \to F(x, X)]$.
iii) Si $t \in \mathsf{QP}_0$, on désignera par $\{t[\mathcal{S}]\}$ l'ensemble $\{t[\xi_1/x_1, \dots, \xi_k/x_k];\ [\xi_1/x_1, \dots, \xi_k/x_k] \in \mathcal{S}\}$.
iv) Certains éléments de $\mathbf{\Lambda}$ sont des *instructions*. On impose alors à $\perp\!\!\!\perp$ des conditions supplémentaires, qu'on appelle des *règles de réduction*, notées $\xi \star \pi \succ \xi' \star \pi'$, ce veut dire : si $\xi' \star \pi' \in \perp\!\!\!\perp$, alors $\xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Un premier exemple est donné dans le théorème 5.

Théorème 4. *On définit le prédicat binaire* $\neq$ *par* $\|m \neq n\| = \mathbf{\Pi}$ *si* $m = n$ *et* $\emptyset$ *sinon. Alors :*
i) $\lambda x\, xI[\mathcal{S}] \Vdash \forall x \forall y[(x = y \to \bot) \to x \neq y]$ *;*
ii) $\lambda x \lambda y\, yx[\mathcal{S}] \Vdash \forall x \forall y[x \neq y \to (x = y \to \bot)]$.

i) Il suffit de montrer $\lambda x\, xI[\mathcal{S}] \Vdash (m = m \to \bot) \to \bot$, ce qui découle de :
$\vdash \lambda x\, xI : (m = m \to \bot) \to \bot$ et du théorème 1 (lemme d'adéquation).
ii) On doit montrer $\lambda x \lambda y\, yx[\mathcal{S}] \Vdash \bot, m = m \to \bot$ et $\top, (\top \to \bot) \to \bot$ ce qui découle de :
$\vdash \lambda x \lambda y\, yx : \bot, m = m \to \bot$, $\vdash \lambda x \lambda y\, yx : \top, (\top \to \bot) \to \bot$ et du lemme d'adéquation.

C.Q.F.D.

Théorème 5. *Soient* $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{\Lambda}$*, et* $T_U, S_U \in \mathbf{\Lambda}$ *deux instructions avec les règles de réduction :*
$T_U \star \phi \centerdot \nu \centerdot \pi \succ \nu \star S_U \centerdot \phi \centerdot u_0 \centerdot \pi$ *;* $S_U \star \psi \centerdot u_n \centerdot \pi \succ \psi \star u_{n+1} \centerdot \pi$*. Alors :*
$T_U \Vdash \forall n \forall X[(\{u_n\} \to X), int(n) \to X]$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\phi \Vdash \{u_n\} \to X$, $\nu \Vdash \mathrm{int}(n)$ et $\pi \in X$. On doit montrer $T_U \star \phi \centerdot \nu \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire $\nu \star S_U \centerdot \phi \centerdot u_0 \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, d'après la règle de réduction de T_U. Comme $\nu \Vdash \mathrm{int}(n)$, il suffit de trouver un prédicat unaire Y tel que $S_U \Vdash \forall y(Yy \to Ysy)$, $\phi \Vdash Y0$ et $u_0 \centerdot \pi \in \|Yn\|$.
On pose $Yi = \{u_{n-i} \centerdot \pi\}$ pour $0 \leq i \leq n$ et $\|Yi\| = \emptyset$ pour $i > n$.
On a $u_0 \centerdot \pi \in \|Yn\|$ par définition de Yn et $\phi \Vdash Y0$, par hypothèse sur ϕ.
On montre $S_U \Vdash Yi \to Ysi$: c'est évident pour $i \geq n$, puisqu'alors $\|Ysi\| = \emptyset$.
Soient $i < n$, $\psi \Vdash Yi$; on doit montrer $S_U \star \psi \centerdot u_{n-i-1} \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. D'après la règle de réduction de S_U, il suffit de montrer $\psi \star u_{n-i} \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est évident, par hypothèse sur ψ.

C.Q.F.D.

Notation. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\underline{n}$ l'entier de Church $\lambda f \lambda x (f)^n x$.
On pose $s = \lambda n \lambda f \lambda x (f)(n) f x$ (opération de successeur dans les entiers de Church).

Théorème 6 (Mise en mémoire des entiers). *Soient $T, S \in \mathbf{\Lambda}$ deux instructions avec les règles de réduction :* $T \star \phi \centerdot \nu \centerdot \pi \succ \nu \star S \centerdot \phi \centerdot \underline{0}[] \centerdot \pi$; $S \star \psi \centerdot s^n \underline{0}[] \centerdot \pi \succ \psi \star s^{n+1} \underline{0}[] \centerdot \pi$.
Alors :
i) $T \Vdash \forall X \forall n [(\{s^n \underline{0}[]\} \to X) \to (int(n) \to X)]$
et $I[] \Vdash \forall X \forall n [(int(n) \to X) \to (\{s^n \underline{0}[]\} \to X)]$
lorsque X est une variable propositionnelle.
ii) $T \Vdash \forall X [\forall n (\{s^n \underline{0}[]\} \to X n) \to \forall n (int(n) \to X n)]$
et $I[] \Vdash \forall X [\forall n (int(n) \to X n) \to \forall n (\{s^n \underline{0}[]\} \to X n)]$
lorsque X est une variable de prédicat unaire.

Rappelons que la notation $\xi \star \pi \succ \xi' \star \pi'$, utilisée pour les " règles de réduction ", signifie simplement : $\xi' \star \pi' \in \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
i) Pour la première formule, il suffit d'appliquer le théorème 5 avec $u_n = s^n \underline{0}[]$.
Pour la seconde, on a $\vdash s^n \underline{0} : \mathrm{int}(n)$, donc $s^n \underline{0}[] \Vdash \mathrm{int}(n)$ d'après le théorème 1 (lemme d'adéquation). Soient alors $\xi \Vdash \mathrm{int}(n) \to X$ et $\pi \in \|X\|$. On veut montrer :
$\lambda x\, x[] \star \xi \centerdot s^n \underline{0}[] \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. D'après la propriété 3 de $\perp\!\!\!\perp$, on doit montrer $\xi' \star s^n \underline{0}[] \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\xi' \leq \xi$, ce qui est évident, puisque $\xi' \star s^n \underline{0}[] \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ par hypothèse sur ξ.
ii) Corollaire immédiat de (i).
C.Q.F.D.

La notation $\forall n^{\mathrm{int}} F[n]$ désigne la formule $\forall n (\mathrm{int}(n) \to F[n])$. Le théorème 6(ii) permet de remplacer cette formule par $\forall n (\{s^n \underline{0}[]\} \to F[n])$. Cette définition des *quantificateurs restreints aux entiers* a l'avantage de permettre des calculs de valeurs de formules beaucoup plus simples. C'est pourquoi nous l'utiliserons dans la suite. Elle a néanmoins l'inconvénient de dépendre de la structure de réalisabilité considérée, par l'intermédiaire de $\{s^n \underline{0}[]\}$, qui contient la substitution vide.

On considère un langage du second ordre pour l'arithmétique (avec symboles de fonctions, mais pas de constantes de prédicat), et le modèle standard pour ce langage (modèle plein, les individus sont les entiers, chaque symbole de fonction est interprété dans les entiers). Alors toute équation vraie $\forall x_1 \ldots \forall x_k (t(x_1, \ldots, x_k) = u(x_1, \ldots, x_k))$ (t, u étant des termes du langage) est réalisée par $I[\mathcal{S}]$. En restreignant les formules à $\mathrm{int}(x)$, on remplace l'axiome de récurrence par les axiomes :

$$\mathcal{A}_f \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_k (\mathrm{int}(x_1), \ldots, \mathrm{int}(x_k) \to \mathrm{int}(f(x_1, \ldots, x_k)))$$

pour chaque symbole de fonction f. On s'intéresse donc aux fonctions f pour lesquelles $\mathcal{A}_f$ est réalisé (par une quasi-preuve close). Ce sont des fonctions récursives, puisque cette quasi-preuve calcule f.

Pour réaliser $\mathcal{A}_f$, il suffit de le démontrer, en logique du second ordre, à partir d'équations vraies (qui comportent éventuellement des symboles de fonction autres que f). On peut ainsi utiliser les symboles pour toutes les fonctions arithmétiques usuelles.

Pour le théorème 7 ci-dessous, on suppose l'existence des instructions suivantes :

- Etant donnés $\xi \in \mathbf{\Lambda}$ et $\pi \in \mathbf{\Pi}$, une instruction notée $\xi \mathsf{k}_\pi$, avec la règle de réduction :
$$\xi \mathsf{k}_\pi \star \varpi \succ \xi \star \mathsf{k}_\pi \centerdot \varpi.$$
- Une instruction notée V, avec la règle de réduction :
$$V \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi \succ \eta \star \xi \mathsf{k}_\pi \centerdot \pi.$$

Théorème 7. *Pour $\mathcal{X} \subset \mathbf{\Pi}$, on définit $\mathcal{X}^- \subset \mathbf{\Lambda}$ en posant $\mathcal{X}^- = \{\mathsf{k}_\pi;\, \pi \in \mathcal{X}\}$.*
Alors, si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbf{\Pi}$, on a :
i) $I[\mathcal{S}] \Vdash (\neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \to (\mathcal{X}^- \to \mathcal{Y})$;
ii) $V \Vdash (\mathcal{X}^- \to \mathcal{Y}) \to ((\mathcal{Y} \to \mathcal{X}) \to \mathcal{X})$.

i) Soient $\eta \Vdash \neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\pi \in \mathcal{X}$ et $\rho \in \mathcal{Y}$. On doit montrer que $I[\varsigma] \star \eta \centerdot \mathsf{k}_\pi \centerdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$, pour toute substitution $\varsigma \in \mathcal{S}$. Or, on a $\vdash I : (\neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}), \neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et donc :
$I[\varsigma] \Vdash (\neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}), \neg\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ d'après le théorème 1 (lemme d'adéquation).
D'après le lemme 2, on a $\mathsf{k}_\pi \Vdash \neg\mathcal{X}$, d'où le résultat.
ii) Soient $\xi \Vdash \mathcal{X}^- \to \mathcal{Y}$, $\eta \Vdash \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ et $\pi \in \mathcal{X}$. On doit montrer que $V \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\eta \star \xi\mathsf{k}_\pi \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Il suffit donc de montrer $\xi\mathsf{k}_\pi \Vdash \mathcal{Y}$; soit $\varpi \in \mathcal{Y}$. On a $\xi \star \mathsf{k}_\pi \centerdot \varpi \in \perp\!\!\!\perp$, puisque $\mathsf{k}_\pi \in \mathcal{X}^-$; d'après la règle de réduction de $\xi\mathsf{k}_\pi$, on a donc $\xi\mathsf{k}_\pi \star \varpi \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Structures $\mathbf{SR}_0$ et $\mathbf{SR}_1$

On considère un modèle de réalisabilité usuel (voir[3,4,5]), donné par un ensemble saturé $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \times \Pi$. Les éléments de Λ_c sont les λ-termes clos comportant les continuations k_π, les instructions $\mathsf{cc}, \chi, \chi', \sigma$ (pour l'axiome du choix non extensionnel, lemme 24), et éventuellement d'autres. Les instructions T, S (pour la mise en mémoire des entiers, théorème 6) sont ici inutiles, car elles sont données par les deux quasi-preuves :

$$T_0 = \lambda f \lambda n((n)\lambda g \lambda x(g)(s)x)f\underline{0} \quad \text{et} \quad S_0 = \lambda g \lambda x(g)(s)x.$$

Pour $\pi \in \Pi$ et $\tau \in \Lambda_c$, π^τ désigne la pile obtenue en ajoutant τ au fond de la pile π, juste avant la constante de pile :
si $\pi = \xi_1 \centerdot \ldots \centerdot \xi_n \centerdot \pi_0$, où π_0 est une constante de pile, alors $\pi^\tau = \xi_1 \centerdot \cdots \centerdot \xi_n \centerdot \tau \centerdot \pi_0$.
Les nouvelles instructions χ, χ' ont les règles de réduction suivantes :

$$\chi \star \xi \centerdot \pi^\tau \succ \xi \star \tau \centerdot \pi \ \text{(lecture)} \ ; \ \chi' \star \xi \centerdot \tau \centerdot \pi \succ \xi \star \pi^\tau \ \text{(écriture)}.$$

Cette structure de réalisabilité sera désignée par SR_0. On va en construire une nouvelle, que nous désignerons par SR_1.
On considère un ensemble P muni d'une opération binaire $(p, p') \mapsto pp'$, avec un élément distingué $\mathbf{1}$. Pour chaque $p \in P$, on se donne un ensemble de termes $\mathsf{C}[p] \subset \Lambda_c$.
On suppose qu'on a cinq quasi-preuves closes $\alpha_i (0 \le i \le 4)$ telles que :
$\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha_0\tau \in \mathsf{C}[p]$; $\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha_1\tau \in \mathsf{C}[qp]$;
$\tau \in \mathsf{C}[p] \Rightarrow \alpha_2\tau \in \mathsf{C}[pp]$; $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)] \Rightarrow \alpha_3\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$;
$\tau \in \mathsf{C}[p] \Rightarrow \alpha_4\tau \in \mathsf{C}[p\mathbf{1}]$.
Dans la suite, on considère des expressions de la forme $\gamma = (\alpha_{i_1})(\alpha_{i_2}) \ldots (\alpha_{i_k})$ avec $0 \le i_1, \ldots, i_k \le 4$, qu'on appellera une *composée de* α_i $(0 \le i \le 4)$.
Une telle expression n'est pas dans Λ_c, mais $\gamma\tau \in \Lambda_c$ pour tout $\tau \in \Lambda_c$;
le terme $\gamma\tau = (\alpha_{i_1}) \ldots (\alpha_{i_k})\tau$ sera aussi écrit $(\gamma)\tau$.

Lemme 8. *On a six expressions $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ qui sont des composées de α_i $(0 \le i \le 3)$ telles que :*
$\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \gamma_0\tau \in \mathsf{C}[p(pq)]$; $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r] \Rightarrow \gamma_1\tau \in \mathsf{C}[pr]$;

$\tau \in \mathsf{C}[(pq)r] \Rightarrow \gamma_2\tau \in \mathsf{C}[qr]$; $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)] \Rightarrow \gamma_3\tau \in \mathsf{C}[q(rr)]$;
$\tau \in \mathsf{C}[p(qr)] \Rightarrow \gamma_4\tau \in \mathsf{C}[qp]$; $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r] \Rightarrow \gamma_5\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$.

On a $\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow (\alpha_2)\tau \in \mathsf{C}[(pq)(pq)] \Rightarrow (\alpha_3)(\alpha_2)\tau \in \mathsf{C}[((pq)p)q)]$
$\Rightarrow (\alpha_0)(\alpha_3)(\alpha_2)\tau \in \mathsf{C}[(pq)p] \Rightarrow (\alpha_1)(\alpha_0)(\alpha_3)(\alpha_2)\tau \in \mathsf{C}[p(pq)]$.
On pose donc $\gamma_0 = (\alpha_1)(\alpha_0)(\alpha_3)(\alpha_2)$. On a :
$\tau \in \mathsf{C}[(pq)r] \Rightarrow (\alpha_1)\tau \in \mathsf{C}[r(pq)] \Rightarrow (\alpha_3)(\alpha_1)\tau \in \mathsf{C}[(rp)q)] \Rightarrow (\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)\tau \in \mathsf{C}[q(rp)]$
$\Rightarrow (\alpha_3)(\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)\tau \in \mathsf{C}[(qr)p)] \Rightarrow (\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)\tau \in \mathsf{C}[p(qr))]$.
On pose donc $\gamma_5 = (\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)(\alpha_3)(\alpha_1)$.
Calculs analogues pour les γ_i, $1 \le i \le 4$.

C.Q.F.D.

Remarque. Soient $t(p_1,\dots,p_n)$, $u(p_1,\dots,p_n)$ deux termes écrits avec les variables $p_1,\dots,p_n$, un symbole de fonction binaire et un symbole de constante $\mathbf{1}$.
On montre facilement que, si la formule : $\forall p_1 \dots \forall p_n[t(p_1,\dots,p_n) \le u(p_1,\dots,p_n)]$
est conséquence de :
$\forall p\forall q\forall r((pq = qp) \land (p(qr) = (pq)r) \land (pp = p) \land (p\mathbf{1} = p))$, $\forall p\forall q(p \le q \leftrightarrow pq = p)$,
alors, il existe une composée γ des $\alpha_i (0 \le i \le 4)$ telle que l'on ait :
$\tau \in \mathsf{C}[t(p_1,\dots,p_n)] \Rightarrow \gamma\tau \in \mathsf{C}[u(p_1,\dots,p_n)]$.

Pour chaque expression γ qui est une composée de α_i $(0 \le i \le 4)$, on désigne par $\overline{\gamma}$ l'instruction dont la règle de réduction est :

$$\overline{\gamma} \star \xi \,.\, \pi^{\tau} \succ \xi \star \pi^{\gamma\tau} \text{ pour } \xi \in \Lambda_c \text{ et } \pi \in \Pi.$$

On peut, en fait, poser $\overline{\gamma} = \lambda x(\chi)\lambda y(\chi' x)(\gamma)y$.

On définit une nouvelle structure de réalisabilité en posant :
$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_c \times P$, $\mathbf{\Pi} = \Pi \times P$ et $\mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi} = (\Lambda_c \star \Pi) \times P$.
Les opérations sont définies comme suit :
$(\xi,p) \,.\, (\pi,q) = (\xi \,.\, \pi, pq)$; $(\xi,p) \star (\pi,q) = (\xi \star \pi, pq)$;
$\mathsf{k}_{(\pi,p)} = (\mathsf{k}^*_\pi, p)$ avec $\mathsf{k}^*_\pi = \lambda x(\chi)\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' x)(\gamma_4)y$.
On prend pour $\mathcal{S}$ l'ensemble des substitutions de la forme $[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k]$.
Soit $t[x_1,\dots,x_k]$ une quasi-preuve dont les variables libres sont parmi $x_1,\dots,x_k$. On pose :

$$t[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] = (t^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k],p)$$

où $t^*[x_1,\dots,x_k] \in \mathsf{QP}$ est obtenu à partir de t au moyen des règles suivantes :
$x^* = x$; $(tu)^* = \overline{\gamma}_0 t^* u^*$; $(\lambda x\, t)^* = \overline{\alpha}_3 \lambda x\, t^*[\overline{\gamma}_2 x/x, \overline{\gamma}_1 x_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1 x_k/x_k]$;
$\mathsf{cc}^* = \lambda x(\chi)\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k((\chi' x)(\gamma_3)y)k^*$ avec $k^* = \lambda x(\chi)\lambda y(k)(\chi' x)(\gamma_4)y$.
Dans le cas de la substitution vide, notée [], on a $t \in \mathsf{QP}_0$ et on pose $t[] = (t^*, \mathbf{1})$.
Les λ_c-termes cc^* et k^*_π s'exécutent donc comme suit :

$$\mathsf{cc}^* \star \xi \,.\, \pi^{\tau} \succ \xi \star \mathsf{k}^*_\pi \,.\, \pi^{\gamma_3\tau} \;;\; \mathsf{k}^*_\pi \star \xi \,.\, \varpi^{\tau} \succ \xi \star \pi^{\gamma_4\tau}.$$

On pose $\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp = \{(\xi \star \pi, p); p \in P, (\forall \tau \in \mathsf{C}[p])\, \xi \star \pi^{\tau} \in \perp\!\!\!\perp\}$ ($\perp\!\!\!\perp$ est le sous-ensemble saturé de $\Lambda_c \star \Pi$ qui définit la réalisabilité standard).
La structure de réalisabilité que nous venons de définir sera désignée par SR_1.

Lemme 9. *$\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$ est un ensemble saturé, c'est-à-dire qu'il a les propriétés 1 à 5, page 2.*

1. Trivial, puisque $x_i[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] = (\xi_i,p)$.
2. L'hypothèse est $t[(\xi'_1,p')/x_1,\dots,(\xi'_k,p')/x_k] \star u[(\xi'_1,p')/x_1,\dots,(\xi'_k,p')/x_k] \,.\, (\pi,q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$

quels que soient $(\xi'_1,p') \le (\xi_1,p),\dots,(\xi'_k,p') \le (\xi_k,p)$. En fait, on utilisera seulement le fait que $t[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] \star u[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] \,.\, (\pi,q) \in ⫫$
c'est-à-dire $(t^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \star u^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \,.\, \pi, p(pq)) \in ⫫$.
On doit montrer $tu[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] \,.\, (\pi,q) \in ⫫$, autrement dit :
$((\overline{\gamma}_0 t^* u^*)[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \star \pi, pq) \in ⫫$. On suppose donc $\tau \in \mathsf{C}[pq]$, donc $\gamma_0\tau \in \mathsf{C}[p(pq)]$
d'où $t^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \star u^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \,.\, \pi^{\gamma_0\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ et par suite :
$(\overline{\gamma}_0 t^* u^*)[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.
3. On suppose $t[(\xi',p')/x,(\xi'_1,p')/x_1,\dots,(\xi'_k,p')/x_k] \star (\pi,r) \in ⫫$
quels que soient $(\xi',p') \le (\xi,q)$, $(\xi'_1,p') \le (\xi_1,p),\dots,(\xi'_k,p') \le (\xi_k,p)$.
On doit montrer $\lambda x\, t[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] \star (\xi,q) \,.\, (\pi,r) \in ⫫$, c'est-à-dire :
$((\lambda x\, t)^*[\xi_1/x_1,\dots,\xi_k/x_k] \star \xi \,.\, \pi, p(qr)) \in ⫫$ ou encore :
$(\overline{\alpha}_3 \lambda x\, t^*[\overline{\gamma}_2 x/x, \overline{\gamma}_1\xi_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1\xi_k/x_k] \star \xi \,.\, \pi, p(qr)) \in ⫫$.
Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$. On doit montrer $\overline{\alpha}_3 \lambda x\, t^*[\overline{\gamma}_2 x/x, \overline{\gamma}_1\xi_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1\xi_k/x_k] \star \xi \,.\, \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$
soit $t^*[\overline{\gamma}_2\xi/x, \overline{\gamma}_1\xi_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1\xi_k/x_k] \star \pi^{\alpha_3\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.

Lemme 10. *On a* $(\overline{\gamma}_1\xi, pq) \le (\xi,p)$ *et* $(\overline{\gamma}_2\xi, pq) \le (\xi,q)$.

Supposons $(\xi,p) \star (\pi,r) \in ⫫$, soit $(\xi \star \pi, pr) \in ⫫$. On doit montrer $(\overline{\gamma}_1\xi, pq) \star (\pi,r) \in ⫫$, soit $(\overline{\gamma}_1\xi \star \pi, (pq)r) \in ⫫$. On prend donc $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$, d'où $\gamma_1\tau \in \mathsf{C}[pr]$. On a donc $\xi \star \pi^{\gamma_1\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $\overline{\gamma}_1\xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.
Même preuve pour la deuxième partie du lemme.

C.Q.F.D.

On a donc $(\overline{\gamma}_2\xi, pq) \le (\xi,q)$; $(\overline{\gamma}_1\xi_i, pq) \le (\xi_i,p)$ pour $1 \le i \le k$. D'après l'hypothèse sur t, il en résulte que $t[(\overline{\gamma}_2\xi, pq)/x, (\overline{\gamma}_1\xi_1, pq)/x_1,\dots,(\overline{\gamma}_1\xi_k, pq)/x_k] \star (\pi,r) \in ⫫$, ou encore :
$(t^*[\overline{\gamma}_2\xi/x, \overline{\gamma}_1\xi_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1\xi_k/x_k] \star \pi, (pq)r) \in ⫫$.
Or, on a $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$, donc $\alpha_3\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$; il en résulte que :
$t^*[\overline{\gamma}_2\xi/x, \overline{\gamma}_1\xi_1/x_1,\dots,\overline{\gamma}_1\xi_k/x_k] \star \pi^{\alpha_3\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ ce qui est le résultat voulu.

Remarque. Lorsque $k = 0$ (cas de la substitution vide), la preuve reste valable, avec $p = \mathbf{1}$.

4. On doit montrer :
$$(\xi,q) \star \mathsf{k}_{(\pi,r)} \,.\, (\pi,r) \in ⫫ \Rightarrow \mathsf{cc}[(\xi_1,p)/x_1,\dots,(\xi_k,p)/x_k] \star (\xi,q) \,.\, (\pi,r) \in ⫫$$
ce qui s'écrit $(\xi,q) \star (\mathsf{k}^*_\pi, r) \,.\, (\pi,r) \in ⫫ \Rightarrow (\mathsf{cc}^*, p) \star (\xi,q) \,.\, (\pi,r) \in ⫫$, ou encore :
$(\xi \star \mathsf{k}^*_\pi \,.\, \pi, q(rr)) \in ⫫ \Rightarrow (\mathsf{cc}^* \star \xi \,.\, \pi, p(qr)) \in ⫫$.
On suppose donc $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$, d'où $\gamma_3\tau \in \mathsf{C}[q(rr)]$ et donc $\xi \star \mathsf{k}^*_\pi \,.\, \pi^{\gamma_3\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après la règle de réduction pour cc^*, on a donc $\mathsf{cc}^* \star \xi \,.\, \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.

5. $(\xi,q) \star (\pi,p) \in ⫫ \Rightarrow (\mathsf{k}^*_\pi, p) \star (\xi,q) \,.\, (\varpi,r) \in ⫫$ c'est-à-dire :
$(\xi \star \pi, qp) \in ⫫ \Rightarrow (\mathsf{k}^*_\pi \star \xi \,.\, \varpi, p(qr)) \in ⫫$. On suppose donc $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$, d'où $\gamma_4\tau \in \mathsf{C}[qp]$, d'où $\xi \star \pi^{\gamma_4\tau} \in \perp\!\!\!\perp$. D'après la règle de réduction de k^*_π, on en déduit $\mathsf{k}^*_\pi \star \xi \,.\, \varpi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Notation.
Dans SR_1, on notera $|\!|\!|F|\!|\!|$ la valeur de vérité d'une formule close F (sous-ensemble de $\mathbf{\Pi} = \Pi \times P$) et $(\xi,p) \Vdash F$ le fait que $(\xi,p) \in \mathbf{\Lambda}$ réalise cette formule, c'est-à dire :
$\forall\pi\forall q[(\pi,q) \in |\!|\!|F|\!|\!| \Rightarrow (\xi \star \pi, pq) \in ⫫]$.

Comme on veut utiliser, dans cette structure de réalisabilité, le théorème 6 de mise en mémoire des entiers, on doit trouver, dans $\mathbf{\Lambda}$, les instructions nécessaires.

Elles s'écrivent $(T, \mathbf{1}), (S, \mathbf{1})$, avec :
$T = \overline{\beta}\lambda f \lambda n(n)Sf\underline{0}$; β est tel que $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p(qr))] \Rightarrow \beta\tau \in \mathsf{C}[q(\mathbf{1}(p(\mathbf{1}r)))]$.
$S = \overline{\alpha}\lambda g \lambda x(g)(s)x$; α est tel que $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}p] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$.
On a alors, en effet, $s^n\underline{0}[] = (s^n\underline{0}, \mathbf{1})$ et :
$(\nu, q) \star (S, \mathbf{1}) \bullet (\phi, p) \bullet (\underline{0}, \mathbf{1}) \bullet (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (T, \mathbf{1}) \star (\phi, p) \bullet (\nu, q) \bullet (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$.
$(\psi, p) \star (s^{n+1}\underline{0}, \mathbf{1}) \bullet (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (S, \mathbf{1}) \star (\psi, p) \bullet (s^n\underline{0}, \mathbf{1}) \bullet (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$.
En effet, ces conditions s'écrivent :
$(\nu \star S \bullet \phi \bullet \underline{0} \bullet \pi, q(\mathbf{1}(p(\mathbf{1}r)))) \in \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (T \star \phi \bullet \nu \bullet \pi, \mathbf{1}(p(qr))) \in \perp\!\!\!\perp$.
$(\psi \star s^{n+1}\underline{0} \bullet \pi, p(\mathbf{1}q)) \in \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (S \star \psi \bullet s^n\underline{0} \bullet \pi, \mathbf{1}(p(\mathbf{1}q))) \in \perp\!\!\!\perp$.
Noter que α, β sont des composées des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$. L'élément $\mathbf{1}$ n'a aucune propriété particulière et peut donc être pris quelconque dans P.

On veut également pouvoir utiliser le théorème 7 ; pour cela, on remarque que cette structure de réalisabilité contient les instructions nécessaires. En effet :

i) On définit une opération binaire sur $\mathbf{\Lambda}$ en posant :

$$(\xi, p)(\eta, q) = (\overline{\gamma}_5\xi\eta, pq) \text{ pour } (\xi, p), (\eta, q) \in \mathbf{\Lambda}.$$

On a alors :

$$(\xi, p)(\eta, q) \star (\pi, r) \succ (\xi, p) \star (\eta, q) \bullet (\pi, r)$$

autrement dit :

$$(\xi, p) \star (\eta, q) \bullet (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (\xi, p)(\eta, q) \star (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp.$$

En effet, ceci s'écrit $(\xi \star \eta \bullet \pi, p(qr)) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (\overline{\gamma}_5\xi\eta \bullet \pi, (pq)r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.
On suppose donc $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$; alors $\gamma_5\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$, donc $\xi \star \eta \bullet \pi^{\gamma_5\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $\overline{\gamma}_5\xi\eta \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.

L'instruction cherchée est alors $(\xi, p)\mathsf{k}_{(\pi,q)}$, soit $(\xi, p)(\mathsf{k}^*_\pi, q)$ c'est-à-dire $(\gamma_5\xi\mathsf{k}^*_\pi, pq)$.

Remarque. L'opération binaire que nous venons de définir dans $\mathbf{\Lambda}$ *n'est pas compatible* avec la substitution dans les quasi-preuves, c'est-à-dire que :
si $(\xi, p) = t[(\xi_1, p)/x_1, \ldots, (\xi_k, p)/x_k]$ et $(\eta, p) = u[(\xi_1, p)/x_1, \ldots, (\xi_k, p)/x_k]$,
alors $(\xi, p)(\eta, p) \ne tu[(\xi_1, p)/x_1, \ldots, (\xi_k, p)/x_k]$.

ii) L'instruction cherchée sera notée $(V, \mathbf{1})$ et doit avoir la règle de réduction suivante :

$$(V, \mathbf{1}) \star (\xi, p) \bullet (\eta, q) \bullet (\pi, r) \succ (\eta, q) \star (\xi, p)\mathsf{k}_{(\pi,r)} \bullet (\pi, r)$$

autrement dit $(\eta, q) \star (\xi, p)\mathsf{k}_{(\pi,r)} \bullet (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (V, \mathbf{1}) \star (\xi, p) \bullet (\eta, q) \bullet (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.
Or, ceci s'écrit $(\eta \star \overline{\gamma}_5\xi\mathsf{k}^*_\pi \bullet \pi, q((pr)r)) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (V \star \xi \bullet \eta \bullet \pi, \mathbf{1}(p(qr))) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.
On suppose donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p(qr))]$ et on a donc $\gamma\tau \in \mathsf{C}[q((pr)r)]$ pour une composée γ convenable des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$. On veut montrer $V \star \xi \bullet \eta \bullet \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ et on a $\eta \star \overline{\gamma}_5\xi\mathsf{k}^*_\pi \bullet \pi^{\gamma\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
On a donc $(\overline{\gamma}\eta)(\overline{\gamma}_5)\xi\mathsf{k}^*_\pi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ et on peut donc poser :

$$V = (\chi)\lambda\tau\lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k((\chi')(\overline{\gamma}y)(\overline{\gamma}_5)xk^*)\tau$$

où γ est une composée des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$ telle que $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p(qr))] \Rightarrow \gamma\tau \in \mathsf{C}[q((pr)r)]$
et $k^* = \lambda x(\chi)\lambda y(k)(\chi'x)(\gamma_4)y$.

Forcing

Nous définissons ci-dessous deux classes de formules de formules du second ordre. Elles utilisent des variables d'individu $x, y, \ldots$, des variables de prédicat $X, Y, \ldots, X^+, Y^+, \ldots$ (les variables X et X^+ ont la même arité), des variables de *condition* $p, q, \ldots$ Ce sont :

1. Les *formules de forcing*, ou *formules de* SR_0, qui peuvent être interprétées dans SR_0 seulement.
2. Les *formules de* SR_1, qui peuvent être interprétées dans SR_1 seulement.

1. Les formules de SR_0

Les *termes d'individu* sont construits avec les *variables d'individu* $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ et les symboles de fonction, qui sont toutes les fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ (k entier quelconque) dont on aura besoin (récursives ou non). Un terme d'individu sera noté $t[x_1, \ldots, x_k]$ ou $t^{\mathrm{int}}[x_1, \ldots, x_k]$ s'il y a ambiguïté.
Les *termes de condition* sont construits avec les *variables de condition* $p_1, \ldots, p_k, \ldots$, la constante $\mathbf{1}$ et un symbole de fonction binaire (par exemple $((pq)\mathbf{1})(qp)$ est un terme de condition). Un terme de condition sera noté $t[p_1, \ldots, p_k]$ ou $t^{\mathsf{P}}[p_1, \ldots, p_k]$ s'il y a ambiguïté.
Les *formules de* SR_0 sont construites comme suit :
• Les formules de SR_0 *atomiques*, de la forme :
$t^{\mathrm{int}} \neq u^{\mathrm{int}}$, $X(t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}})$, $t^{\mathsf{P}} \neq u^{\mathsf{P}}$ et $t^{\mathsf{P}} \notin X^+(t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}})$, où X est une variable de prédicat d'arité n, $t^{\mathrm{int}}, u^{\mathrm{int}}, t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}}$ sont des termes d'individu et $t^{\mathsf{P}}, u^{\mathsf{P}}$ des termes de condition.
La formule atomique $t^{\mathsf{P}} \notin X^+(t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}})$ se lit “ la condition t^{P} *s'oppose à* $X^+(t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}})$ ”.
• Si F et G sont des formules de SR_0, alors $F \to G$ en est une aussi.
• Si F est une formule de SR_0, alors $\mathsf{C}[t^{\mathsf{P}}] \to F$ en est une aussi.
• Si F est une formule de SR_0, alors $\forall x\, F$, $\forall x^{\mathrm{int}} F$ et $\forall p^{\mathsf{P}}\, F$ sont des formules de SR_0 (x est une variable d'individu, p une variable de condition).
• Si F est une formule de SR_0 et X une variable de prédicat, alors $\forall X\, F$ et $\forall X^+\, F$ sont des formules de SR_0.
Remarque. $\top$ et $\perp$ se trouvent parmi les formules atomiques : ce sont $0 \neq 1$ et $0 \neq 0$.
On utilisera aussi deux sous-classes :
i) Les formules de SR_0 *usuelles*, construites avec les mêmes règles, sauf que l'on ne permet que les formules atomiques $t^{\mathrm{int}} \neq u^{\mathrm{int}}$, $X(t_1^{\mathrm{int}}, \ldots, t_n^{\mathrm{int}})$ et les quantificateurs $\forall x$, $\forall x^{\mathrm{int}}$ et $\forall X$.
ii) Les formules de SR_0 *usuelles restreintes à* $\mathbb{N}$, sous-classe de (i) où l'on ne permet que les quantificateurs $\forall x^{\mathrm{int}}$ et $\forall X$.
Les formules de SR_0 prennent une valeur de vérité dans SR_0, c'est-à-dire dans $\mathcal{P}(\Pi)$; les variables de prédicat X varient dans SR_0, les variables X^+ dans SR_1.
Soit donc F une formule de SR_0 *close avec paramètres* : il s'agit d'une formule de SR_0, dans laquelle les variables libres d'individu ont été substituées par des entiers, les variables libres de condition ont été substituées par des éléments de P ; les variables libres X de prédicat n-aire ont été substituées par des prédicats de SR_0, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}$; les variables libres X^+ de prédicat n-aire ont été substituées par des prédicats de SR_1, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}^n}$.
On définit sa valeur de vérité $\|F\| \subset \Pi$ par récurrence sur la construction de F (comme d'habitude, $\xi \Vdash F$ signifie $(\forall \pi \in \|F\|)\, \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$) :
• Si F est atomique de la forme $t \neq u$, alors t, u sont des termes clos d'individu ou de condition. Ils ont donc une valeur dans $\mathbb{N}$ ou P ; $\|t \neq u\|$ est $\emptyset$ ou Π suivant que ces

valeurs sont distinctes ou non.
• Si F est atomique de la forme $X(t_1,\dots,t_n)$, alors $X \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}$ et $t_1,\dots,t_n$ sont des termes d'individu clos, donc ont une valeur dans $\mathbb{N}$. $\|X(t_1,\dots,t_n\|$ est alors défini de façon évidente.
• Si F est atomique de la forme $t^{\mathsf{P}} \notin X^+(t_1,\dots,t_n)$, alors $X^+ \in \mathcal{P}(\Pi\times P)^{\mathbb{N}^n}$ et $t_1,\dots,t_n$ sont des termes d'individu clos, donc ont une valeur dans $\mathbb{N}$. On a donc $X^+(t_1,\dots,t_n) \subset \Pi\times P$. Or, t^{P} est un terme de condition clos, donc prend une valeur $q \in P$. On pose alors :
$\|t^{\mathsf{P}} \notin X^+(t_1,\dots,t_n)\| = \|F\| = \{\pi \in \Pi;\ (\pi,q) \in X^+(t_1,\dots,t_n)\}$.
• Si $F \equiv G \to H$, alors $\|F\| = \{\xi \mathbin{\scriptstyle\bullet} \pi;\ \xi \Vdash G, \pi \in \|H\|\}$.
• Si $F \equiv \mathsf{C}[t^{\mathsf{P}}] \to H$, alors $\|F\| = \{\xi \mathbin{\scriptstyle\bullet} \pi;\ \xi \in \mathsf{C}[q], \pi \in \|H\|\}$ ($q \in P$ est la valeur de t^{P}).
• Si $F \equiv \forall x\, G$, alors $\|F\| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \|G[n/x]\|$.
• Si $F \equiv \forall x^{\mathrm{int}} G$, alors $\|F\| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s^n\underline{0} \mathbin{\scriptstyle\bullet} \pi;\ \pi \in \|G[n/x]\|\}$.
• Si $F \equiv \forall p^P\, G$, alors $\|F\| = \bigcup_{p\in P} \|G[p]\|$.
• Si $F \equiv \forall X\, G$, où X est une variable de prédicat n-aire, alors $\|F\| = \bigcup_{\overline{X}\in\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}} \|G[\overline{X}/X]\|$.
• Si $F \equiv \forall X^+ G$, où X est une variable de prédicat n-aire, alors $\|F\| = \bigcup_{\mathcal{X}\in\mathcal{P}(\Pi\times P)^{\mathbb{N}^n}} \|G[\mathcal{X}/X]\|$.

Le lemme 11 montre que la formule $t \neq u$ a bien la signification voulue.

Lemme 11.
Soit $t = u$ la formule $t \neq u \to \bot$. Alors, pour toute formule F de SR_0, on a :
$\lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k(x)(k)y \Vdash \forall x^{int}\forall y^{int}[x = y, F(x) \to F(y)]$;
$\lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k(x)(k)y \Vdash \forall p^{\mathsf{P}}\forall q^{\mathsf{P}}[p = q, F(p) \to F(q)]$.

Les deux énoncé se démontrent de la même façon. On montre le deuxième :
Soient $p, q \in P$; $\xi \Vdash p \neq q \to \bot$; $\eta \Vdash F(p)$ et $\pi \in \|F(q)\|$. On doit montrer que :
$\lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k(x)(k)y \star \xi \mathbin{\scriptstyle\bullet} \eta \mathbin{\scriptstyle\bullet} \pi \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \mathsf{k}_\pi\eta \mathbin{\scriptstyle\bullet} \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
C'est immédiat si $p \neq q$, car alors $\xi \Vdash \top \to \bot$. Si $p = q$, alors $\|F(p)\| = \|F(q)\|$, donc $\eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $\mathsf{k}_\pi\eta \Vdash \bot$. Mais $\xi \Vdash \bot \to \bot$, d'où le résultat.
C.Q.F.D.

2. Les formules de SR$_1$

Les *formules de SR_1* sont construites comme suit :
• Les formules de SR$_1$ *atomiques*, de la forme $t \neq u$, $X(t_1,\dots,t_n)$ et $X^+(t_1,\dots,t_n)$, où X est une variable de prédicat d'arité n et $t, u, t_1,\dots,t_n$ sont des termes d'individu.
• Si F et G sont des formules de SR$_1$, alors $F \to G$ en est une aussi.
• Si F est une formule de SR$_1$, alors $\forall x\, F$ et $\forall x^{\mathrm{int}} F$ sont des formules de SR$_1$.
• Si F est une formule de SR$_1$ et X une variable de prédicat, alors $\forall X\, F$ et $\forall X^+\, F$ sont des formules de SR$_1$.

Remarque. Les formules usuelles de SR$_0$ sont dans cette classe : ce sont celles qui ne comportent pas de formule atomique de la forme $X^+(t_1,\dots,t_n)$ ni de quantificateur $\forall X^+$.

On utilisera aussi une sous-classe :
Les formules de SR_1 *restreintes à* $\mathbb{N}$, construites avec les mêmes règles, sauf que l'on ne permet que les quantificateurs $\forall x^{\mathrm{int}}$, $\forall X$ et $\forall X^+$.
Remarque. Les formules restreintes de SR_0 sont dans cette classe : ce sont celles qui ne comportent pas de formule atomique de la forme $X^+(t_1, \ldots, t_n)$ ni de quantificateur $\forall X^+$.

Les formules de SR_1 prennent une valeur de vérité dans SR_1, c'est-à-dire dans $\mathcal{P}(\Pi \times P)$; les variables de prédicat X varient dans SR_0, les variables X^+ dans SR_1.
Soit donc F une formule de SR_1 *close avec paramètres* : il s'agit d'une formule de SR_1, dans laquelle les variables libres d'individu ont été substituées par des entiers, les variables libres X de prédicat n-aire ont été substituées par des prédicats de SR_0, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}$; les variables libres X^+ de prédicat n-aire ont été substituées par des prédicats de SR_1, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}^n}$.
On définit sa valeur de vérité $|||F||| \subset \Pi \times P$ par récurrence sur la construction de F (bien entendu, $(\xi, p) \Vdash F$ signifie $\forall \pi \forall q[(\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow (\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp])$:

- Si F est atomique de la forme $t \neq u$, alors t, u sont des termes d'individu clos, donc ont une valeur dans $\mathbb{N}$; $|||t \neq u|||$ est $\emptyset$ ou $\Pi \times P$ suivant que ces entiers sont distincts ou non.
- Si F est atomique de la forme $X^+(t_1, \ldots, t_n)$, alors $X^+ \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}^n}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes clos, donc ont une valeur dans $\mathbb{N}$. On a donc $X^+(t_1, \ldots, t_n) \subset \Pi \times P$; cela définit $|||X^+(t_1, \ldots, t_n)|||$.
- Si F est atomique de la forme $X(t_1, \ldots, t_n)$, alors $X \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes clos, donc ont une valeur dans $\mathbb{N}$. La valeur $\|X(t_1, \ldots, t_n)\|$ *dans* SR_0 est alors définie de façon évidente. Sa valeur $|||X(t_1, \ldots, t_n)|||$ *dans* SR_1 est définie par $|||X(t_1, \ldots, t_n)||| = \|X(t_1, \ldots, t_n)\| \times P$.
- Si $F \equiv G \to H$, alors $|||F||| = \{(\xi, p) \centerdot (\pi, q);\ (\xi, p) \Vdash G,\ (\pi, q) \in |||H|||\}$.
- Si $F \equiv \forall x\, G$, alors $|||F||| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} |||G[n/x]|||$.
- Si $F \equiv \forall x^{\mathrm{int}} G$, alors $|||F||| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(s^n \underline{0}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, q);\ (\pi, q) \in |||G[n/x]|||\}$.
- Si $F \equiv \forall X^+ G$, où X est une variable de prédicat n-aire, alors $|||F||| = \bigcup_{\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}^n}} |||G[\mathcal{X}/X]|||$.
- Si $F \equiv \forall X\, G$, où X est une variable de prédicat n-aire, alors $|||F||| = \bigcup_{\overline{X} \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}} |||G[\overline{X}/X]|||$.

Définition du forcing

Considérons une formule F de SR_1 et soit p une variable de condition.
On définit, par récurrence sur F, une formule de forcing (formule de SR_0) notée $p \Vdash^f F$ (lire « p force F »).

- Si F est atomique de la forme $X^+(t_1, \ldots, t_n)$, on pose :
$$p \Vdash^f X(t_1, \ldots, t_n) \ \equiv\ \forall q^P \{\mathsf{C}[pq] \to q \notin X^+(t_1, \ldots, t_n)\}.$$
- Si F est atomique de la forme $X(t_1, \ldots, t_n)$, on pose :
$$p \Vdash^f X(t_1, \ldots, t_n) \ \equiv\ \mathsf{C}[p] \to X(t_1, \ldots, t_n).$$

- Si F est atomique de la forme $t \neq u$, on pose :
$$p \Vdash^f t \neq u \;\equiv\; \mathsf{C}[p] \to t \neq u.$$
- $p \Vdash^f G \to H \;\equiv\; \forall q^P\{(q \Vdash^f G) \to (pq \Vdash^f H)\}$.
- $p \Vdash^f \forall x\, G \;\equiv\; \forall x(p \Vdash^f G)$.
- $p \Vdash^f \forall x^{\mathrm{int}} G \;\equiv\; \forall x^{\mathrm{int}}(p \Vdash^f G)$.
- $p \Vdash^f \forall X^+ G \;\equiv\; \forall X^+(p \Vdash^f G)$.
- $p \Vdash^f \forall X\, G \;\equiv\; \forall X(p \Vdash^f G)$.

On considère, dans la suite, des formules de SR_1 closes, à paramètres $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ dans SR_1 et $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l$ dans SR_0.
On les écrira $F[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l]$, au lieu de $F[\mathcal{X}_1/X_1^+, \dots, \mathcal{X}_k/X_k^+, \overline{Y}_1/Y_1, \dots, \overline{Y}_l/Y_l]$.
Un paramètre (constante de prédicat d'arité n) de SR_1 est une application $\mathcal{X} : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\Pi \times P)$.
Un paramètre de SR_0 est une application $\overline{Y} : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\Pi)$.
On écrira donc, en abrégé, $p \Vdash^f F[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l]$.
Par exemple, si $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$ (prédicat unaire de SR_1), alors :
$p \Vdash^f \mathcal{X}n$ est la formule de forcing $\forall q[\mathsf{C}[pq] \to q \notin \mathcal{X}n]$.

Remarque. Une formule atomique de la forme $t \neq u$ est alors de la forme $\overline{X}(t, u)$ où $\overline{X} : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$ est défini par $\overline{X}(m, n) = \emptyset$ si $m \neq n$ et $\overline{X}(m, n) = \Pi$ si $m = n$.

Etant donnés une telle formule $F[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l]$ et $p \in P$, on définit une valeur de vérité de SR_0 (sous-ensemble de Π), notée $\|p \Vdash' F\|$.
On pose :
$$\|p \Vdash' F\| = \bigcup_{q \in P} \{\pi^\tau ;\, \tau \in \mathsf{C}[pq], (\pi, q) \in |||F|||\}.$$

Lemme 12. *Pour $\xi \in \Lambda_c$ et $p \in P$, on a $(\xi, p) \mathrel{|||\!-} F \;\Leftrightarrow\; \xi \Vdash (p \Vdash' F)$.*

En effet, la condition $(\xi, p) \mathrel{|||\!-} F$ s'écrit $\forall \pi \forall q\{(\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow (\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\}$, c'est-à-dire $\forall \pi \forall q \forall \tau\{q \in P, \tau \in \mathsf{C}[pq], (\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp\}$. Par définition de $\|p \Vdash' F\|$, cette condition équivaut à $\forall \varpi(\varpi \in \|p \Vdash' F\| \Rightarrow \xi \star \varpi \in \perp\!\!\!\perp)$.
C.Q.F.D.

Théorème 13.
Pour chaque formule close $F[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l]$ de SR_1, à paramètres $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ dans SR_1 et $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_l$ dans SR_0, il existe deux quasi-preuves closes χ_F, χ'_F telles que :
$$\chi_F \Vdash [(p \Vdash^f F) \to (p \Vdash' F)] \quad et \quad \chi'_F \Vdash [(p \Vdash' F) \to (p \Vdash^f F)].$$
χ_F et χ'_F ne dépendent pas des paramètres et des termes présents dans F.

On le montre par récurrence sur la construction de la formule F.
- Cas où $F \equiv \forall x\, G$. On a alors :
$\|p \Vdash' F\| = \bigcup_{q \in P} \{\pi^\tau ;\, \tau \in \mathsf{C}[pq], (\pi, q) \in |||\forall x\, G|||\} = \bigcup_{q \in P, n \in \mathbb{N}} \{\pi^\tau ;\, \tau \in \mathsf{C}[pq], (\pi, q) \in |||G[n/x]|||\}$,
et donc :
$$\|p \Vdash' F\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|p \Vdash' G[n/x]\|.$$

On a aussi :
$$\|p \Vdash^f F\| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \|p \Vdash^f G[n/x]\|.$$
L'hypothèse de récurrence donne alors immédiatement le résultat, si on pose :
$$\chi_F = \chi_G \text{ et } \chi'_F = \chi'_G.$$
• Cas où $F \equiv \forall X\, G$ ou bien $F \equiv \forall X^+ G$. Même démonstration. On a encore :
$$\chi_F = \chi_G \text{ et } \chi'_F = \chi'_G.$$
• Cas où $F \equiv \forall x^{\text{int}} G$.
On a $\|p \Vdash' F\| = \bigcup_{q\in P} \{\varpi^\tau;\ \tau \in \mathsf{C}[pq], (\varpi, q) \in |||\forall x^{\text{int}} G|||\} =$

$\bigcup_{q\in P, n\in\mathbb{N}} \{\varpi^\tau;\ \tau \in \mathsf{C}[pq], (\varpi, q) \in |||\{(s^n\underline{0}, \mathbf{1})\} \to G[n]|||\}$. On a donc :

(1) $$\|p \Vdash' F\| = \bigcup_{q\in P, n\in\mathbb{N}} \{s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^\tau;\ \tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)], (\pi, q) \in |||G[n]|||\}.$$

Par ailleurs, par définition de $\|p \Vdash^f F\|$, on a :

(2) $$\|p \Vdash^f F\| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \|\{s^n\underline{0}\} \to (p \Vdash^f G[n])\| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi;\ \pi \in \|p \Vdash^f G[n]\|\}.$$

i) Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_G \Vdash (p \Vdash^f G[n]) \to (p \Vdash' G[n])$. Posons :
$$\chi_F = \lambda x \lambda n(\overline{\alpha}\chi_G)(x)n$$
où α est une composée des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$ telle que $\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[pq]$.
Soient $\xi \Vdash (p \Vdash^f F)$ et $s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^\tau \in \|p \Vdash' F\|$, avec $\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)]$ et $(\pi, q) \in |||G[n]|||$ (d'après (1)). On doit montrer $\chi_F \star \xi \mathbin{\text{.}} s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
Or, on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[pq]$, donc $\pi^{\alpha\tau} \in \|p \Vdash' G[n]\|$, par définition de $\|p \Vdash' G[n]\|$.
On a aussi $\xi \Vdash (\{s^n\underline{0}\} \to (p \Vdash^f G[n]))$, d'après (2) et l'hypothèse sur ξ.
Donc $(\xi)s^n\underline{0} \Vdash (p \Vdash^f G[n])$; l'hypothèse de récurrence donne alors :
$\chi_G \star (\xi)s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$. On a donc bien $\chi_F \star \xi \mathbin{\text{.}} s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, d'après le choix de χ_F.
ii) Par hypothèse de récurrence, on a $\chi'_G \Vdash (p \Vdash' G[n]) \to (p \Vdash^f G[n])$. Posons :
$$\chi'_F = \lambda x \lambda n(\chi'_G)(\overline{\alpha})xn$$
où α est une composée des $\alpha_i (0 \le i \le 4)$ telle que $\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)]$.
Soient $\xi \Vdash (p \Vdash' F)$ et $s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi \in \|p \Vdash^f F\|$, avec $\pi \in \|p \Vdash^f G[n]\|$ (d'après (2)).
On doit montrer $\chi'_F \star \xi \mathbin{\text{.}} s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Or, d'après (1), on a $\xi \star s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ si $(\pi, q) \in |||G[n]|||$ et $\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)]$. On a donc :
$(\overline{\alpha}\xi)s^n\underline{0} \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ si $(\pi, q) \in |||G[n]|||$ et $\tau \in \mathsf{C}[pq)]$ (car alors $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)]$).
Il en résulte que $(\overline{\alpha}\xi)s^n\underline{0} \Vdash (p \Vdash' G[n])$. L'hypothèse de récurrence donne alors :
$\chi'_G \star (\overline{\alpha}\xi)s^n\underline{0} \mathbin{\text{.}} \pi \in \perp\!\!\!\perp$, d'où le résultat.
• Cas où $F \equiv G \to H$.
i) Soit α une composée des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$ telle que $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$.
Soient $\xi \Vdash (p \Vdash^f G \to H)$ et $\varpi^\tau \in \|p \Vdash' (G \to H)\|$.
On a donc $\tau \in \mathsf{C}(pq')$ et $(\varpi, q') \in |||G \to H|||$.
Donc $\varpi = \eta \mathbin{\text{.}} \pi$, $q' = qr$, $(\eta, q) \Vvdash G$ et $(\pi, r) \in |||H|||$.
D'après le lemme 12, on a $\eta \Vdash (q \Vdash' G)$. L'hypothèse de récurrence donne donc :
$\chi'_G\eta \Vdash (q \Vdash^f G)$, d'où $(\xi)(\chi'_G)\eta \Vdash (pq \Vdash^f H)$. L'hypothèse de récurrence donne alors :
$(\chi_H)(\xi)(\chi'_G)\eta \Vdash (pq \Vdash' H)$, donc par le lemme 12, $((\chi_H)(\xi)(\chi'_G)\eta, pq) \Vvdash H$.
Il en résulte que $((\chi_H)(\xi)(\chi'_G)\eta \star \pi, (pq)r) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.

Comme $\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$, on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[(pq)r)]$ et donc $(\chi_H)(\xi)(\chi'_G)\eta \star \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
Posons :

$$\chi_F = (\overline{\alpha})\lambda x \lambda y(\chi_H)(x)(\chi'_G)y.$$

On a alors $\chi_F \star \xi \cdot \varpi^\tau = \chi_F \star \xi \cdot \eta \cdot \pi^\tau \succ (\chi_H)(\xi)(\chi'_G)\eta \star \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ et donc :
$\chi_F \Vdash [(p \Vdash {}^f G \to H) \to (p \Vdash {}' G \to H)]$.
ii) A l'aide de l'hypothèse de récurrence, on montre d'abord le:

Lemme 14. *Si $\xi \Vdash (p \Vdash {}'G \to H)$ et $\eta \Vdash (q \Vdash {}^f G)$ alors $(\overline{\alpha}\xi)(\chi_G)\eta \Vdash (pq \Vdash {}'H)$; α est une composée des $\alpha_i (0 \leq i \leq 3)$ telle que $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$.*

Soit $\rho^\tau \in \|pq \Vdash {}'H\|$, c'est-à-dire qu'on a $\tau \in \mathsf{C}[(pq)r]$ et $(\rho, r) \in |\!|\!| H |\!|\!|$.
Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_G \eta \Vdash (q \Vdash {}'G)$ et donc $(\chi_G\eta, q) \;|\!|\!\!- G$ d'après le lemme 12.
On a donc $(\chi_G\eta \cdot \rho, qr) \in |\!|\!| G \to H |\!|\!|$.
Par ailleurs, on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p(qr)]$ et donc $\chi_G\eta \cdot \rho^{\alpha\tau} \in \|p \Vdash {}'G \to H\|$.
Il en résulte que $\xi \star \chi_G\eta \cdot \rho^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ et donc $(\overline{\alpha}\xi)(\chi_G)\eta \star \rho^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
C.Q.F.D.

Soient alors $\xi \Vdash (p \Vdash {}'G \to H)$, $\eta \Vdash (q \Vdash {}^f G)$ et $\pi \in \|pq \Vdash {}^f H\|$.
Par hypothèse de récurrence, on a $\chi'_H \Vdash (pq \Vdash {}'H) \to (pq \Vdash {}^f H)$.
D'après le lemme 14, il en résulte que $\chi'_H \star (\overline{\alpha}\xi)(\chi_G)\eta \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$; on a donc $\chi'_F \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ avec $\chi'_F = \lambda x \lambda y (\chi'_H)(\overline{\alpha}x)(\chi_G)y$.

- Cas où $F \equiv \mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)$. On a alors :

$\|p \Vdash {}^f F\| = \bigcup_{q \in P} \{\tau \cdot \pi; \tau \in \mathsf{C}[pq]\ , (\pi, q) \in |\!|\!| \mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k) |\!|\!|\}$ et

$\|p \Vdash {}'F\| = \bigcup_{q \in P} \{\pi^\tau; \tau \in \mathsf{C}[pq]\ , (\pi, q) \in |\!|\!| \mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k) |\!|\!|\}$.

On a donc $\chi_F = \chi$ et $\chi'_F = \chi'$.

- Cas où $F \equiv \overline{X}(t_1, \ldots, t_k)$. On a alors :

$\|p \Vdash {}^f F\| = \{\tau \cdot \pi; \tau \in \mathsf{C}[p]\ , \pi \in \|\overline{X}(t_1, \ldots, t_k)\|\}$ et

$\|p \Vdash {}'F\| = \bigcup_{q \in P} \{\pi^\tau; \tau \in \mathsf{C}[pq], (\pi, q) \in |\!|\!| \overline{X}(t_1, \ldots, t_k) |\!|\!|\} = \bigcup_{q \in P} \{\pi^\tau; \tau \in \mathsf{C}[pq], \pi \in \|\overline{X}(t_1, \ldots, t_k)\|\}$.

On a donc $\chi_F = \lambda x(\chi)\lambda y(x)(\alpha_0)y$ et $\chi'_F = \lambda x \lambda y(\chi' x)(\alpha_4)y$ où α_0 et α_4 sont tels que : $\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha_0\tau \in \mathsf{C}[p]$; $\tau \in \mathsf{C}[p] \Rightarrow \alpha_4\tau \in \mathsf{C}[p\mathbf{1}]$.
C.Q.F.D.

En appliquant le lemme 12, on en déduit :

Théorème 15.
Pour chaque formule close $F[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_l]$ de SR_1, à paramètres $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ dans SR_1 et $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_l$ dans SR_0, il existe deux quasi-preuves χ_F, χ'_F, qui ne dépendent pas des paramètres et des termes présents dans F, telles que :
$\xi \Vdash (p \Vdash {}^f F) \;\Rightarrow\; (\chi_F\xi, p) \;|\!|\!\!- F$ *et* $(\xi, p) \;|\!|\!\!- F \;\Rightarrow\; \chi'_F\xi \Vdash (p \Vdash {}^f F)$.

Proposition 16.
Soit $F[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_l]$ une formule close de SR_1, à paramètres $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ dans

SR_1 et $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_l$ dans SR_0. On a alors :
$\lambda x(\chi'_F)(\overline{\gamma}_1)(\chi_F)x \Vdash [(p \Vdash^f F) \to (pq \Vdash^f F)]$;
$\lambda x(\chi'_F)(\overline{\gamma}_2)(\chi_F)x \Vdash [(p \Vdash^f F) \to (qp \Vdash^f F)]$.

Si $\xi \Vdash (p \Vdash^f F)$, on a $((\chi_F)\xi, p) \mid\!\Vdash F$ (théorème 15), donc $((\overline{\gamma}_1)(\chi_F)\xi, pq) \mid\!\Vdash F$ (lemme10).
D'où $(\chi'_F)(\overline{\gamma}_1)(\chi_F)\xi \Vdash (pq \Vdash^f F)$. On en déduit le premier résultat voulu.
Même preuve pour le second.

C.Q.F.D.

Théorème 17.
Soit $F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]$ une formule close usuelle de SR_0. Il existe deux quasi-preuves closes χ_F^0, χ_F^1 telles que $(\chi_F^0, \chi_F^1) \Vdash (p \Vdash^f F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]) \leftrightarrow (\mathsf{C}[p] \to F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k])$.

On a utilisé la notation $(\xi, \eta) \Vdash A \leftrightarrow B$ pour exprimer que l'on a $\xi \Vdash A \to B$ et $\eta \Vdash B \to A$.
Preuve par récurrence sur F.

- Si $F \equiv \overline{X}(t_1, \ldots, t_n)$, $p \Vdash^f F$ est $\mathsf{C}[p] \to F$.
- Si $F \equiv \forall x\, G$, $p \Vdash^f F$ est $\forall x(p \Vdash^f G[n/x])$. On peut donc prendre $\chi_F^0 = \chi_G^0$ et $\chi_F^1 = \chi_G^1$.
- Si $F \equiv \forall X\, G$, même démonstration.
- Si $F \equiv \forall x^{\text{int}} G$, on a :

$$\|p \Vdash^f F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|\{s^n 0\} \to (p \Vdash^f G[n, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k])\| \text{ et}$$
$$\|\mathsf{C}[p] \to F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathsf{C}[p], \{s^n 0\} \to G[n, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]\|.$$

On pose $\chi_F^0 = \lambda x \lambda y \lambda z((\chi_G^0)(x)z)y$ et $\chi_F^1 = \lambda x \lambda y(\chi_G^1)\lambda z(x)zy$.

- Si $F \equiv G \to H$, on a $\|p \Vdash^f (G \to H)\| = \bigcup_{q \in P} \|(q \Vdash^f G) \to (pq \Vdash^f H)\|$.

Donc, si α, β, γ sont des combinaisons des $\alpha_i (0 \le i \le 3)$ telles que :
$\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$, $\beta\tau \in \mathsf{C}[q]$ et $\tau \in \mathsf{C}[p] \Rightarrow \gamma\tau \in \mathsf{C}[pp]$, on peut poser
$\chi_F^0 = \lambda x \lambda y \lambda z((\chi_H^0)(x)(\chi_G^1)\lambda d\, z)(\gamma)y$ et $\chi_F^1 = \lambda x \lambda y(\chi_H^1)\lambda z((x)(\alpha)z)(\chi_G^0 y)(\beta)z$.
On le vérifie facilement en montrant que :
$\chi_F^0 \Vdash [(p \Vdash^f G[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]) \to (pp \Vdash^f H[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k])], \mathsf{C}[p], G[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k] \to H[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]$
$\chi_F^1 \Vdash \{\mathsf{C}[p], G[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k] \to H[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]\}, (q \Vdash^f G[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]) \to (pq \Vdash^f H[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k])$.

C.Q.F.D.

Théorème 18.
Soit $F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k]$ une formule close usuelle de SR_0. Il existe deux quasi-preuves closes χ_F^+, χ_F^-, qui ne dépendent pas des paramètres de F, telles que :
$(\xi, p) \mid\!\Vdash F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n] \Rightarrow \chi_F^+\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$;
$\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n] \Rightarrow (\chi_F^-\xi, p) \mid\!\Vdash F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$.

Corollaire des théorèmes 15 et 17.

C.Q.F.D.

Le générique

Dans la suite, on va considérer certaines fonctions $\phi : P^k \to P$. On considère alors une telle fonction comme un symbole fonctionnel, qui permet donc de construire de nouveaux termes de condition (on a déjà un symbole de fonction binaire et un symbole de constante $\mathbf{1}$). Bien entendu, l'interprétation du symbole de fonction ϕ est cette fonction même.

On ajoute au langage des formules de SR_1, un symbole J de prédicat unaire *sur les conditions* et le quantificateur $\forall p^P$ sur les conditions. On définit donc les *formules étendues de SR_1* comme suit :

• Les formules étendues *atomiques* de SR_1 sont

d'une part les formules atomiques de SR_1 (de la forme $t \neq u$, $X(t_1,\ldots,t_n)$, $X^+(t_1,\ldots,t_n)$, où X est une variable de prédicat d'arité n et $t,u,t_1,\ldots,t_n$ sont des termes d'individu) ;

d'autre part les formules $J(t^{\mathsf{P}})$, où J est un symbole fixé (représentant, dans SR_1, *l'idéal générique*) et t^{P} est un terme de condition.

• Si F et G sont des formules étendues de SR_1, alors $F \to G$ en est une aussi.

• Si G est une formule étendue de SR_1, alors $\mathsf{C}[t^{\mathsf{P}}] \to G$ en est une aussi (t^{P} un terme de condition).

• Si F est une formule étendue de SR_1, alors $\forall x\, F$, $\forall x^{\mathrm{int}} F$ et $\forall p^P\, F$ sont des formules étendues de SR_1.

• Si F est une formule étendue de SR_1 et X une variable de prédicat, alors $\forall X\, F$ et $\forall X^+\, F$ sont des formules étendues de SR_1.

La valeur de vérité dans SR_1 d'une formule close étendue, avec paramètres dans SR_1 se définit comme précédemment, par récurrence sur F. Il y a trois nouveaux cas pour la récurrence :

• Si F est atomique close de la forme $J(t^{\mathsf{P}})$, alors t^{P} a une valeur $p \in P$. On pose :

$$|||J(t^{\mathsf{P}})||| = \Pi \times \{p\}.$$

• Si $F \equiv \mathsf{C}[t^{\mathsf{P}}] \to G$, alors t^{P} a une valeur $p \in P$. On pose :

$$|||F||| = \{(\tau, \mathbf{1}) \bullet (\pi, q);\ \tau \in \mathsf{C}[p], (\pi, q) \in |||G|||\}.$$

• Si $F \equiv \forall p^P G$, alors $|||F||| = \bigcup_{p \in P} |||G[p]|||$.

Corrélativement, on ajoute au langage de SR_0, les formules atomiques $t^{\mathsf{P}} \notin J(u^{\mathsf{P}})$, où $t^{\mathsf{P}}, u^{\mathsf{P}}$ sont des termes de condition.

Si une telle formule atomique est close, alors $t^{\mathsf{P}}, u^{\mathsf{P}}$ prennent respectivement les valeurs $p, q \in P$. Donc $\|t^{\mathsf{P}} \notin J(u^{\mathsf{P}})\| = \{\pi \in \Pi;\ (\pi, p) \in \Pi \times \{q\}\} = \Pi$ si $p = q$ et $= \emptyset$ si $p \neq q$. Autrement dit, la formule atomique $t^{\mathsf{P}} \notin J(u^{\mathsf{P}})$ pourra être écrite plus simplement $t^{\mathsf{P}} \neq u^{\mathsf{P}}$.

On peut alors définir la formule $p \Vdash^f F$ de SR_0, pour toute formule F étendue de SR_1. Dans la définition par récurrence sur F, il y a deux nouveaux cas :

• Si F est atomique de la forme $J(t^{\mathsf{P}})$, on pose :

$p \Vdash^f F \ \equiv\ \forall r^P(\mathsf{C}[pr] \to r \notin J(t[p_1,\ldots,p_k]))$.

Comme la formule $r \notin J(t^{\mathsf{P}})$ n'est autre que $r \neq t^{\mathsf{P}}$, on voit que :

$p \Vdash^f J(t^{\mathsf{P}}) \ \equiv\ \neg\mathsf{C}[pt^{\mathsf{P}}]$.

• Si $F \equiv \forall p^P G$, alors $p \Vdash^f F \equiv \forall p^P(p \Vdash^f G)$.

Proposition 19.

i) Dans les formules de SR_0, on a :

$p \notin J(q) \;\equiv\; p \neq q$; $p \Vdash^f J(q) \;\equiv\; \neg\mathsf{C}[pq]$.
ii) $(\xi, p) \Vvdash J(q) \Rightarrow \chi'\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[pq]$; $\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[pq] \Rightarrow (\chi\xi, p) \Vvdash J(q)$.

i) a déjà été montré.
ii) Si $(\xi, p) \Vvdash J(q)$, on a $(\xi, p) \star (\pi, q) \in ⫫$ pour tout $\pi \in \Pi$. Donc :
$\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \chi'\xi \star \tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Inversement, si $\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[pq]$, alors $\xi \star \tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\tau \in \mathsf{C}[pq]$, donc $\chi\xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $(\chi\xi, p) \star (\pi, q) \in ⫫$.

C.Q.F.D.

Le théorème 15 reste donc vrai pour le langage étendu. Il suffit, en effet, de le vérifier pour les nouvelles formules atomiques $J(p)$ du langage de SR_1, ce qui résulte immédiatement de la proposition 19.

Notations.
- On note $p \leq q$ la formule $\forall r^P(\neg\mathsf{C}[qr] \to \neg\mathsf{C}[pr])$ et $p \sim q$ la formule $p \leq q \wedge q \leq p$, c'est-à-dire $\forall r^P(\neg\mathsf{C}[qr] \leftrightarrow \neg\mathsf{C}[pr])$.

Dans la suite, on écrira souvent $F \to \mathsf{C}[p]$ au lieu de $\neg\mathsf{C}[p] \to \neg F$;
$p \leq q$ s'écrit alors $\forall r^P(\mathsf{C}[pr] \to \mathsf{C}[qr])$ et $p \sim q$ s'écrit $\forall r^P(\mathsf{C}[pr] \leftrightarrow \mathsf{C}[qr])$.
Remarque. On rappelle, en effet, que $\mathsf{C}[p]$ n'est pas une formule, mais une partie de Λ_c ; en fait, dans les structures de réalisabilité considérées plus loin, il existera une formule $\mathbb{C}[p]$ de SR_0 telle que $\mathsf{C}[p] = \{\tau \in \Lambda_c; \tau \Vdash \mathbb{C}[p]\}$. On pourra alors identifier $\mathsf{C}[p]$ à la formule $\mathbb{C}[p]$.
- Si F est une formule close de SR_1, on écrira $\Vvdash F$ pour exprimer qu'il existe une quasi-preuve θ telle que $(\theta, \mathbf{1}) \Vvdash F$. D'après la proposition 20, cela équivaut à dire qu'il existe une quasi-preuve θ telle que $(\theta, p) \Vvdash F$ pour tout $p \in P$.

Proposition 20. *Si $(\theta, \mathbf{1}) \Vvdash F$, alors $(\overline{\alpha}\theta, p) \Vvdash F$ pour tout $p \in P$; α est une quasi-preuve telle que $\tau \in \mathsf{C}[pq] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}q]$.*

En effet, on doit montrer que, pour tout $(\pi, q) \in |||F|||$, on a $(\overline{\alpha}\theta, p) \star (\pi, q) \in ⫫$, soit :
$(\overline{\alpha}\theta \star \pi, pq) \in ⫫$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[pq]$, d'où $\alpha\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}q]$.
Comme on a, par hypothèse, $(\theta\star\pi, \mathbf{1}q) \in ⫫$, on en déduit $\theta\star\pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ et donc $\overline{\alpha}\theta\star\pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Théorème 21 (Propriétés élémentaires du générique).
i) $(\overline{\alpha}, r) \Vvdash \neg J(\mathbf{1})$ *pour tout* $r \in P$
où α une quasi-preuve telle que $\tau \in \mathsf{C}[r(pq)] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p\mathbf{1}]$.
ii) $(\theta, r) \Vvdash \forall p^P(\neg\mathsf{C}[p] \to J(p))$, *quel que soit* $r \in P$
où $\theta = \chi\lambda x\lambda y((\chi' y)(\beta)x)(\alpha)x$
et α, β sont deux quasi-preuves telles que $\tau \in \mathsf{C}[r(qp)] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$ *et* $\beta\tau \in \mathsf{C}[q(\mathbf{1}r)]$.
iii) $(\theta, r) \Vvdash \neg J(p), J(pq) \to J(q)$ *pour tous* $p, q, r \in P$
où $\theta = \lambda x\lambda y(\overline{\alpha})(x)(\overline{\beta})y$ *et α, β sont deux quasi-preuves telles que :*
$\tau \in \mathsf{C}[r(p'(q'q))] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[p'((qq')\mathbf{1})]$ *et* $\tau \in \mathsf{C}[(qq')p] \Rightarrow \beta\tau \in \mathsf{C}[q'(pq)]$.
iv) $\Vvdash \forall p^P(\forall q^P(\neg\mathsf{C}[pq] \to J(q)) \to \neg J(p))$.
v) $\Vvdash \forall p^P\forall q^P(J(p), q \leq p \to J(q))$.
vi) $\Vvdash \forall p^P\forall q^P(\neg\mathsf{C}[pq], \neg J(p) \to J(q))$.

i) Soit $(\xi, p) \Vvdash J(\mathbf{1})$; on doit montrer que $(\overline{\alpha}, r)\star(\xi, p) \centerdot (\pi, q) \in ⫫$, soit $(\overline{\alpha} \star \xi \centerdot \pi, r(pq)) \in ⫫$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[r(pq)]$; on doit montrer que $\overline{\alpha} \star \xi \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$. Mais on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p\mathbf{1}]$ et, par hypothèse sur (ξ, p), on a $(\xi, p) \star (\pi, \mathbf{1}) \in \Perp$, donc $(\xi \star \pi, p\mathbf{1}) \in \Perp$, d'où le résultat.

ii)Soient $(\eta, q) \Vvdash \neg\mathsf{C}[p]$ et $(\pi, p) \in \|\!| J(p) |\!\|$. On doit montrer que $(\theta, r) \star (\eta, q) \mathbin{.} (\pi, p) \in \Perp$, soit $(\theta \star \eta \mathbin{.} \pi, r(qp)) \in \Perp$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[r(qp)]$; on doit montrer que $\theta \star \eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$. Or, on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$; par hypothèse sur (η, q), on a donc $(\eta, q) \star (\alpha\tau, \mathbf{1}) \mathbin{.} (\pi, r) \in \Perp$, soit : $(\eta \star \alpha\tau \mathbin{.} \pi, q(\mathbf{1}r)) \in \Perp$. Mais on a $\beta\tau \in \mathsf{C}[q(\mathbf{1}r)]$, donc $\eta \star \alpha\tau \mathbin{.} \pi^{\beta\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $\theta \star \eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

iii) Soient $(\xi, p') \Vvdash \neg J(p)$, $(\eta, q') \Vvdash J(pq)$ et $(\pi, q) \in \|\!| J(q) |\!\|$. On doit montrer que : $(\theta, r) \star (\xi, p') \mathbin{.} (\eta, q') \mathbin{.} (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi, r(p'(q'q))) \in \perp\!\!\!\perp$.
Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[r(p'(q'q))]$; on doit montrer que $\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
On montre d'abord que $(\overline{\beta}\eta, qq') \Vvdash J(p)$, c'est-à-dire $(\overline{\beta}\eta, qq') \star (\varpi, p) \in \Perp$ pour toute $\varpi \in \Pi$.
Ceci s'écrit $(\overline{\beta}\eta \star \varpi, (qq')p) \in \Perp$. Soit donc $v \in \mathsf{C}[(qq')p]$; on a $\beta v \in \mathsf{C}[q'(pq)]$; or, par hypothèse sur η, on a $(\eta, q') \star (\varpi, pq) \in \Perp$, donc $(\eta \star \varpi, q'(pq)) \in \Perp$, d'où $\eta \star \varpi^{\beta v} \in \perp\!\!\!\perp$ et, finalement $\overline{\beta}\eta \star \varpi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.
De $(\overline{\beta}\eta, qq') \Vvdash J(p)$, on déduit, par hypothèse sur ξ, que $(\xi, p') \star (\overline{\beta}\eta, qq') \mathbin{.} (\pi, \mathbf{1}) \in \Perp$, soit :
$(\xi \star \overline{\beta}\eta \mathbin{.} \pi, p'((qq')\mathbf{1})) \in \Perp$. Or, on a $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p'((qq')\mathbf{1})]$, donc $\xi \star \overline{\beta}\eta \mathbin{.} \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, d'où : $\overline{\alpha} \star (\xi)(\overline{\beta})\eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ et, enfin $\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

iv) Soient $(\xi, q) \Vvdash J(p)$ et $(\eta, r) \Vvdash \forall q(\neg\mathsf{C}[pq] \to J(q))$; on cherche une quasi-preuve θ telle que $(\theta, \mathbf{1}) \star (\eta, r) \mathbin{.} (\xi, q) \mathbin{.} (\pi, r') \in \Perp$, soit $(\theta \star \eta \mathbin{.} \xi \mathbin{.} \pi, \mathbf{1}(r(qr'))) \in \Perp$.
D'après la proposition 19, on a $\chi'\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[pq]$, donc $\lambda d\chi'\xi \Vdash \mathsf{C}[\mathbf{1}] \to \neg\mathsf{C}[pq]$.
D'après le théorème 18, il existe donc une quasi-preuve χ_0 telle que $(\chi_0\xi, \mathbf{1}) \Vvdash \neg\mathsf{C}[pq]$.
Par hypothèse sur η, on a donc $(\eta, r) \star (\chi_0\xi, \mathbf{1}) \mathbin{.} (\pi, q) \in \Perp$, soit $(\eta \star \chi_0\xi \mathbin{.} \pi, r(\mathbf{1}q)) \in \Perp$.
On peut donc prendre $\theta = (\overline{\alpha})\lambda x \lambda y(y)(\chi_0)x$ où α est une quasi-preuve telle que :
$\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(r(qr'))] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[r(\mathbf{1}q)]$.
v) Soient $(\xi, p') \Vvdash J(p)$ et $(\eta, r) \Vvdash q \le p$; on cherche une quasi-preuve θ telle que :
$(\theta, \mathbf{1}) \star (\xi, p') \mathbin{.} (\eta, r) \mathbin{.} (\pi, q) \in \Perp$ pour toute $\pi \in \Pi$, soit $(\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi, \mathbf{1}(p'(rq))) \in \Perp$.
D'après la proposition 19, on a $\chi'\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[pp']$. D'après le théorème 18, il existe une quasi-preuve χ_0 telle que $\chi_0\eta \Vdash \mathsf{C}[r] \to q \le p$. Or, on a facilement :
$\vdash \neg\mathsf{C}[pp'], (\mathsf{C}[r] \to q \le p) \to \neg\mathsf{C}[(p'r)q]$.
Il existe donc une quasi-preuve χ_1 telle que $\chi_1\xi\eta \Vdash \neg\mathsf{C}[(p'r)q]$; d'après la proposition 19, on a donc $(\chi_2\xi\eta, p'r) \Vvdash J(q)$, pour une quasi-preuve χ_2 convenable. On a donc :
$(\chi_2\xi\eta, p'r) \star (\pi, q) \in \Perp$, soit $(\chi_2\xi\eta \star \pi, (p'r)q) \in \Perp$. On peut donc prendre $\theta = \overline{\alpha}\chi_2$, où α est une quasi-preuve telle que $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p'(rq))] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[(p'r)q]$.
vi) Soient $(\xi, r) \Vvdash \neg\mathsf{C}[pq]$ et $(\eta, q') \Vvdash \neg J(p)$; on cherche une quasi-preuve θ telle que :
$(\theta, \mathbf{1}) \star (\xi, r) \mathbin{.} (\eta, q') \mathbin{.} (\pi, q) \in \Perp$ pour toute $\pi \in \Pi$, soit $(\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi, \mathbf{1}(r(q'q))) \in \Perp$.
D'après le théorème 18, il existe une quasi-preuve χ_0 telle que $\chi_0\xi \Vdash \mathsf{C}[r] \to \neg\mathsf{C}[pq]$.
Or, on a facilement $\vdash (\mathsf{C}[r] \to \neg\mathsf{C}[pq]) \to \neg\mathsf{C}[(qr)p]$.
Il existe donc une quasi-preuve χ_1 telle que $\chi_1\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[(qr)p]$; d'après la proposition 19, on a donc $(\chi_2\xi, qr) \Vvdash J(p)$, pour une quasi-preuve χ_2 convenable. On a donc :
$(\eta, q') \star (\chi_2\xi, qr) \mathbin{.} (\pi, \mathbf{1}) \in \Perp$, par hypothèse sur η ; ce qui s'écrit $(\eta \star \chi_2\xi \mathbin{.} \pi, q'((qr)\mathbf{1})) \in \Perp$.
On cherche une quasi-preuve θ telle que $\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, pour tout $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(r(q'q))]$.
Soit α une quasi-preuve telle que $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(r(q'q))] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[q'((qr)\mathbf{1})]$. On a donc $\eta \star \chi_2\xi \mathbin{.} \pi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, donc $\overline{\alpha} \star \eta \mathbin{.} \chi_2\xi \mathbin{.} \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui montre qu'on peut prendre $\theta =$

$\lambda x \lambda y(\overline{\alpha} y)(\chi_2)x.$

C.Q.F.D.

Théorème 22 (Densité).
Pour toute fonction $\phi\ : P \to P$*, on a :*
$(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall p^P(\neg \mathsf{C}[p\phi(p)] \to J(p)), \forall p^P\ J(p\phi(p)) \to \bot$
avec $\theta = (\overline{\beta})\lambda x \lambda y(x)(\vartheta)y,\ \ \vartheta = (\chi)\lambda d\lambda x\lambda y(\chi' x)(\alpha)y\ ;\ \ \alpha, \beta$ *sont deux quasi-preuves telles que :* $\tau \in \mathsf{C}[qr] \Rightarrow \alpha\tau \in \mathsf{C}[q(qr)]\ ;\ \tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p(qr))]) \Rightarrow \beta\tau \in \mathsf{C}[p(\mathbf{1}q)].$

Soient $(\xi, p_0) \Vdash \forall p^P(\neg \mathsf{C}[p\phi(p)] \to J(p))$, $(\eta, q_0) \Vdash \forall p^P\ J(p\phi(p))$ et $(\pi, r_0) \in \mathbf{\Pi}$.
On doit montrer que $(\theta \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi, \mathbf{1}(p_0(q_0r_0))) \in \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire :
$(*)\qquad\qquad (\forall \tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p_0(q_0r_0))])\, \theta \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp.$
On montre d'abord que $(\vartheta\eta, \mathbf{1}) \Vdash \neg \mathsf{C}[q_0\phi(q_0)]$.
Pour cela, on doit montrer $(\forall(\varpi, r) \in \mathbf{\Pi})(\forall \tau \in \mathsf{C}[q_0\phi(q_0)])(\vartheta\eta, \mathbf{1}) \star (\tau, \mathbf{1}) \centerdot (\varpi, r) \in \perp\!\!\!\perp$
ou encore $(\forall \varpi \in \Pi)(\forall r \in P)(\forall \tau \in \mathsf{C}[q_0\phi(q_0)])(\forall \tau' \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(\mathbf{1}r)])\, \vartheta\eta \star \tau \centerdot \varpi^{\tau'} \in \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire :
$(**)\qquad\qquad (\forall \varpi \in \Pi)(\forall \tau \in \mathsf{C}[q_0\phi(q_0)])\, \eta \star \varpi^{\alpha\tau} \in \perp\!\!\!\perp.$
Or, par hypothèse sur η, on a $(\eta, q_0) \Vdash J(q_0\phi(q_0))$, c'est-à-dire :
$(\eta \star \varpi, q_0(q_0\phi(q_0))) \in \perp\!\!\!\perp$ ou encore $(\forall \tau \in \mathsf{C}[q_0(q_0\phi(q_0))])\, \eta \star \varpi^\tau \in \perp\!\!\!\perp.$
Cela donne le résultat $(**)$ cherché.

Par hypothèse sur ξ, on a $(\xi, p_0) \Vdash \neg \mathsf{C}[q_0\phi(q_0)] \to J(q_0)$. Il en résulte que :
$(\forall \pi \in \Pi)(\xi, p_0) \star (\vartheta\eta, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, q_0) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\forall \pi \in \Pi)(\xi \star \vartheta\eta \centerdot \pi, p_0(\mathbf{1}q_0)) \in \perp\!\!\!\perp.$
On en déduit $(\forall \pi \in \Pi)(\forall \tau \in \mathsf{C}[p_0(\mathbf{1}q_0)])\xi \star \vartheta\eta \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp.$
Cela donne le résultat voulu, puisque l'on a $\theta \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \succ \xi \star \vartheta\eta \centerdot \pi^{\beta\tau}$
et $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}(p_0(q_0r_0))]) \Rightarrow \beta\tau \in \mathsf{C}[p_0(\mathbf{1}q_0)].$

C.Q.F.D.

Condition de chaîne dénombrable

Notations. La formule $\forall x^{\mathrm{int}}(Xx \to Yx)$ où X, Y sont des variables de prédicat unaire, sera notée $X \subseteq Y$. La formule $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$ sera notée $X \simeq Y$.
Même chose, en remplaçant X, Y par X^+, Y^+ (avec les quatre combinaisons possibles).
Rappelons que, si $\mathcal{X} : \mathbb{N} \times P \to \mathcal{P}(\Pi)$ est un prédicat unaire de SR_1, alors $\mathcal{X}(n, p)$ est aussi écrit $\|p \notin \mathcal{X}n\|$. La formule $\forall q^P(\mathsf{C}[pq] \to q \notin \mathcal{X}n)$ est écrite $p \Vdash^f \mathcal{X}n$.

On dira que C satisfait la *condition de chaîne dénombrable* s'il existe une application $\mathsf{p} : \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N} \times P} \to P$ et deux quasi-preuves $\mathsf{cd}_0, \mathsf{cd}_1$ telles que, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N} \times P}$:
$\mathsf{cd}_0 \Vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P(q \notin \mathcal{X}n \to \mathsf{p}(\mathcal{X}) \le q)\ ;$
$\mathsf{cd}_1 \Vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P \forall r^P(q \notin \mathcal{X}n, r \notin \mathcal{X}n \to q = r), \forall n^{\mathrm{int}} \exists q^P(q \notin \mathcal{X}n),$
$\forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P(q \notin \mathcal{X}n \to \mathsf{C}[q]), \forall m^{\mathrm{int}} \forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P \forall r^P(q \notin \mathcal{X}n, r \notin \mathcal{X}(n+m) \to r \le q) \to \mathsf{C}[\mathsf{p}(\mathcal{X})].$

Remarques.

- Rappels : $\mathsf{C}[p]$ n'est pas une formule, mais un ensemble de λ_c-termes ; la notation $F \to \mathsf{C}[p]$ désigne la formule $F, \neg \mathsf{C}[p] \to \bot$; $p \le q$ est la formule $\forall r^P(\mathsf{C}[pr] \to \mathsf{C}[qr])$.
- Intuitivement, on considère $\mathcal{X}n$ comme une partie de P : c'est l'ensemble des conditions p telles que $p \notin \mathcal{X}n$. Cette formule exprime donc que :

$\mathsf{p}(\mathcal{X})$ est une condition plus forte que toutes celles des $\mathcal{X}n$

(traduction de $\forall n^{\rm int}\forall q^P(q\notin\mathcal{X}n\to \mathsf{p}(\mathcal{X})\le q))$;
si chaque $\mathcal{X}n$ a exactement un élément p_n
(traduction de $\forall n^{\rm int}\forall q^P\forall r^P(q\notin\mathcal{X}n, r\notin\mathcal{X}n\to q=r)$ et $\forall n^{\rm int}\exists q^P(q\notin\mathcal{X}n)$),
si la suite p_n est décroissante
(traduction de $\forall m^{\rm int}\forall n^{\rm int}\forall q^P\forall r^P(q\notin\mathcal{X}n, r\notin\mathcal{X}(n+m)\to r\le q)$),
si p_n est une condition non triviale pour tout n
(traduction de $\forall n^{\rm int}\forall q^P(q\notin\mathcal{X}n\to \mathsf{C}[q])$),
alors $\mathsf{p}(\mathcal{X})$ est une condition non triviale
(traduction de $\mathsf{C}[\mathsf{p}(\mathcal{X})]$).

Notation. On désigne par $p\Vdash^f \pm\mathcal{X}n$ la formule $\forall q^P(\mathsf{C}[pq], q\Vdash^f\mathcal{X}n\to p\Vdash^f\mathcal{X}n)$ ou encore $\forall q^P\forall r^P(\mathsf{C}[pq],\mathsf{C}[pr], q\Vdash^f\mathcal{X}n\to r\notin\mathcal{X}n)$, qui se lit “ la condition p décide $\mathcal{X}n$ ”.

Théorème 23. *Si C a la propriété de chaîne dénombrable, alors il existe une application $(p,\mathcal{X})\mapsto p^{\mathcal{X}}$ de $P\times\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}\times P}$ dans P et des quasi-preuves $\delta_0,\delta_1,\delta_2$ telles que :*
$\delta_0\Vdash\mathsf{C}[p]\to\mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}]$; $\delta_1\Vdash p^{\mathcal{X}}\le p$; $\delta_2\Vdash\forall n^{int}(p^{\mathcal{X}}\Vdash^f\pm\mathcal{X}n)$.

Remarque. Ces propriétés se traduisent par : “ si p est une condition non triviale, alors $p^{\mathcal{X}}$ est une condition non triviale, plus forte que p, qui décide $\mathcal{X}n$ pour tout entier n ”.

Lemme 24. *Il existe une fonction $\phi:\mathbb{N}\times P\times\mathcal{P}(\Pi\times P)\to P$ telle que :*
(1) $$\sigma\Vdash\forall x^{int}F(p,\phi(x,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\to p\Vdash^f\mathcal{X}n$$
où $F(p,q,\mathcal{X}n)\;\equiv\;\mathsf{C}[pq]\to q\notin\mathcal{X}n$, donc $p\Vdash^f\mathcal{X}n\;\equiv\;\forall q^P\,F(p,q,\mathcal{X}n)$.

C'est la preuve usuelle que σ réalise l'axiome du choix non extensionnel (ACNE)[3,4,5].
La règle de réduction pour l'instruction σ (signature) est la suivante :
$$\sigma\star\xi\,\text{.}\,\pi\succ\xi\star s^j\underline{0}\,\text{.}\,\pi$$
où j est le numéro de la pile π dans une énumération récursive $i\mapsto\pi_i$ fixée de Π.
On définit ϕ au moyen de l'axiome du choix, de façon que, pour tout $i\in\mathbb{N}$, on ait :
$$\pi_i\in\bigcup_{q\in P}\|F(p,q,\mathcal{X}n)\|\;\Rightarrow\;\pi_i\in\|F(p,\phi(i,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\|.$$
Soient alors $\xi\Vdash\forall x^{\rm int}F(p,\phi(x,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)$ et $\pi\in\|p\Vdash^f\mathcal{X}n\|$.
On a $\pi=\pi_j$ pour un entier j et, par ailleurs, $\|p\Vdash^f\mathcal{X}n\|=\bigcup_{q\in P}\|F(p,q,\mathcal{X}n)\|$.
On a donc $\pi\in\|F(p,\phi(j,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\|$.
On doit montrer que $\sigma\star\xi\,\text{.}\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$, soit $\xi\star s^j\underline{0}\,\text{.}\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$. Or, on a :
$$s^j\underline{0}\,\text{.}\,\pi\in\|\{s^j\underline{0}\}\to F(p,\phi(j,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\|\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\|\{s^i\underline{0}\}\to F(p,\phi(i,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\|$$
$=\|\forall x^{\rm int}F(p,\phi(x,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)\|$. D'où le résultat, par hypothèse sur ξ.
C.Q.F.D.

On définit ensuite la formule $\Psi(r,p,\mathcal{X}n)$ de SR_0 :
$$\Psi(r,p,\mathcal{X}n)\;\equiv\;(p\Vdash^f\mathcal{X}n\to r=p)\wedge$$
$$\forall x^{\rm int}[\neg F(p,\phi(x,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n),\forall y^{\rm int}\forall z^{\rm int}(y+z+1=x\to F(p,\phi(y,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n))\to r=p\phi(x,p,\mathcal{X}n)].$$
La formule $\Psi(r,p,\mathcal{X}n)$ exprime que l'on a $r=\psi(p,\mathcal{X}n)$, où :
$\psi(p,\mathcal{X}n)=p$ si $p\Vdash^f\mathcal{X}n$, et sinon

$\psi(p,\mathcal{X}n) = p\phi(x,p,\mathcal{X}n)$ pour le premier entier x tel que l'on ait $\neg F(p,\phi(x,p,\mathcal{X}n),\mathcal{X}n)$.
Un tel entier existe toujours, d'après (1).
Noter que ψ, contrairement à ϕ, *n'est pas* un symbole de fonction, c'est-à-dire une application de $P\times\mathcal{P}(\Pi\times P)$ dans P. On ne peut l'utiliser que par l'intermédiaire de la formule $r = \psi(p,\mathcal{X}n)$, qui s'écrit $\Psi(r,p,\mathcal{X}n)$.

Lemme 25.
i) $\Vdash \forall n^{int}\exists r^P \Psi(r,p,\mathcal{X}n)$; $\Vdash \forall n^{int}\forall q^P\forall r^P(\Psi(q,p,\mathcal{X}n),\Psi(r,p,\mathcal{X}n) \to q = r)$;
ii) $\Vdash \forall r^P(\Psi(r,p,\mathcal{X}n) \to r \le p)$;
iii) $\Vdash \forall r^P(\Psi(r,p,\mathcal{X}n),\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[r])$;
iv) $\Vdash \forall r^P(\Psi(r,p,\mathcal{X}n) \to (r \Vdash^f \pm\mathcal{X}n))$.

Remarque. Rappelons que la notation $\Vdash A(p,\mathcal{X}n)$ signifie qu'il existe une quasi-preuve, indépendante de $p,\mathcal{X},n$, qui réalise $A(p,\mathcal{X}n)$.

Il suffit de prouver ces formules à l'aide d'hypothèses déjà réalisées par des quasi-preuves.
Les formules (i) expriment que $\Psi(r,p,\mathcal{X}n)$ est fonctionnelle, ce qui est conséquence de sa définition et du lemme 24 (formule 1).
On prouve maintenant (ii), (iii) et (iv) sous la forme :
$\psi(p,\mathcal{X}n) \le p$, $\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[\psi(p,\mathcal{X}n)]$ et $\psi(p,\mathcal{X}n) \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$. On distingue deux cas.
• Si $p \Vdash^f \mathcal{X}n$, alors on a $\psi(p,\mathcal{X}n) = p$, donc $\psi(p,\mathcal{X}n) \le p$ et $\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[\psi(p,\mathcal{X}n)]$; de plus, puisqu'on a $p \Vdash^f \mathcal{X}n$, on a trivialement $p \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$ et donc $\psi(p,\mathcal{X}n) \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$.
• Si $p \not\Vdash^f \mathcal{X}n$, alors on a $\psi(p,\mathcal{X}n) = pq$, avec $q = \phi(x,p,\mathcal{X}n)$ pour un certain entier x ; on en déduit $\psi(p,\mathcal{X}n) \le p$.
On a, de plus, $\neg F(p,q,\mathcal{X}n)$, autrement dit $\mathsf{C}[pq] \wedge q\,\varepsilon\,\mathcal{X}n$.
$\mathsf{C}[pq]$ s'écrit $\mathsf{C}[\psi(p,\mathcal{X}n)]$, d'où l'on déduit trivialement $\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[\psi(p,\mathcal{X}n)]$. D'autre part, de $q\,\varepsilon\,\mathcal{X}n$, on déduit $\forall r^P(\mathsf{C}[qr], r \Vdash^f \mathcal{X}n \to \bot)$, d'où $q \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$ et donc $pq \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$, c'est-à-dire $\psi(p,\mathcal{X}n) \Vdash^f \pm\mathcal{X}n$.
C.Q.F.D.

On définit alors, par récurrence sur n, le prédicat unaire $\mathcal{Y} : \mathbb{N}\times P \to \mathcal{P}(\Pi)$ de SR_1 en posant : $\mathcal{Y}(n,q)(= \|q \notin \mathcal{Y}n\|) = \|q = p_n\|$ avec $p_0 = p$ et $p_{n+1} = \psi(p_n,\mathcal{X}n)$.
En première approximation (c'est-à-dire en utilisant le symbole auxiliaire de fonction ψ), la formule pour $q \notin \mathcal{Y}n$ est donc :
(2) $\quad q \notin \mathcal{Y}n \equiv \forall Z^+\{\forall j^{\mathrm{int}}\forall r^P(r \notin Z^+j \to \psi(r,\mathcal{X}j) \notin Z^+(j+1)), p \notin Z^+0 \to q \notin Z^+n\}$.
Son écriture exacte est donc la formule $\Phi(n,q,p,\mathcal{X})$:
$\forall Z^+\{\forall j^{\mathrm{int}}\forall r^P\forall r'^P(r \notin Z^+j, \Psi(r',r,\mathcal{X}j) \to r' \notin Z^+(j+1)), p \notin Z^+0 \to q \notin Z^+n\}$.
On définit donc la fonction $\mathcal{Y} : \mathbb{N}\times P \to \mathcal{P}(\Pi)$ en posant $\|q \notin \mathcal{Y}n\| = \mathcal{Y}(n,q) = \|\Phi(n,q,p,\mathcal{X})\|$.

Lemme 26.
Les formules suivantes sont réalisées par des quasi-preuves indépendantes de $p,\mathcal{X}$:
i) $\forall q^P(q \notin \mathcal{Y}0 \leftrightarrow q = p)$;
ii) $\forall n^{int}\exists q^P(q \notin \mathcal{Y}n)$;
iii $\forall n^{int}\forall q^P\forall r^P(q \notin \mathcal{Y}n, r \notin \mathcal{Y}n \to q = r)$;
iv) $\forall m^{int}\forall n^{int}\forall q^P\forall r^P(q \notin \mathcal{Y}n, r \notin \mathcal{Y}(n+m) \to r \le q)$;
v) $\forall n^{int}\forall q^P(q \notin \mathcal{Y}(n+1) \to q \Vdash^f \pm\mathcal{X}n)$;
vi) $\mathsf{C}[p] \to \forall n^{int}\forall q^P(q \notin \mathcal{Y}n \to \mathsf{C}[q])$.

Il suffit de montrer que ces formules sont conséquences de formules réalisées par des quasi-preuves et de la définition de $q \notin \mathcal{Y}n$ (on utilisera l'expression (2)).

On montre d'abord :
(3) $\qquad \Vdash p \notin \mathcal{Y}0$ et $\Vdash \forall j^{\mathrm{int}} \forall r^P (r \notin \mathcal{Y}j \to \psi(r, \mathcal{X}j) \notin \mathcal{Y}(j+1))$.
Le premier résultat découle trivialement de la définition de $p \notin \mathcal{Y}0$.
$r \notin \mathcal{Y}i$ s'écrit $\forall Z^+ \{\forall j^{\mathrm{int}} \forall r^P (r \notin Z^+ j \to \psi(r, \mathcal{X}j) \notin Z^+(j+1)), p \notin Z^+ 0 \to r \notin Z^+ i\}$.
On en déduit :
$\forall Z^+ \{\forall j^{\mathrm{int}} \forall r^P (r \notin Z^+ j \to \psi(r, \mathcal{X}j) \notin Z^+(j+1)), p \notin Z^+ 0 \to \psi(r, \mathcal{X}i) \notin Z^+(i+1)\}$,
c'est-à-dire $\psi(r, \mathcal{X}i) \notin \mathcal{Y}(i+1)$. C'est le deuxième résultat de (3).

De (3), on déduit immédiatement $\forall n^{\mathrm{int}} \exists q^P (q \notin \mathcal{Y}n)$ par récurrence sur n, ce qui donne (ii).

On montre maintenant :
(4) $\qquad \Vdash \forall q^P (q \notin \mathcal{Y}0 \to q = p)$ et $\forall j^{\mathrm{int}} \forall q^P (q \notin \mathcal{Y}(j+1) \to \exists r^P (r \notin \mathcal{Y}j \wedge q = \psi(r, \mathcal{X}j)))$.
Pour cela, on définit le prédicat $\mathcal{Z}$ de SR_1, c'est-à-dire $\mathcal{Z} : \mathbb{N} \times P \to \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$, en posant :
$\mathcal{Z}(0, q) (= \|q \notin \mathcal{Z}0\|) = \|q \notin \mathcal{Y}0 \wedge q = p\|$;
$\mathcal{Z}(j+1, q) (= \|q \notin \mathcal{Z}(j+1)\|) = \|q \notin \mathcal{Y}(j+1) \wedge \exists r^P (r \notin \mathcal{Y}j \wedge q = \psi(r, \mathcal{X}j))\|$.
On a évidemment $\Vdash q \notin \mathcal{Z}j \to q \notin \mathcal{Y}j$; d'après (3), on a :
$\Vdash p \notin \mathcal{Z}0$ et $\Vdash \forall j^{\mathrm{int}} \forall r^P (r \notin \mathcal{Z}j \to \psi(r, \mathcal{X}j) \notin \mathcal{Z}(j+1))$.
Par définition de $\mathcal{Y}$, on a donc $\Vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P (q \notin \mathcal{Y}n \to q \notin \mathcal{Z}n)$, d'où (4).

De la première partie de (4) et $\Vdash p \notin \mathcal{Y}0$, on déduit (i).
De la seconde partie de (4), on déduit (iii), par récurrence sur n.
En appliquant le lemme 25(iv), on en déduit également (v).

On montre (iv), par récurrence sur m. Le cas $m = 0$ est conséquence de (iii). On suppose $q \notin \mathcal{Y}n$, $r \notin \mathcal{Y}(n+m+1)$; d'après (4), on a $r = \psi(r', \mathcal{X}(n+m))$. Par hypothèse de récurrence, on a $r' \le q$. Le lemme 25(ii) donne $r \le r'$, d'où $r \le q$.

On montre (vi) par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est immédiat, d'après (i). On suppose $q \notin \mathcal{Y}(n+1)$; d'après (4), on a $q = \psi(q', \mathcal{X}n)$ avec $q' \notin \mathcal{Y}n$, d'où $\mathsf{C}[q']$ par hypothèse de récurrence. Le lemme 25(iii) donne alors $\mathsf{C}[q]$.

C.Q.F.D.

Le lemme 26 montre que les hypothèses de la condition de chaîne dénombrable sont vérifiées par le prédicat $\mathcal{Y}$. Si on pose $p^{\mathcal{X}} = \mathsf{p}(\mathcal{Y})$, la conclusion de la condition de chaîne donne $\Vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall q^P (q \notin \mathcal{Y}n \to p^{\mathcal{X}} \le q)$ et $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}]$. Il en résulte que l'on a :
$\Vdash p^{\mathcal{X}} \le p$; $\Vdash \forall n^{\mathrm{int}} (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \pm \mathcal{X}n)$ d'après le lemme 26(v) ; $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}]$.
Cela termine la preuve du théorème 23.

C.Q.F.D.

Théorème 27. *Si* C *a la propriété de chaîne dénombrable, il existe :*
une application $(p, \mathcal{X}) \mapsto p^{\mathcal{X}}$ *de* $P \times \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$ *dans* P *;*
une application $(p, \mathcal{X}) \mapsto K_{p,\mathcal{X}}$ *de* $P \times \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ *;*
et deux quasi-preuves θ, δ *telles que :*
$(\theta, p^{\mathcal{X}}) \Vvdash \mathcal{X} \simeq K_{p,\mathcal{X}}$ *et* $\delta \Vdash \neg\mathsf{C}[pp^{\mathcal{X}}] \to \neg\mathsf{C}[p]$ *quels que soient* $p \in P$ *et* $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$.

L'application $(p, \mathcal{X}) \mapsto p^{\mathcal{X}}$ a été définie dans le théorème 23. La quasi-preuve δ se déduit aisément de δ_0 et δ_1.

Pour $p \in P$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$, on définit alors $K_{p,\mathcal{X}} \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ en posant :

$$K_{p,\mathcal{X}}(n) = \|p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \mathcal{X}n\| = \|\forall q(\mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}q] \to q \notin \mathcal{X}n)\|.$$

Lemme 28. *Il existe deux quasi-preuves* θ_0, θ_1 *telles que :*
$\theta_0 \Vdash (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \forall n^{int}(K_{p,\mathcal{X}}n \to \mathcal{X}n))$ *et* $\theta_1 \Vdash (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \forall n^{int}(\mathcal{X}n \to K_{p,\mathcal{X}}n))$.

On a $p^{\mathcal{X}} \Vdash^f (K_{p,\mathcal{X}}n \to \mathcal{X}n) \equiv \forall q(q \Vdash^f K_{p,\mathcal{X}}n \to p^{\mathcal{X}}q \Vdash^f \mathcal{X}n) \equiv$
$\forall q((\mathsf{C}[q] \to K_{p,\mathcal{X}}n) \to p^{\mathcal{X}}q \Vdash^f \mathcal{X}n) \equiv \forall q((\mathsf{C}[q] \to p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \mathcal{X}n) \to p^{\mathcal{X}}q \Vdash^f \mathcal{X}n)$.
Par définition de $\Vdash^f$, cette formule s'écrit :
$\forall q \forall r\{\mathsf{C}[q] \to \forall r((\mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}r] \to r \notin \mathcal{X}n)), \mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}qr] \to r \notin \mathcal{X}n\}$.
Elle est conséquence de $\mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}qr] \to \mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}r] \wedge \mathsf{C}[q]$;
d'où une quasi-preuve θ_0 telle que $\theta_0 \Vdash (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \forall n^{\mathrm{int}}(K_{p,\mathcal{X}}n \to \mathcal{X}n))$.
On a $p^{\mathcal{X}} \Vdash^f (\mathcal{X}n \to K_{p,\mathcal{X}}n) \equiv \forall q(q \Vdash^f \mathcal{X}n \to p^{\mathcal{X}}q \Vdash^f K_{p,\mathcal{X}}n) \equiv$
$\forall q(q \Vdash^f \mathcal{X}n \to (\mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}q] \to K_{p,\mathcal{X}}n)) \equiv \forall q((q \Vdash^f \mathcal{X}n), \mathsf{C}[p^{\mathcal{X}}q] \to (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \mathcal{X}n))$.
Or, cette formule n'est autre que $p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \pm \mathcal{X}n$. D'après le théorème 23, il existe donc une quasi-preuve θ_1 telle que $\theta_1 \Vdash (p^{\mathcal{X}} \Vdash^f \forall n^{\mathrm{int}}(\mathcal{X}n \to K_{p,\mathcal{X}}n))$.

C.Q.F.D.

Preuve du théorème 27.
D'après le lemme 28 et le théorème 15, on a :
$(\chi_F\theta_0, p^{\mathcal{X}}) \Vvdash \forall n^{\mathrm{int}}(K_{p,\mathcal{X}}n \to \mathcal{X}n)$ où F est la formule $\forall n^{\mathrm{int}}(Yn \to X^+n)$;
$(\chi_G\theta_1, p^{\mathcal{X}}) \Vvdash \forall n^{\mathrm{int}}(\mathcal{X}n \to K_{p,\mathcal{X}}n)$ où F est la formule $\forall n^{\mathrm{int}}(X^+n \to Yn)$.

C.Q.F.D.

Théorème 29 (Conservation des réels).
Si C *a la propriété de chaîne dénombrable, il existe une quasi-preuve* θ_0 *telle que :*
$(\theta_0, r) \Vvdash \forall X^+ \exists X(X^+ \simeq X)$ *pour tout* $r \in P$.

Remarque. Le sens intuitif est que, dans SR_1, les ensembles *d'entiers* sont (extensionnellement) les mêmes que dans SR_0. Bien entendu, ce n'est pas le cas, en général, pour les ensembles *d'individus*.

On cherche θ_0 tel que $(\theta_0, r) \Vvdash \forall X(\mathcal{X} \simeq X \to \bot) \to \bot$ quel que soit $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi \times P)^{\mathbb{N}}$.
Soit $(\xi, q) \Vvdash \forall X(\mathcal{X} \simeq X \to \bot)$. On veut avoir $(\theta_0, r) \star (\xi, q) \centerdot (\pi, q') \in \perp\!\!\!\perp$, soit :
$(\theta_0 \star \xi \centerdot \pi, r(qq')) \in \perp\!\!\!\perp$ quels que soient $\pi \in \Pi$ et $r \in P$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[r(qq')]$; on veut avoir :

(1) $$\theta_0 \star \xi \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp.$$

Par hypothèse sur ξ, on a $(\xi, q) \Vvdash \mathcal{X} \simeq K_{p,\mathcal{X}} \to \bot$ avec $p = r(qq')$. Or, d'après le théorème 27, on a $(\theta, p^{\mathcal{X}}) \Vvdash \mathcal{X} \simeq K_{p,\mathcal{X}}$. Il en résulte que $(\xi, q) \star (\theta, p^{\mathcal{X}}) \centerdot (\varpi, \mathbf{1}) \in \perp\!\!\!\perp$, soit :

(2) $$(\xi \star \theta \centerdot \varpi, q(p^{\mathcal{X}}\mathbf{1})) \in \perp\!\!\!\perp \text{ pour toute } \varpi \in \Pi.$$

Soit α une quasi-preuve telle que, pour tout $\upsilon \in \mathsf{C}[(r(qq'))p']$, on ait $\alpha\upsilon \in \mathsf{C}[q(p'\mathbf{1})]$.
On fixe $\upsilon \in \mathsf{C}[pp^{\mathcal{X}}] = \mathsf{C}[(r(qq'))p^{\mathcal{X}}]$, d'où $\alpha\upsilon \in \mathsf{C}[q(p^{\mathcal{X}}\mathbf{1})]$.
D'après (2), on a donc $\xi \star \theta \centerdot \varpi^{\alpha\upsilon} \in \perp\!\!\!\perp$, donc $\chi' \star \xi \centerdot \alpha\upsilon \centerdot \theta \centerdot \varpi \in \perp\!\!\!\perp$, pour toute $\varpi \in \Pi$.
On a donc montré $\lambda y((\chi'\xi)(\alpha)y)\theta \Vdash \neg\mathsf{C}[pp^{\mathcal{X}}]$.
Or, d'après le théorème 27, on a une quasi-preuve $\delta \Vdash \neg\mathsf{C}[pp^{\mathcal{X}}] \to \neg\mathsf{C}[p]$.

Comme $\tau \in \mathsf{C}[p]$, on en déduit $\delta \star \lambda y((\chi'\xi)(\alpha)y)\theta \centerdot \tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. On obtient donc le résultat (1) cherché en posant $\theta_0 = \lambda x(\chi)(\delta)\lambda y(\chi' x)((\alpha)y)\theta$.

C.Q.F.D.

Soit F une formule restreinte de SR_1 ; on définit, par récurrence, sa *traduction dans SR_0*, qui est une formule restreinte de SR_0, notée F_0 :
si F est atomique de la forme $X(t_1, \ldots, t_n)$ ou $t \neq u$, alors $F_0 = F$;
si F est atomique de la forme $X^+(t_1, \ldots, t_n)$, alors $F_0 = X_0(t_1, \ldots, t_n)$, où X_0 est une nouvelle variable de prédicat n-aire (dont le domaine est $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^n}$) ;
si $F = G \to H$, alors $F_0 = G_0 \to H_0$;
si $F = \forall x^{\mathrm{int}} G$, alors $F_0 = \forall x^{\mathrm{int}} G_0$;
si $F = \forall X\, G$, alors $F_0 = \forall X\, G_0$;
si $F = \forall X^+ G$, alors $F_0 = \forall X_0\, G_0$.

Théorème 30.
Si C a la propriété de chaîne dénombrable, alors pour toute formule $F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$ close restreinte de SR_1, il existe deux quasi-preuves χ_F^+, χ_F^- telles que :
$(\xi, p) \Vdash\!\!\vdash F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n] \;\Rightarrow\; \chi_F^+\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to F_0[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$;
$\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to F_0[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n] \;\Rightarrow\; (\chi_F^-\xi, p) \Vdash\!\!\vdash F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$;
où F_0 est la traduction de F dans SR_0.

Lemme 31. *Soit $F[X_1, \ldots, X_n]$ une formule restreinte de SR_0. Alors, on a :*
$X_1 \simeq Y_1, \ldots, X_n \simeq Y_n, F[X_1, \ldots, X_n] \vdash F[Y_1, \ldots, Y_n]$.

Immédiat, par récurrence sur F.

C.Q.F.D.

On montre alors le théorème 30 par récurrence sur F. La preuve est la même que pour le théorème 18 lorsque F est atomique, $F \equiv \forall X\, G$, $F \equiv \forall x^{\mathrm{int}} G$ ou $F \equiv (G \to H)$.
Il reste à examiner le cas où $F[X_1, \ldots, X_n]$ est de la forme $\forall X^+ G[X, X_1, \ldots, X_n]$.
Si $(\xi, p) \Vdash\!\!\vdash F[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$, on a $(\xi, p) \Vdash\!\!\vdash G[\overline{X}_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$. Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_G^+\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to G[\overline{X}_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$ et donc $\chi_G^+\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall X_0 G[X_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$.
On pose donc $\chi_F^+ = \chi_G^+$.
Inversement, supposons que $\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall X_0 G[X_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$; par hypothèse de récurrence, on a $(\chi_G^-\xi, p) \Vdash\!\!\vdash G[\overline{X}, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$ quel que soit le paramètre $\overline{X}$ de SR_0 et donc :

(1) $\qquad (\chi_G^-\xi, p) \Vdash\!\!\vdash \forall X\, G[X, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$.

Or, d'après le théorème 29, on a :

(2) $\qquad (\theta_0, p) \Vdash\!\!\vdash \forall X^+ \exists X (X^+ \simeq X)$.

Par ailleurs, d'après le lemme 31, on a :

(3) $\qquad \vdash G[X, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n], X^+ \simeq X \to G[X^+, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$.

Or (1,2,3) ont pour conséquence $\forall X^+ G[X^+, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$. On déduit alors du théorème 1 (lemme d'adéquation), qu'il existe une quasi-preuve θ_1 telle que :
$(\theta_1, p) \Vdash\!\!\vdash \forall X^+ G[X^+, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n]$.

C.Q.F.D.

Un ultrafiltre sélectif sur $\mathbb{N}$

On va utiliser une structure de réalisabilité construite avec la méthode décrite dans la section " Structures SR_0 et SR_1 ". On considère donc d'abord un modèle de réalisabilité usuel, donné par un ensemble saturé $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c{\times}\Pi$. Les éléments de Λ_c sont les λ-termes clos comportant les continuations k_π, les instructions $\mathsf{cc}, \sigma, \chi, \chi'$ et éventuellement d'autres. Cette structure de réalisabilité sera désignée par SR_0.

Dans SR_0, on notera $\|F\|$ la valeur de vérité d'une formule close F et $\xi \Vdash F$ le fait que $\xi \in \Lambda_c$ réalise cette formule.
On construit maintenant une nouvelle structure de réalisabilité, désignée par SR_1. On prend pour P l'ensemble $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ muni de l'opération binaire $\wedge$, définie de la façon suivante : si $X, Y : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)$ alors $(X \wedge Y)(n) = X(n) \wedge Y(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($X(n), Y(n) \subset \Pi$ sont des valeurs de vérité de SR_0, donc $X(n) \wedge Y(n) = (X(n), Y(n) \to \perp) \to \perp$ est aussi une valeur de vérité). L'élément distingué $\mathbf{1}$ de P est la fonction telle que $\mathbf{1}(n) = \emptyset = \|\top\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_c{\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{\Pi} = \Pi{\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ et $\mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi} = (\Lambda_c \star \Pi){\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$.

Notation. On utilisera les lettres $X, Y, U, V, \ldots$ pour désigner des variables de prédicat unaire dans SR_0 (leur domaine de variation est donc $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}} = P$). Ce sont donc maintenant, en même temps, des *variables de condition.* Les lettres $A, B, \ldots$ désigneront des prédicats particuliers (éléments de $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$).
Les variables de prédicat unaire de SR_1, variant dans $\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{\mathbb{N}} = (\mathcal{P}(\Pi{\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}))^{\mathbb{N}}$ seront notées $X^+, Y^+, \ldots$ Les constantes de prédicat unaire de SR_1 (éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{\mathbb{N}}$) seront notées $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots$

On considère la formule à une variable libre de prédicat unaire :

$$\mathbb{C}[X] \equiv \forall m^{\mathrm{int}} \exists n^{\mathrm{int}} X(m+n)$$

qui exprime que $X \cap \mathbb{N}$ est infini.
Rappelons que la notation $\forall m^{\mathrm{int}} F[m]$ représente la formule $\forall m(\mathrm{int}(m) \to F[m])$.
En utilisant le théorème 6(ii) (mise en mémoire), on la remplacera ici par $\forall m(\{s^m 0\} \to F[m])$, puisqu'on la considère dans SR_0.
La formule $\mathbb{C}[X]$ s'écrit donc $\forall m[\{s^m 0\}, \forall n(\{s^n 0\}, X(m+n) \to \perp) \to \perp]$.

Remarque. Nous utiliserons plus loin le quantificateur $\forall m^{\mathrm{int}}$ dans SR_1. La notation $\forall m^{\mathrm{int}} F[m]$ représentera alors la formule $\forall m(\{s^m 0[]\} \to F[m])$, c'est-à-dire $\forall m(\{(s^m 0, \mathbf{1})\} \to F[m])$.

On termine la construction de la structure de réalisabilité SR_1 en définissant un sous-ensemble $\mathsf{C}[A]$ de Λ_c, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\mathsf{C}[A] = \{\tau \in \Lambda_c;\ \tau \Vdash \mathbb{C}[A]\}.$$

On a donc $\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp = \{(\xi \star \pi, A);\ \xi \in \Lambda_c, \pi \in \Pi, A : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi), \forall \tau(\tau \Vdash \mathbb{C}[A] \Rightarrow \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp)\}$.
Dans SR_1, on notera $|\!|\!|F|\!|\!|$ la valeur de vérité d'une formule close F (sous-ensemble de $\mathbf{\Pi} = \Pi{\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$) et $(\xi, X) \mid\!\mid\!\!\vdash F$ le fait que $(\xi, X) \in \mathbf{\Lambda} = \Lambda_c{\times}\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ réalise cette formule.

Il faut noter qu'avec cette définition des l'ensembles $\mathsf{C}[p]$, on identifie les variables p de condition et les variables X de prédicat unaire de SR_0. Dans les formules de SR_0, $\mathsf{C}[p] \to F$ sera maintenant écrite $\mathbb{C}[X] \to F$ et le quantificateur $\forall p^P$ est remplacé par $\forall X$.

On doit trouver des quasi-preuves $\alpha_i (0 \le i \le 4)$ telles que :

$\alpha_0 \Vdash \forall X\forall Y\{\mathbb{C}[X \wedge Y] \to \mathbb{C}[X]\}$; $\alpha_1 \Vdash \forall X\forall Y\{\mathbb{C}[X \wedge Y] \to \mathbb{C}[Y \wedge X]\}$;
$\alpha_2 \Vdash \forall X\{\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X \wedge X]\}$; $\alpha_3 \Vdash \forall X\forall Y\forall Z\{\mathbb{C}[X \wedge (Y \wedge Z)] \to \mathbb{C}[(X \wedge Y) \wedge Z)]\}$;
$\alpha_4 \Vdash \forall X\{\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X \wedge \mathbf{1}]\}$.
Or, on a facilement :
$\vdash \mathsf{H} : \forall x(Xx \to X'x) \to (\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X'])$ avec $\mathsf{H} = \lambda f\lambda u\lambda m\lambda h(um)\lambda n\lambda x(hn)(f)x$.
On peut donc poser $\alpha_i = \mathsf{H}\beta_i$, pour des quasi-preuves $\beta_i(0 \le i \le 4)$ telles que :
$\beta_0 \Vdash \forall X\forall Y\{X \wedge Y \to X\}$; $\beta_1 \Vdash \forall X\forall Y\{X \wedge Y \to Y \wedge X\}$;
$\beta_2 \Vdash \forall X\{X \to X \wedge X\}$; $\beta_3 \Vdash \forall X\forall Y\forall Z\{X \wedge (Y \wedge Z) \to (X \wedge Y) \wedge Z)\}$;
$\beta_4 \Vdash \forall X\{X \to X \wedge \top\}$.
On peut donc poser $\beta_0 = \lambda z(z)1$; $\beta_1 = \lambda z\lambda f((f)(z)0)(z)1$;
$\beta_2 = \beta_4 = \lambda x\lambda f(f)xx$; $\beta_3 = \lambda z\lambda f((f)\lambda g((g)(z)1)(z)01)(z)00$
avec $1 = \lambda x\lambda y\, x$ et $0 = \lambda x\lambda y\, y$.

La condition de chaîne dénombrable

On montre ici que la formule $\mathbb{C}[X]$ satisfait la *condition de chaîne dénombrable*.

Remarquons que le langage des formules de SR_0 contient maintenant trois relations d'équivalence sur les prédicats unaires (dont le domaine de variation est $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$).
Ce sont, en commençant par la plus forte :
• L'*égalité de Leibniz*, que nous avons notée $X = Y$, et qui est l'égalité dans l'ensemble P de conditions. Elle est définie comme $\neg(X \neq Y)$; pour $X, Y \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$, on a $\|X \neq Y\| = \Pi = \|\bot\|$ si X et Y sont la même fonction, et $\|X \neq Y\| = \emptyset = \|\top\|$ si X et Y sont des fonctions différentes.
• L'*équivalence extensionnelle*, que nous avons notée $X \simeq Y$, qui est la formule : $\forall x^{\mathrm{int}}(Xx \leftrightarrow Yx)$. Elle est associée à la relation de préordre $X \subseteq Y$ qui est la formule : $\forall x^{\mathrm{int}}(Xx \to Yx)$.
• L'*équivalence des conditions*, que nous avons notée $X \sim Y$, qui est la formule : $\forall Z(\mathbb{C}[X \wedge Z] \leftrightarrow \mathbb{C}[Y \wedge Z])$. Elle équivaut à $\neg(\mathbb{C}[X \setminus Y] \vee \mathbb{C}[Y \setminus X])$. Elle est associée à la relation de préordre $X \le Y$ qui est la formule $\forall Z(\mathbb{C}[X \wedge Z] \to \mathbb{C}[Y \wedge Z])$, qui équivaut à $\exists x^{\mathrm{int}}\forall y^{\mathrm{int}}(X(x+y) \to Y(x+y))$ ou encore $\neg\mathbb{C}[X \setminus Y]$.
La fonction binaire $\setminus$ est définie sur $P = \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ par $(X \setminus Y)(n) = \|X(n) \wedge \neg Y(n)\|$.
Il s'agit maintenant de construire une application $\mathsf{p} : \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}\times P} \to P$ (avec $P = \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$) et deux quasi-preuves $\mathsf{cd}_0, \mathsf{cd}_1$ telles que, pour tout $\mathcal{X} : \mathbb{N}\times P \to \mathcal{P}(\Pi)$, on ait :
$\mathsf{cd}_0 \Vdash \forall n^{\mathrm{int}}\forall Y(Y \notin \mathcal{X}n \to \mathsf{p}(\mathcal{X}) \le Y)$;

$$\mathsf{cd}_1 \Vdash \forall n^{\mathrm{int}}\forall Y\forall Z(Y \notin \mathcal{X}n, Z \notin \mathcal{X}n \to Y = Z), \forall n^{\mathrm{int}}\exists Y(Y \notin \mathcal{X}n), \forall n^{\mathrm{int}}\forall Y(Y \notin \mathcal{X}n \to \mathbb{C}[Y]),$$
$$\forall m^{\mathrm{int}}\forall n^{\mathrm{int}}\forall Y\forall Z(Y \notin \mathcal{X}n, Z \notin \mathcal{X}(n+m) \to Z \le Y) \to \mathbb{C}[\mathsf{p}(\mathcal{X})].$$

On fixe donc $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}\times P}$ et on définit les formules :
$A(i,n,\mathcal{X}) \equiv \forall Y(Y \notin \mathcal{X}i \to Yn)$; $B(j,n,\mathcal{X}) \equiv \forall i^{\mathrm{int}}(i \le j \to A(i,n,\mathcal{X}))$;
$\Phi(j,n,\mathcal{X}) \equiv j < n \wedge B(j,n,\mathcal{X}) \wedge \forall k^{\mathrm{int}}(j < k < n \to \neg B(j,k,\mathcal{X}))$.
On définit alors la fonction $\mathsf{p}(\mathcal{X}) : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)$ en posant $\mathsf{p}(\mathcal{X})(n) = \|\exists j^{\mathrm{int}}\Phi(j,n,\mathcal{X})\|$.

Remarque. Intuitivement, l'hypothèse de la condition de chaîne dénombrable exprime que $\mathcal{X}$ est une suite d'ensembles à un seul élément, soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. La suite A_i est une suite de parties de $\mathbb{N}$, qui est décroissante *au sens des conditions*, c'est-à-dire que $A_i \setminus A_{i+1}$ est fini. On définit une fonction partielle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $f(j) =$ le premier entier $n \in \bigcap_{i\le j} A_i$ qui est $> j$, s'il existe. La relation $n = f(j)$ est définie par la formule $\Phi(j, n, \mathcal{X})$, et $\mathsf{p}(\mathcal{X})$ est défini comme l'image de f. Si chaque ensemble A_i est une condition non triviale (c'est-à-dire un ensemble infini d'entiers), alors l'image de f est aussi infinie (et f est totale).

Pour obtenir la quasi-preuve cd_0, il suffit de prouver la formule :

$$\forall j^{\text{int}} \forall Y (Y \notin \mathcal{X} j \to \mathsf{p}(\mathcal{X}) \leq Y)$$

à l'aide de la définition de $\mathsf{p}(\mathcal{X})$ et de formules déjà réalisées par une quasi-preuve.

La formule $Y \notin \mathcal{X} j \to \mathsf{p}(\mathcal{X}) \leq Y$ s'écrit $Y \notin \mathcal{X} j \to \neg \mathbb{C}[\mathsf{p}(\mathcal{X}) \setminus Y]$, c'est-à-dire :
$Y \notin \mathcal{X} j \to \exists m^{\text{int}} \forall j'^{\text{int}} \forall l^{\text{int}} [\Phi(j', m+l, \mathcal{X}) \to Y(m+l)]$. On a donc :
$\forall j^{\text{int}} \exists m^{\text{int}} \forall j'^{\text{int}} \forall l^{\text{int}} [\Phi(j', m+l, \mathcal{X}) \to A(j, m+l, \mathcal{X})] \vdash \forall j^{\text{int}} \forall Y (Y \notin \mathcal{X} j \to \mathsf{p}(\mathcal{X}) \leq Y)$
(parce que $\exists m^{\text{int}} \forall Y (Y \notin \mathcal{X} j \to F) \vdash \forall Y (Y \notin \mathcal{X} j \to \exists m^{\text{int}} F)$ quelle que soit la formule F).

Il suffit donc de montrer la formule :

$$\forall j^{\text{int}} \exists m^{\text{int}} \forall j'^{\text{int}} \forall l^{\text{int}} [\Phi(j', m+l, \mathcal{X}) \to A(j, m+l, \mathcal{X})].$$

Notation. Pour alléger la notation, on écrira $m \leq m'$ pour $\exists l^{\text{int}} (m + l = m')$; on supprimera l'exposant " int "des variables quantifiées et le paramètre $\mathcal{X}$ dans les formules A, B et Φ.

On écrira $(\forall Y \notin \mathcal{X} n)\, F$ pour $\forall Y (Y \notin \mathcal{X} n \to F)$ et $(\forall i \leq j)\, F$ pour $\forall i (i \leq j \to F)$.

On doit donc montrer :

$(\star)$ $$\forall j \exists m \forall j' \forall m' [\Phi(j', m'), m' > m \to A(j, m')].$$

Lemme 32.
i) $\Vdash \forall j \forall m \forall j' \forall m' [\Phi(j, m), \Phi(j', m'), m < m' \to A(j, m') \wedge j < j']$.
ii) $\Vdash \forall j \forall j' \forall m' [\Phi(j', m'), j \leq j' \to \exists m\, \Phi(j, m)]$.

On montre ces propositions en arithmétique du second ordre. On écrit :
(1) $\Phi(j, m) \equiv j < m \wedge \forall i (i \leq j \to A(i, m)) \wedge \forall k (j < k < m \to \exists i (i \leq j \wedge \neg A(i, k)))$;
(2) $\Phi(j', m') \equiv j' < m' \wedge \forall i (i \leq j' \to A(i, m')) \wedge \forall k (j' < k < m' \to \exists i (i \leq j' \wedge \neg A(i, k)))$.
i) Si $j' \leq j$, on a $j' < m$ d'après (1) ; on peut donc faire $k = m$ dans (2), puisque $m < m'$, ce qui donne $\exists i (i \leq j' \wedge \neg A(i, m))$ donc $\exists i (i \leq j \wedge \neg A(i, m))$, ce qui contredit (1) ; on a donc $j < j'$. On peut alors faire $i = j$ dans (2), ce qui donne $A(j, m')$.
ii) De $\Phi(j', m')$ et $j \leq j'$, on déduit $j < m' \wedge \forall i (i \leq j \to A(i, m'))$. Si m est le premier entier m' qui a cette propriété, on a $\Phi(j, m)$.

C.Q.F.D.

On peut alors montrer $(\star)$; l'entier j étant fixé, il y a deux cas :
- Si on a $\exists m\, \Phi(j, m)$, le résultat découle immédiatement du lemme 32(i).
- Sinon, d'après le lemme 32(ii), on a $\forall j' \forall m' [\Phi(j', m') \to j' < j]$. Si on a $\forall j' \forall m' \neg \Phi(j', m')$, la propriété $(\star)$ est évidente. Sinon, soit j_0 le plus grand entier tel que $\exists m\, \Phi(j_0, m)$. On a alors $\forall j' \forall m' [\Phi(j', m') \to j' \leq j_0]$. D'après le lemme 32(i), on a :
$\forall j' \forall m \forall m' [\Phi(j_0, m), \Phi(j', m'), m < m' \to \bot]$, ce qui donne le résultat voulu, puisque l'on a $\exists m\, \Phi(j_0, m)$.

C.Q.F.D.

Pour obtenir la quasi-preuve cd_1, il suffit de prouver la formule $\forall j \exists m\, \Phi(j, m)$ à l'aide des hypothèses. En effet, puisque qu'on a trivialement $\vdash \Phi(j, m) \to j < m$, on en déduira : $\forall j \exists m (j < m \wedge \Phi(j, m))$, soit $\forall j^{\text{int}} \exists m^{\text{int}} (j < m \wedge \mathsf{p}(\mathcal{X})(m))$ c'est-à-dire $\mathbb{C}[\mathsf{p}(\mathcal{X})]$.

Lemme 33. $\vdash \forall j \forall m(j < m, B(j,m) \to \exists m\, \Phi(j,m))$.

Il suffit de considérer le premier entier m tel que $j < m$ et $B(j,m)$.
C.Q.F.D.

Il reste donc à prouver la formule $\forall j \exists m(j < m \wedge B(j,m))$. On montre en fait la formule $\forall j \forall l \exists m(l \leq m \wedge B(j,m))$; ou encore :

($\star\star$) $$\forall j \forall l(\exists m \geq l)(\forall i \leq j)(\forall Y \notin \mathcal{X} i) Y m.$$

On a les hypothèses :
(H0) $\forall n \forall Y \forall Z(Y \notin \mathcal{X} n, Z \notin \mathcal{X} n \to Y = Z)$.
(H1) $\forall n \exists Y(Y \notin \mathcal{X} n)$.
(H2) $\forall n \forall Y(Y \notin \mathcal{X} n \to \mathbb{C}[Y])$.
(H3) $\forall j(\forall i \leq j) \forall Y \forall Z(Z \notin \mathcal{X} i, Y \notin \mathcal{X} j \to \neg\mathbb{C}[Y \setminus Z])$
(puisque $Y \leq Z$ s'écrit $\neg\mathbb{C}[Y \setminus Z]$).

Or, l'hypothèse (H3) donne :
$\forall j(\forall i \leq j)(\forall Z \notin \mathcal{X} i)(\forall Y \notin \mathcal{X} j) \exists l(\forall m \geq l)(Y m \to Z m)$.
Avec (H0), appliqué pour $n = j$, puis $n = i$, on en déduit (lemme 34(ii)) :
$\forall j(\forall i \leq j) \exists l(\forall Z \notin \mathcal{X} i)(\forall Y \notin \mathcal{X} j)(\forall m \geq l)(Y m \to Z m)$, soit :
$\forall j(\forall i \leq j) \exists l(\forall m \geq l)(\forall Y \notin \mathcal{X} j)(\forall Z \notin \mathcal{X} i)(Y m \to Z m)$, c'est-à-dire :
$\forall j(\forall i \leq j) \exists l(\forall m \geq l)(\forall Y \notin \mathcal{X} j))(Y m \to A(i,m))$, puis (avec le lemme 34(i)) :
$\forall j \exists l(\forall m \geq l)(\forall i \leq j)(\forall Y \notin \mathcal{X} j))(Y m \to A(i,m))$ et enfin :
$\forall j \exists l(\forall m \geq l)(\forall Y \notin \mathcal{X} j)(Y m \to B(j,m))$.
Or, la proposition ($\star\star$) à démontrer s'écrit $\forall j \forall l(\exists m \geq l) B(j,m)$.
Grâce à l'hypothèse (H1), on est donc ramené à montrer $\forall j \forall l(\exists m \geq l)(\forall Y \notin \mathcal{X} j) Y m$, ce qui est l'hypothèse (H2).
On a utilisé :

Lemme 34.
i) $(\forall i \leq j) \exists l(\forall m \geq l) F \ \vdash\ \exists l(\forall m \geq l)(\forall i \leq j) F$ *si l n'est pas libre dans F.*
ii) $\Vdash (\forall Y \notin \mathcal{X} n)(\forall Z \notin \mathcal{X} n)(Y = Z), (\forall Y \notin \mathcal{X} n) \exists l\, F \to \exists l(\forall Y \notin \mathcal{X} n)\, F$
quelle que soit la formule F.

i) Immédiat, puisque les quantificateurs sur les individus sont supposés restreints aux entiers.
ii) Conséquence de la formule réalisée $\forall Y \forall Z(Y = Z, G[Y] \to G[Z])$.
C.Q.F.D.

L'ultrafiltre

Notations.
Rappelons que $X \subseteq Y \ \equiv\ \forall n^{\mathrm{int}}(X n \to Y n)$ (X, Y sont des variables de prédicat unaires de SR_0 ou SR_1) et que $X \leq Y \equiv \neg\mathbb{C}[X \setminus Y] \ \equiv\ \exists l^{\mathrm{int}} \forall m^{\mathrm{int}}(l \leq m, X m \to Y m)$ lorsque X et Y sont des variables de condition, c'est-à-dire des variables de prédicat unaire de SR_0. On généralise cette notation aux variables de prédicat unaire de SR_1. On définit donc la formule de SR_1 : $X^+ \leq Y^+$ par $\exists l^{\mathrm{int}} \forall m^{\mathrm{int}}(l \leq m, X^+ m \to Y^+ m)$.
Rappelons que, lorsque F est une formule close de SR_1, on écrit $\Vvdash F$ pour exprimer qu'il existe une quasi-preuve θ telle que $(\theta, \mathbf{1}) \Vvdash F$.

Dans la structure SR_1, on a défini le générique comme un prédicat unaire J sur les conditions, en posant $\|J(\overline{X})\| = \Pi\times\{\overline{X}\}$, pour tout $\overline{X} \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$. On définit, dans SR_1, un prédicat $\mathcal{J}$ d'ordre 3, par la formule :

$$\mathcal{J}(X^+) \equiv \forall X(X \simeq X^+ \to J(X))$$

où X, X^+ sont des variables de prédicat unaire.

Proposition 35.
i) $\Vdash \forall X^+\forall Y^+(X^+ \simeq Y^+, \mathcal{J}(X^+) \to \mathcal{J}(Y^+))$.
ii) $\Vdash \forall X\forall X^+(X \simeq X^+ \to (J(X) \leftrightarrow \mathcal{J}(X^+)))$.

i) La formule considérée s'écrit $\forall X^+\forall Y^+\forall Y(X^+ \simeq Y^+, \mathcal{J}(X^+), Y \simeq Y^+ \to J(Y))$.
Elle est trivialement démontrable : de $X^+ \simeq Y^+, Y \simeq Y^+$, on déduit $Y \simeq X^+$; avec $\mathcal{J}(X^+)$, on en déduit $J(Y)$.
ii) Par définition de $\mathcal{J}$, on a $\vdash X \simeq X^+, \mathcal{J}(X^+) \to J(X)$.
Inversement, d'après le théorème 21(v), on a $\Vdash \forall X\forall Y(J(X), Y \le X \to J(Y))$ et donc : $\Vdash \forall X\forall Y(J(X), X \simeq Y \to J(Y))$. Or, cette formule a pour conséquence :
$X \simeq X^+, J(X) \to \forall Y(Y \simeq X^+ \to J(Y))$, c'est-à-dire $X \simeq X^+, J(X) \to \mathcal{J}(X^+)$.
C.Q.F.D.

Théorème 36. $\Vdash \forall X^+\forall Y^+(Y^+ \le X^+, \mathcal{J}(X^+) \to \mathcal{J}(Y^+))$.

D'après le théorème 21(v), on a $\Vdash \forall X\forall Y(Y \le X, J(X) \to J(Y))$.
Le théorème 29 donne $\Vdash \forall X^+\exists X(X^+ \simeq X)$.
La proposition 35(ii) donne $\Vdash \forall X\forall X^+(X \simeq X^+ \to (J(X) \leftrightarrow \mathcal{J}(X^+)))$.
Désignons ces trois formules par F_0, F_1, F_2 et soit F la formule :
$\forall X^+\forall Y^+(Y^+ \le X^+, \mathcal{J}(X^+) \to \mathcal{J}(Y^+))$. On a :
$(\theta_0, \mathbf{1}) \Vdash F_0$; $(\theta_1, \mathbf{1}) \Vdash F_1$; $(\theta_2, \mathbf{1}) \Vdash F_2$ où $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ sont des quasi-preuves.
On a de plus $F_0, F_1, F_2 \vdash F$ et donc $x_0 : F_0, x_1 : F_1, x_2 : F_2 \vdash t[x_0, x_1, x_2] : F$, où t est une quasi-preuve ayant les variables libres x_0, x_1, x_2. D'après le théorème 1 (lemme d'adéquation), on a donc $t[(\theta_0, \mathbf{1})/x_0, (\theta_1, \mathbf{1})/x_1, (\theta_2, \mathbf{1})/x_2] = (t^*[\theta_0/x_0, \theta_1/x_1, \theta_2/x_2], \mathbf{1}) \Vdash F$.
C.Q.F.D.

Lemme 37. $\Vdash \forall X(J(\mathbf{1} \setminus X) \leftrightarrow \neg J(X))$.

D'après le théorème 21(iv) et (vi), on a $\Vdash \forall X(\neg J(X) \leftrightarrow \forall Y(\neg\mathbb{C}[X \wedge Y] \to J(Y)))$. Or, la formule $\forall Y(\neg\mathbb{C}[X \wedge Y] \to J(Y))$ équivaut à $\forall Y(Y \le (\mathbf{1} \setminus X) \to J(Y))$. D'après le théorème 21(v), on a $\Vdash J(\mathbf{1} \setminus X) \leftrightarrow \forall Y(Y \le (\mathbf{1} \setminus X) \to J(Y))$. On en déduit $\Vdash \forall X(J(\mathbf{1} \setminus X) \leftrightarrow \neg J(X))$.
C.Q.F.D.

Théorème 38.
i) $\Vdash \neg\mathcal{J}(\mathbf{1})$.
ii) $\Vdash \forall X^+(\mathcal{J}(\mathbf{1} \setminus X^+) \leftrightarrow \neg\mathcal{J}(X^+))$.
iii) $\Vdash \forall X^+\forall Y^+[\neg\mathcal{J}(X^+), \mathcal{J}(X^+ \wedge Y^+) \to \mathcal{J}(Y^+)]$.

i) D'après le théorème 21(i), on a $\Vdash \neg J(\mathbf{1})$. La proposition 35(ii) donne alors $\Vdash \neg\mathcal{J}(\mathbf{1})$.
ii) Le lemme 37 donne $\Vdash \forall X(J(\mathbf{1} \setminus X) \leftrightarrow \neg J(X))$. En appliquant la proposition 35(ii) et le théorème 29, on obtient le résultat voulu.

iii) D'après le théorème 21(iii), on a $\Vdash \forall X \forall Y[\neg J(X), J(X \wedge Y) \to J(Y)]$. En appliquant la proposition 35(ii) et le théorème 29, on obtient le résultat voulu.

C.Q.F.D.

Remarque. Les théorèmes 36 et 38 montrent que $\mathcal{J}$ est un idéal maximal non trivial sur l'anneau de Boole des parties de $\mathbb{N}$.

Programmes obtenus à partir de preuves

Soit F une formule close restreinte de l'arithmétique du second ordre (c'est-à-dire une formule du second ordre dont tous les quantificateurs d'individu sont restreints à $\mathbb{N}$).
Soit $x : \mathrm{AU}, y : \mathrm{ACD} \vdash t[x,y] : F$ une preuve de F en arithmétique du second ordre, avec l'axiome du choix dépendant ACD et l'axiome AU de l'ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, énoncé sous la forme : " $\mathcal{J}$ est un idéal maximal non trivial sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ".
On a donc $x : \mathrm{AU} \vdash u[x] : G$ avec $u[x] = \lambda y\, t[x,y]$ et $G \equiv \mathrm{ACD} \to F$.
Dans la section précédente, on a obtenu une quasi-preuve θ telle que $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash AU$.
Le théorème 1 (lemme d'adéquation) donne $u[(\theta,\mathbf{1})/x] \Vdash G$ et donc $(u^*[\theta/x], \mathbf{1}) \Vdash G$.
D'après le théorème 30, on a donc $\chi_G^+ u^*[\theta/x] \Vdash \mathbb{C}[\mathbf{1}] \to G$, c'est-à-dire :
$\chi_G^+ u^*[\theta/x] \Vdash \mathbb{C}[\mathbf{1}], \mathrm{ACD} \to F$. Or, on a des quasi-preuves $\xi_0 \Vdash \mathbb{C}[\mathbf{1}]$ et $\eta_0 \Vdash$ ACD.
On a donc finalement $\chi_G^+ u^*[\theta/x]\xi_0\eta_0 \Vdash F$.
On peut alors appliquer au programme $\zeta = \chi_G^+ u^*[\theta/x]\xi_0\eta_0$ tous les résultats obtenus dans le cadre de la réalisabilité usuelle. Le cas où F est une formule arithmétique (resp. Π_1^1) est étudié dans [3] (resp. [4]).
Pour prendre un exemple très simple, si $F \equiv \forall X(X1, X0 \to X1)$, on a $\zeta \star \kappa \cdot \kappa' \cdot \pi \succ \kappa \star \pi$ quels que soient les λ_c-termes κ, κ' et la pile π.

Sélectivité

On montre ici que l'ultrafiltre défini dans SR_1 par le prédicat $\neg\mathcal{J}$ est *sélectif* (voir [1]). Cela signifie que, pour toute partition de $\mathbb{N}$ dont aucun élément n'est dans l'ultrafiltre, il existe un élément de l'ultrafiltre qui rencontre chaque élément de la partition en au plus un point.
Notation. Dans cette section, tous les quantificateurs d'individu sont restreints aux entiers. On écrira donc $\forall x$ au lieu de $\forall x^{\mathrm{int}}$.
X, Y sont des variables de prédicat unaire, Z une variable de prédicat binaire.
On désigne par :
- Part$[Z]$ la formule $\forall j \exists m\, Zmj \wedge \forall m \forall m'(Zmj, Zm'j \to m = m')$
(lire " Z est une partition de $\mathbb{N}$ ").
- Prem$[j, X, Z]$ la formule $\exists m[Xj \wedge Zmj \wedge (\forall i < j)\neg(Xi \wedge Zmi)]$
(lire " j est le premier élément de X dans sa classe d'équivalence (mod. Z) ").
- $\mathrm{R}[X, Z]$ la formule $\forall l \exists j(Xj \wedge (\forall m \leq l)\neg Zmj)$
(lire " X rencontre une infinité de classes d'équivalence (mod. Z) ").

Lemme 39. *Part*(Z), *R*$[X,Z] \vdash \forall n(\exists j > n)$*Prem*$[j, X, Z]$.

On a en effet :
$\forall j \exists m\, Zmj,\ \mathrm{R}[X,Z] \vdash \forall l(\exists m > l)\exists j(Xj \wedge Zmj)$ (1)

et, par ailleurs :
$\forall m\forall m'(Zmj, Zm'j \to m = m') \ \vdash\ \forall n\exists l(\forall m > l)\forall j(Zmj \to j > n)$ (2)
On a donc :
$\mathrm{Part}(Z),\ \mathrm{R}[X,Z] \ \vdash\ \forall n\exists m[\exists j(Xj \wedge Zmj) \wedge \forall j(Zmj \to j > n)]$ (3)
(étant donné n, on choisit d'abord l par (2), puis m par (1)).
L'ordre sur $\mathbb{N}$ étant bien fondé, on a $\vdash \forall m[\exists j\, F(j) \to \exists j(F(j) \wedge (\forall i < j)\neg F(i))]$ quelle que soit la formule F. Donc :
$\vdash \forall m[\exists j(Xj \wedge Zmj) \to \exists j(Xj \wedge Zmj \wedge (\forall i < j)\neg(Xi \wedge Zmi))]$ (4)
De (3) et (4), on déduit :
$\mathrm{Part}(Z),\ \mathrm{R}[X,Z] \ \vdash\ \forall n\exists m(\exists j > n)[Xj \wedge Zmj \wedge (\forall i < j)\neg(Xi \wedge Zmi)]$
ce qui est le résultat voulu.

C.Q.F.D.

Lemme 40. $\Vdash \neg J(X), \forall Y\forall m(\forall j(Yj \leftrightarrow Zmj) \to J(Y)) \to R[X,Z]$.

Il suffit de montrer que l'on a $\Gamma,\ \neg J(X),\ \forall Y\forall m(\forall j(Yj \leftrightarrow Zmj) \to J(Y)) \ \vdash \mathrm{R}[X,Z]$ où Γ est la suite des propriétés du générique J données au théorème 21 et au lemme 37.
La propriété (iii) du théorème 21 s'écrit $\Vdash \forall Y\forall Y'(\neg J(Y), \neg J(Y') \to \neg J(Y \wedge Y'))$.
Le lemme 37 donne $\forall Y(J(\mathbf{1} \setminus Y) \leftrightarrow \neg J(Y))$. On en déduit :

$$\Vdash \forall Y\forall Y'(J(Y), J(Y') \to J(Y \vee Y')) \quad (5)$$

De $\forall Y\forall m(\forall j(Yj \leftrightarrow Zmj) \to J(Y))$, on déduit donc, en raisonnant par récurrence sur l :

$$\forall Y\forall l[\forall j(Yj \leftrightarrow (\exists m \le l)Zmj) \to J(Y)].$$

De $\neg J(X)$, on déduit $J(\mathbf{1} \setminus X)$ par le lemme 37.
En appliquant (5) une fois de plus, on obtient donc :

$$\forall Y\forall l[\forall j(Yj \leftrightarrow \neg Xj \vee (\exists m \le l)Zmj) \to J(Y)].$$

Or, le théorème 21(i) donne $\Vdash \neg J(\mathbf{1})$. En faisant $Y = \mathbf{1}$ (c'est-à-dire $Yj \equiv \top$ pour tout j), on obtient $\forall l\exists j(Xj \wedge (\forall m \le l)\neg Zmj)$, c'est-à-dire $\mathrm{R}[X,Z]$.

C.Q.F.D.

Désignons par $\mathrm{Part}'(Z)$ la formule $\mathrm{Part}(Z) \wedge \forall Y\forall m(\forall j(Yj \leftrightarrow Zmj) \to J(Y))$ (lire " Z est une partition dont aucun élément n'est dans l'ultrafiltre ").

Lemme 41. $\Vdash\ \mathit{Part}'(Z), \forall X\forall Y(\forall j(Yj \leftrightarrow \mathit{Prem}[j,X,Z]) \to J(Y)) \to \bot$.

En appliquant les lemmes 39 and 40, on obtient :
$\Vdash\ \mathrm{Part}'(Z) \to \forall X(\neg J(X) \to \forall n(\exists j > n)\mathrm{Prem}[j,X,Z])$.
On applique alors le théorème 22, en définissant la fonction $\phi : \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ par :
$\phi(X)(j) = \|\mathrm{Prem}[j,X,Z]\|$ (noter que $\vdash \mathrm{Prem}[j,X,Z] \leftrightarrow Xj \wedge \mathrm{Prem}[j,X,Z]$).
On en déduit $\Vdash\ \mathrm{Part}'(Z), \forall X\, J[\phi(X)] \to \bot$, ce qui est le résultat cherché.

C.Q.F.D.

Désignons par $\mathrm{Part}^+(Z^+)$ la formule $\mathrm{Part}(Z^+) \wedge \forall Y^+\forall m(\forall j(Y^+j \leftrightarrow Z^+mj) \to \mathcal{J}(Y^+))$ (lire " Z^+ est une partition dont aucun élément n'est dans l'ultrafiltre ").

Théorème 42.
$\Vdash \forall Z^+\{\mathit{Part}^+(Z^+), \forall X^+\forall Y^+(\forall j(Y^+j \leftrightarrow \mathit{Prem}[j,X^+,Z^+]) \to \mathcal{J}(Y^+)) \to \bot\}$.

Il suffit de remarquer que cette formule est conséquence de :
$\forall Z\{\mathrm{Part}'(Z), \forall X\forall Y(\forall j(Yj \leftrightarrow \mathrm{Prem}[j,X,Z]) \to J(Y)) \to \bot\}$

(qui est donnée par le lemme 41)
$\forall X^+ \exists X(X^+ \simeq X)$, $\forall Z^+ \exists Z(Z^+ \simeq Z)$
(qui sont données par le théorème 29)
et de $\|\!\!\vdash \forall X \forall X^+(X \simeq X^+ \to (J(X) \leftrightarrow \mathcal{J}(X^+)))$
(qui est donnée par la proposition 35(ii)).
C.Q.F.D.

Le théorème 42 exprime que, si Z^+ est une partition de $\mathbb{N}$ dont aucun élément n'est dans l'ultrafiltre, alors il existe une partie X^+ de $\mathbb{N}$ et un élément Y^+ de l'ultrafiltre, tels que Y^+ soit formé des éléments de X^+ qui sont les plus petits possibles dans leur classe d'équivalence. Cela implique que Y^+ rencontre chaque classe d'équivalence en au plus un point. L'ultrafiltre $\neg\mathcal{J}$ est donc sélectif.

Références

[1] S. Grigorieff. *Combinatorics on ideals and forcing.*
Ann. Math. Logic 3(4) (1971), p. 363-394.

[2] J.-L. Krivine. *Typed lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory.*
Arch. Math. Log., 40, 3, p. 189-205 (2001).
http://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/zf_epsi.pdf

[3] J.-L. Krivine. *Dependent choice, 'quote' and the clock.*
Th. Comp. Sc., 308, p. 259-276 (2003).
http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00154478
http://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/quote.pdf

[4] J.-L. Krivine. *Realizability in classical logic.*
A paraître dans Panoramas et synthèses, Société Mathématique de France.
http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00154500
Version mise à jour à :
http://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/Luminy04.pdf

[5] J.-L. Krivine. *Realizability : a machine for Analysis and set theory.*
Geocal'06 (février 2006 - Marseille); Mathlogaps'07 (juin 2007 - Aussois).
http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00154509
Version mise à jour à :
http://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/Mathlog07.pdf