



## Entraînements visqueux

Jacopo Seiwert

► **To cite this version:**

Jacopo Seiwert. Entraînements visqueux. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. <tel-00512382v2>

**HAL Id: tel-00512382**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00512382v2>**

Submitted on 6 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité  
Physique des liquides

Présentée par

Jacopo Seiwert

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

---

**Entraînements visqueux**

---

Soutenue le 13 septembre 2010 devant le jury composé de :

Mme	Isabelle Cantat	Rapporteur
M.	Christophe Clanet	
M.	Laurent Limat	
M.	David Quéré	
M.	Neil M. Ribe	Rapporteur
M.	Howard A. Stone	



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Dépôt libre de fluide</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Dépôt de fluide sur une surface lisse</b>	<b>7</b>
1.1	Expériences de dépôt . . . . .	7
1.1.1	Régime étudié . . . . .	7
1.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	8
1.1.3	Mesure de l'épaisseur de liquide par réflectométrie . . . . .	9
1.1.4	Épaisseur déposée . . . . .	11
1.2	Théorie de Landau Levich Derjaguin . . . . .	11
1.2.1	Les forces en présence . . . . .	11
1.2.2	Ménisque statique . . . . .	12
1.2.3	Loi d'échelle pour l'épaisseur déposée . . . . .	14
1.2.4	Théorie de LLD . . . . .	16
1.2.5	Précision du montage expérimental . . . . .	18
1.3	Anomalies et corrections à la loi de Landau . . . . .	18
1.3.1	Effet de la gravité . . . . .	18
1.3.2	Effet de l'inertie . . . . .	19
1.3.3	Effet des tensioactifs . . . . .	19
1.3.4	Le paradoxe de l'eau . . . . .	20
1.4	Conclusion . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Entraînement texturé</b>	<b>23</b>
2.1	Un système modèle . . . . .	23
2.1.1	Motivations . . . . .	23
2.1.2	Des surfaces à la rugosité bien contrôlée . . . . .	24
2.2	Expériences de dépôt . . . . .	25
2.2.1	Effet de la viscosité du liquide . . . . .	25
2.2.2	Deux régimes extrêmes de dépôt . . . . .	26
2.2.3	Influence du pas du réseau $p$ . . . . .	27
2.3	Modèle à deux couches pour l'enduction de surfaces texturées . . . . .	28
2.3.1	Caractéristiques du modèle . . . . .	28
2.3.2	Adaptation de la théorie de LLD . . . . .	30
2.3.3	Forme du ménisque dynamique . . . . .	31
2.3.4	Détermination de l'épaisseur libre entraînée . . . . .	33
2.4	Confrontation du modèle aux l'expérience . . . . .	34
2.4.1	$\alpha$ comme paramètre d'ajustement . . . . .	34
2.4.2	Accroissement de viscosité et géométrie de la surface . . . . .	35
2.5	Importance de l'écoulement dans la texture . . . . .	35
2.5.1	Glissement entre couches . . . . .	36

2.5.2	Écoulement dans la texture . . . . .	37
2.6	Perspectives . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Drainage texturé</b>	<b>41</b>
3.1	Expériences de drainage . . . . .	41
3.1.1	Importance (éventuelle) du drainage . . . . .	41
3.1.2	Drainage sur une surface lisse . . . . .	42
3.1.3	Drainage sur une surface texturée . . . . .	45
3.2	Régime de drainage "lent" . . . . .	46
3.2.1	Évolution du film libre . . . . .	46
3.2.2	Interprétation à l'aide du modèle à deux couches . . . . .	46
3.3	Marche . . . . .	47
3.3.1	Rôle du film captif . . . . .	47
3.3.2	Vitesse de translation du film libre . . . . .	48
3.3.3	Épaisseur du film libre . . . . .	50
3.3.4	Blocage de l'écoulement dans la texture . . . . .	51
3.4	Épaisseur d'équilibre en fin de drainage . . . . .	52
3.4.1	Gradient d'épaisseur de film . . . . .	52
3.4.2	Mesure du gradient d'épaisseur . . . . .	54
3.5	Dépôt et drainage sur des surfaces ultra-diluées . . . . .	55
3.5.1	Expériences de drainage . . . . .	55
3.5.2	Expériences de dépôt . . . . .	57
3.6	Conclusion . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Dépôt forcé de fluide</b>	<b>59</b>
<b>4</b>	<b>Dépôt de fluide par une membrane élastique</b>	<b>61</b>
4.1	Dispositif expérimental . . . . .	62
4.1.1	Motivations . . . . .	62
4.1.2	Présentation du montage expérimental . . . . .	62
4.1.3	Méthodes de mesure de l'épaisseur . . . . .	64
4.2	Forme du racloir . . . . .	65
4.2.1	Résistance à la flexion . . . . .	66
4.2.2	Équilibre mécanique . . . . .	68
4.2.3	Forme statique du racloir . . . . .	69
4.3	Expériences de dépôt dans la configuration "mouillante" . . . . .	72
4.3.1	Épaisseur entraînée en fonction de $\tilde{\gamma}_0$ . . . . .	72
4.3.2	Mesure de l'épaisseur déposée . . . . .	73
4.3.3	Prédiction en loi d'échelle de l'épaisseur déposée . . . . .	74
4.3.4	Comparaison avec les expériences . . . . .	75
4.3.5	Un dépôt élastique "à la LLD" ? . . . . .	76
4.4	Coefficient de la loi de dépôt . . . . .	78
4.4.1	Présentation du modèle . . . . .	78
4.4.2	Forme du racloir dynamique . . . . .	79
4.4.3	Couplage entre élasticité et contraintes visqueuses . . . . .	79
4.4.4	Conditions aux limites . . . . .	80
4.4.5	Raccord avec le racloir statique, et coefficient . . . . .	81

4.5	Différences avec l'expérience . . . . .	82
4.5.1	Une situation expérimentale bien décrite? . . . . .	82
4.5.2	Effet de la largeur de racloir . . . . .	82
4.6	Prise en compte de la largeur finie du dépôt . . . . .	84
4.6.1	Correction au modèle . . . . .	84
4.6.2	Correction constante . . . . .	86
4.7	Autres régimes de dépôt . . . . .	87
4.7.1	Régime très appuyé : $y_0 < y_m$ . . . . .	88
4.7.2	Régime de "mouillage partiel" : $y_0 > y_m$ . . . . .	88
4.8	Conclusion . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Dépôt de fluide par une membrane rigide</b>	<b>91</b>
5.1	Dispositif expérimental . . . . .	91
5.1.1	Une limite du cas flexible? . . . . .	91
5.1.2	Montage expérimental . . . . .	92
5.2	Épaisseur déposée . . . . .	92
5.2.1	Le couteau à enduire de Taylor . . . . .	92
5.2.2	Vérification de la prédiction . . . . .	93
5.3	Conclusion sur les raclours flexibles . . . . .	95
<b>III</b>	<b>Fabrication et évolution de filaments</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>Fabrication de filaments visqueux</b>	<b>99</b>
6.1	Principe de l'expérience . . . . .	100
6.1.1	Entraînement sans support . . . . .	100
6.1.2	Description du dispositif . . . . .	100
6.2	Extraction de filaments visqueux . . . . .	101
6.2.1	Méthodes de formation d'un filament . . . . .	101
6.2.2	Volume de liquide entraîné . . . . .	102
6.2.3	Effet du diamètre $D$ du cylindre . . . . .	104
6.2.4	Effet de la profondeur du bain . . . . .	105
6.2.5	Longueur du filament extrait . . . . .	106
6.2.6	Volume maximal entraîné . . . . .	107
6.2.7	Aller plus loin? . . . . .	108
6.3	Drainage des filaments minces . . . . .	110
6.3.1	Loi expérimentale du drainage . . . . .	110
6.3.2	Interprétation des observations . . . . .	110
6.4	Drainage des filaments épais . . . . .	113
6.4.1	Une loi de drainage différente des filaments fins . . . . .	113
6.4.2	Forme du "pied" du filament . . . . .	114
6.4.3	Forme de la "tête" du filament . . . . .	116
6.4.4	Visualisation de l'écoulement . . . . .	118
6.4.5	Importance du (non-)glissement sur le cylindre . . . . .	121
6.5	Conclusion . . . . .	122

<b>7</b>	<b>Chute de filaments visqueux</b>	<b>125</b>
7.1	Deux régimes de chute . . . . .	125
7.1.1	Principe de l'expérience . . . . .	125
7.1.2	Différences entre U et chaînette . . . . .	126
7.2	Critère de sélection des deux régimes . . . . .	129
7.2.1	Temps caractéristique de chute . . . . .	129
7.2.2	Temps caractéristique de drainage . . . . .	131
7.2.3	Critère de sélection de la forme . . . . .	132
7.3	Évolution aux temps longs . . . . .	133
7.3.1	Chaînette . . . . .	134
7.3.2	U . . . . .	137
7.4	Conclusion . . . . .	139
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de l'épaisseur déposée par dip-coating</b>	<b>145</b>
A.1	Calcul de LLD . . . . .	145
A.1.1	Conditions aux limites . . . . .	145
A.1.2	Valeur asymptotique $Y_{XX}$ . . . . .	146
A.2	Modèle à deux couches . . . . .	147
A.2.1	Un calcul analogue au calcul de LLD . . . . .	147
A.2.2	Valeur minimale de $e_l$ . . . . .	148
A.2.3	Étapes de la résolution . . . . .	148
A.2.4	Vérification des deux cas limites $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow +\infty$ . . . . .	149
A.3	Taille du ménisque dynamique . . . . .	150
A.3.1	Théorie de LLD . . . . .	150
A.3.2	Modèle à deux couches . . . . .	150
<b>B</b>	<b>Mesure de la rigidité des raclors</b>	<b>153</b>
B.1	Forme d'une plaque soumise à son propre poids. . . . .	153
B.1.1	Équation de la forme du raclor . . . . .	153
B.1.2	Conditions aux limites . . . . .	154
B.2	Méthode pour les raclors les moins rigides . . . . .	155
B.2.1	Principe de la mesure . . . . .	155
B.2.2	Précision et limites . . . . .	155
B.3	Méthode pour les raclors plus rigides . . . . .	156
<b>C</b>	<b>Modèle de filament visqueux</b>	<b>157</b>
<b>D</b>	<b>Dépôt de mousse sur une fibre</b>	<b>159</b>
D.1	Mouillage dynamique d'une fibre . . . . .	159
D.2	Entraînement de mousse par une fibre . . . . .	160
D.2.1	Montage . . . . .	160
D.2.2	Entraînement discontinu . . . . .	160
D.2.3	Entraînement continu . . . . .	164
D.3	Force exercée par la mousse sur la fibre . . . . .	166
D.3.1	Principe de la mesure . . . . .	166
D.3.2	Expériences . . . . .	167

D.3.3	Taille de la région élastique . . . . .	167
D.4	Conclusion . . . . .	170





# Introduction

L'expérience quotidienne procure de nombreux exemples de phénomènes d'entraînement de fluide par un solide. Tel rêveur matinal s'enthousiasmera sur la quantité d'eau qui le recouvre lorsqu'il sort de son bain, pendant que son colocataire attend patiemment son tour en se demandant s'il est plus efficace d'extraire le miel de son pot à la cuillère ou au couteau. Tel bricoleur du concours Lépine se prend à rêver d'une piscine remplie de peinture, qui lui permettrait de repeindre l'ensemble des volets de sa maison de vacances rétaise dans les délais impartis par sa chère et tendre<sup>1</sup> compagne, littéralement en moins de temps qu'il n'en faut pour plonger un dé de glace dans un verre anisé et l'en ressortir<sup>2</sup>. Tel pétrolier avide de rentabilité (honnête néanmoins) recherche avec sérieux et attaché-case le meilleur moyen d'extraire le peu de pétrole qui réside encore dans les fissures des réservoirs naturels qu'il exploite.

Plus sérieusement, on s'intéresse le plus souvent dans ces expériences d'entraînement ou de dépôt à la quantité de liquide extraite. Dans la plupart des cas, celle-ci est déterminée par un équilibre entre deux forces antagonistes, l'une qui tend à accrocher le fluide à la paroi du solide, et l'autre qui s'y oppose. On peut alors regrouper les différentes configurations étudiées par famille, en fonction de la nature de ces deux forces. La première distinction se fait sur la force d'entraînement, qui peut être dominée par l'inertie ou par la viscosité. Elle nécessite de connaître l'échelle spatiale du phénomène (par exemple l'épaisseur  $e$  de liquide entraînée), un ordre de grandeur de la vitesse du liquide  $V$ , de sa viscosité  $\eta$  et de sa masse volumique  $\rho$ . On peut alors estimer le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho V e}{\eta}$  : l'entraînement est visqueux si  $Re \ll 1$ , et inertiel lorsque  $Re \gg 1$ . Les expériences d'entraînement à grande vitesse et faible viscosité rentrent dans cette dernière catégorie. Si l'on s'intéresse à un objet que l'on ressort de l'eau à vitesse constante, l'entraînement est inertiel dès que sa vitesse dépasse 0,1 m/s.

C'est le cas par exemple d'un nageur qui s'extrait de la piscine (figure 1) : si l'on suppose  $V \approx 1$  m/s et  $e \approx 1$  mm,  $Re \approx 10^3$ . Dans cette configuration, les forces qui s'opposent à l'entraînement et fixent la quantité de liquide déposée peuvent être de deux type. Si le film déposé est épais (de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ , ou plus), les forces de gravité sont prépondérantes. Un film mince, en revanche, est limité par des forces d'origines capillaires. L'importance relative de ces deux forces est mesurée par le nombre de Bond  $Bo = \frac{\rho g e^2}{\gamma}$ , qui fait intervenir la tension de surface  $\gamma$  du liquide. Ce nombre sans dimension constitue, avec le nombre de Reynolds, un deuxième critère de ségrégation des expériences d'entraînement. Il vaut dans notre exemple 0,1, à la limite entre les deux régimes.

Cette technique de dépôt par trempage est utilisée dans de nombreux procédés industriels, et notamment pour déposer différents traitements sur les verres ophtalmiques[30, 47]. Les vitesses d'entraînement sont alors de l'ordre de 1 cm/s avec des solutions aqueuses, pour

---

1. et sous peu repeinte  
2. à vitesse constante...



FIGURE 1 – Un spécialiste de l’entraînement en action.

des épaisseurs déposées de l’ordre du micromètre. Le nombre de Reynolds et le nombre de Bond sont tous deux très faibles ( $10^{-2}$  et  $10^{-7}$ , respectivement), et le dépôt est déterminé par un équilibre entre forces visqueuses et forces capillaires.

L’expérience qui consiste à lancer une sphère dans un liquide, et à s’intéresser à l’éventuelle quantité d’air entraînée, peut être analysée de la même manière. Anne le Goff[34, 105] et Duclaux et collaborateurs[24] ont étudié les cavités d’air créées par l’impact de billes centimétriques dans de l’eau, à des vitesses de l’ordre de 1 m/s (figure 2). Le nombre de Reynolds caractéristique de l’expérience est grand ( $10^4$ ) tandis que le nombre de Bond basé sur le rayon de la sphère vaut 10. Cette analyse permet de comprendre qualitativement pourquoi la taille des cavités entraînées résulte d’un équilibre entre inertie et gravité. Aristoff et Bush[2] ont étudié le même dispositif, en utilisant des billes millimétriques : le nombre de Bond vaut alors 0,1, et la forme de la cavité est gouvernée par la tension de surface.

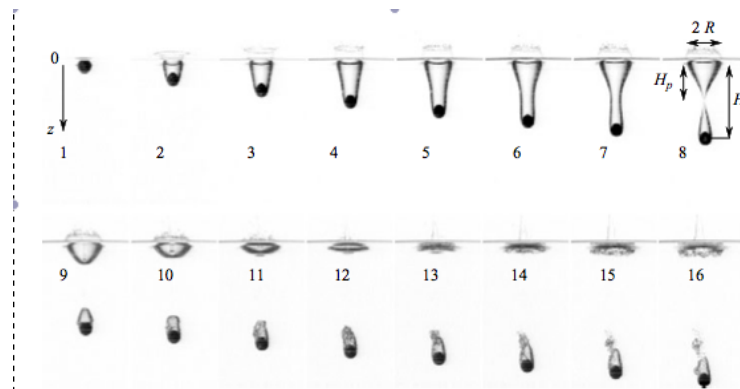


FIGURE 2 – Chronophotographie de l’impacte d’une sphère de 12 mm de rayon sur un bain d’eau, à une vitesse  $V = 2,1$  m/s. L’intervalle entre deux images est de 9,3 ms. Image tirée de [24].

Une configuration analogue a été étudiée par Lorenceau et collaborateurs [55] (figure 3) : un cylindre plongeant dans un bain d’huile silicone ( $\eta \approx 1$  Pa · s) à des vitesses de l’ordre de 10 cm/s déforme l’interface. La taille caractéristique de cette déformation, centimétrique, résulte d’un équilibre entre viscosité et gravité : le nombre de Reynolds est faible (1) alors

que le nombre de Bond est important (10). La déformation présente une singularité, dont la taille caractéristique ( $100 \mu\text{m}$ ) dépend des effets visqueux et capillaires : le nombre de Bond est faible à cette échelle.

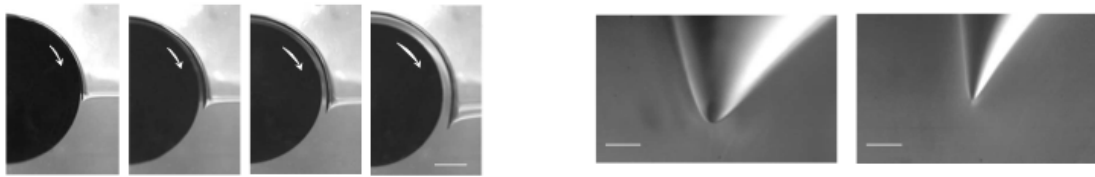


FIGURE 3 – À gauche : déformation de l'interface d'un bain d'huile silicone de viscosité  $\eta = 0,97 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  pour différentes vitesses de cylindre (6 cm/s, 10 cm/s, 17 cm/s, et 30 cm/s). La barre dans la dernière image représente 1 cm. À droite : photographie de la singularité (la barre indique  $200 \mu\text{m}$ ), pour des vitesses  $V = 14 \text{ cm/s}$  et  $V = 22 \text{ cm/s}$ . Image tirée de [55].

Dans cette thèse on étudie divers phénomènes d'entraînements visqueux. Nous nous intéressons dans un premier temps au dépôt par trempage de films fins ( $e < 100 \mu\text{m}$ ), gouverné par la viscosité et la capillarité ( $Re \ll 1$  et  $Bo \ll 1$ ). Nous présenterons au chapitre 1 l'état de l'art sur la question. Toujours dans ce même régime, nous étudions au chapitre 2 l'effet de la rugosité de la surface sur la quantité de liquide déposée. Il est question dans le chapitre 3 du drainage du film sous l'effet de la gravité une fois qu'il a été déposé.

Dans une deuxième partie, nous présentons deux configurations d'entraînement dans lesquelles l'épaisseur déposée est fixée par une membrane flexible (chapitre 4) ou rigide (chapitre 5). Ces configurations sont un peu à part dans la classification que nous avons présentée : si le nombre de Reynolds y est toujours négligeable, le nombre de Bond n'a plus vraiment de sens. En effet, la force résistant à l'entraînement n'est ni gravitaire ni capillaire, mais déterminée par l'élasticité de la membrane ou une force extérieure (cas de la membrane rigide).

Enfin, le chapitre 6 illustre l'entraînement par un cylindre d'un filament visqueux, caractérisé par un petit nombre de Reynolds et un grand nombre de Bond. Le drainage de tels filaments, qu'ils soient verticaux ou horizontaux (chapitre 7), explore toute une gamme de nombres de Bond, et exhibe des comportements gravitaires et capillaires inattendus.



Première partie  
Dépôt libre de fluide



# Chapitre 1

## Dépôt de fluide sur une surface lisse

*La lumière de la raison, tu la laisses à la vieille théologie. Aujourd'hui la scientia veut la preuve de l'expérientia. Et la preuve de l'expérientia c'est que moi ici je suis.*

Umberto ECO, *L'île du jour d'avant*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Expériences de dépôt</b>	<b>7</b>
1.1.1	Régime étudié	7
1.1.2	Dispositif expérimental	8
1.1.3	Mesure de l'épaisseur de liquide par réflectométrie	9
1.1.4	Épaisseur déposée	11
<b>1.2</b>	<b>Théorie de Landau Levich Derjaguin</b>	<b>11</b>
1.2.1	Les forces en présence	11
1.2.2	Ménisque statique	12
1.2.3	Loi d'échelle pour l'épaisseur déposée	14
1.2.4	Théorie de LLD	16
1.2.5	Précision du montage expérimental	18
<b>1.3</b>	<b>Anomalies et corrections à la loi de Landau</b>	<b>18</b>
1.3.1	Effet de la gravité	18
1.3.2	Effet de l'inertie	19
1.3.3	Effet des tensioactifs	19
1.3.4	Le paradoxe de l'eau	20
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>

---

## 1.1 Expériences de dépôt

### 1.1.1 Régime étudié

De nombreux procédés industriels requièrent de déposer une épaisseur déterminée de liquide sur une surface solide : dépôt de la couche photosensible sur les pellicules, zincage de plaques d'acier, fabrication de verres de lunettes, etc[47]. Cette épaisseur, comprise entre une fraction de micromètres et une fraction de millimètres, doit être précisément ajustée



que ce soit pour des raisons de coûts, ou parce qu'elle participe à la fonction de l'objet (comme pour les traitements anti-reflets des verres de lunette). Nombre de ces procédés s'appuient sur la méthode de "dip-coating" (littéralement "enduction par trempage"), qui consiste à immerger l'objet à enduire dans un bain du liquide dont on veut le recouvrir, puis à l'en retirer à vitesse constante. Il s'y dépose alors un film de fluide dont l'épaisseur peut être ajustée à l'aide de la vitesse de tirage.

L'avantage principal de cette méthode est sa facilité de mise en oeuvre, qui ne nécessite qu'un système de translation à vitesse constante. L'épaisseur déposée est en effet entièrement déterminée par les propriétés du liquide et la vitesse de tirage. Cette propriété ne va pas sans un inconvénient : lorsque l'épaisseur du film à déposer et le liquide sont fixés, il n'y a qu'une vitesse possible. Modifier cette vitesse, par exemple pour des questions de rendement, nécessite d'utiliser une autre technique de dépôt, telle que celle étudiée aux chapitres 4 et 5.

Il est naturel (et utile...) de se demander quels phénomènes déterminent l'épaisseur du dépôt dans ce régime de faibles épaisseurs. Comment dépend-elle de la vitesse d'extraction du solide ? Des propriétés du liquide ? Dépend-elle de l'état de surface du solide ? Ce chapitre rappelle l'état de l'art sur ces questions et permet de présenter le dispositif expérimental utilisé, puis souligne quelques-unes de ses limites.

### 1.1.2 Dispositif expérimental

Nous avons utilisé au cours de cette thèse une version bien contrôlée du procédé d'enduction par trempage mise au point par Mathilde Reyssat et David Quéré [61]. Le dispositif expérimental correspondant est schématisé sur la figure 1.1.

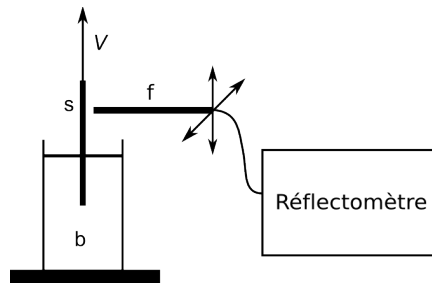


FIGURE 1.1 – Schéma de l'expérience de dip-coating. Le solide à enduire ( $s$ ), est fixe, et c'est le bain de liquide ( $b$ ) qui se déplace à la vitesse  $V$  ( $1 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1} < V < 1 \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ). L'épaisseur de liquide déposée est mesurée par interférométrie, à l'aide de la fibre optique ( $f$ ).

La surface ( $S$ ) à enduire est fixe. C'est le bain de liquide qui se déplace verticalement (sur une distance de 13 cm), mû par un moteur pas à pas via une vis micrométrique. Le moteur permet d'atteindre des vitesses d'extraction ( $V$ ) variant de  $1 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $1 \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'épaisseur de liquide déposée est mesurée par interférométrie à l'aide de la fibre optique ( $f$ ), le principe de cette mesure est présenté au paragraphe suivant. La fibre peut elle-même être déplacée verticalement et latéralement (parallèlement à la surface enduite) sur une course d'environ 4 cm à l'aide de deux moteurs pas à pas entraînant deux platines micrométriques, ce qui permet d'effectuer une "cartographie" de la surface.

Nous avons choisi d'utiliser des huiles silicones de différentes viscosités ( $2,7 \text{mPa} \cdot \text{s} < \eta < 1 \text{Pa} \cdot \text{s}$ ) pour enduire les surfaces étudiées. Le premier avantage de ces huiles réside

dans le fait qu'elles mouillent totalement la plupart des solides, et notamment le silicium sur lequel nous avons effectué l'essentiel de nos expériences. Elles se comportent de plus comme des liquides newtoniens jusqu'à des taux de déformation de l'ordre de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ , bien supérieurs à ceux rencontrés dans nos expériences (au maximum de  $10 \text{ s}^{-1}$ ), et sont peu volatiles aux températures usuelles. Enfin, leurs autres propriétés physiques (notamment leur masse volumique  $\rho$  et leur tension de surface  $\gamma$ ) varient peu dans la gamme de viscosités étudiées :  $890 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} < \rho < 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $18,9 \text{ mN/m} < \gamma < 21,1 \text{ mN/m}$  [84].

### 1.1.3 Mesure de l'épaisseur de liquide par réflectométrie

#### Principe de la mesure

Nous avons vu que l'épaisseur de liquide attendue est inférieure à  $100 \text{ }\mu\text{m}$ , ce qui rend sa mesure parfaitement adaptée aux techniques de réflectométrie[95][46]. Le principe de la mesure est illustré par la figure 1.2, et s'appuie sur le fait que le film liquide agit comme un filtre interférentiel. Schématiquement, un faisceau de lumière blanche est pointé sur l'échantillon : une partie de la lumière se réfléchit sur la surface du film liquide, tandis qu'une autre fraction de la lumière se réfléchit sur le substrat. Notant  $e_d$  l'épaisseur de liquide, la différence de chemin optique entre ces deux contributions est égal à  $\delta = 2ne_d$  où  $n$  est l'indice optique du liquide. Il y a des interférences destructives si  $\delta = (2p + 1)\lambda/2$ ,  $p$  étant un entier quelconque. Certaines longueurs d'ondes  $\lambda_p = 4ne_d/(2p + 1)$  sont donc moins bien réfléchies que d'autre. Plus précisément, on peut montrer que le spectre de la lumière réfléchi (intensité réfléchi vs longueur d'onde) présente des oscillations de la forme  $\cos(4ne_d/\lambda)$ . Connaissant  $n$ , un ajustement du spectre mesuré de l'intensité réfléchi permet donc de déterminer l'épaisseur  $e_d$ .

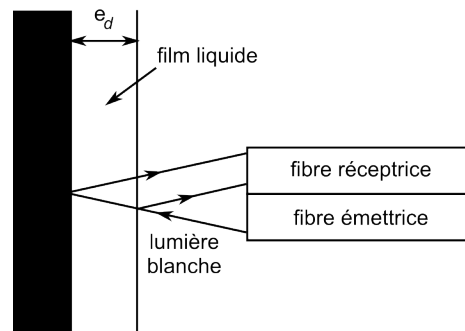


FIGURE 1.2 – Schéma de la sonde du réflectomètre. Un faisceau de lumière blanche est envoyé sur le film liquide. La lumière réfléchi est récupérée à l'aide d'une fibre optique et analysée par un interféromètre.

En particulier, plus la couche de liquide est épaisse, et plus les oscillations du spectre sont resserrées, et nombreuses. Inversement, une couche mince produit peu d'oscillations. Nous avons utilisé un réflectomètre commercial équipé d'une lampe dont le spectre s'étend de  $350 \text{ nm}$  à  $1100 \text{ nm}$ . La mesure est effectuée à l'aide d'une fibre optique, qui éclaire l'échantillon et collecte la lumière réfléchi par deux trous d'environ  $0,5 \text{ mm}$ . La taille de la zone sondée est du même ordre de grandeur que la taille des trous. La lumière collectée est analysée par un spectromètre, puis le spectre obtenu (la figure 1.3 en présente deux exemples) est ajusté à l'aide du logiciel fourni, le paramètre d'ajustement étant justement l'épaisseur de la couche de fluide. Il est à noter que le temps nécessaire à l'ajustement

peut atteindre quasiment une seconde, ce qui peut être gênant si l'on essaie d'effectuer des mesures très rapprochées, pour cartographier par exemple un dépôt.

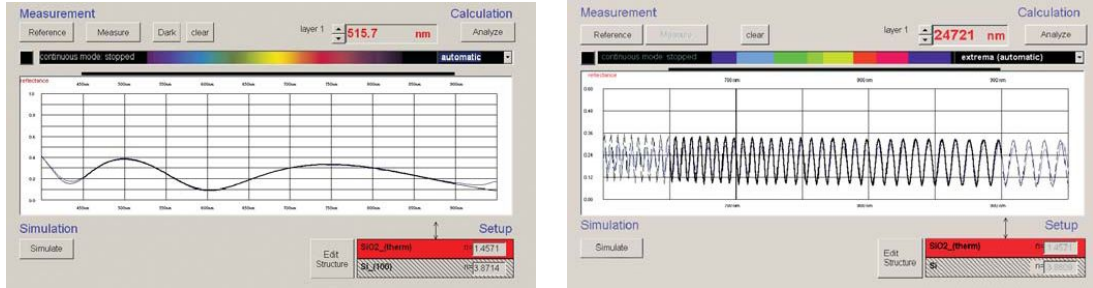


FIGURE 1.3 – Exemple de spectres obtenus : les graphes présentent le coefficient de réflexion de  $r$  l'échantillon en fonction de la longueur d'onde. A gauche :  $e_d = 0,5 \mu\text{m}$ . A droite :  $e_d = 25 \mu\text{m}$ .

### Limites de la mesure

La première limitation de l'appareil est qu'il ne permet d'effectuer de mesure que sur un substrat réfléchissant. Néanmoins, cette contrainte est plus lâche qu'il n'y paraît de prime abord : la mesure est possible (mais un peu plus délicate) sur du verre.

L'épaisseur maximale que peut mesurer l'appareil est donnée par la résolution de son spectromètre : si le film est trop épais, les oscillations du spectre sont si rapides qu'elles ne peuvent être capturées. Or, le spectromètre utilisé a une résolution nominale de 1 nm. Si l'on requiert des oscillations au moins 10 fois plus grandes que cette résolution, on obtient une épaisseur maximal  $e_{max} \approx 100 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à ce qui est annoncé par le fabricant du réflectomètre.

L'épaisseur minimale est donnée par l'étendue du spectre mesuré : si l'épaisseur est trop faible, on n'observe qu'une portion d'oscillation du spectre. L'épaisseur minimale indiquée par le fabricant (à savoir 20 nm, beaucoup plus faible que les épaisseurs minimales que nous mesurerons) correspond à l'observation d'environ 10 % d'une oscillation.

### En pratique

Avant de commencer la mesure proprement dite, il faut déterminer l'intensité réfléchie par le substrat en l'absence de film liquide. Cette mesure est ensuite utilisée pour normaliser l'intensité réfléchie en présence de liquide, afin que le coefficient de réflexion mesuré soit toujours compris entre 0 et 1. Cette première étape permet également de positionner au mieux la fibre optique, afin que l'intensité réfléchie soit la plus grande possible. La distance optimale du bout de la sonde au substrat est d'environ  $1 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ , ce qui est assez faible pour poser quelques problèmes pratiques. En particulier, l'ensemble de l'expérience est monté le plus rigidement possible, et la surface à enduire doit être maintenue parallèle au plan de déplacement de la sonde. De plus, celle-ci doit pouvoir être éloignée de quelques cm pour permettre l'immersion de la surface, puis retournée à sa position d'origine. La sonde doit également être bien parallèle à la surface.

Après le réglage de la position de la sonde, l'intensité reçue par le spectromètre est ajustée en réglant le "temps d'intégration" du réflectomètre, c'est à dire le "temps d'exposition" pendant lequel l'appareil acquiert le signal. Pour des matériaux bien réfléchissants comme

le silicium, ce temps vaut environ 70 ms, mais il peut atteindre 300 ms pour des matériaux moins réfléchissants comme le verre (ce qui peut être gênant si l'on essaie d'effectuer des mesures très rapprochées, pour cartographier par exemple un dépôt). L'appareil est alors bon pour le service...

### 1.1.4 Épaisseur déposée

La figure 1.4 présente l'épaisseur  $e_d$  de liquide entraînée par la surface en fonction de la vitesse de tirage  $V$ . Elle varie de 1  $\mu\text{m}$  à 70  $\mu\text{m}$  dans les expériences présentées ici, réalisées avec différentes huiles silicones ne différant que par leurs viscosités ( $2,7 \text{ mPa}\cdot\text{s} < \eta < 980 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ). Pour un liquide donné,  $e_d$  augmente avec  $V$  selon une loi de puissance d'exposant  $2/3$  dans la gamme d'épaisseurs explorée.  $e_d$  augmente de plus avec la viscosité du liquide. Nous présentons dans la partie qui suit la théorie mise au point par Landau, Levich [52] et Derjaguin [22], qui permet de rendre compte de ces observations.

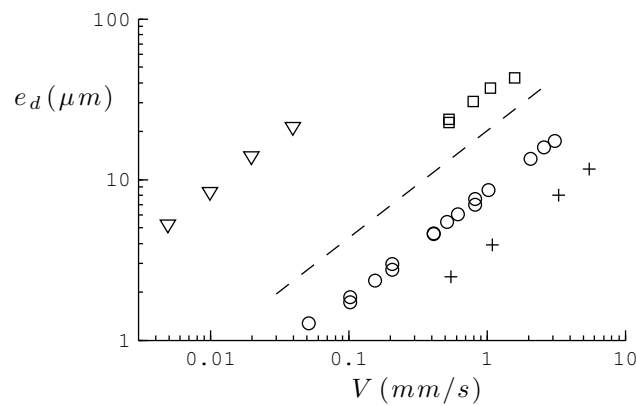


FIGURE 1.4 – Épaisseur  $e_d$  déposée en fonction de la vitesse de tirage  $V$ , pour des huiles de viscosités  $2,7 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  (+),  $9,5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  (o),  $96,5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  (□), et  $980 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  (∇). La courbe tiretée représente une loi de puissance d'exposant  $2/3$ .

## 1.2 Théorie de Landau Levich Derjaguin

### 1.2.1 Les forces en présence

Si l'on se réfère à la figure 1.4, les grandeurs typiques à considérer sont :  $e_d \approx 10 \mu\text{m}$ ,  $V \approx 1 \text{ mm/s}$  et  $\eta \approx 10 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ . Le nombre de Reynolds dans le film étant d'ordre 0,001, l'inertie du fluide est négligeable et on s'attend à ce que les forces visqueuses, associées à la condition de non glissement à la paroi solide, soient à l'origine de l'entraînement du fluide. On peut les estimer (par unité de volume) en loi d'échelle :

$$F_\eta \sim \eta \frac{V}{e_d^2}$$

La difficulté consiste à déterminer le phénomène antagoniste qui limite l'épaisseur de dépôt. On peut en premier lieu penser à la gravité. L'équilibre avec la force visqueuse

fournit une première estimation de l'épaisseur déposée :

$$\eta \frac{V}{e_d^2} \sim \rho g \quad \text{soit} \quad e_d \sim \sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}}$$

Cette prédiction est incompatible avec la variation de  $e_d$  observée, ce qui infirme l'hypothèse avancée. Landau, Levich [52] et Derjaguin [22] (que nous noterons dans la suite LLD) ont montré qu'aux échelles considérées, la force résistante est d'origine capillaire. L'origine de cette force réside dans la déformation imposée par le film de liquide au ménisque statique qui connecte, en l'absence de mouvement, un bain de liquide à une paroi solide, et dont nous précisons ici quelques caractéristiques.

### 1.2.2 Ménisque statique

La tension de surface  $\gamma$  d'un liquide caractérise le coût énergétique de création d'une surface  $S$  interface :  $E = \gamma S$ . En l'absence de tout autre phénomène (gravité en particulier), une quantité donnée de liquide adopte ainsi une forme qui minimise sa surface, et donc son énergie. C'est ce qui explique la forme sphérique des petites gouttes, et les mêmes considérations régissent les formes des films de savon[7]. Lorsque le liquide entre en contact avec le solide, la situation est plus complexe. En fonction de la nature du solide et du liquide, ce dernier peut avoir tendance à s'y étaler, ou au contraire à limiter la zone de contact. On caractérise les propriétés de mouillage par l'angle de contact  $\theta_c$  à l'équilibre entre la surface du liquide et le solide[108]. La situation de mouillage total dans laquelle nous nous plaçons ici correspond à un angle de contact nul. Au contraire, certains couples solide/liquide (notamment de l'eau sur un substrat superhydrophobe[12, 4, 77] ou certaines feuilles[5, 68]) possèdent un angle de contact proche de  $180^\circ$  : des gouttes posées ne s'étalent quasiment pas et restent sous forme sphérique.

Lorsqu'une surface verticale est mise en contact avec un bain de liquide mouillant ou partiellement mouillant ( $0^\circ < \theta_c < 90^\circ$ ), ces effets tendent à faire remonter le liquide le long de la paroi pour satisfaire la condition de mouillage total  $\theta_c = 0$ . Comme l'illustre la figure 1.5, cette ascension de liquide est bien sûr limitée par la gravité, et seul un ménisque de taille millimétrique s'élève du bain. Ce ménisque connecte le bain horizontal à la paroi solide. On peut estimer son extension spatiale  $a$  en écrivant qu'à cette échelle, forces de gravité et de tension de surface se compensent :

$$\begin{aligned} F_g &\sim F_\gamma \\ \rho g a^3 &\sim \gamma a && (\gamma \text{ est une force par unité de longueur}) \\ a &= \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \end{aligned}$$

$a$  est appelée la longueur capillaire du liquide considéré, et vaut quelques millimètres pour les liquides usuels (1,5 mm pour les huiles silicones utilisées dans nos expériences, 2,7 mm pour l'eau). Si l'on veut aller plus loin et déterminer la forme du ménisque on égale, juste sous l'interface liquide/air, la pression de Laplace imposée par la courbure de l'interface et la pression hydrostatique. Il vient alors, avec les notations de la figure 1.5 :

$$P(x) = P_0 - \frac{\gamma}{R_c} = P_0 - \rho g x$$

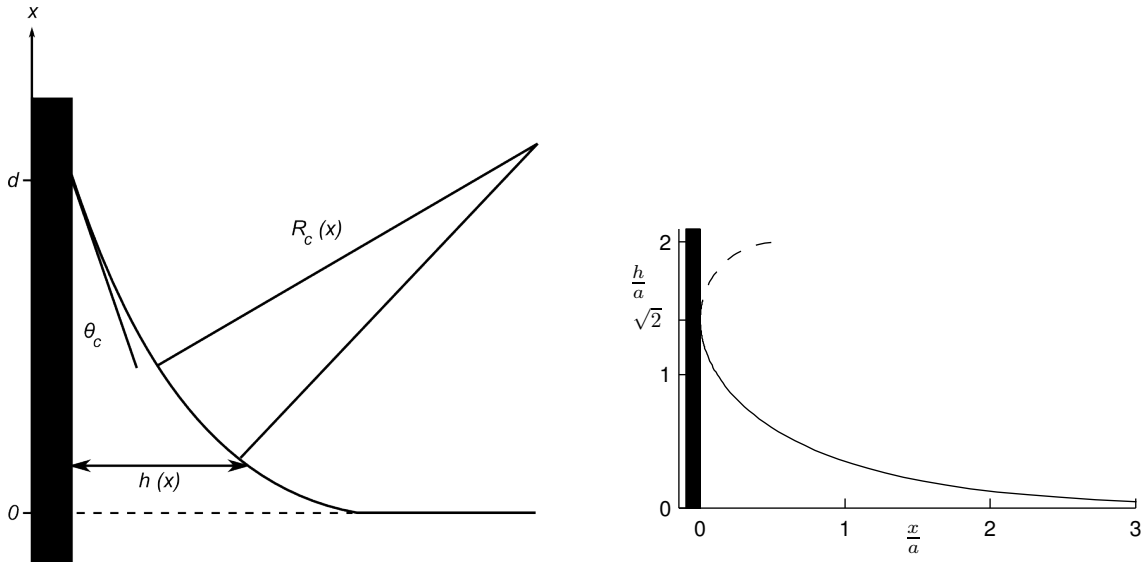


FIGURE 1.5 – Le ménisque statique connecte le bain de liquide horizontal à la surface solide, sur laquelle le liquide arrive avec un angle de contact  $\theta_c$  propre au couple liquide/solide considéré. À droite : profil du ménisque calculé par intégration de l'équation 1.1 (les distances sont adimensionnées par la longueur capillaire  $a$ ). L'angle de contact et l'inclinaison de la paroi sélectionnent la portion de courbe à considérer (représentée en traits pleins pour une paroi verticale en situation de mouillage total).

$R_c(x)$  est le rayon de courbure de l'interface. En l'explicitant en fonction de  $h(x)$ , on obtient l'équation de l'interface (on note, comme dans toute la suite, qu'une grandeur  $h$  est dérivée par rapport à une variable  $x$  en plaçant cette variable en indice :  $\frac{dh}{dx} = h_x$ ) :

$$\frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2} \quad (1.1)$$

Cette équation, couplée aux conditions aux limites  $h(x=0) \rightarrow \infty$  et  $h_x(x=0) \rightarrow +\infty$ , détermine la forme de l'interface (figure 1.5). Notez qu'elle ne dépend pas de l'angle de contact. En effet, ce dernier (avec l'inclinaison de la paroi), en imposant l'inclinaison de l'interface à la ligne de contact, ne fait que sélectionner le portion de courbe à considérer. Elle fait intervenir sous sa forme adimensionnée la longueur capillaire  $a$ , ce qui confirme que celle-ci est la taille caractéristique du ménisque. Plus précisément, en intégrant l'équation 1.1 entre  $x=0$  (niveau du liquide loin de la paroi) et  $x=d$  (ligne de contact liquide/paroi), on peut déterminer la hauteur  $d$  du ménisque statique (on effectue le changement de variable  $u = h_x$ ) pour une paroi verticale en régime mouillant ( $\theta_c = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \int_0^d \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} dx &= \int_{\tan \theta_c}^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \\ &= \left[ \frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}} \right]_{\tan \theta_c}^{\infty} \\ &= 1 - \sin \theta_c \\ &= \frac{d^2}{2a^2} \end{aligned}$$

Le ménisque a donc une hauteur maximale  $d = \sqrt{2}a$  lorsque le liquide mouille totalement la paroi ( $\theta_c = 0$ ), et que celle-ci est verticale. On peut également noter que le rayon de courbure de l'interface est nul loin de la paroi, et atteint  $\sqrt{2}a$  au sommet du ménisque.

### 1.2.3 Loi d'échelle pour l'épaisseur déposée

La forme du ménisque statique que nous avons déterminée au paragraphe précédant minimise l'énergie du système (liquide + solide). C'est la forme pour laquelle la pression de Laplace dans le ménisque compense exactement la gravité. Lorsque l'on tire la surface hors du bain pour y déposer un film d'épaisseur  $e_d$  le ménisque statique est localement perturbé (cf. figure 1.6) : sa forme, et donc le profil de pression, changent. Il en résulte un gradient de pression qui s'oppose, comme nous allons le voir, à l'extraction du fluide.

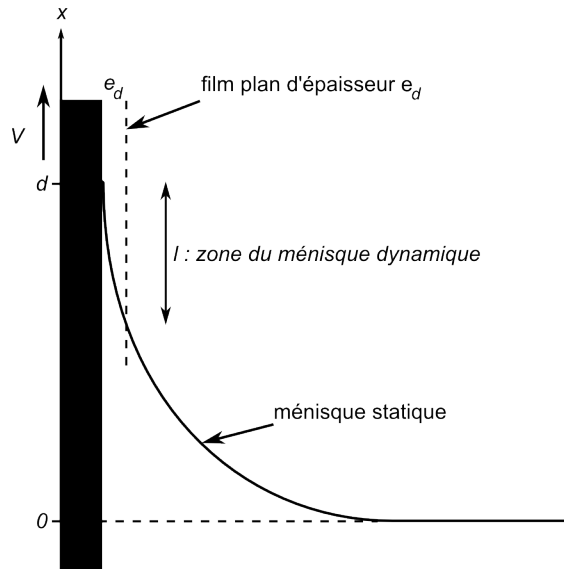


FIGURE 1.6 – Schéma du ménisque statique perturbé.

Pour être plus quantitatif, il faut supposer que le film est fin et ne perturbe le ménisque statique que sur une "petite" région de taille  $l$  localisée près de sa pointe. Cette région, appelée ménisque dynamique, raccorde le ménisque statique au film plan. Or, dans le film plan, la pression est constante et égale à la pression extérieure  $P_0$ . En revanche, le ménisque statique impose une pression  $P_0 - \sqrt{2}\gamma/a$ . Négligeant la gravité, le gradient de pression est alors d'ordre :

$$\frac{dP}{dx} \sim \frac{\Delta P}{l} \sim \frac{\gamma}{al}$$

L'équilibre de ce gradient avec les forces volumiques visqueuses (le nombre de Reynolds est négligeable) s'écrit :

$$\eta \frac{V}{e_d^2} \sim \frac{\gamma}{al} \quad \text{d'où on déduit} \quad e_d \sim \left( \frac{al\eta V}{\gamma} \right)^{1/2}$$

Notez que l'on a négligé la gravité dans ce bilan, ce qui sous entend  $\gamma/al \gg \rho g$ , soit  $l \ll a$  : le ménisque dynamique doit être de taille négligeable devant la taille du ménisque statique.

Il reste à évaluer la taille  $l$  du ménisque dynamique. Pour ce faire, on suppose que le film déposé perturbe le ménisque sur une épaisseur environ égale à  $e_d$  (figure 1.6). Or, dans

le cas de mouillage total qui nous intéresse, l'interface arrive à la ligne de contact avec une tangente nulle ( $\theta_c = 0$ ), et une courbure non nulle égale à  $1/R_c \sim 1/a$ . En première approximation, il vient donc près du point de contact  $h \sim (d-x)^2/a$ . D'où :

$$e_d \sim \frac{l^2}{a} \quad \text{soit} \quad l \sim \sqrt{ae_d}$$

On peut également retrouver ce résultat en écrivant que le ménisque dynamique, d'épaisseur comparable à  $e_d$ , ne peut se raccorder au ménisque statique que si sa courbure est d'ordre  $1/a$  :

$$\frac{e_d}{l^2} \sim \frac{1}{a} \quad \text{soit} \quad l \sim \sqrt{ae_d}$$

Il en résulte une épaisseur de film déposée de l'ordre de :

$$e_d \sim a \left( \frac{\eta V}{\gamma} \right)^{2/3} \sim a Ca^{2/3}$$

On a introduit le nombre capillaire  $Ca = \eta V/\gamma$ , qui compare les effets visqueux aux forces dues à la tension de surface. Cette formule permet d'illustrer les différents moyens de contrôler l'épaisseur déposée.  $e_d$  augmente, toutes choses égales par ailleurs, comme  $(\eta V)^{2/3}$ .  $\eta$  et  $V$  jouent donc des rôles analogues : augmenter  $V$  d'un certain facteur a le même effet qu'augmenter  $\eta$  dans les mêmes proportions. La variation de l'épaisseur avec la tension de surface est moins apparente. En effet, cette dernière intervient à la fois dans le nombre capillaire et dans la longueur capillaire  $a$ .  $e_d$  diminue comme on s'y attend avec  $\gamma$  (la force qui s'oppose à l'entraînement est d'origine capillaire), mais la variation en  $\gamma^{-1/6}$  est très faible. De plus, la tension de surface ne varie que d'un facteur 3 ou 4 pour les liquides usuels, ce qui en fait un paramètre souvent négligeable. Enfin, bien que nous ayons négligé la gravité dans ce problème, celle-ci intervient dans la longueur capillaire, ce qui fait que l'épaisseur varie comme  $(\rho g)^{-1/2}$ .

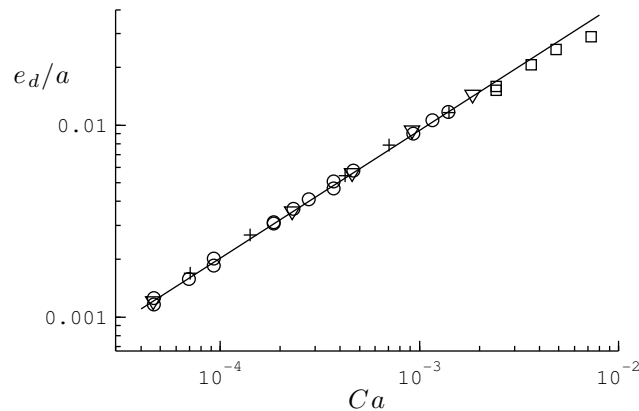


FIGURE 1.7 –  $e_d/a$  en fonction de  $Ca$ . La droite a pour équation  $e_d/a = 0,94 Ca^{2/3}$ . Huiles de viscosités 2,7 mPa·s (+), 9,5 mPa·s (o), 97 mPa·s (□), et 980 mPa·s (∇).

La figure 1.7 présente les mêmes expériences que la figure 1.4, tracées en fonction de  $Ca$ . On constate en premier lieu que la gamme d'épaisseurs explorée correspond à de faibles nombres capillaires ( $10^{-5} < Ca < 10^{-2}$ ). Dans ce régime, les mesures sont compatibles avec la loi proposée. Le coefficient de proportionnalité entre les expériences et la prédiction en



loi d'échelle est très proche de 1, et c'est cette valeur que Landau, Levich et Derjaguin ont calculée.

## 1.2.4 Théorie de LLD

### Equation de la forme du ménisque dynamique

Le raisonnement se fonde sur le découpage en trois "zones" que nous avons introduit précédemment (figure 1.6) : un ménisque statique faiblement perturbé, une région de film plan, et un ménisque dynamique joignant les deux premières. Il consiste à déterminer la forme du ménisque dynamique, puis à raccorder cette région aux deux autres, ce qui détermine en particulier l'épaisseur de dépôt  $e_d$ .

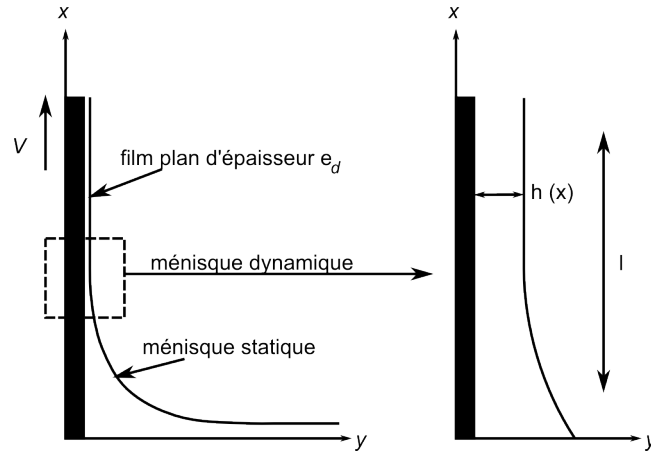


FIGURE 1.8 – Notations utilisées dans l'étude du ménisque dynamique.

Si l'on suppose que l'épaisseur du ménisque dynamique est faible devant son extension spatiale  $l$  (i.e. son interface est quasiment parallèle à la surface de dépôt, soit avec les notations de la figure 1.8  $h_x \ll 1$ ), la vitesse du fluide  $y$  est essentiellement verticale ( $\vec{u} \approx u(x,y)\vec{u}_x$ ), et on peut utiliser l'approximation de lubrification pour la déterminer. De plus, la pression dans le film est alors donnée par la loi de Laplace :  $p = P_0 - \frac{\gamma}{R_c}$ , qui s'écrit lorsque l'épaisseur du film varie lentement :

$$p(x) = P_0 - \gamma h_{xx} \quad \text{soit} \quad p_x = -\gamma h_{xxx}$$

On a alors en régime stationnaire, compte tenu des conditions aux limites de non glissement à la paroi ( $u(y=0) = V$ ), et d'absence de contrainte visqueuse à la surface libre ( $u_y(y=h(x)) = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \eta u_{yy} &= \rho g - \gamma h_{xxx} \\ u(y) &= \frac{\rho g - \gamma h_{xxx}}{\eta} \left( \frac{y^2}{2} - hy \right) + V \end{aligned}$$

Le flux volumique de liquide (par unité de largeur de surface) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} q &= \int_0^h u(y) dy \\ &= \frac{\gamma h_{xxx} - \rho g}{\eta} \frac{h^3}{3} + hV \end{aligned}$$

Ce flux étant constant, on l'évalue dans la région de film plan ( $h = e_d$ ), et on obtient l'équation du troisième degré décrivant le profil du ménisque dynamique :

$$q = -\rho g \frac{e_d^3}{3\eta} + V e_d = \frac{\gamma h_{xxx} - \rho g h^3}{\eta} + hV$$

On adimensionne cette équation en utilisant  $e_d$  comme échelle d'épaisseur ( $Y = h/e_d$ ), et  $L_x = e_d/Ca^{1/3}$  comme échelle selon  $X = x/L_x$ . Il est important de noter que ces deux échelles sont très différentes : l'échelle selon  $x$  est plus grande que l'échelle suivant  $y$  (du moins dans le régime de faible  $Ca$  qui nous intéresse).

$$Y^3 Y_{XXX} = 3(1 - Y) + \frac{e_d^2}{a^2 Ca} (Y^3 - 1) \quad (1.2)$$

Le dernier terme de la précédente équation représente la contribution de la gravité. On peut le négliger si le film est assez mince, précisément si  $e_d^2 \ll a^2 Ca$ . Or nous avons vu que  $e_d \approx a Ca^{2/3}$ , la précédente condition se réécrit donc  $Ca^{1/3} \ll 1$ . L'hypothèse de lubrification est alors également validée :  $h \ll l \Leftrightarrow e_d \ll L_x \Leftrightarrow e_d \ll e_d Ca^{-1/3} \Leftrightarrow Ca^{1/3} \ll 1$ . Dans ce cas, la forme du ménisque dynamique est régie par :

$$Y_{XXX} = 3 \frac{1 - Y}{Y^3} \quad (1.3)$$

### Raccord avec le film plan

Le raccord du ménisque dynamique avec la région de film plan fournit les conditions aux limites nécessaires à l'intégration de l'équation 1.3 :  $Y(+\infty) \rightarrow 1$ ,  $Y_X(+\infty) \rightarrow 0$ ,  $Y_{XX}(+\infty) \rightarrow 0$ .

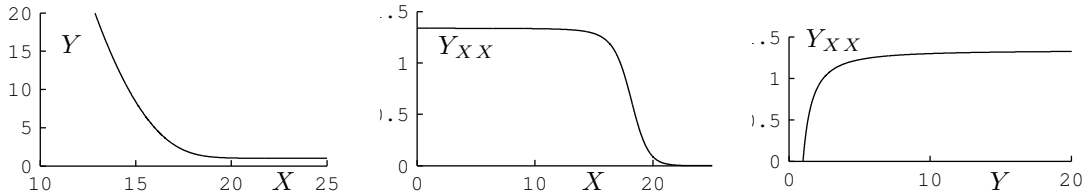


FIGURE 1.9 – Profil du ménisque dynamique, obtenu par intégration numérique de l'équation 1.3. A gauche : profil adimensionné du ménisque dynamique  $Y$  en fonction de  $X$ . Au centre : dérivée seconde du profil  $Y_{XX}$  en fonction de  $X$ . A droite :  $Y_{XX}$  en fonction de  $Y$ .  $Y_{XX}$  atteint son asymptote pour  $Y \approx 10$ .

La figure 1.9 présente le résultat de cette intégration. Le point important est que la courbure du profil tend vers une constante (1,34) lorsque son épaisseur augmente, comme attendu au vu de l'équation 1.3 ( $Y_{XXX} \xrightarrow{Y \rightarrow +\infty} 0$ ).

### Formule de LLD

Landau, Levich et Derjaguin ont alors proposé d'égaliser la courbure du ménisque dynamique en  $X = -\infty$  avec la courbure  $C$  au sommet du ménisque statique :

$$(C)_{h \rightarrow 0}^{\text{ménisque statique}} = \left( \frac{d^2 h}{dx^2} \right)_{h \rightarrow +\infty}^{\text{ménisque dynamique}}$$

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{Ca^{2/3}}{e_d} \left( \frac{d^2 Y}{dX^2} \right)_{Y \rightarrow +\infty} = 1,34 \frac{Ca^{2/3}}{e_d}$$

On en déduit la loi de Landau-Levich-Derjaguin qui prédit l'épaisseur de liquide déposée en fonction des différents paramètres :

$$e_d = 0,94 a Ca^{2/3} \quad (1.4)$$

La figure 1.7 nous permet de vérifier que la théorie de LLD décrit correctement (sans paramètre ajustable) les expériences de dépôt dans la gamme de nombres capillaires explorée, qui correspond à des épaisseurs déposées de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ . La légère déviation que l'on observe sur les plus grandes épaisseurs correspond au début de l'apparition de l'effet de la gravité. Dans la suite de cette étude, nous nous placerons toujours dans le régime où on peut la négliger.

### 1.2.5 Précision du montage expérimental

Les expériences de dépôt sur plaque lisse présentées sont un moyen de valider notre système expérimental, et en particulier de déterminer sa précision. La figure 1.10 présente l'écart des mesures à la loi de LLD 1.4. Les résidus, normalisés par l'épaisseur totale, sont dispersés dans une bande  $\pm 0,05$ . Cela confirme d'une part nos conclusions, et nous permet d'autre part d'estimer la précision de notre expérience à  $\pm 5\%$ . C'est cette valeur que nous choisissons pour le tracé des barres d'erreurs.

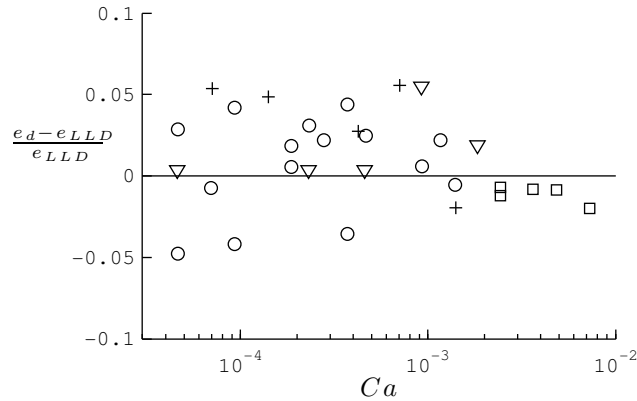


FIGURE 1.10 – Écart normalisé des mesures à la loi de LLD, pour les données de la figure 1.7.

## 1.3 Anomalies et corrections à la loi de Landau

### 1.3.1 Effet de la gravité

Si la théorie de LLD prédit correctement l'épaisseur de liquide dans nos expériences, elle n'est valable que sous certaines conditions. Comme nous l'avons vu, elle ne décrit pas les films épais, pour lesquels la force de gravité devient prépondérante. Nous déjà déterminé

(au début de la partie 1.2) une loi d'échelle pour l'épaisseur déposée lorsque les forces visqueuses sont équilibrées par la gravité[22] :

$$e_d \approx \sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}} = a Ca^{1/2} \quad (1.5)$$

White et Tallmadge [102] ont proposé en 1964 une expression analytique de l'épaisseur de liquide déposée tenant compte de la gravité. La principale difficulté réside dans le fait que la courbure du ménisque dynamique ne tend plus vers une constante lorsque  $X \rightarrow -\infty$  (dans l'équation 1.2,  $Y_{XXX}$  ne tend pas vers 0 à grand  $Y$ ) : on ne peut plus le raccorder directement au ménisque statique. White et Tallmadge ont alors déterminé la courbure au raccord en linéarisant l'équation 1.2, obtenant une épaisseur :

$$e_d = 0,94 a \left( Ca - \frac{e_d^2}{a^2} \right)^{2/3}$$

On retrouve bien la loi de LLD lorsque  $e_d \ll a^2$ , et la loi 1.5 attendue pour les grandes épaisseurs. Cette loi est de plus compatible avec les expériences de Morey [67] et Van Rossum [99], jusqu'à des nombres capillaires proches de 2. Il est néanmoins à noter que Spiers, Subbaraman et Wilkinson ([91]) ont proposé en 1974 une théorie un peu différente de White et Tallmadge (mais fondée sur les mêmes phénomènes), qui décrit au moins aussi bien les résultats expérimentaux.

### 1.3.2 Effet de l'inertie

Le dépôt à vitesse d'entraînement élevée pose également la question de l'approximation de bas Reynolds qui a été faite. Pour estimer l'éventuelle importance d'effets inertiels, on peut calculer le nombre capillaire pour lequel le nombre de Reynolds est d'ordre 1. Supposant que l'épaisseur de film est donnée par la loi de LLD 1.4, il vient :

$$Re \sim \frac{\rho V e_d}{\eta} \sim \frac{\rho V a Ca^{2/3}}{\eta} \sim \sqrt{\frac{\rho \gamma^3}{g}} \frac{1}{\eta^2} Ca^{5/3}$$

Pour une huile silicone de 20 mPa · s de viscosité, couramment utilisée dans nos expériences, la vitesse d'entraînement correspondant à  $Re \approx 1$  vaut environ 8 cm/s, et le film liquide correspondant a une épaisseur de l'ordre de 300  $\mu\text{m}$ . Ces valeurs sont environ dix fois supérieures aux capacités de l'expérience, ce qui nous autorise à négliger l'inertie. Pour de l'eau, ces quantités sont nettement plus faibles (respectivement 5 cm/s et 30  $\mu\text{m}$ ), bien que la vitesse limite reste supérieure à la vitesse maximale du montage.

Néanmoins, ces régimes inertiels sont atteints dans de nombreux procédés de la vie courante. Certains auteurs[88, 29] ont proposé des théories permettant de rendre compte de ces effets. Une étude expérimentale de ces phénomènes a été réalisée par De Ryck et Quéré[82] dans une configuration un peu différente d'enduction de fibres.

### 1.3.3 Effet des tensioactifs

La loi de Landau n'est valable que pour des liquides newtoniens "simples". En particulier, la présence de tensioactifs dans la solution augmente l'épaisseur déposée (voir en particulier Carroll et Lucassen [13], Krechetnikov et Homsy [51], et [50, 72, 83]). On peut

comprendre cet effet en remarquant que le dépôt d'un film liquide impose une déformation de l'interface eau/air et dilate la distribution des tensioactifs en surface et en solution (cf. figure 1.11). Il se crée alors un gradient de concentration en surfactants dans le ménisque dynamique, positif du film vers le bain. On s'attend donc à un gradient de tension de surface qui entraîne du liquide du bain vers le film, et épaissit donc ce dernier.

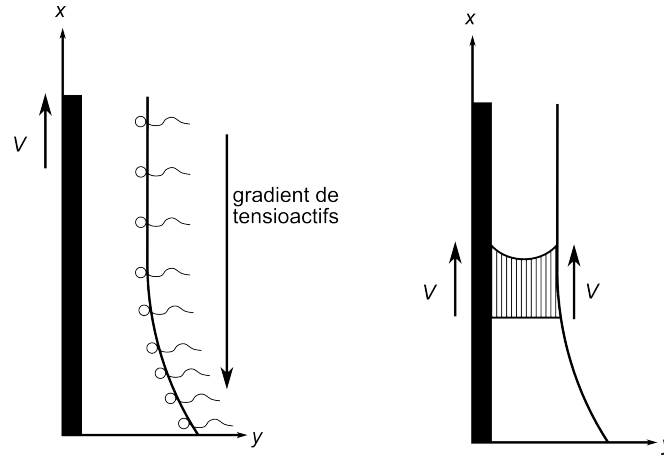


FIGURE 1.11 – Le dépôt d'un film liquide crée un gradient de concentration en tensioactifs dans le ménisque dynamique, qui induit un gradient de tension de surface.

Une description précise du phénomène nécessite d'établir un bilan détaillé de la répartition des tensioactifs, et de leur diffusion. Carroll et Lucassen ont néanmoins estimé l'effet maximal des tensioactifs en supposant que l'interface se comporte alors comme un mur rigide. Ceci se traduit dans le ménisque dynamique par une vitesse  $V$  à l'interface (ce qui remplace la condition de contrainte nulle de la théorie de LLD). Le flux s'écrit alors, en négligeant la gravité :

$$q = Ve_d = \frac{\gamma h_{xxx}}{\eta} \frac{h^3}{12} + hV$$

En remplaçant  $V$  par  $4V$ , on retrouve la même équation que dans le cas de LLD (équation 1.2.4), d'où on déduit que :

$$e_d = 4^{2/3} e_{LLD} = 2,52 e_{LLD} = 2,4 a Ca^{2/3}$$

Les surfactants épaississent donc le film d'un facteur au plus égal à 2,4.

### 1.3.4 Le paradoxe de l'eau

Parfois, enfin, la loi de LLD n'est pas bien vérifiée sans que l'on sache pourquoi. C'est le cas lorsque l'on dépose par exemple de l'eau sur une lame de microscope en verre. L'épaisseur que l'on obtient est systématiquement supérieure à la loi de LLD, et dispersée dans une bande de 1,7 à 2,4 fois supérieure cette loi (figure 1.12). Ce comportement a été relevé dès les premières expériences contrôlées de dépôt, qui ont été réalisées une configuration un peu différente de la nôtre de vidange d'un capillaire [37, 103, 13, 14, 62, 8].

Cette déviation pourrait être un effet de mouillage, vu qu'il est difficile de rendre une surface de verre parfaitement hydrophile. Or, des travaux récents de Snoeijer et collaborateurs [86, 87] semblent suggérer qu'un angle de contact non nul peut modifier l'épaisseur

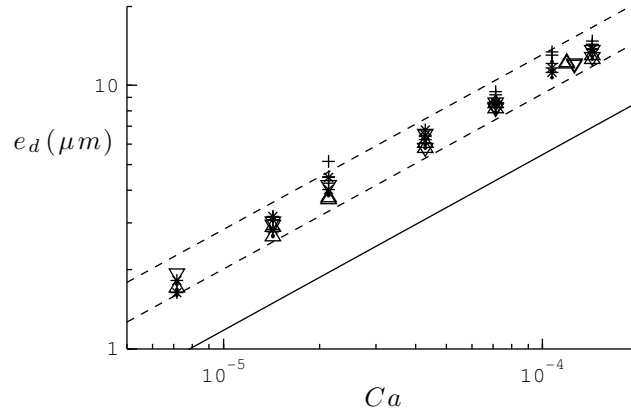


FIGURE 1.12 – Expériences de "dip-coating" réalisées avec de l'eau sur une lame de verre. Les symboles correspondent à différents traitements de la lame de microscope : neuve (●), nettoyée à l'acétone (+), polie à l'aide d'une solution d'oxyde de Cérium (Δ), nettoyée au mélange "piranha" (∇). La droite en trait plein représente la loi de LLD, et les tirets une épaisseur supérieure d'un facteur 1,7 et 2,4 à cette loi.

déposée. Nous avons testé différents traitements pour rendre la lame hydrophile : traitement hydrophile (inconnu) présent d'origine sur les lames de microscope neuves, nettoyage à l'acétone, nettoyage à la solution "piranha" (mélange d'acide sulfurique et de peroxyde d'hydrogène), polissage avec une solution à 20% en masse d'oxyde de Cérium. Bien que nous n'ayons pu effectuer de mesure d'angle de contact, ces traitements semblent plus ou moins efficaces (le meilleur rapport facilité d'utilisation / efficacité revenant au polissage) : certains démouillent par exemple plus rapidement que d'autres. Nous n'avons pas observé de corrélation entre l'épaisseur déposée et le traitement effectué, ce qui semble infirmer l'hypothèse d'un simple effet de mouillage.

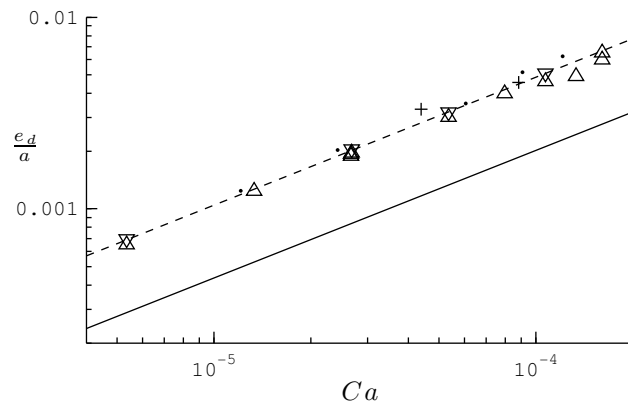


FIGURE 1.13 – Expériences de dépôt pour différents couples liquide/solide : mélange eau-glycérol à 60% en masse de glycérol ( $\eta = 8,1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ,  $\gamma = 67 \text{ mN/m}$ ) sur lame de microscope neuve (●), dodécane ( $\eta = 1,35 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ,  $\gamma = 25 \text{ mN/m}$ ) sur lame de microscope neuve (Δ) et sur wafer en Silicium (∇), éthylèneglycol ( $\eta = 1,1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ,  $\gamma = 48 \text{ mN/m}$ ) sur lame de microscope polie (+). La droite en trait plein représente la loi de LLD, et les tirets une épaisseur supérieure d'un facteur 2,4 à cette loi.

Des impuretés adsorbées sur la surface enduite ou le liquide, si elles sont tensioactives, pourraient modifier l'épaisseur déposée. La déviation maximale observée est cohérente avec

la prédiction du paragraphe précédent. Une autre particularité de l'eau est qu'elle s'évapore à température ambiante. On peut imaginer que cette évaporation crée des gradients de température dans le film, donc des gradients de tension de surface. On ne peut pas véritablement confirmer ou infirmer ces hypothèses, mais des expériences réalisées avec différents liquides (figure 1.13) dont la tension de surface et les propriétés thermodynamiques diffèrent de celles de l'eau présentent également une déviation à la loi de LLD.

## 1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un dispositif expérimental permettant de reproduire de manière contrôlée le procédé d'enduction par trempage. Lorsque l'épaisseur de liquide déposée est faible (inférieure à  $100\ \mu\text{m}$  pour les liquides utilisés dans cette thèse), la théorie développée dans les années quarante par Landau, Levich et Derjaguin prédit convenablement l'épaisseur de liquide déposée. Cette théorie cesse néanmoins d'être valable lorsque l'épaisseur du film devient trop importante, ou que l'on s'intéresse à des liquides complexes. Nous présentons dans le chapitre qui suit une autre façon d'échapper à cette loi, qui consiste à enduire des surfaces rugueuses et conduit à des lois de dépôt originales.

# Chapitre 2

## Entraînement texturé

*Je suis pour les titres longs. Si À la recherche du temps perdu s'était appelé simplement Albertine, ce serait moins bon.*

Michel AUDIARD

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Un système modèle</b>	<b>23</b>
2.1.1	Motivations	23
2.1.2	Des surfaces à la rugosité bien contrôlée	24
<b>2.2</b>	<b>Expériences de dépôt</b>	<b>25</b>
2.2.1	Effet de la viscosité du liquide	25
2.2.2	Deux régimes extrêmes de dépôt	26
2.2.3	Influence du pas du réseau $p$	27
<b>2.3</b>	<b>Modèle à deux couches pour l'enduction de surfaces texturées</b>	<b>28</b>
2.3.1	Caractéristiques du modèle	28
2.3.2	Adaptation de la théorie de LLD	30
2.3.3	Forme du ménisque dynamique	31
2.3.4	Détermination de l'épaisseur libre entraînée	33
<b>2.4</b>	<b>Confrontation du modèle aux l'expérience</b>	<b>34</b>
2.4.1	$\alpha$ comme paramètre d'ajustement	34
2.4.2	Accroissement de viscosité et géométrie de la surface	35
<b>2.5</b>	<b>Importance de l'écoulement dans la texture</b>	<b>35</b>
2.5.1	Glissement entre couches	36
2.5.2	Écoulement dans la texture	37
<b>2.6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>39</b>

---

## 2.1 Un système modèle

### 2.1.1 Motivations

Nous avons vu que l'épaisseur de liquide déposée ( $e_d$ ) par "dip-coating" sur une surface lisse suit, dans le régime des films minces ( $e_d < 100 \mu\text{m}$ ), la loi dite de Landau, Levich et Derjaguin (LLD) 1.4 :



$$e_d = 0,94 a Ca^{2/3}$$

Nous avons également mentionné que la loi de dépôt peut être modifiée, notamment lorsque le liquide déposé n'est pas Newtonien, ou qu'on lui ajoute des tensioactifs. Les propriétés du solide enduit peuvent également changer cette loi, et c'est ce que nous étudions dans ce chapitre.

Chen [14] et Krechetnikov et Homsy [51] ont montré expérimentalement que le film déposé sur un solide rugueux est toujours plus épais qu'attendu pour une surface lisse. Chen, en mesurant l'épaisseur du film déposé lors de la vidange d'un capillaire (dans la configuration dite "de Bretherton" [8]), a en particulier exhibé un régime à bas nombre capillaire dans lequel cette épaisseur est indépendante de la vitesse de vidange. Il a attribué cet effet à la présence de cannelures à la surface du capillaire : l'épaisseur minimale mesurée à bas  $Ca$  est égale à la taille de ces motifs.

Krechetnikov et Homsy ont enduit par trempage des surfaces métalliques préalablement poncées, la rugosité résultante ayant une taille caractéristique de  $0,1 \mu\text{m}$  à  $1,5 \mu\text{m}$ . Ils n'ont pu observer le régime d'épaisseur constante anticipé (probablement parce que l'échelle de la rugosité était trop faible), mais ont néanmoins observé un accroissement significatif de la taille du film entraîné, jusqu'à des épaisseurs d'environ  $100 \mu\text{m}$ .

De nombreux solides usuels (notamment les métaux usinés) présentant une rugosité à l'échelle du micromètre ou de la dizaine de micromètre (du même ordre de grandeur donc que la plupart des traitements déposés par trempage), il nous a paru intéressant d'étudier un peu plus précisément l'effet de la rugosité sur l'entraînement de liquide. On se demande en particulier si la loi de dépôt est qualitativement modifiée par l'introduction d'une nouvelle échelle de longueur (l'échelle de la rugosité) dans le problème, et le cas échéant, jusqu'à quelle épaisseur de film la rugosité se fait sentir.

### 2.1.2 Des surfaces à la rugosité bien contrôlée

Pour répondre à ces questions, nous avons utilisé le dispositif décrit dans le chapitre précédent (dans la partie 1.1.2, page 8), avec des huiles silicones de viscosités variant de  $19 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  à  $340 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  qui mouillent totalement les surfaces en silicium étudiées. Nous nous sommes toujours limités au régime de film mince  $e_d < 100 \mu\text{m}$ .

#### Trois paramètres géométriques

Nous avons choisi d'utiliser des surfaces texturées modèles dont un exemplaire est représentées sur la figure 2.1. Ces surfaces ont été fabriquées par Mathilde Reyssat au cours de sa thèse [11, 79]. Il s'agit de surfaces en silicium hérissées d'une forêt de piliers placés sur un réseau carré de pas  $p$ . La prouesse technologique a consisté à graver des piliers droits de très grand rapport d'aspect.

En effet, sur toutes les surfaces étudiées, le rayon des structures  $b$  est quasiment constant, et vaut  $1,25 \mu\text{m} \pm 0,25 \mu\text{m}$ , alors que leur taille  $h_p$  varie de  $1 \mu\text{m}$  à  $35 \mu\text{m}$ . Le pas du réseau  $p$  peut être varié indépendamment de  $h_p$  : dans cette étude nous utilisons principalement des surfaces de pas  $p = 10 \mu\text{m}$  et  $p = 20 \mu\text{m}$ .

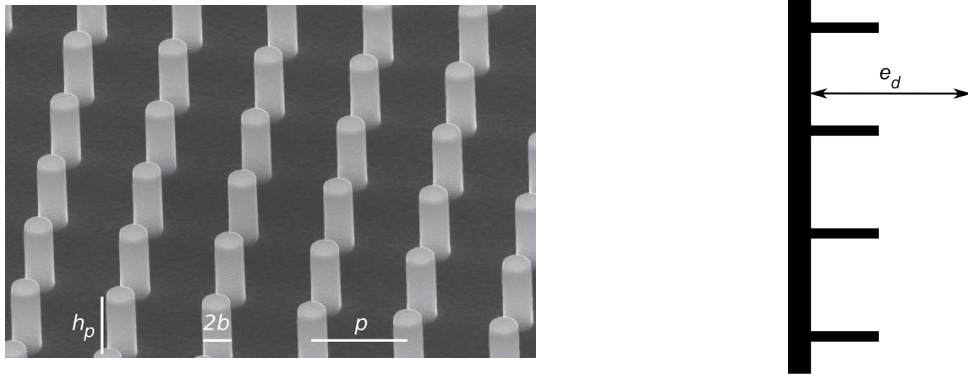


FIGURE 2.1 – Surface texturée observée par microscopie électronique. Les piliers ont une hauteur  $h_p = 10 \mu\text{m}$ , un diamètre  $2b = 3 \mu\text{m}$ , et le pas du réseau est  $p = 10 \mu\text{m}$ .  $h_p$  et  $p$  peuvent être variés indépendamment, alors que  $b$  est quasiment constant d'une surface à l'autre. Le schéma illustre le fait que l'épaisseur est mesurée à partir de la base des piliers.

### Une pléthore d'avantages

Ces surfaces présentent de nombreux avantages pour notre étude. En premier lieu, et d'un point de vue pratique, le silicium, de par ses propriétés réfléchissantes, facilite grandement la mesure par interférométrie. Dans la même veine, la faible fraction surfacique de piliers (seule 5 à 10% de la surface totale est occupée par les plots), rend leur effet sur la mesure indétectable. On mesure alors, comme l'illustre le schéma 2.1, la taille totale du film entraîné, c'est à dire son épaisseur comptée à partir de la base des plots.

De plus,  $h_p$  ( $1 \mu\text{m}$  à  $35 \mu\text{m}$ ) et  $p$  ( $10 \mu\text{m}$ ) sont du même ordre de grandeur que les épaisseurs de dépôt escomptées ( $0,5 \mu\text{m}$  à  $80 \mu\text{m}$ ). On s'attend donc à ce que l'effet de la texture soit important.

## 2.2 Expériences de dépôt

### 2.2.1 Effet de la viscosité du liquide

Nous avons en premier lieu mesuré l'épaisseur  $e_d$  déposée (on rappelle qu'est comptée à partir de la base des piliers) sur une surface texturée ( $p = 10 \mu\text{m}$  et  $h_p = 15,2 \mu\text{m}$ ) en fonction de la vitesse de tirage  $V$ , pour des huiles silicones de différentes viscosités. Comme attendu par analogie avec le problème de LLD, on observe sur la figure 2.2 que les différentes expériences se superposent lorsque l'on trace  $e_d/a$  en fonction du nombre capillaire  $Ca$ .

Les barres d'erreur représentées sont de  $\pm 5\%$  en  $Ca$ , et en épaisseur mesurée  $e_d$ . Cette valeur provient de l'analyse de l'expérience de dépôt sur plaque lisse (cf. figure 1.10, page 18). La première observation que l'on peut faire est que l'épaisseur déposée est toujours plus importante que sur une plaque lisse. La rugosité semble donc faciliter l'entraînement de fluide.

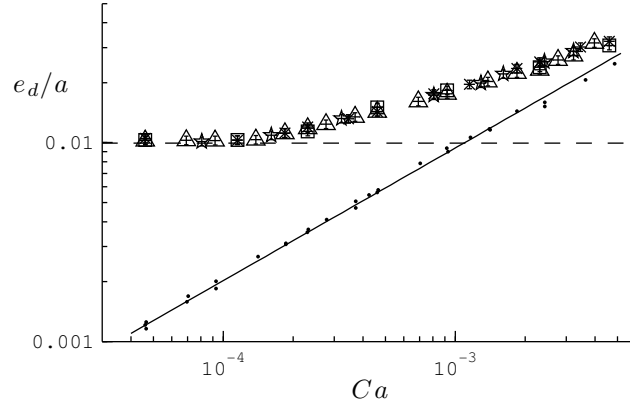


FIGURE 2.2 – Les différents symboles sont les mesures de l'épaisseur normalisée ( $e_d/a$ ) déposée sur une surface texturée ( $h_p = 15 \mu\text{m}$ ,  $p = 10 \mu\text{m}$ ) en fonction du nombre capillaire  $Ca$ . Des huiles de différentes viscosités ont été utilisées :  $\eta = 19 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  ( $\Delta$ ),  $48 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  ( $\times$ ),  $97 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  ( $\square$ ) et  $340 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  ( $\star$ ). Les tirets horizontaux indiquent la hauteur des piliers. La courbe et les points représentent respectivement la loi de LLD, et l'épaisseur mesurée sur une plaque lisse.

## 2.2.2 Deux régimes extrêmes de dépôt

### Régime LLD

Si l'on regarde la figure 2.2 d'un peu plus près, on peut distinguer deux régimes de dépôt. À grand nombre capillaire ( $Ca > 10^{-3}$ ), la loi de dépôt n'est pas très différente de la loi de LLD, bien qu'elle soit environ 30 % supérieure au plus grand nombre capillaire exploré ( $Ca \approx 5 \cdot 10^{-3}$ ) :  $e_d$  augmente avec  $Ca$ , et semble tendre vers la loi LLD. Ceci n'est pas étonnant, vu que  $e_d$  est alors plusieurs fois supérieur à la hauteur  $h_p$  de la rugosité.

### Régime d'épaisseur constante

À faible nombre capillaire ( $Ca < Ca_c \approx 10^{-5}$ ), la loi de dépôt est très différente de la loi attendue sur plaque lisse :  $e_d$  est constante et égale à la hauteur des plots  $h_p$ , indépendamment de la vitesse de tirage ou de la viscosité du fluide. À l'opposé, l'épaisseur déposée sur une plaque plane tend vers zéro avec le nombre capillaire.

On peut vérifier cette propriété en répétant l'expérience de dépôt avec différentes surfaces, en faisant varier à la fois  $h_p$  et  $p$  ( $p = 10 \mu\text{m}$  ou  $p = 20 \mu\text{m}$ ). Pour chaque surface, l'épaisseur minimale déposée  $e_{min}$  a été tracée en fonction de  $h_p$  sur la figure 2.3 ( $h_p$  est mesuré indépendamment à partir des visualisations des surfaces au microscope électronique). Indépendamment du pas  $p$  du réseau de plots, on vérifie que  $e_{min} = h_p$ .

Cette région d'épaisseur constante est intéressante d'un point de vue pratique. En effet, un désavantage des procédés de dépôt de fluide par dip-coating est que l'épaisseur déposée dépend fortement des propriétés du liquide, et notamment de sa viscosité. Ces propriétés n'étant pas forcément très bien contrôlées, il est nécessaire d'étalonner régulièrement le processus, ce qui n'est pas le cas lorsque la courbe de dépôt présente une portion constante.

Dans ce régime d'épaisseur constante, le liquide n'est pas entraîné par viscosité : mouillant totalement le solide, il est tenu au sommet des piliers par capillarité. D'ailleurs, si l'on place un côté de la surface texturée en contact avec le bain (ce qui correspondrait à un "dépôt" à vitesse  $V$  nulle), le liquide imprègne entièrement la forêt de piliers, comme

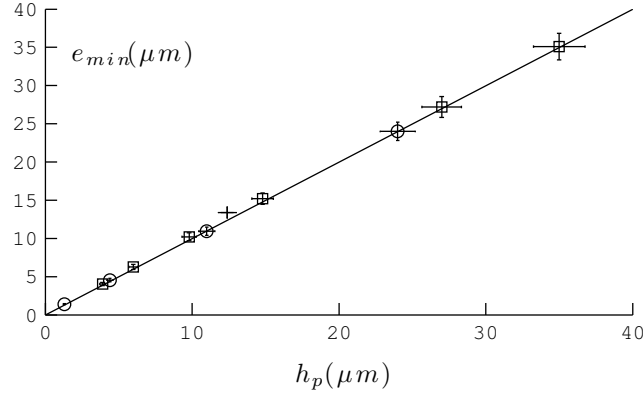


FIGURE 2.3 – Épaisseur minimale de liquide entraînée  $e_{min}$  en fonction de la hauteur des piliers  $h_p$ , pour des surfaces de pas  $p = 10 \mu m$  ( $\square$ ),  $p = 20 \mu m$  ( $\circ$ ) ou  $p = 28 \mu m$  ( $+$ ). La droite représente  $e_{min} = h_p$ .

il le ferait avec un milieu poreux[44]. C'est ce qui explique d'une part que l'épaisseur du film obtenu dans ce régime de bas  $Ca$  soit égale à la hauteur des piliers  $h_p$ , et d'autre part qu'elle ne dépende plus des paramètres dynamiques de l'expérience ( $V$  et  $\eta$ ).

On a négligé l'effet de la gravité dans la discussion précédente. Une façon de tester cette hypothèse consiste à estimer la hauteur maximale  $x_{max}$  que le liquide pourrait atteindre en imprégnant une telle surface texturée placée verticalement. Considérant que  $h_p$  et  $p$  sont du même ordre de grandeur ( $10 \mu m$ ), l'équilibre entre forces capillaires ( $F_\gamma \sim \gamma p$ ) et forces de gravité ( $F_g \sim \rho g x p^2$ ) est assuré pour :

$$x_{max} \sim \frac{a^2}{p} \approx 20 \text{ cm}$$

$x_{max}$  est donc environ dix fois plus grand que les surfaces utilisées, ce qui valide l'hypothèse. Les effets de la gravité sur le film liquide lorsqu'il est "tenu" par les piliers seront discutés un peu plus précisément à la partie 3.4.

### 2.2.3 Influence du pas du réseau $p$

Pour tenter d'appréhender les phénomènes en jeu aux nombres capillaires intermédiaires ( $10^{-4}$  à  $2 \cdot 10^{-3}$  pour l'expérience représentée figure 2.2), nous avons effectué deux expériences de dépôt (figure 2.4) avec des surfaces ayant des hauteurs de plots semblables ( $h_p = 9,8 \mu m$  et  $11 \mu m$ ), mais des pas différents ( $p = 10 \mu m$  et  $20 \mu m$ ).

Comme nous l'avons déjà noté, les deux dépôts ont la même épaisseur ( $h_p$ ) aux faibles vitesses de tirage ( $Ca < 10^{-4}$ ). On remarque de plus qu'en dehors de ce régime, le dépôt pour  $p = 10 \mu m$  ( $\square$ ) est systématiquement supérieur au dépôt pour  $p = 20 \mu m$  ( $\circ$ ). La densité de plots étant inférieure dans ce dernier cas, il n'est pas étonnant que leur effet (l'épaississement du film) soit moins prononcé.

Nous avons également tracé sur la figure 2.4 deux cas limites. Les tirets représentent la limite de très forte densité de plots ( $p \rightarrow b$ ). On s'attend alors à ce que la forêt de piliers se comportent quasiment comme une paroi solide, et donc à déposer un film de LLD au dessus des plots. L'épaisseur déposée est alors égale à  $e_d = h_p + e_{LLD} = h_p + 0,94 aCa^{2/3}$ .

La courbe en trait plein représente la limite inverse, où les plots sont tellement espacés les uns des autres qu'ils ne perturbent pas l'hydrodynamique du dépôt. On suppose

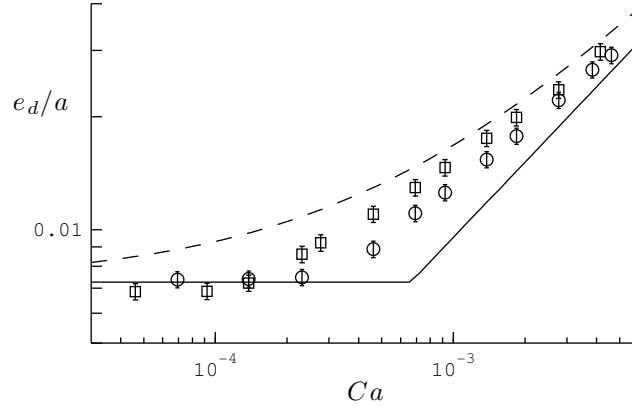


FIGURE 2.4 – Expérience de dépôt sur deux surfaces ne différant que par leur pas.  $\square$  :  $h_p = 9,8 \mu\text{m}$ ,  $p = 10 \mu\text{m}$ .  $\circ$  :  $h_p = 11 \mu\text{m}$ ,  $p = 20 \mu\text{m}$ . Les tirets et la courbe pleine correspondent respectivement à  $e_d = h_p + e_{LLD}$  et  $e_d = \max(e_{LLD}, h_p)$ .

néanmoins qu'ils sont assez proches pour pouvoir "tenir" le film liquide par capillarité, et imposer ainsi une épaisseur déposée minimale égale à  $h_p$  (il n'est a priori pas évident qu'une telle situation existe, nous aborderons le sujet plus en détail dans la partie 3.5.2, page 57). Dans ce cas, on s'attend à mesurer  $e_d = \max(h_p, e_{LLD})$ . Ces deux courbes encadrent comme attendu l'ensemble des expériences réalisées à  $h_p$  fixé.

## 2.3 Modèle à deux couches pour l'enduction de surfaces texturées

### 2.3.1 Caractéristiques du modèle

Pour tenter de décrire qualitativement le phénomène observé, nous avons imaginé un modèle permettant de rendre compte des deux principales caractéristiques imposées par les piliers, à savoir :

- ils imposent une épaisseur de fluide entraînée minimale
- ils favorisent l'entraînement de liquide

#### Couche captive et couche libre

Pour cela, nous avons séparé le liquide entraîné en deux couches (cf. figure 2.5). La première, que nous baptisons "couche captive", est constituée du liquide s'écoulant entre les plots. Elle est donc d'épaisseur  $h_p$  fixe. La seconde ("couche libre") est entraînée par dessus la couche captive, et est donc d'épaisseur variable  $\delta(x)$ . On appelle  $e_l$  l'épaisseur limite de la couche libre loin du ménisque, là où elle est constante : on a donc  $e_d = h_p + e_l$ .

Le coeur du raisonnement consiste à modéliser l'effet des piliers sur la couche captive par une augmentation d'un facteur  $\alpha$  de sa viscosité :  $\eta_p = \alpha\eta$ . On suppose de plus que les piliers n'ont aucune autre influence sur la couche libre.

#### Signification du paramètre $\alpha$

$\alpha$  est ainsi une fonction des paramètres géométriques de la texture ( $h_p$ ,  $p$  et  $b$ ). En particulier, la limite de faible densité de plots  $p \rightarrow \infty$  discutée au paragraphe précédent

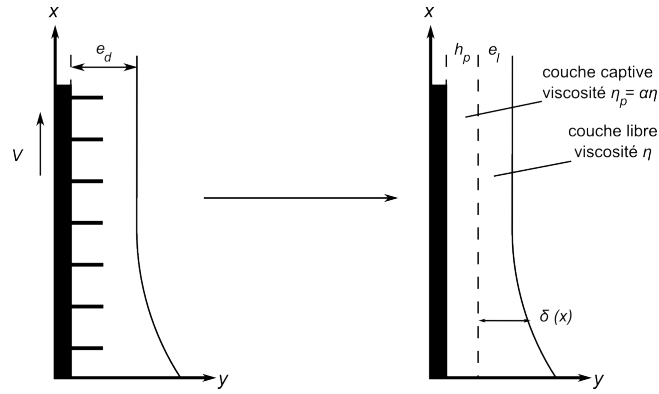


FIGURE 2.5 – Schéma du modèle à deux couches. On remplace le véritable film liquide par un film constitué de deux couches. La première (couche captive) est d'épaisseur fixe  $h_p$ . L'effet des piliers  $y$  est représenté par un accroissement de sa viscosité, qui devient  $\alpha\eta$  ( $\alpha > 1$ ). La seconde (couche libre), d'épaisseur variable et de viscosité  $\eta$  est déposée par dessus.

correspond à  $\alpha = 1$  : l'influence des piliers  $y$  est en effet négligeable. Inversement, la limite  $p \rightarrow b$  correspond à une couche captive se comportant comme un solide, soit  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Dans le cas général,  $\alpha$  varie donc entre 1 et  $+\infty$ .

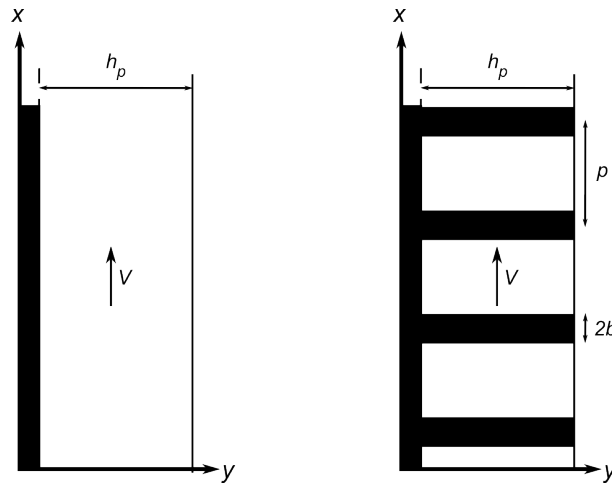


FIGURE 2.6 – Principe de l'évaluation de  $\alpha$ . Un film d'épaisseur  $h_p$  dont la vitesse typique est  $V$  n'est soumis qu'à des gradients de vitesses d'ordre  $V/h_p$ . Lorsque l'on introduit des piliers de rayon  $b$  espacés d'une distance  $p$ , il se crée d'autres gradients (d'ordre  $V/p$  et  $V/b$ ) qui augmentent la dissipation visqueuse.

On peut aller un peu plus loin et relier  $\alpha$  à  $p$ ,  $h_p$  et  $b$  en évaluant la dissipation visqueuse dans la couche captive[44] (cf. figure 2.6). En l'absence de piliers (cas ce qui correspond au cas  $\alpha = 1$ ), les gradients de vitesse se font uniquement sur la hauteur  $h_p$  de la couche de liquide, et la puissance volumique dissipée par viscosité s'écrit alors en ordre de grandeur :

$$\dot{\epsilon} \sim \eta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \sim \eta \left( \frac{V}{h_p} \right)^2$$

La présence de piliers introduit deux nouvelles longueurs dans le film :  $b$  et  $p$ . Il se crée donc des gradients de vitesse à ces deux échelles, d'ordre  $V/b$  et  $V/p$ . Notant  $l$  l'échelle générique

sur laquelle chaque pilier perturbe l'écoulement, on pourrait imaginer que la dissipation est dominée par les gradients les plus violents (aux plus petites échelles  $l$ ). Mais ces gradients perturbent une région de volume  $l^2 h_p$ , qu'il faut comparer au volume total par pilier  $h_p p^2$  pour estimer la puissance volumique dissipée à ces échelles. Au final, les contributions de chacune de ces échelles sont du même ordre de grandeur :

$$\dot{\epsilon}_l \sim \eta \left( \frac{V}{l} \right)^2 \frac{l^2 h_p}{p^2 h_p} \sim \eta \left( \frac{V}{p} \right)^2$$

La puissance dissipée totale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &\sim \eta \left( \frac{V}{h_p} \right)^2 + \eta \left( \frac{V}{p} \right)^2 \\ &\sim \underbrace{\eta \left( 1 + \left( \frac{h_p}{p} \right)^2 \right)}_{\alpha} \left( \frac{V}{h_p} \right)^2 \end{aligned}$$

En loi d'échelle, on peut donc remplacer l'effet de la texture par une augmentation de la viscosité du fluide d'un facteur  $\alpha$  :

$$\alpha = 1 + \left( \frac{h_p}{p} \right)^2 \quad (2.1)$$

Plus précisément, Hashimoto[38] a par exemple calculé l'écoulement dans réseau carré infini de piliers infinis, en le supposant strictement bidimensionnel. Il a ainsi montré que l'accroissement de dissipation dû à la présence des piliers s'écrit :

$$\alpha = 1 + \frac{4\pi}{\ln(p/b) - 1,31} \left( \frac{h_p}{p} \right)^2 \quad (2.2)$$

On retrouve bien la loi de puissance attendue, assortie d'une correction logarithmique faisant intervenir le rayon  $b$  des piliers. Il est à noter que le facteur numérique ( $4\pi$ ) n'est pertinent que pour un écoulement bidimensionnel, ce qui n'est pas vérifié dans notre cas (la vitesse du fluide dans la couche captive varie avec la distance à la surface).

### 2.3.2 Adaptation de la théorie de LLD

Pour calculer l'épaisseur de liquide entraînée dans ce modèle à deux couches, nous avons adapté la théorie de LLD (cf. la partie 1.2, page 11). Le film est séparé en trois zones distinctes : une zone d'épaisseur constante  $e_d$  (que l'on cherche à déterminer) loin du bain, un ménisque statique peu perturbé, et un ménisque dynamique qui joint les deux.

On se place dans l'approximation de lubrification pour déterminer l'équation régissant la forme du ménisque dynamique. Le raccord avec la zone d'épaisseur constante fournit les conditions aux limites nécessaires au calcul de sa forme, qui dépend de  $e_d$ . En particulier, la courbure du ménisque tend vers une constante lorsque son épaisseur augmente. Le raccord avec le ménisque statique se fait en égalant cette courbure asymptotique à la courbure au sommet du ménisque statique ( $\sqrt{2}a$ ).

La principale différence avec la théorie de LLD réside dans le fait que la forme du ménisque dynamique n'est plus universelle (car d'autres échelles de longueurs ont été introduites), ce qui complique un peu le calcul et en particulier le raccord avec le ménisque

statique. Nous présentons ici ce calcul sans rentrer dans les détails "pratiques" de la résolution, présentés en annexe (A.1).

### 2.3.3 Forme du ménisque dynamique

#### Equation du ménisque dynamique

Déterminer la forme du ménisque dynamique nécessite de connaître le profil de vitesse dans le film de liquide entraîné. L'approximation de lubrification nous apprend que ce profil est parabolique dans chacune des deux couches considérées. Sa détermination nécessite quatre conditions aux limites, à savoir (les notations sont précisées sur la figure 2.7) :

- non glissement à la surface du solide :  $v_p(y = 0) = V$
- contrainte nulle à l'interface liquide/air :  $\frac{dv_l}{dy}(y = h) = 0$
- continuité des vitesses à l'interface entre les deux couches :  $v_p(y = h_p) = v_l(y = h_p)$
- continuité des contraintes entre les deux couches :  $\alpha \frac{dv_p}{dy}(y = h_p) = \frac{dv_l}{dy}(y = h_p)$

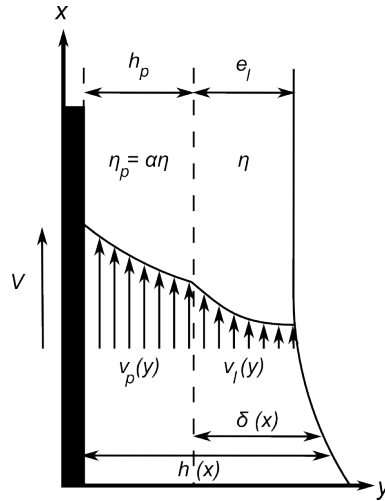


FIGURE 2.7 – Schéma de l'écoulement dans le modèle à deux couches.

Les vitesses du fluide dans les plots et dans la couche libre s'écrivent alors respectivement (en remarquant que  $\frac{d^3h}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}(h_p + \delta) = \frac{d^3\delta}{dx^3} = \delta_{xxx}$ ) :

$$u_p(y) = \frac{\rho g - \gamma \delta_{xxx}}{\alpha \eta} \left( \frac{y^2}{2} - (\delta + h_p)y \right) + V$$

$$u_l(y) = \frac{\rho g - \gamma \delta_{xxx}}{\eta} \left( \frac{(y - h_p)^2}{2} - \delta(y - h_p) - \frac{h_p^2}{2\alpha} - \frac{\delta h_p}{\alpha} \right) + V$$

On en déduit le flux de liquide par unité de longueur transverse  $q = \int_0^{h_p+\delta} v(y) dy$ , que l'on évalue dans le film plan ( $\delta = e_l$ ) :

$$q = -\frac{\rho g - \gamma \delta_{xxx}}{3\alpha \eta} (\alpha \delta^3 + 3\delta^2 h_p + 3\delta h_p^2 + h_p^3) + (\delta + h_p)V \quad (2.3)$$

$$= -\frac{\rho g}{3\alpha \eta} (\alpha e_l^3 + 3e_l^2 h_p + 3e_l h_p^2 + h_p^3) + (e_l + h_p)V \quad (2.4)$$



On peut d'ores et déjà remarquer (nous en reparlerons dans la partie 2.12, page 38) que contrairement au problème de LLD, cette équation admet comme solution un film libre d'épaisseur nulle ( $\delta = e_l = 0$ ), le flux étant alors égal à  $Vh_p$ . Comme dans le problème de LLD, on se propose d'utiliser les variables sans dimension  $Y = \delta/e_l$  et  $X = xCa^{1/3}/e_l$  :

$$Y_{XXX} = 3\alpha \frac{1 - Y}{\alpha Y^3 + 3Y^2 \frac{h_p}{e_l} + 3Y \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^3} + \frac{e_l^2}{a^2 Ca} \frac{\alpha(Y^3 - 1) + 3(Y^2 - 1) \frac{h_p}{e_l} + 3(Y - 1) \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2}{\alpha Y^3 + 3Y^2 \frac{h_p}{e_l} + 3Y \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^3}$$

Si on néglige de plus l'effet de la gravité (en supposant que  $e_l^2 \ll a^2 Ca$ ), on obtient l'équation de la forme du film libre dans la région du ménisque dynamique :

$$Y_{XXX} = 3\alpha \frac{1 - Y}{\alpha Y^3 + 3Y^2 \frac{h_p}{e_l} + 3Y \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^3} \quad (2.5)$$

### Cas limites

Il y a deux limites qui permettent de retrouver l'équation LLD (équation 1.3, page 17) pour  $Y$  à partir de l'équation 2.5. La première est  $\alpha \rightarrow +\infty$ . On retrouve ainsi la limite déjà discutée de piliers très denses, pour lesquels  $e_l = e_{LLD}$ . La seconde consiste à imposer  $h_p/e_l \rightarrow 0$ , ce correspond au cas où la texture est de taille négligeable devant l'épaisseur déposée (ce qui correspond dans les expériences aux grands nombres capillaires).

La limite  $\alpha = 1$  est un peu plus délicate à interpréter. On s'attend en effet à avoir  $e_d = e_{LLD}$ , soit  $h_p + e_l = e_{LLD}$ . C'est donc l'épaisseur totale entraînée  $h = h_p + \delta(x)$  qui doit vérifier, en variables adimensionnées, l'équation 1.3. Le point délicat est que l'équation 2.5 a été écrite pour la couche de fluide libre d'épaisseur  $\delta(x)$ , et que l'adimensionnement dépend de la couche de fluide considérée. Notant  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{X}$  les variables sans dimension correspondantes au film total (d'épaisseur  $h_p + \delta(x)$ ), on a en effet :

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \frac{h_p + \delta}{h_p + e_l} = \frac{h_p + e_l Y}{h_p + e_l} \\ \tilde{X} &= \frac{xCa^{1/3}}{h_p + e_l} = \frac{e_l}{h_p + e_l} X \end{aligned}$$

On retrouve alors bien l'équation de LLD pour  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{X}$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_{\tilde{X}^3} &= \frac{d^3\tilde{Y}}{d\tilde{X}^3} = \left(\frac{h_p + e_l}{e_l}\right)^2 \frac{d^3Y}{dX^3} \\
 &\stackrel{\alpha=1}{=} 3 \left(\frac{h_p + e_l}{e_l}\right)^2 \frac{1 - Y}{Y^3 + 3Y^2\frac{h_p}{e_l} + 3Y\left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^3} \\
 &= 3 \left(\frac{h_p + e_l}{e_l}\right)^2 \frac{1 - Y}{\left(Y + \frac{h_p}{e_l}\right)^3} \\
 &= 3 \frac{e_l}{e_l + h_p} \frac{1 - Y}{\left(\frac{Ye_l + h_p}{e_l + h_p}\right)^3} \\
 &= 3 \frac{1 - \frac{Ye_l + h_p}{e_l + h_p}}{\left(\frac{Ye_l + h_p}{e_l + h_p}\right)^3} \\
 &= 3 \frac{1 - \tilde{Y}}{\tilde{Y}^3}
 \end{aligned}$$

### 2.3.4 Détermination de l'épaisseur libre entraînée

#### Raccord avec le film plan

Les trois conditions aux limites nécessaires à la résolution de l'équation 2.5 sont fournies par le raccord avec le film plan :  $Y(+\infty) \rightarrow 1$ ,  $Y_X(+\infty) \rightarrow 0$ ,  $Y_{XX}(+\infty) \rightarrow 0$ . Une forme typique de ménisque dynamique est représentée sur la figure 2.8.

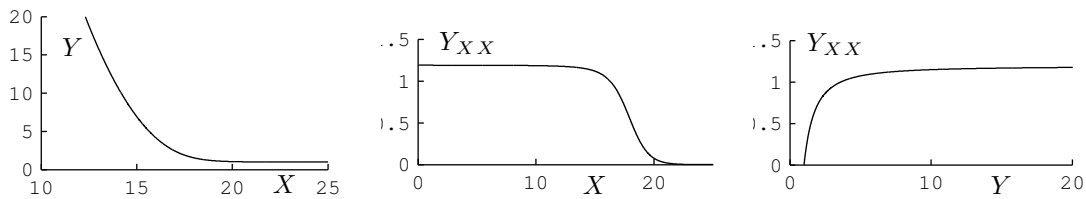


FIGURE 2.8 – Profil du ménisque dynamique, obtenu par intégration numérique de l'équation 2.5, pour  $Ca = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 9,5$ ,  $h_p = 10,2 \mu\text{m}$  et  $e_l = 12,5 \mu\text{m}$ . A gauche : profil adimensionné du film ménisque dynamique  $Y$  en fonction de  $X$ . Au centre : dérivée seconde du profil  $Y_{XX}$  en fonction de  $X$ . A droite :  $Y_{XX}$  en fonction de  $Y$ .  $Y_{XX}$  atteint son asymptote pour  $Y \approx 10$ .

La dérivée seconde du profil tend, comme dans la théorie de LLD, vers une constante lorsque l'épaisseur du profil augmente. Cette asymptote est de plus rapidement atteinte, pour  $Y \approx 10$  dans cette expérience. Enfin, il est crucial de préciser que l'équation 2.5 dépend du rapport  $\frac{h_p}{e_l}$ , l'asymptote de  $Y_{XX}$  dépend donc également de ce rapport, ce qui complique le raccord avec le ménisque statique.

## Raccord avec le ménisque statique

Comme dans la théorie de LLD, l'épaisseur  $e_l$  est sélectionnée en imposant pour le ménisque dynamique une courbure asymptotique égale à la courbure au sommet du ménisque statique ( $\sqrt{2}a$ ). Notant  $Y_{XX}^\infty(h_p/e_l)$  la valeur asymptotique de  $Y_{XX}$  lorsque  $Y \rightarrow -\infty$ , il vient :

$$\left. \frac{d^2\delta}{dx^2} \right|_{\delta \rightarrow +\infty} = \frac{Ca^{2/3}}{e_l} Y_{XX}^\infty(h_p/e_l) = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

C'est cette équation qu'il faut résoudre pour déterminer l'épaisseur entraînée, en fonction de  $Ca$ ,  $h_p$  et  $\alpha$ . La dépendance de  $Y_{XX}^\infty$  avec  $h_p/e_l$  nous oblige à une résolution numérique, dont on confronte les résultats aux expériences dans la suite (voir en particulier la figure 2.9).

## 2.4 Confrontation du modèle aux l'expérience

### 2.4.1 $\alpha$ comme paramètre d'ajustement

Pour un nombre capillaire donné, le modèle proposé détermine l'épaisseur de liquide déposée en fonction de  $h_p$  et  $\alpha$ . Pour chaque surface texturée,  $h_p$  a été mesuré de deux façons (qui fournissent la même valeur à 5 % près d'après la figure 2.3, page 27) : en mesurant l'épaisseur minimale de liquide entraînée, et en mesurant directement la hauteur des plots au microscope électronique.

$\alpha$ , en revanche, est à ce stade inconnu : il est choisi comme (seul) paramètre d'ajustement des résultats du modèle à la courbe de dépôt expérimental. La figure 2.9 présente un tel ajustement, représentatif de l'ensemble des expériences. Le modèle reproduit les expériences de dépôt à mieux que 5 % près dans toute la gamme de nombres capillaires explorée. Ce bon accord confirme que la texture peut-être représentée par une couche de fluide de viscosité accrue (ici d'un facteur  $\alpha = 9,5$ ).

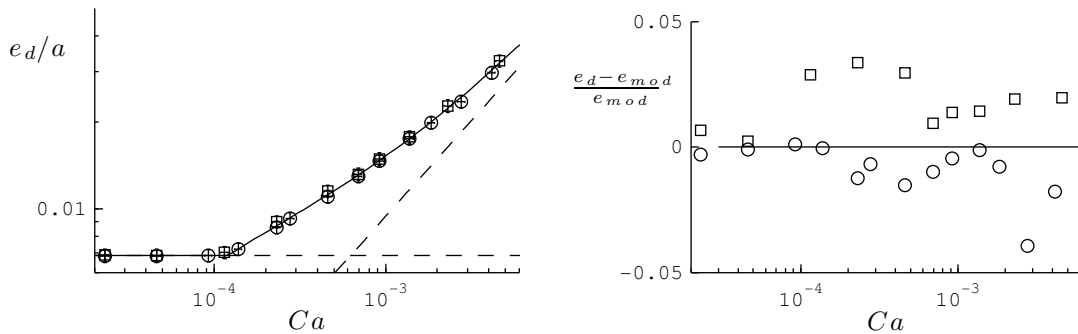


FIGURE 2.9 – À gauche : épaisseur normalisée ( $e_d/a$ ) déposée sur une surface texturée ( $p = 10 \mu\text{m}$ ,  $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ ), en fonction de  $Ca$ . La courbe en traits pleins est le meilleur ajustement par le modèle à deux couches, obtenu pour  $\alpha = 9,5$ . Les courbes tiretées représentent respectivement la hauteur des piliers et la théorie de LLD. À droite : résidus normalisés. Les différents symboles indiquent la viscosité de l'huile utilisée :  $\eta = 19$  mPa·s (o) et 97 mPa·s ( $\square$ ).

De ce fait, ces expériences sont un moyen de déterminer, pour chaque surface texturée, cet accroissement de viscosité (via un ajustement des données à l'aide du paramètre  $\alpha$ ), et d'étudier comment il dépend des paramètres géométriques de la rugosité.

### 2.4.2 Accroissement de viscosité et géométrie de la surface

Nous avons déjà mentionné (équation 2.2, page 30) que, pour un écoulement bidimensionnel dans un réseau carré de piliers, l'accroissement de viscosité s'écrit :

$$\alpha = 1 + \frac{4\pi}{\ln(p/b) - 1,31} \left( \frac{h_p}{p} \right)^2$$

Pour tester cette prédiction sur notre système, nous représentons sur la figure 2.10 le paramètre  $\alpha - 1$ , mesuré à partir des expériences de tirage, en fonction de  $\frac{1}{\sqrt{\ln(p/b)-1,31}} \frac{h_p}{p}$ . Les valeurs expérimentales de  $\alpha - 1$  varient comme  $\frac{1}{\ln(p/b)-1,31} \left( \frac{h_p}{p} \right)^2$ , avec un coefficient 5,4 différent de  $4\pi$  (mais du même ordre de grandeur), du moins pour  $h_p/p > 0,4$ . Cette différence n'est pas étonnante car dans notre système la vitesse du liquide n'est pas strictement bidimensionnelle : elle varie avec la distance à la paroi.

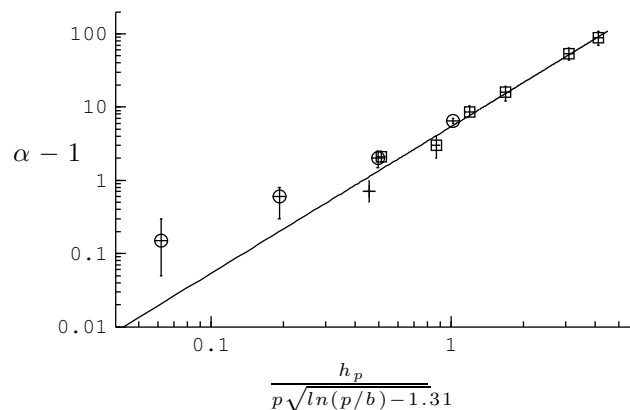


FIGURE 2.10 –  $\alpha - 1$  en fonction de  $\frac{1}{\sqrt{\ln(p/b)-1,31}} \frac{h_p}{p}$ . Les réseaux étudiés ont un pas  $p = 10 \mu\text{m}$  ( $\square$ ),  $p = 20 \mu\text{m}$  ( $\circ$ ) ou  $p = 28 \mu\text{m}$  ( $+$ ). La droite a pour équation  $y = 5,4x^2$ .

La déviation observée pour les faibles valeurs de  $h_p/p$  pourrait simplement être due au manque de résolution de la mesure de  $\alpha$ . Enfin, il est intéressant de noter que la correction logarithmique varie pour les surfaces étudiées entre 0,8 et 1,4 : son effet n'est donc pas négligeable.

## 2.5 Importance de l'écoulement dans la texture

Nous avons vu que le modèle à deux couches proposé décrit convenablement l'effet de la texture à l'aide du seul paramètre  $\alpha$ , que nous avons pu relier aux caractéristiques géométriques des surfaces texturées. Une des caractéristiques du modèle à deux couches est qu'il autorise un glissement de la couche libre sur la couche captive. On peut alors se demander se demander si le glissement seul suffit à décrire les expériences de dépôt.

### 2.5.1 Glissement entre couches

#### Modèle avec glissement seul

Une manière de répondre à cette question consiste à reprendre le modèle proposé, en considérant que le seul effet de l'écoulement entre les piliers est d'autoriser le glissement de la couche libre, caractérisé par une longueur de glissement  $h_p/\alpha$ . Les conditions aux limites permettant de déterminer le profil de vitesse (parabolique) dans la couche libre deviennent alors :

- contrainte nulle à l'interface liquide/air :  $\frac{dv_l}{dy}(h) = 0$
- glissement à l'interface entre les deux couches :  $\frac{h_p}{\alpha} \frac{dv_l}{dy}(h_p) = v_l(h_p)$

On peut alors écrire le flux  $q = \int h_p h v_l dy$  (on néglige le flux dans les piliers) et négliger la gravité pour obtenir l'équation décrivant le ménisque dynamique :

$$Y_{XXX} = 3\alpha \frac{1 - Y}{\alpha Y^3 + 3Y^2 \frac{h_p}{e_l}} \quad (2.6)$$

On retrouve l'équation 2.5 écrite dans le cadre de notre modèle, dont on aurait supprimé les termes constants et proportionnels à  $Y^2$  du numérateur. On peut évidemment calculer l'épaisseur déposée comme on l'a fait pour notre modèle. La figure 2.11 présente l'épaisseur du film libre  $e_l$  mesurée expérimentalement pour  $p = 10 \mu\text{m}$  et  $h_p = 10,2 \mu\text{m}$  (ce sont les mêmes points que sur la figure 2.9). Cette épaisseur est toujours inférieure à la loi de LLD (courbe en pointillés), et est bien décrite par le modèle à deux couches avec  $\alpha = 9,5$  (courbe tiretée). On remarque en particulier qu'elle décroît avec  $Ca$  aux alentours de  $Ca \approx 10^{-4}$ .

La courbe en traits pleins représente la situation discutée ici, où l'on ne prendrait en compte que le glissement. Sur la figure de gauche, la longueur de glissement vaut  $h_p/\alpha$  avec  $\alpha = 9,5$  (soit  $1,1 \mu\text{m}$ ), tandis que sur la figure de droite elle est choisie pour ajuster au mieux la courbe expérimentale (elle vaut alors  $2,1 \mu\text{m}$ ). Dans les deux cas, le glissement seul ne peut rendre compte de la décroissance marquée de l'épaisseur aux faibles nombres capillaires.

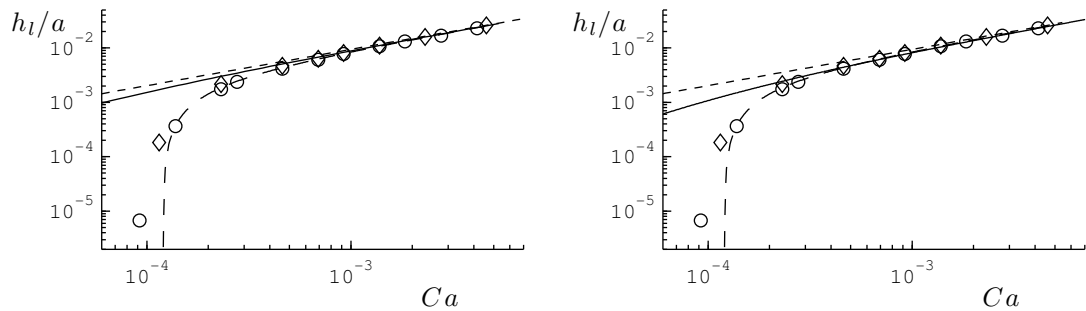


FIGURE 2.11 – Épaisseur du film libre  $e_l$  ( $p = 10 \mu\text{m}$ ,  $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ ) en fonction de  $Ca$ . La courbe en pointillés représente la loi de LLD, la courbe tiretée le modèle à deux couches (avec  $\alpha = 9,5$ ). La courbe en traits pleins représente un modèle ne prenant en compte que le glissement entre les deux couches, caractérisé par une longueur de glissement  $h_p/\alpha = 1,1 \mu\text{m}$  (figure de gauche) ou  $2,1 \mu\text{m}$ , ce qui correspond au meilleur ajustement des données (figure de droite).

### Loi de dépôt lorsque le glissement est prépondérant

En effet, à faible nombre capillaire, donc faible épaisseur déposée  $e_l$ , l'équation 2.6 devient :

$$Y_{XXX} \approx \frac{\alpha e_l}{h_p} \frac{1 - Y}{Y^2}$$

En utilisant la nouvelle variable  $\tilde{X} = X(\alpha e_l/h_p)^{1/3} = x(Ca\alpha/h_p e^2)^{1/3}$ , on obtient :

$$Y_{\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}} \approx \frac{\alpha e_l}{h_p} \frac{1 - Y}{Y^2} \quad (2.7)$$

Le ménisque statique a, dans cette approximation, une forme universelle (comme dans le cas de la théorie de LLD). Résolvant numériquement l'équation précédente, on trouve que la dérivée seconde  $Y_{\tilde{X}\tilde{X}}$  du profil tend vers  $Y_{\tilde{X}\tilde{X}}^\infty = 1,57$ . Le raccord avec le ménisque statique s'écrit alors :

$$\left. \frac{d^2\delta}{dx^2} \right|_{x \rightarrow -\infty} = e_l \left( \frac{Ca\alpha}{e_l^2 h_p} \right)^{2/3} \left. \frac{d^2 Y}{d\tilde{X}^2} \right|_{\tilde{X} \rightarrow +\infty} = \left( \frac{Ca\alpha}{h_p} \right)^{2/3} e_l^{-1/3} Y_{\tilde{X}\tilde{X}}^\infty = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

soit, notant  $b = h_p/\alpha$  la longueur de glissement :

$$e_l = \left( \frac{Y_{fin}^{(2)}}{\sqrt{2}} \right)^3 a^3 \left( \frac{Ca\alpha}{h_p} \right)^2 = 1,36 \frac{a^3}{b^2} Ca^2$$

Lorsqu'il est prépondérant, le glissement produit donc une épaisseur déposée variant comme  $Ca^2$ . La variation de  $e_l$  est donc plus rapide que dans la théorie de LLD, mais pas assez pour rendre compte des observations.

## 2.5.2 Écoulement dans la texture

### Nombre capillaire critique

La chute brutale d'épaisseur autour de  $Ca \approx 10^{-4}$  est donc due à l'écoulement de liquide dans la couche captive. En effet, nous avons vu que le dépôt d'un film liquide s'accompagne d'un gradient de pression (dans le ménisque dynamique), qui entraîne un flux de liquide de la couche captive vers le bain. En particulier, ce flux impose un nombre capillaire critique  $Ca_c$ , en dessous duquel il n'y a pas de liquide entraîné au delà des piliers ( $e_l = 0$ ).  $Ca_c$  peut être déterminé à partir des expériences de dépôt (voir figure 2.12), et vaut  $10^{-5}$  à  $10^{-3}$  pour les surfaces étudiées.

Ce résultat est cohérent avec la limite des faibles densités de plots ( $h_p/p \rightarrow 0$ , ou  $\alpha \rightarrow 1$ ), pour laquelle on a  $e_l = \max(e_{LLD}, h_p)$ . En particulier, aucun film n'est entraîné lorsque  $e_{LLD} < h_p$ . Dans cette limite,  $Ca_c$  correspond donc, dans une figure de dépôt où l'on porte  $e_d$  en fonction de  $Ca$ , au nombre capillaire du point d'intersection entre la loi de LLD et la droite d'épaisseur constante  $e_d = h_p$ . Or,  $e_{LLD} = aCa^{2/3}$ , d'où :

$$Ca_c^{\alpha \rightarrow 1} = \left( \frac{h_p}{a} \right)^{3/2}$$

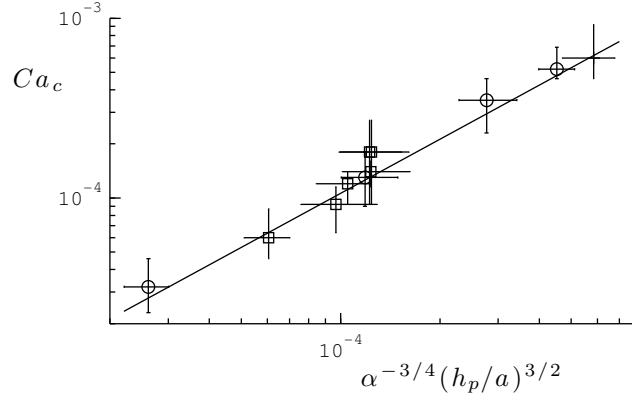


FIGURE 2.12 – Valeurs de  $Ca_c$  mesurées sur les surfaces étudiées, en fonction de  $\alpha^{-3/4}h_p^{3/2}a^{-3/2}$ , pour  $p = 10 \mu\text{m}$  ( $\square$ ),  $p = 20 \mu\text{m}$  ( $\circ$ ) et  $p = 28 \mu\text{m}$  ( $+$ ). Les valeurs de  $\alpha$  ont également été mesurées à partir des expériences de dépôt. La droite a pour équation  $y = 1,06x$ .

### Loi d'échelle pour les grandes densités de plots

On peut également estimer  $Ca_c$  dans la limite de grande densité de plots ( $h_p/p \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha \rightarrow +\infty$ ). Supposons en effet que l'on entraîne un film libre d'épaisseur  $e_l$ . Dans la limite discutée ici, le film entraîné est semblable à un film de LLD, et le ménisque statique a en particulier alors une longueur d'ordre  $l \sim \sqrt{ae_l}$  (ce résultat est établi dans la partie 1.2.3, page 14). Le gradient de pression qui en résulte vaut donc :

$$\nabla P \sim \frac{\Delta P}{l} \sim \frac{\gamma}{al} \sim \frac{\gamma}{a^{3/2}e_l^{1/2}}$$

Ce gradient crée dans la texture un écoulement dirigé vers le bain de liquide, dont la vitesse moyenne  $V_p$  est estimée par un équilibre entre le gradient de pression et les forces visqueuses (avec une viscosité  $\eta_p = \alpha\eta$ ) :

$$V_p \sim \frac{\nabla P h_p^2}{\alpha\eta} \sim \frac{\gamma h_p^2}{a^{3/2}e_l^{1/2}\alpha\eta}$$

Si  $V_p$  est supérieure à la vitesse de dépôt  $V$ , le drainage dans la couche captive est plus rapide que le dépôt, et le film libre hypothétique n'existe pas. Cette condition s'écrit :

$$Ca_c \sim \frac{h_p^2}{a^{3/2}e_l^{1/2}\alpha}$$

Remarquant de plus que  $e_l \approx aCa^{2/3}$ , il vient finalement :

$$Ca_c \sim \frac{1}{\alpha^{3/4}} \left( \frac{h_p}{a} \right)^{3/2}$$

Cette expression reste valable lorsque  $\alpha = 1$ . On observe sur la figure 2.12 que les valeurs de  $Ca_c$  mesurées expérimentalement suivent effectivement cette loi d'échelle (avec un coefficient 1,06). Enfin, nous avons vu que  $\alpha \sim 1 + (h_p/p)^2$ . La précédente expression se réécrit alors :

$$Ca_c \sim \left( \frac{h_p^2}{1 + \left(\frac{h_p}{p}\right)^2} \right)^{3/4} \frac{1}{a^{3/2}}$$

En particulier, pour un pas de réseau  $p$  fixé,  $Ca_c$  augmente d'abord avec  $h_p$  (comme  $h_p^{3/2}$ ), puis sature à une valeur de  $(p/a)^{3/2}$ . Ainsi, si l'objectif est de maximiser la plage de dépôt indépendant du nombre capillaire, il existe une valeur "optimale" de  $h_p$ , proche de  $p$ .

L'existence d'un nombre capillaire critique au dessous duquel il n'y a plus d'entraînement n'est pas spécifique à notre configuration. L'entraînement d'un liquide liquide partiellement mouillant présente par exemple les mêmes caractéristiques[6, 27] : une ligne de contact stationnaire existe jusqu'à une vitesse critique de tirage, au delà de laquelle un film est entraîné. On retrouve ce comportement dans une expérience plus proche de la nôtre : l'étude du dépôt de fluide sur un milieu granulaire saturé[16]. Devauchelle et ses collaborateurs[23] ont analysé théoriquement cette configuration, et se sont plus particulièrement intéressés au nombre capillaire critique de dépôt sur un milieu poreux saturé, dans lequel l'écoulement est modélisé par une équation de Brinkman[9]. Leurs résultats ne sont pas directement transposables à nos expériences, mais on peut relever que le nombre capillaire critique dans leur étude dépend de la longueur de glissement  $b$  à la surface du poreux, et varie comme  $b^{3/2}$ . Ceci est compatible avec notre prédiction, pour les petites valeurs de  $h_p/p$ .

## 2.6 Perspectives

Nous avons étudié dans ce chapitre le dépôt de fluide sur des surfaces texturées. La rugosité augmente l'épaisseur de liquide déposée sur toute la gamme de nombres capillaires explorée, mais son effet est surtout sensible aux faibles vitesses de tirage. En dessous d'un nombre capillaire critique, l'épaisseur déposée est en effet constante et égale à la taille de la rugosité. Nous avons retrouvé les lois de dépôt observées à l'aide d'un modèle à deux couches : une couche captive de la texture, sur laquelle est déposée un film libre. La rugosité se traduit par une augmentation de la viscosité de la couche captive d'un facteur  $\alpha$ , qui constitue un paramètre d'ajustement des données. Les expériences de dépôt deviennent ainsi un moyen sonder les propriétés hydrodynamiques de la texture, et de relier sa géométrie à la valeur de  $\alpha$ .

Pour étendre l'étude des surfaces texturées, et se rapprocher de considérations pratiques, on peut se demander s'il est possible de retrouver les comportements de ce système sur un support lisse. Une façon de réaliser ceci pourrait être d'incorporer la texture dans le liquide, et de la déposer sur la surface en même temps que le film. Une configuration qui nous semble prometteuse est constituée d'une plaque de verre sur laquelle on dépose une solution de billes du même matériau. Le "collage" de billes de verre d'environ 10 micromètres de diamètre peut s'effectuer de plusieurs manières. La première consiste à déposer une couche d'ions Cérium (positifs) sur la plaque de dépôt, et à utiliser des billes de verre chargées négativement (dans une solution basique)[1, 3, 89]. Une seconde méthode utilise une couche de polymères préalablement déposée sur la surface à enduire comme liant[71]. Des essais préliminaires nous ont permis de confirmer la faisabilité de la première méthode dans des conditions non optimales (c'est à dire dans un laboratoire de physique...)



et sa robustesse. Reste à tenter l'expérience...

La compréhension des phénomènes en jeu dans la rugosité dépasse le cadre des procédés de dépôt. Par exemple, la paroi des vaisseaux sanguins est recouverte d'un feutrage micro fibrillaire (glycocalyx) particulièrement développé[100], qui se présente sous la forme d'une forêt de piliers (constitués d'un assemblage de protéines) d'environ  $0,5 \mu\text{m}$  de hauteur et séparés d'environ  $0,1 \mu\text{m}$ [101]. Cette structure, géométriquement proche de notre système, a suscité de nombreuses études visant à comprendre son effet sur l'écoulement sanguin, ou son interaction avec les globules rouges[19, 18, 17].

Enfin, l'épaisseur du film obtenu pour  $Ca < Ca_c$ , égale à la hauteur des plots, ne dépend pas de la vitesse de tirage. Le même film est d'ailleurs obtenu lorsque l'on laisse la surface s'imbiber à partir d'un bain de liquide. Le drainage de surfaces texturées préalablement enduites, que nous présentons dans le chapitre suivant, apparaît comme un moyen supplémentaire d'atteindre cet état.

# Chapitre 3

## Drainage texturé

*Le quotient intellectuel de l'autruche a pu être observé quantitativement lors d'expériences d'une extrême rigueur scientifique entreprises dans le désert de Zobi, par les chercheurs du CNRS (CNRS : Centre Nationale de la Recherche Surlesautruches).*

Pierre DESPROGES, *Le tribunal des flagrants délires*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Expériences de drainage</b>	<b>41</b>
3.1.1	Importance (éventuelle) du drainage	41
3.1.2	Drainage sur une surface lisse	42
3.1.3	Drainage sur une surface texturée	45
<b>3.2</b>	<b>Régime de drainage "lent"</b>	<b>46</b>
3.2.1	Évolution du film libre	46
3.2.2	Interprétation à l'aide du modèle à deux couches	46
<b>3.3</b>	<b>Marche</b>	<b>47</b>
3.3.1	Rôle du film captif	47
3.3.2	Vitesse de translation du film libre	48
3.3.3	Épaisseur du film libre	50
3.3.4	Blocage de l'écoulement dans la texture	51
<b>3.4</b>	<b>Épaisseur d'équilibre en fin de drainage</b>	<b>52</b>
3.4.1	Gradient d'épaisseur de film	52
3.4.2	Mesure du gradient d'épaisseur	54
<b>3.5</b>	<b>Dépôt et drainage sur des surfaces ultra-diluées</b>	<b>55</b>
3.5.1	Expériences de drainage	55
3.5.2	Expériences de dépôt	57
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>58</b>

---

### 3.1 Expériences de drainage

#### 3.1.1 Importance (éventuelle) du drainage

Dans les expériences d'entraînement de fluide que nous avons discutées jusqu'à présent, la quantité de liquide déposée est déterminée par un équilibre entre forces visqueuses et

forces capillaires, devant lesquelles la gravité est négligeable. La gravité se fait néanmoins sentir lorsque l'on stoppe l'entraînement et que l'on attend assez longtemps : le film de liquide déposé sur la surface s'écoule alors sous son propre poids, et s'amincit. La vitesse typique  $v_d$  de ce drainage peut être évaluée en équilibrant gravité et viscosité dans un film liquide d'épaisseur  $e$ . À petit nombre de Reynolds, on a :

$$\eta \frac{v_d}{e^2} \sim \rho g \quad \text{soit} \quad v_d \sim \frac{e^2 \rho g}{\eta}$$

Le temps  $t_d$  nécessaire à drainer une surface de taille  $L$  vaut donc :

$$t_d \sim \frac{L}{v_d} \sim \frac{\eta L}{\rho g e^2}$$

Dans nos expériences,  $L \approx 1$  cm,  $\rho \approx 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $e \approx 10$  μm,  $\eta \approx 0,1$  Pa·s, d'où l'on évalue une vitesse  $v_d \approx 10$  μm/s et  $t_d \approx 10^3$  s. On peut noter que le temps nécessaire pour réaliser une expérience de dépôt (quelques secondes à quelques minutes) est beaucoup plus faible que  $t_d$  (ou, de manière équivalente, que la vitesse de tirage est plus grande que  $v_d$ ), ce qui justifie le fait que l'on ait négligé le drainage jusqu'à maintenant.

Sur une surface lisse, le film liquide s'amincit sous l'effet de la gravité suivant une loi de puissance en  $t^{-1/2}$  (figure 3.1). Nous allons voir ici que le drainage sur une surface texturée est qualitativement différent, et interprétable pour l'essentiel dans le cadre du modèle à deux couches présenté au chapitre 2. Une différence fondamentale avec le cas cas lisse est qu'il reste un film captif dans la texture en fin de drainage, dont l'étude nécessite d'introduire de nouvelles notions.

### 3.1.2 Drainage sur une surface lisse

#### Une décroissance de l'épaisseur en loi de puissance

Nous avons déposé un film d'huile silicone non volatile de viscosité  $\eta = 19,5$  mPa·s et d'épaisseur initial  $e_0 = 46$  μm sur un wafer en silicium (lisse) puis nous l'avons laissé drainer sous l'effet de la gravité. La figure 3.1 présente l'épaisseur  $e$ , mesurée par réflectométrie (le principe en est décrit dans la partie 1.1.3, page 9), du film en fonction du temps, en un point donné de la surface.

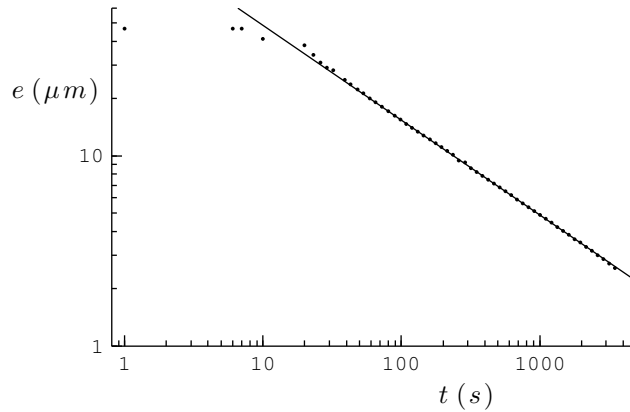


FIGURE 3.1 – Drainage d'un film d'huile silicone de viscosité  $\eta = 19,5$  mPa·s sur un substrat lisse. La droite a pour équation  $e = \sqrt{\frac{\eta x_f}{\rho g t}}$ , avec  $x_f = 1,2$  cm.

Comme on peut le voir sur ce diagramme logarithmique,  $e$  est constante pendant les premiers instants du drainage ( $t < 10$  s). Puis elle décroît comme  $t^{-1/2}$ , pour atteindre  $2 \mu\text{m}$  au bout d'une vingtaine de minutes.

### Modèle de Jeffreys

Jeffreys [45] a proposé en 1930 une théorie permettant de rendre compte de ces observations. Il a pour cela considéré un film de liquide d'épaisseur  $e$  déposé sur une surface verticale immobile, et soumis à la gravité. Dans l'approximation de lubrification (en particulier  $\vec{u} \sim u(x,y)\vec{u}_x$ ), et avec les conditions aux limites usuelles ( $u(y=0) = 0$ ,  $u_y(y=e) = 0$ ), la vitesse  $u$  s'écrit avec les notations de la figure 3.2 :

$$u = -\frac{\rho g}{\eta} \left( \frac{y^2}{2} - ey \right)$$

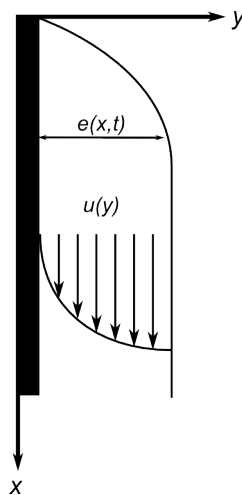


FIGURE 3.2 – Schéma du film liquide

Le flux de liquide (par unité de largeur) vaut donc

$$q = \int_0^{e(x)} u(y) dy = \frac{\rho g}{\eta} \frac{e^3}{3}$$

L'équation d'évolution de  $e$  provient de la conservation du débit, qui s'écrit  $\partial_x q = -\partial_t e$ . On en déduit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\rho g e^2}{\eta} \frac{\partial e}{\partial x} \quad (3.1)$$

Pour retrouver les deux régimes observé (plateau, puis décroissance en  $t^{-1/2}$ ), Jeffreys a recherché les solutions de cette équation sous la forme de lois de puissance en  $x$  et  $t$ . Nous présentons ici une approche un peu différente. Cette équation, pour être résolue explicitement, nécessite une condition initiale, ici la forme du film en début de drainage, à laquelle nous n'avons pas accès. Supposons-là néanmoins connue et tentons de résoudre l'équation par la méthode dite "des caractéristiques", ce qui nous permettra de retrouver les propriétés du drainage observées expérimentalement le plus rigoureusement possible.

Pour cela, remarquons que l'équation 3.1 implique que l'épaisseur de film est constante le long des courbes (du plan  $(x,t)$ ) telles que  $\frac{dx}{dt} = \frac{\rho g e^2}{\eta}^{-1}$ , que l'on appelle "lignes caractéristiques". Vu que  $e$  reste constante le long de ces lignes,  $\frac{dx}{dt}$  est constant également, et les caractéristiques forment une famille de droites dans le plan  $(x,t)$  paramétrées par leur ordonnée à l'origine  $x_0$  :

$$x = \frac{\rho g e^2(x_0,0)}{\eta} t + x_0 \quad (3.2)$$

À l'instant  $t$ , l'épaisseur  $e(x,t)$  en un point de coordonnée  $x$  le long de la surface est ainsi égale à  $e(x_0,0)$ ,  $x_0$  étant déterminé par l'équation 3.2. On retrouve ainsi la nécessité de connaître le profil initial du film liquide si on veut déterminer la loi exacte d'évolution de l'épaisseur.

On suppose maintenant que le film a initialement un profil en deux parties, comme illustré par la figure 3.3 : une zone de transition d'épaisseur variable (qui vaut 0 en  $x = 0$ , et  $e_0$  en  $x = l$ ), qui se raccorde en  $x = l$  à une zone d'épaisseur constante. En s'aidant de la figure 3.3, on peut déterminer l'épaisseur en fonction du temps, au point de coordonnée  $x_f$ . Vu que  $x_f > l$ , l'épaisseur vaut initialement  $e_0$ . Elle est constante jusqu'au temps  $t_M$ , tel que  $t_M = \frac{\eta}{\rho g e_0^2}(x_f - l)$  (on retrouve le comportement observé sur la figure 3.1). Le film s'amincit donc par le sommet (suivant la caractéristique tiretée sur le schéma), et la zone amincie avance à la vitesse  $v_d = \frac{\rho g e_0^2}{\eta}$  (qui est la vitesse typique de drainage déterminée au début de ce chapitre). Pour le drainage présenté sur la figure 3.1, cette vitesse vaut approximativement 1 mm/s, ce qui est cohérent avec la longueur du plateau observé, sachant que la mesure s'effectuait à environ 1 cm du sommet du film.

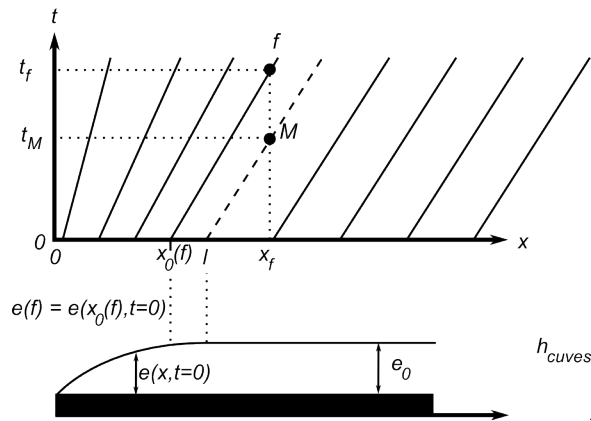


FIGURE 3.3 – Illustration de la méthode des caractéristiques. Les caractéristiques représentées (en haut), paramétrées chacune par une valeur de  $x_0$ , ont pour équation  $t = \frac{\eta}{\rho g e^2(x_0,0)}(x - x_0)$ . Le profil initial du film (en bas) est supposé d'épaisseur constante pour  $x > l$ . La caractéristique en tirets représente l'avancée de la zone d'épaisseur variable.

On ne peut, en l'absence de condition initiale précise, déterminer l'épaisseur du film en  $x_f$  au temps  $t_f$ . On peut néanmoins aller plus loin si l'on s'intéresse à l'épaisseur aux

1. En effet, le long de ces courbes :

$$de = \frac{de}{dt} dt + \frac{de}{dx} dx = \frac{de}{dx} \left( -\frac{\rho g e^2}{\eta} dt + dx \right) = 0$$

temps longs, tels que  $\frac{\rho g e^2(x_0,0)}{\eta} t_f \gg x_0$ . En effet, on peut alors négliger  $x_0$  dans le membre de droite de l'équation 3.2, qui devient :

$$x_f = \frac{\rho g e^2(x_0,0)}{\eta} t_f$$

On a donc simplement :

$$e(x, t \rightarrow \infty) = e(x_0, 0) = \sqrt{\frac{\eta x}{\rho g t}}$$

Ce résultat peut également se retrouver par un raisonnement en loi d'échelle, qui a le mérite de souligner les phénomènes en jeu dans le calcul présenté. En effet, supposant que chaque "tranche" de film (de hauteur  $dx$  et d'épaisseur  $e$ ) avance indépendamment des autres à sa vitesse caractéristique de drainage  $v_d = \frac{\rho g e^2}{\eta}$ , elle aura parcouru au bout d'un temps  $t$  une distance  $x = v_d t$ . On en déduit :

$$x \sim \frac{\rho g e^2}{\eta} t \quad \text{soit} \quad e \sim \sqrt{\frac{\eta x}{\rho g t}}$$

Quelle que soit la méthode employée, on retrouve bien la décroissance en  $t^{-1/2}$  observée. Un ajustement de cette formule aux points expérimentaux pour  $t > 40$  s (représenté par la droite de la figure 3.1) fournit  $x_f = 1,2$  cm, ce qui est encore une fois cohérent avec la mesure, effectuée à 1 cm environ du sommet du film.

### 3.1.3 Drainage sur une surface texturée

Nous avons ensuite l'expérience de drainage sur une surface texturée ( $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ ,  $p = 10 \mu\text{m}$ ), avec  $e_0 = 37 \mu\text{m}$ , en utilisant toujours une huile de viscosité  $\eta = 19,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ .

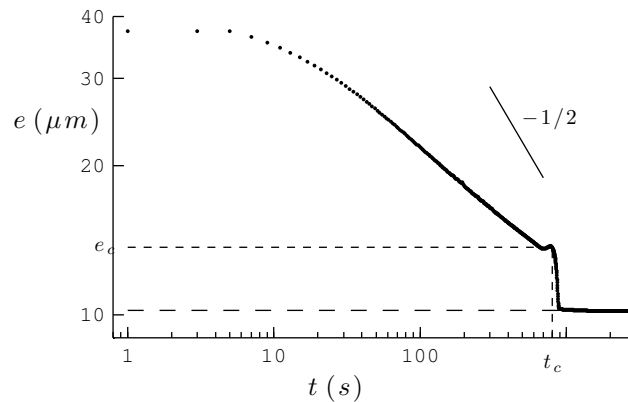


FIGURE 3.4 – Drainage sur une surface texturée ( $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ ,  $p = 10 \mu\text{m}$ ) :  $e_0 = 37 \mu\text{m}$ ,  $\eta = 19,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ . La droite représente la loi de drainage sur surface lisse, en  $t^{-1/2}$ . Les tirets représentent la taille de la texture.

Comme on l'observe sur la figure 3.4, le drainage peut être décomposé en trois régimes que nous allons étudier tour à tour. Le début du drainage (jusqu'à  $t = t_c \approx 800$  s,  $e = e_c \approx 13 \mu\text{m}$ ) est qualitativement semblable au drainage sur surface lisse : l'épaisseur, d'abord constante pendant une dizaine de secondes, décroît progressivement, plus lentement toutefois que sur une surface lisse (du fait de la texture). On observe ensuite une marche dans la courbe de drainage :  $e$  met environ 90 s pour passer de  $13 \mu\text{m}$  à  $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ .

Enfin, une situation d'équilibre est atteinte, et il n'y a donc plus dès lors d'évolution du film qui reste captif des piliers, en dépit de la gravité.

## 3.2 Régime de drainage "lent"

### 3.2.1 Évolution du film libre

Nous nous intéressons d'abord à la première partie du drainage ( $t < t_c$ ), pour laquelle l'épaisseur décroît progressivement. La figure 3.5 représente l'épaisseur du film libre  $e_l = e - h_p$  en fonction du temps. On remarque en premier lieu que l'épaisseur du film libre ne suit pas, comme dans le cas lisse, une loi de puissance en  $t$ . De plus, pour  $t > 100$  s, le drainage est plus rapide que sur une surface lisse, ce qui est dû au fait que celui-ci "glisse" sur le film captif, coulant donc plus facilement que sur un solide. Mais l'épaisseur totale (figure 3), elle, décroît plus lentement que sur une surface lisse, vu qu'une partie du film est freinée par les piliers.

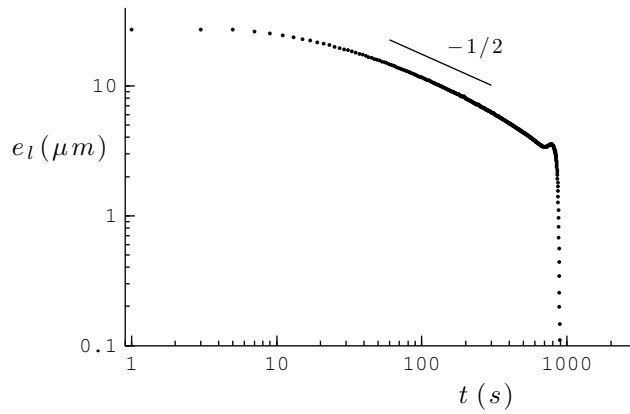


FIGURE 3.5 – Évolution du film libre  $e_l = e - h_p$  lors d'une expérience de drainage sur une surface texturée ( $h_p = 10,2 \mu\text{m}$ ,  $p = 10 \mu\text{m}$ , données de la figure 3). La droite représente la loi de drainage sur substrat lisse, en  $t^{-1/2}$ .

### 3.2.2 Interprétation à l'aide du modèle à deux couches

On peut poursuivre l'analyse en adaptant le raisonnement de Jeffrey présenté en 3.1.2 à notre modèle à deux couches. Le flux de liquide par unité de largeur  $q$  s'écrit dans ce cadre, d'après l'équation 2.4 (p. 31) (en négligeant la courbure du film et avec  $V = 0$ ) :

$$q = \frac{\rho g}{3\alpha\eta} (\alpha e_l^3 + 3e_l^2 h_p + 3e_l h_p^2 + h_p^3)$$

Il vient alors à partir de la conservation du débit  $\partial_x q = -\partial_t e = -\partial_t (e_l + h_p) = -\partial_t e_l$  :

$$\frac{\partial e_l}{\partial t} = -\frac{\partial e_l}{\partial x} \frac{\rho g}{\alpha\eta} (\alpha e_l^2 + 2e_l h_p + h_p^2) \quad (3.3)$$

L'équation 3.3 d'évolution du film libre  $e_l$  est semblable à l'équation 3.1 établie par Jeffreys pour le drainage sur une surface lisse (on retrouve le cas lisse lorsque  $h_p \rightarrow 0$  ou  $\alpha \rightarrow +\infty$  : la couche captive se comporte alors quasiment comme un solide), et peut être

analysée de la même manière. En particulier, on s'attend comme dans le cas lisse à ce que le film s'amincisse par le haut, et que l'épaisseur soit donc constante en début de drainage.

Supposons en outre que l'on dépose initialement un film de liquide d'épaisseur  $e_0 \gg h_p/\alpha$ . Au début du drainage, le premier terme du membre de droite de l'équation 3.3 est prépondérant, et l'on a :

$$\frac{\partial e_l}{\partial t} \sim -\frac{\partial e_l}{\partial x} \frac{\rho g e_l^2}{\eta}$$

$e_l$  évolue donc comme sur une surface lisse : épaisseur constante, puis décroissance en  $t^{-1/2}$ . Lorsque l'épaisseur diminue, le deuxième terme, issu du glissement de la couche libre sur la couche captive (avec une longueur de glissement  $h_p/\alpha$ ), devient de plus en plus important. Si on ne retient que lui, l'équation 3.3 devient :

$$\frac{\partial e_l}{\partial t} \sim -\frac{\partial e_l}{\partial x} \frac{2\rho g h_p e_l}{\alpha \eta}$$

Un raisonnement en loi d'échelle prédit alors une évolution de  $e_l$  en  $1/t$  :

$$e_l \sim \frac{\alpha \eta x}{2\rho g h_p t}$$

On ne distingue pas sur la figure 3.5 un premier régime en  $t^{-1/2}$  d'un second régime en  $t^{-1}$ . Or on s'attend à ce que cette deuxième loi de puissance soit observée lorsque le second terme de l'équation 3.3 est supérieur aux deux autres, c'est à dire lorsque :

$$\begin{cases} e_l h_p \gg h_p^2 \\ e_l h_p \gg \alpha e_l^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} e_l \gg h_p \\ e_l \ll \frac{h_p}{\alpha} \end{cases}$$

Le paramètre  $\alpha$  étant toujours supérieur à 1, ces deux inégalités ne peuvent être satisfaites en même temps, ce qui explique pourquoi on n'observe pas le régime "de glissement". Ce point renforce d'ailleurs l'idée exprimée au chapitre précédent que l'effet de la texture n'est pas simplement de rajouter du glissement à la paroi.

Néanmoins, cette discussion explique l'existence d'une épaisseur constante aux premiers instants du drainage, et justifie qualitativement la décroissance de plus en plus rapide de l'épaisseur (au fur et à mesure que le terme "de glissement" prend de l'importance). Mais surtout, comme on va le voir, ce raisonnement permet de comprendre la marche de la courbe de drainage.

## 3.3 Marche

### 3.3.1 Rôle du film captif

En effet, lorsque  $e_l$  diminue encore, le troisième terme du membre de droite de l'équation 3.3 peut devenir prépondérant. On a alors :

$$\frac{\partial e_l}{\partial t} = -\frac{\partial e_l}{\partial x} \frac{\rho g h_p^2}{\alpha \eta}$$

$e_l$  est solution d'une équation d'advection, ce qui signifie que le film liquide est translaté le long de la surface à la vitesse  $c$  :



$$c = \frac{\rho g h_p^2}{\alpha \eta} \quad (3.4)$$

Ainsi, la marche d'épaisseur observée sur les figures 3.4 et 3.5 est due au passage de l'extrémité du film liquide, que l'on distingue parfois directement à l'oeil nu.

Cette translation est liée à l'écoulement dans la texture, qui entraîne le film libre. En effet, sous l'effet de la gravité, il se crée dans le film captif un écoulement dont la vitesse typique  $v_p$  résulte d'un équilibre entre viscosité et gravité :

$$\eta_p \frac{v_p}{h_p^2} \sim \alpha \eta \frac{v_p}{h_p^2} \sim \rho g \quad \text{soit} \quad v_p \sim \frac{\rho g h_p^2}{\alpha \eta} \sim c$$

Cet écoulement existe dès le début du drainage, mais le flux  $q_p = v_p h_p$  qui lui est associé est négligeable devant le flux  $q_l$  dans le film libre tant que  $e > e_c$ . Le fait que  $q_p$  soit indépendant de l'épaisseur du film libre  $e_l$ , alors que  $q_l$  en dépend, assure néanmoins que l'écoulement dans la texture devient toujours prépondérant en fin de drainage.

Nous avons vu dans la partie 2.12 (p. 38) traitant des expériences de dépôt qu'un écoulement dans le film captif est également responsable de l'existence d'un nombre capillaire critique  $Ca_c$  en-deça duquel aucun film libre n'est déposé. Néanmoins, dans ce dernier cas, le liquide n'est pas mis en mouvement par la gravité (qui est alors négligeable), mais par le gradient de pression créé par le dépôt. Les deux phénomènes ne sont donc pas directement reliés.

### 3.3.2 Vitesse de translation du film libre

#### Mesure de $c$ , et comparaison à la théorie

Pour vérifier notre interprétation, nous avons mesuré, sur différentes surfaces texturées, la vitesse de translation du film libre en vue de la comparer à la prédiction. Le principe de la mesure a été de déplacer, au cours d'une expérience de drainage sur surfaces texturées, le point de mesure au cours du temps afin de suivre la marche de la "marche" de liquide.

En mesurant l'épaisseur de liquide  $e$  à intervalles réguliers (en général 1 s), nous avons commencé par placer la fibre au plus près du sommet de la surface. Nous avons ensuite attendu jusqu'à observer une chute brutale de l'épaisseur (pour  $e \sim e_c$ ), signe du passage de l'extrémité du film libre, puis nous avons déplacé (quasi-instantanément) le point de mesure (en général par pas de 2,5 mm) vers le bas, attendu le passage de la marche en ce nouveau point, et répété l'opération jusqu'à atteindre le bas de la surface. Les courbes obtenues, présentées sur la figure 3.6, nous permettent de suivre l'extrémité du film et de repérer, comme sur la figure 3.6, sa position en fonction du temps.

L'extrémité du film libre se déplace bien linéairement avec le temps, ce qui nous permet de déterminer sa vitesse  $c$ . Cette vitesse est comparée sur la figure 3.7 à la valeur prédite par le modèle à deux couches  $c = \frac{\rho g h_p^2}{\alpha \eta}$ . Il est à noter que la valeur de  $\alpha$  utilisée dans cette expression a été déterminée par les expériences de dépôt (partie 2.4, page 34).

La vitesse  $c$  est proportionnelle à la valeur prédite, et environ deux fois supérieure. Dans les expériences présentées, à la fois le pas  $p$  et la taille  $h_p$  de la texture ont été variés, ainsi que la viscosité  $\eta$  du liquide.

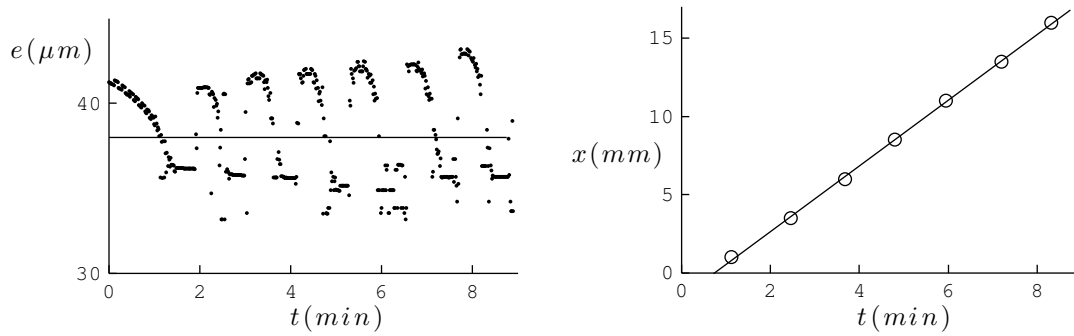


FIGURE 3.6 – Mesure de la vitesse de translation du film libre. À gauche : mesure de l'épaisseur du film en fonction du temps. Entre chaque courbes, le point de mesure a été déplacé de 2,5 mm vers le bas. La ligne horizontale représente la valeur d'épaisseur utilisée pour repérer le temps de passage du film ( $38 \mu m$ ). À droite : position de l'extrémité du film libre en fonction du temps. Le meilleur ajustement donne  $x(mm) = 2,1 t(min) - 1,57$ , soit  $c = 35,0 \mu m/s$ .

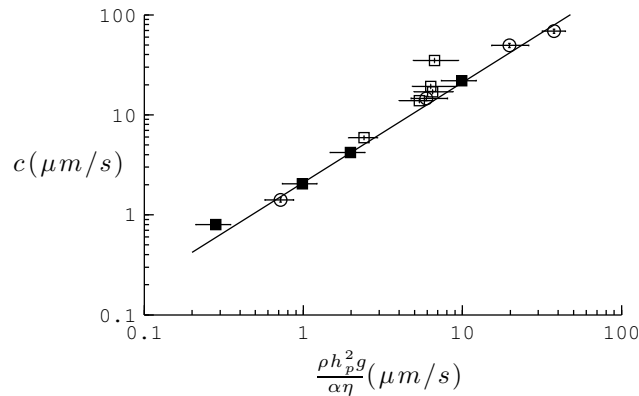


FIGURE 3.7 – Vitesse de translation du film mesurée  $c$  en fonction de la prédiction du modèle à deux couches (équation 3.4).  $\alpha$  est tiré des expériences de dépôt (partie 2.4, page 34). La droite a pour équation  $y = 2,1x$ . Les mesures ont été réalisées avec de l'huile de viscosité  $\eta = 19 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  sur des surfaces de pas  $p = 10 \mu m$  ( $\square$ ) et  $p = 20 \mu m$  ( $\circ$ ) et différentes hauteurs de piliers  $h_p$ . Les symboles pleins représentent les mesures réalisées pour  $p = 10 \mu m$ ,  $h_p = 10,2 \mu m$  et des viscosités  $\eta = 9,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta = 48 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta = 97 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta = 340 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ .

## Discussion

Notre analyse devrait prédire la valeur exacte de la vitesse de translation du film. Nous avons donc tenté de comprendre la facteur 2 entre prédiction et mesures. On pourrait en premier lieu penser à des effets de bords : du liquide pourrait s'échapper par les bords de la surface texturée (qui mesure environ 2 cm de large), accélérant ainsi le drainage. Néanmoins, deux mesures de  $c$  effectuées sur le même substrat, au milieu de la surface et à environ 2 mm du bord, fournissent le même résultat (à 2 % près), ce qui invalide cette hypothèse.

Nous avons également vérifié que  $c$  ne dépend pas de la condition aux limites imposée au bas de la surface. En particulier, deux mesures de vitesse réalisées l'une sur une surface à l'air libre, et l'autre sur la même surface en contact avec la bain de liquide donnent le même résultat à 3 % près.

Enfin, nous n'avons pas considéré ici la forme du film libre. En particulier, son éventuelle courbure qui pourrait modifier le gradient de pression présent dans le film, donc le drainage. Nous n'avons malheureusement trouvé aucun moyen de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

### 3.3.3 Épaisseur du film libre

L'interprétation que nous proposons de la "marche" d'épaisseur fournit également une estimation de la hauteur  $e_l^c$  du film libre juste avant que l'épaisseur ne décroisse brutalement. Cette épaisseur de liquide glissant au dessus de la texture a été mesurée et représentée sur la figure 3.8 en fonction de  $h_p$ .

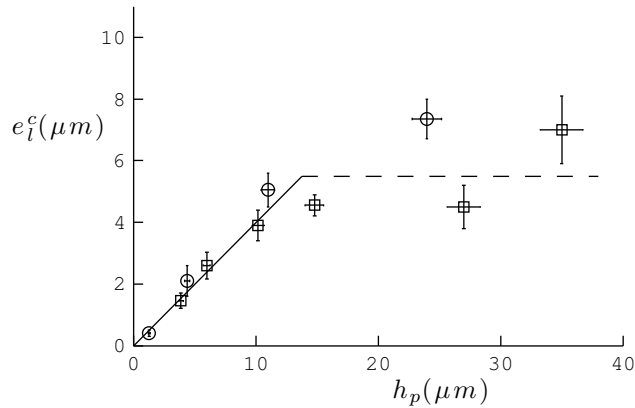


FIGURE 3.8 – Hauteur du film libre  $e_l^c$  juste avant la marche d'épaisseur, en fonction de  $h_p$ , pour des surfaces de pas  $p = 10 \mu\text{m}$  ( $\square$ ) et  $p = 20 \mu\text{m}$  ( $\circ$ ).  $e_l^c$  est proportionnel à  $h_p$  tant que  $h_p < 15 \mu\text{m}$ , puis sature à environ  $5,5 \mu\text{m}$  pour  $p = 10 \mu\text{m}$  (tirets). La droite a pour équation  $e_l^c = 0,4 h_p$ .

D'après notre modèle, cette épaisseur est telle que le troisième terme du membre de droite de l'équation 3.3 soit prépondérant devant les deux autres :

$$\begin{cases} \alpha e_l^2 < h_p^2 \\ e_l h_p < h_p^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} e_l^2 < \frac{h_p^2}{\alpha} \\ e_l < h_p \end{cases}$$

Si  $\alpha$  est petit (d'ordre 1), ces deux conditions sont satisfaites lorsque  $e_l \ll h_p$ . Si en revanche  $\alpha$  est grand, nous avons vu que  $\alpha \sim h_p^2/p^2$  (équation 2.1, page 30 et figure 2.10, page 35), la première condition devient  $e_l \ll p$ .

On s'attend donc à ce que  $e_l^c$  varie comme  $\min(h_p, p)$ . C'est ce qu'on observe sur la figure 3.8 pour les expériences réalisées avec  $p = 10 \mu\text{m}$  ( $\square$ ) :  $e_l^c$  est d'abord proportionnel à  $h_p$  (avec un facteur 0,4) puis sature à partir de  $h_p \approx 10 \mu\text{m}$  à une valeur proche de  $5 \mu\text{m}$ . Les expériences réalisées avec  $p = 20 \mu\text{m}$  ( $\circ$ ) sont indiscernables des précédentes tant que  $h_p < 10 \mu\text{m}$ , mais semblent saturer à une valeur plus élevée.

### 3.3.4 Blocage de l'écoulement dans la texture

Une façon de tester notre modèle consiste à bloquer l'écoulement dans la texture. Pour ce faire, nous avons utilisé des surfaces recouvertes de cuves carrées de côté  $p = 100 \mu\text{m}$  et de hauteur  $h_p = 11,4 \mu\text{m}$ , représentées sur la figure 3.9. Ces surfaces, qui nous ont été gracieusement fournies par les laboratoires de l'entreprise Essilor, ont des murs de quelques microns d'épaisseur. La fraction surfacique (fraction de la surface occupée par les murs) vaut alors environ 10%, ce qui est comparable à la valeur pour les surfaces texturées.

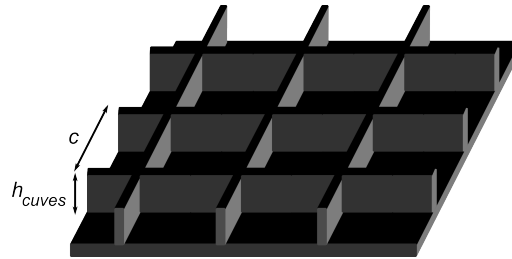


FIGURE 3.9 – Schéma d'une surface à cuves. Dans nos expériences,  $h_p = 11,4 \mu\text{m}$  et  $p = 100 \mu\text{m}$ .

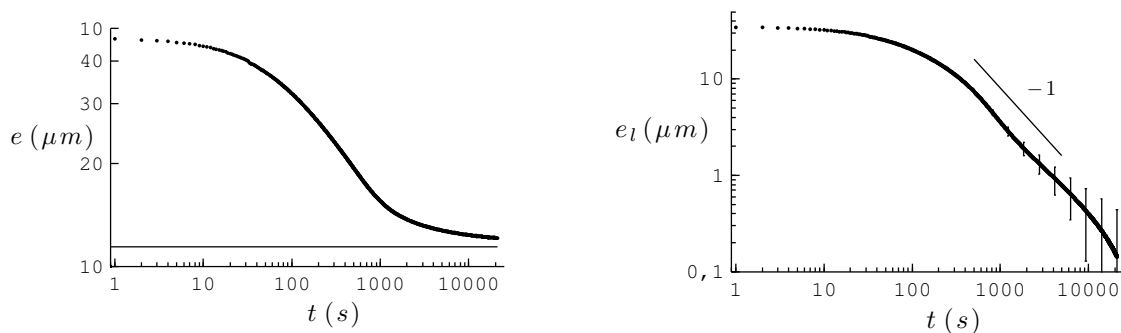


FIGURE 3.10 – Expérience de drainage sur une surface à cuves (cf. 3.9), avec une huile silicone de viscosité  $\eta = 19,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ . Figure de gauche : épaisseur totale de liquide  $e$  en fonction du temps. Figure de droite : épaisseur du film libre  $e_l = e - h_p$  en fonction du temps. La droite représente une loi de puissance en  $t^{-1}$ . L'importance des barres d'erreur en fin de drainage traduit la grande sensibilité de la courbe à la valeur de  $h_p$  choisie (nous l'avons supposée déterminée à 5 % près pour tracer les barres d'erreur).

La figure 3.10 présente, au cours d'une expérience de drainage, l'épaisseur totale de liquide  $e$  (graphique de gauche) et l'épaisseur du film libre  $e_l = e - h_p$  (à droite) en fonction du temps. On n'observe plus de décroissance brutale de l'épaisseur, ce qui confirme le rôle

crucial de l'écoulement dans la texture dans ce phénomène. De plus, l'évolution de  $e_l$  est compatible avec une décroissance en  $t^{-1}$  caractéristique d'un drainage sur une surface avec glissement.

### 3.4 Épaisseur d'équilibre en fin de drainage

Nous avons vu que l'épaisseur du film se stabilise en fin de drainage à la hauteur de la texture. Ce même équilibre est également obtenu lorsque l'on dépose un film liquide à très basse vitesse ( $Ca < Ca_c$ , cf. partie 2.12), ou en plongeant une extrémité de la surface dans le liquide et en laissant celui-ci imprégner spontanément la texture. Il paraît intéressant de préciser les mécanismes en jeu dans cet équilibre, et en particulier de se rendre compte que la gravité modifie en réalité l'épaisseur du film liquide.

#### 3.4.1 Gradient d'épaisseur de film

La figure 3.11 schématise en coupe l'interface liquide/air du film captif. La condition de mouillage total se traduit par un accrochage de la ligne de contact au sommet des piliers. De plus, le film liquide est le siège d'un gradient de pression hydrostatique, compensé à l'équilibre par la pression de Laplace issue de la déformation de l'interface. Plus précisément, notant  $R_c$  le rayon de courbure de l'interface, l'équilibre de ces deux pressions s'écrit (l'origine de l'axe  $x$  est à la surface du bain) :

$$\frac{\gamma}{R_c} = \rho g x \quad (3.5)$$

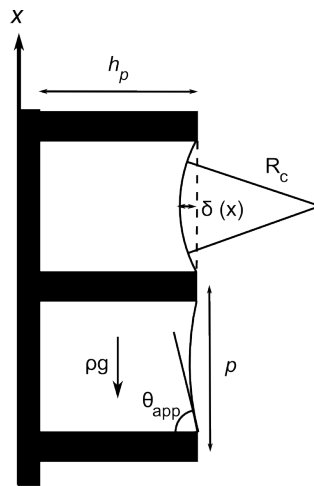


FIGURE 3.11 – Schéma du film captif en fin de drainage, soumis à la gravité. Entre les piliers, on assimile l'interface à une portion de sphère de rayon  $R_c$ .

Lorsque l'on s'éloigne de la surface, les effets de pression hydrostatique sont de plus en plus importants et l'interface est de plus en plus déformée. Le film ne pouvant pas se déformer indéfiniment, il ne peut exister que jusqu'à une hauteur maximale  $x_{max}$ . Plus précisément, le film pour exister doit rester accroché au sommet des piliers (sinon le raisonnement que nous avons présenté ne tient plus), ce qui se traduit par :

- un angle  $\theta_{app}$  entre le ménisque et le plot strictement positif, c'est à dire  $R_c > p/2$  en loi d'échelle (on suppose que l'interface forme une portion de sphère, ce qui est

justifié par le fait que la pression hydrostatique, donc la courbure de l'interface, sont quasiment constants à l'échelle de  $p$ ).

$$- \delta < h_p$$

C'est la géométrie de la texture qui détermine laquelle de ces inégalités est violée en premier, et fixe ainsi l'extension maximale du film (figure 3.12). Si les piliers sont "très" hauts par rapport à leur espacement (ce qui est le cas sur la plupart des surfaces utilisées jusqu'à présent) c'est la condition sur  $\theta_{app}$  qui est limitante. Associée à l'équation 3.5, elle fournit une hauteur maximale de film  $x_{max}$  :

$$x_{max} \sim 2 \frac{a^2}{p}$$

Cette hauteur, égale à celle atteinte par un liquide mouillant dans un capillaire de taille  $p$  (dite hauteur de Jurin), vaut environ 20 cm pour  $p = 20 \mu\text{m}$ . Si l'on veut faire tenir un film captif sur une grande surface avec une épaisseur homogène, il faut donc s'affranchir de la gravité, en le plaçant par exemple horizontalement. Ceci peut limiter l'intérêt de cette technique dans d'éventuelles applications pratiques. Les expériences présentées jusqu'ici ont été réalisées avec des surfaces d'environ 2 cm, sensiblement plus petites que  $x_{max}$ , ce qui explique que l'effet de la gravité sur le film captif résiduel ait été négligé.

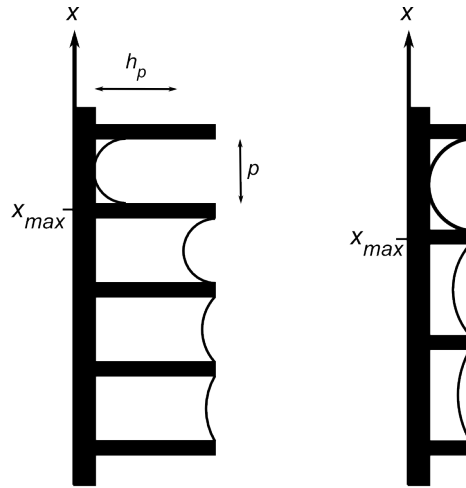


FIGURE 3.12 – Schéma des deux limites d'existence du film. Lorsque  $h_p \gg p$ , la taille du film est limitée par le détachement de l'interface du sommet des plots, qui a lieu lorsque l'angle  $\theta_{app}$  entre le ménisque et le plot s'annule. Lorsque  $h_p \ll p$ , le film s'arrête lorsque l'interface entre en contact avec la surface du wafer ( $\delta \sim h_p$ ).

Lorsque  $h_p$  est plus faible, ou lorsque les plots sont très espacés (ce qui est le cas pour les surfaces ultra-diluée utilisées à partir de la partie suivante), c'est la condition  $\delta < h_p$  qui fixe la taille du film. Plus précisément, la flèche  $\delta$  de l'interface entre deux piliers est reliée à  $R_c$  et au pas  $p$  du réseau par la relation (on néglige le rayon des piliers) :

$$R_c \sim \frac{\delta}{2} + \frac{p^2}{8\delta}$$

L'équation 3.5 fournit alors l'expression de  $\delta$  :

$$\delta(x) = \frac{a^2}{x} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{p^2 x^2}{4a^4}} \right)$$

Si l'on suppose que l'effet de la gravité est faible (soit  $\delta \ll p$ ), elle se simplifie en :

$$\delta(x) = \frac{p^2 x}{8a^2} \quad (3.6)$$

Cette dernière équation nous permet d'évaluer  $x_{max}$  dans le cas des petits plots. En effet,  $\delta(x_{max}) = h_p$  impose :

$$x_{max} \sim \frac{8a^2 h_p}{p^2} \quad (3.7)$$

Cette dernière expression n'est évidemment valable que si  $\delta \ll p$ , soit  $h_p \ll p$ . Elle nous indique également que la transition entre les deux expressions de  $x_{max}$  s'effectue pour  $h_p \sim p/4$  (la valeur de  $h_p$  pour laquelle les deux expressions sont égales). En récapitulant, on a donc :

$$\begin{cases} x_{max} \sim 2\frac{a^2}{p} & \text{lorsque } h_p \gtrsim \frac{p}{4} \\ x_{max} \sim \frac{8a^2 h_p}{p^2} & \text{lorsque } h_p \lesssim \frac{p}{4} \end{cases}$$

L'équation 3.6 fournit également une estimation du gradient de hauteur dû à la gravité, qui a une conséquence sur l'interprétation des expériences effectuées. On s'attend en effet à mesurer à l'aide de l'interféromètre (qui sonde une zone beaucoup plus grande que  $p$ ) une épaisseur de l'ordre de  $h_p - \delta$  : on devrait donc observer un gradient de hauteur sur notre plaque. Par exemple, la différence de hauteur entre le bas et le haut d'une surface de taille  $l$  est d'ordre :

$$\Delta e = \frac{p^2 l}{8a^2}$$

Sur les surfaces étudiées,  $l \approx 2$  cm, et  $\Delta e$  vaut donc  $0,1 \mu\text{m}$  pour  $p = 10 \mu\text{m}$  et  $0,5 \mu\text{m}$  pour  $p = 20 \mu\text{m}$ , valeurs plus faibles que les barres d'erreur présentées sur les différentes figures.

### 3.4.2 Mesure du gradient d'épaisseur

Pour conforter cette analyse, nous avons tenté de mesurer ce gradient d'épaisseur sur des surfaces texturées de pas  $p = 20 \mu\text{m}$ ,  $p = 20,6 \mu\text{m}$ ,  $p = 28 \mu\text{m}$  et  $p = 66 \mu\text{m}$ , que nous avons préalablement laissées reposer plusieurs heures en position verticale, puis sur lesquelles nous avons mesuré l'épaisseur de liquide résiduelle en fonction de l'altitude  $x$ .

La difficulté de cette mesure pour les surfaces de plus faible pas tient dans le fait que le gradient de hauteur escompté est très faible. La figure 3.13 présente sur le graphique de gauche trois courbes de hauteur de liquide captif en fonction de l'altitude  $x$ . Les croix et les points représentent deux réalisations de l'expérience, entre lesquelles la surface étudiée a été retournée (le "haut" de la surface s'est retrouvé en "bas"). Le fait que ces deux courbes ne se superposent pas (en particulier l'une est croissante alors que l'autre est décroissante) est très probablement dû à un gradient de hauteur des piliers sur toute la surface de l'échantillon.

Nous avons considéré la moyenne de ces deux courbes ( $\circ$ ), censée représenter l'effet de la gravité seule. Comme attendu, la hauteur de liquide varie d'une fraction de micron sur l'étendue de la plaque, et linéairement avec la hauteur. Le gradient de hauteur vaut  $0,8 \mu\text{m}/\text{cm}$  (il a été déterminé par un ajustement linéaire représenté en trait plein sur la

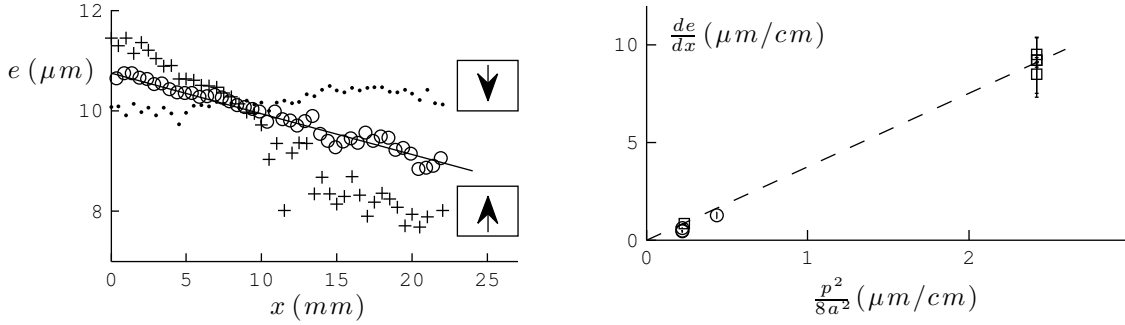


FIGURE 3.13 – Figure de gauche : épaisseur du film captif en fonction de la hauteur  $x$ , pour une surface de pas  $p = 20,6 \mu\text{m}$ .  $x = 0$  représente le bas de la surface. Les croix (+) et les points ( $\bullet$ ) représentent deux mesures entre lesquelles la surface étudiée a été retournée, les cercles (o) la moyenne des deux courbes précédentes. L’ajustement linéaire permet de mesurer le gradient d’épaisseur. Figure de droite : gradient mesuré sur différentes surfaces, porté en fonction de la prédiction  $\frac{p^2}{8a^2}$ . o : surfaces pour lesquelles le rayon  $b$  des piliers vaut environ  $1 \mu\text{m}$ .  $\square$  :  $b \approx 3 \mu\text{m}$ . Les barres d’erreur sont évaluées en ajustant l’épaisseur sur une moitié des points de mesure, puis sur l’autre moitié. La droite a pour équation  $y = 3,8x$ .

courbe), et est compatible avec la valeur attendue de l’ordre de  $0,2 \mu\text{m}/\text{cm}$ . Le graphe de droite de la figure 3.13 montre le gradient d’épaisseur mesuré sur différentes surfaces. Malgré le manque de données, on peut conclure que le gradient d’épaisseur augmente bien avec  $p$ . Il semble de plus bien proportionnel à la valeur attendue  $\frac{p^2}{8a^2}$ , avec un coefficient de proportionnalité proche de 4. Au delà des valeurs mesurées, ces expériences illustrent le fait que le film captif est tenu par la texture, par exemple en montrant que son épaisseur moyenne diminue lorsque l’on diminue la densité de piliers.

### 3.5 Dépôt et drainage sur des surfaces ultra-diluées

Nous avons vu que l’effet de la gravité sur le film captif résiduel est en général négligeable dans les expériences réalisées jusqu’à présent : l’épaisseur de liquide en fin de drainage est homogène, égale à la hauteur des piliers. La gravité devient très sensible pour des textures très diluées. Par exemple, les surfaces de pas  $p = 66 \mu\text{m}$  ont des piliers de  $11,4 \mu\text{m}$  de haut, petits devant  $p$ . On peut estimer la taille maximale du film captif qu’elles peuvent supporter à l’aide de la formule 3.7, qui fournit une valeur  $x_{max} \sim \frac{8a^2 h_p}{p^2} \approx 5 \text{ mm}$  compatible avec l’épaisseur mesurée sur la figure 3.14. Nous allons voir que cette propriété modifie à la fois la loi de drainage, et la loi de dépôt.

#### 3.5.1 Expériences de drainage

Le drainage sur cette surface diffère évidemment un peu de ce que l’on a vu jusqu’à présent ( $p = 10 \mu\text{m}$  ou  $p = 20 \mu\text{m}$ ), ne serait-ce que du point de vue de l’état final. En particulier, on s’attend à observer deux régimes, selon que la mesure d’épaisseur est effectuée pour  $x > x_{max}$  (l’épaisseur finale est alors nulle), ou pour  $x < x_{max}$  (l’épaisseur finale est alors comparable à  $h_p$ ). La figure 3.15 présente une expérience de drainage dans chacune de ces situations.



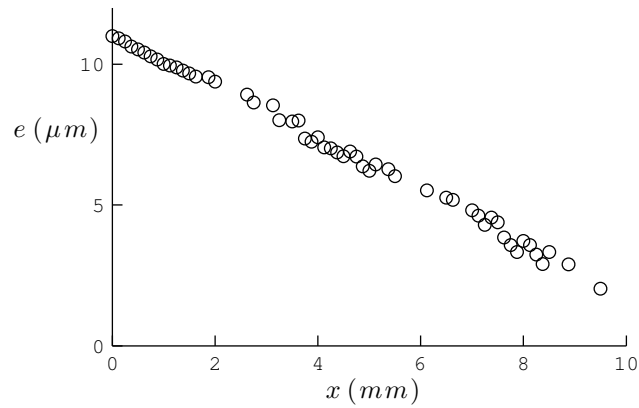


FIGURE 3.14 – Épaisseur de liquide résiduelle en fonction de l'altitude, sur une surface de pas  $p = 66 \mu\text{m}$  avec  $h_p = 11,4 \mu\text{m}$ .

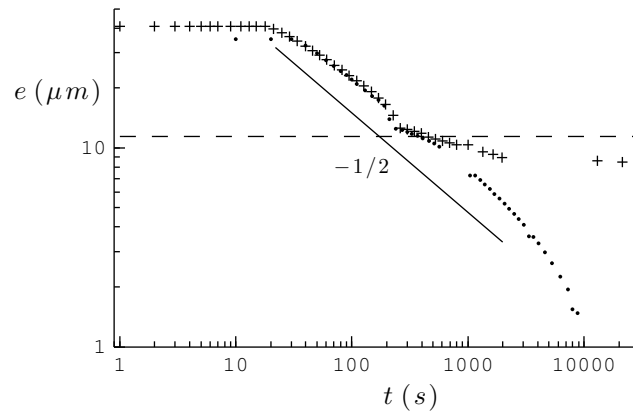


FIGURE 3.15 – Expérience de drainage pour  $p = 66 \mu\text{m}$ ,  $h_p = 11,4 \mu\text{m}$ ,  $\eta = 19,5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ .  
 + : mesure en  $x = 4 \text{ mm}$ , valeur pour laquelle l'épaisseur en fin de drainage vaut  $7 \mu\text{m}$  (cf. figure 3.14).  
 • : mesure en  $x = 2 \text{ cm} > x_{max}$ , l'épaisseur finale est alors nulle. La ligne horizontale représente  $h_p$ , tandis que la droite en trait plein décrit une loi de puissance en  $t^{-1/2}$ , caractéristique du drainage sur une surface lisse.

En début de drainage (jusqu'à  $t \approx 300$  s,  $e \approx h_p$ ), les deux courbes sont identiques, et qualitativement proches de celles obtenues sur des surfaces de pas plus faible. On observe en effet un plateau, puis une décroissance progressive, et enfin une chute brutale de l'épaisseur jusqu'à  $h_p$ . Ceci n'est pas inattendu : tant que  $e > h_p$ , l'interface liquide/air n'est pas perturbée par les piliers. La hauteur du "saut" d'épaisseur vaut  $e_c = 3,6 \mu\text{m}$ , ce qui est en accord avec les mesures de  $e_c$  réalisées précédemment : la courbe d'ajustement présentée sur la figure 3.8 (page 50) prédit  $e_c = 4,6 \mu\text{m}$ .

Les courbes se différencient en revanche pour  $e < h_p$ . La première (pour  $x \approx 4$  mm) décroît, comme attendu d'après la figure 3.14, jusqu'à  $e = 8 \mu\text{m}$  puis se stabilise. La seconde en revanche décroît jusqu'à  $e = 0$ . Lors de cette dernière expérience, si l'on s'intéresse à l'ensemble du drainage, l'épaisseur suit globalement une loi de puissance de la forme  $t^{-0,5}$ , identique à ce que l'on observerait sur une surface lisse. Ce comportement est cohérent avec le fait que dans cette configuration la texture n'a plus un effet prépondérant (ce qui s'illustre par l'incapacité des piliers à soutenir le film captif) : la surface se rapproche d'une surface lisse lorsque la densité de plots diminue. Comprendre quantitativement le régime de drainage nécessiterait probablement de prendre en compte la déformation de la surface du film captif qui modifie la pression dans le liquide, et influe ainsi sur le drainage. De plus, cette déformation génère probablement une dissipation supplémentaire qu'il faudrait également considérer.

### 3.5.2 Expériences de dépôt

On peut aussi se demander quelle est la loi de dépôt sur une telle surface. En effet, vu que  $p \gg h_p$ , on s'attend à ce que  $\alpha$  soit proche de 1 : l'épaisseur déposée  $e_d$  devrait être égale à l'épaisseur prédite par Landau-Levich-Derjaguin, avec néanmoins une épaisseur minimale  $h_p$  (cf. partie 2.2.3, page 27). La figure 3.16 confirme partiellement cette analyse : l'épaisseur déposée  $e_d$  suit bien la loi de LLD pour  $Ca > 10^{-3}$ . En revanche, on n'observe pas de véritable plateau à bas  $Ca$  : l'épaisseur déposée décroît légèrement avec  $Ca$ . Ceci est dû au fait que la mesure est effectuée en un point de la surface d'abscisse  $x_f > x_{max}$  : l'épaisseur d'équilibre du film captif est nulle.

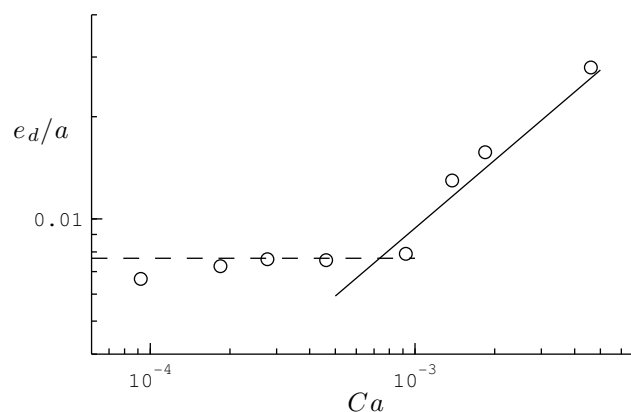


FIGURE 3.16 – Expérience de dépôt pour  $p = 66 \mu\text{m}$  et  $h_p = 11,4 \mu\text{m}$ . La ligne pointillée horizontale et la courbe en traits pleins représentent respectivement la hauteur des plots et la loi de LLD.

Pour comprendre un peu mieux ce phénomène, supposons que l'on puisse négliger à ces nombres capillaires les effets visqueux (ce qui est vérifié si l'épaisseur prédite par LLD au

nombre capillaire correspondant est plus faible que la hauteur des piliers) : l'entraînement est simplement dû au "remplissage" de la texture par capillarité. Si l'on suit un point donné de la surface, au moment où il sort du bain, les effets de gravité sont négligeables, et le film captif remplit l'intégralité de la texture ( $e = h_p$ ). Au cours du dépôt, plus ce point s'élève et plus la gravité s'y fait sentir.

Si le dépôt est plus lent que le drainage dans la texture, l'épaisseur de liquide au point de mesure est égale à l'épaisseur d'équilibre (discutée au paragraphe précédent), qui décroît avec l'altitude jusqu'à s'annuler pour  $x_f = x_{max}$ . On retrouve ainsi la situation obtenue lors de l'imprégnation spontanée, à vitesse nulle, de la surface. Si en revanche le dépôt n'est pas si lent, l'épaisseur mesurée en un point  $x_f$  ne peut se déterminer qu'en considérant le drainage dans la texture, et peut prendre, en fonction de la vitesse de tirage, des valeurs comprises entre l'épaisseur d'équilibre (nulle pour l'expérience présentée) et  $h_p$ .

### 3.6 Conclusion

L'étude du drainage de films liquides sur des surfaces texturées a mis en évidence deux effets spectaculaires de la rugosité : une accélération très importante de ce drainage lorsque l'épaisseur du film libre devient de l'ordre du pas du réseau et une stabilisation en fin de drainage de l'épaisseur de liquide à la hauteur des piliers. L'étude de l'accélération du drainage, due au fait que le film libre glisse sur le liquide captif des piliers, a été l'occasion de souligner l'importance primordiale de l'écoulement dans la texture dans la compréhension des phénomènes observés, qui ne peuvent s'expliquer à l'aide d'un simple glissement.

L'épaisseur de liquide présente en fin de drainage est identique à l'épaisseur déposée à très faible vitesse de tirage. Nous avons discuté, au chapitre précédent, de l'intérêt pratique de cette gamme de vitesses de tirage pour laquelle l'épaisseur est constante. Les caractéristiques du drainage texturé que nous avons mentionnées suggèrent qu'il pourrait être rentable d'accéder à ce régime de dépôt en laissant drainer un film initialement plus épais.

Nous nous sommes enfin intéressés à l'effet de la densité de plots sur les phénomènes observés. Nous avons en particulier montré que le film captif résiduel possède un gradient d'épaisseur dû à la gravité, qui est d'autant plus sensible que la taille des surfaces utilisées augmente ou que la densité de la texture diminue. En utilisant des surfaces ultra-diluées (pour lesquelles le pas du réseau vaut une centaine de micromètres), nous avons illustré le fait que les lois de dépôt et de drainage s'approchent du cas lisse lorsque le nombre de piliers diminue.

Deuxième partie  
Dépôt forcé de fluide



# Chapitre 4

## Dépôt de fluide par une membrane élastique

*Dans toutes ces malheureuses opérations, qu'on ne croie pas que l'huile restât d'huile : après un court laps de temps les deux expérimentateurs se retrouvèrent gélatineux et, ce qui est pire, oléibonds, si le contexte permet au chroniqueur de forger ce mot, sans que l'on doive lui en imputer la source.*

Umberto ECO, *L'île du jour d'avant*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>62</b>
4.1.1	Motivations	62
4.1.2	Présentation du montage expérimental	62
4.1.3	Méthodes de mesure de l'épaisseur	64
<b>4.2</b>	<b>Forme du racloir</b>	<b>65</b>
4.2.1	Résistance à la flexion	66
4.2.2	Équilibre mécanique	68
4.2.3	Forme statique du racloir	69
<b>4.3</b>	<b>Expériences de dépôt dans la configuration "mouillante"</b>	<b>72</b>
4.3.1	Épaisseur entraînée en fonction de $\tilde{y}_0$	72
4.3.2	Mesure de l'épaisseur déposée	73
4.3.3	Prédiction en loi d'échelle de l'épaisseur déposée	74
4.3.4	Comparaison avec les expériences	75
4.3.5	Un dépôt élastique "à la LLD" ?	76
<b>4.4</b>	<b>Coefficient de la loi de dépôt</b>	<b>78</b>
4.4.1	Présentation du modèle	78
4.4.2	Forme du racloir dynamique	79
4.4.3	Couplage entre élasticité et contraintes visqueuses	79
4.4.4	Conditions aux limites	80
4.4.5	Raccord avec le racloir statique, et coefficient	81
<b>4.5</b>	<b>Différences avec l'expérience</b>	<b>82</b>
4.5.1	Une situation expérimentale bien décrite ?	82
4.5.2	Effet de la largeur de racloir	82

<b>4.6</b>	<b>Prise en compte de la largeur finie du dépôt</b>	<b>84</b>
4.6.1	Correction au modèle	84
4.6.2	Correction constante	86
<b>4.7</b>	<b>Autres régimes de dépôt</b>	<b>87</b>
4.7.1	Régime très appuyé : $y_0 < y_m$	88
4.7.2	Régime de "mouillage partiel" : $y_0 > y_m$	88
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

## 4.1 Dispositif expérimental

### 4.1.1 Motivations

Nous avons étudié dans les chapitres précédents le dépôt de fluide par trempage, qui consiste à immerger une surface solide dans un bain de liquide totalement mouillant, puis à l'en retirer à vitesse constante. Dans le régime des faibles épaisseurs de dépôt, l'épaisseur du film liquide entraîné résulte d'un équilibre entre forces d'entraînement visqueuses et forces d'origine capillaire.

Une manière imagée de décrire qualitativement les phénomènes en jeu consiste à imaginer que le ménisque statique joue le rôle d'un racloir. La présence du film liquide perturbe la forme d'équilibre du ménisque statique, qui cherche alors à retrouver sa "position d'équilibre" (d'énergie minimale). De plus, les systèmes dominés par la capillarité présentent souvent de caractéristiques de solides élastiques (parce que la tension de surface s'oppose aux déformations). Des gouttes soumises à une vibration présentent ainsi différents modes de résonance[96]. De même, une goutte que l'on lâche d'une hauteur modérée sur un substrat superhydrophobe rebondit plusieurs fois, exactement comme le ferait une bille[70].

On se demande dans ce chapitre si l'analogie peut être poursuivie dans notre système. Que devient la loi de dépôt lorsque l'on remplace le ménisque statique par une membrane flexible, qui s'oppose à l'entraînement par des forces non plus capillaires mais élastiques ? Cette configuration de l'étalement de liquide par un racloir est très utilisée dans le monde industriel[47], car elle permet de contrôler indépendamment l'amplitude de l'entraînement (qui dépend essentiellement de la viscosité du liquide employé et de la vitesse d'entraînement) et la force qui s'y oppose (qui dépend des propriétés du racloir), ce qui permet par exemple d'augmenter la vitesse de dépôt sans modifier l'épaisseur de liquide entraînée. Néanmoins, il n'existe pas, à notre connaissance, de description précise des phénomènes en jeu.

### 4.1.2 Présentation du montage expérimental

La technique de dépôt étudiée consiste à déposer une quantité importante de liquide sur une plaque de dépôt en verre, puis à l'étaler à l'aide d'un racloir flexible. Il se dépose alors derrière le racloir un film liquide d'épaisseur  $e_d$  comprise dans nos expériences entre 10  $\mu\text{m}$  et 1 mm. Comme le schématise la figure 4.1, c'est en réalité la plaque de dépôt qui est translaturée horizontalement à une vitesse  $V$  constante. Le mouvement, qui se fait sur environ 30 cm, est assuré par un moteur à courant continu entraînant, via une vis sans fin, la platine de translation. Un variateur (que nous avons calibré) permet de maintenir  $V$  constante et de l'ajuster 0,7 mm/s et 19 mm/s.

Comme lors des expériences de dépôt de fluide par trempage, nous avons déposé des huiles silicones de différentes viscosités, qui ont l'avantage de mouiller totalement les surfaces utilisées. Leur viscosité  $\eta$ , comprise entre  $0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et  $17,4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , est plus importante que dans les expériences précédentes. Les nombres capillaires atteints varient ainsi entre  $10^{-1}$  et  $10^4$ , on s'attend donc à ce que la tension de surface ait un effet négligeable dans la plupart des cas.

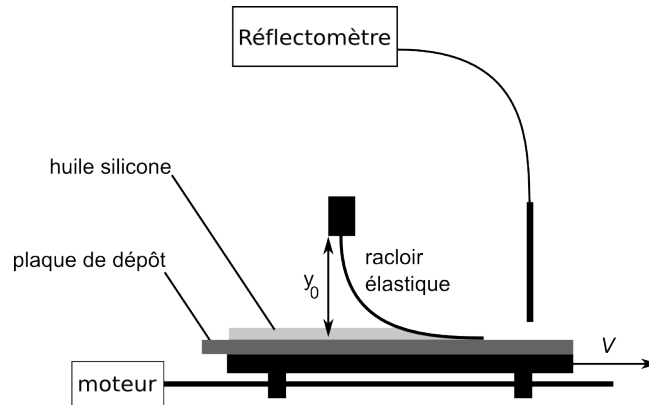


FIGURE 4.1 – Schéma de l'expérience de dépôt : de l'huile silicone est déposée sur la plaque de dépôt, puis étalée à l'aide d'un racloir flexible mû par rapport à la plaque à une vitesse  $V$  constante. L'épaisseur de liquide déposée est mesurée à l'aide d'un interféromètre, et par pesée.

La plaque de dépôt a une largeur  $b$  comprise entre 2 cm et 8 cm (3 cm dans la plupart des expériences présentées dans ce chapitre). Nous les avons choisies en verre, qui se trouve facilement, qui réfléchit assez la lumière pour autoriser les mesures par réflectométrie, et qui reste longtemps lisse. Les racloirs utilisés sont légèrement plus larges que la plaque de dépôt (de 0,5 cm ou 1 cm) afin que le surplus de liquide s'échappe par les bords du système. D'ailleurs, un point un peu délicat du montage concerne la préparation de la plaque de dépôt. Il est en effet nécessaire d'y déposer préalablement l'huile qui sera étalée (contrairement à la configuration d'enduction par trempage, il n'y a pas de réservoir de liquide dans cette expérience). Nous avons en premier lieu vérifié que la façon dont on dépose le liquide (étalé sur toute la largeur de la plaque de dépôt, concentré au centre ou déposé par "paquets") n'influence pas l'épaisseur mesurée. Nous avons également vérifié que cette épaisseur est indépendante de la quantité de liquide initialement présente (à partir du moment où cette dernière est environ deux fois supérieure à la quantité restant après dépôt).

Ce sont de simples rectangles de longueur  $L$  centimétrique découpés dans des plaques minces en plastiques de différentes provenances (en mylar, principalement). La découpe, qui s'effectue au massicot, laisse un "morfil" sur un des côtés du racloir (ce morfil, visible à la loupe binoculaire, doit mesurer une dizaine de microns). Nous avons toujours pris garde à déposer le fluide à l'aide du côté intact. Les racloirs sont caractérisés par leur rigidité  $B$  ( $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$  et  $B = 14,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$  pour les racloirs les plus utilisés dans ce chapitre). La définition de la rigidité est introduite dans la partie 4.2 (page 65), qui présente des notions d'élasticité et s'intéresse à la forme statique du racloir, et la méthode utilisée pour la mesurer est présentée dans l'annexe B (page 153).

Enfin, ces racloirs sont encastrés verticalement à une distance  $y_0$  de la plaque de dépôt. Cette distance constitue, avec la vitesse d'entraînement  $V$ , la viscosité du fluide  $\eta$ , la



rigidité du racloir  $B$  et sa taille  $L$ , un dernier paramètre de contrôle de l'épaisseur de liquide déposée.

### 4.1.3 Méthodes de mesure de l'épaisseur

#### Mesure par interférométrie

La première technique de mesure que nous avons utilisée pour déterminer l'épaisseur du film déposé, l'interférométrie, a été décrite en détail au chapitre 1 (partie 1.1.3, page 9). Elle permet une mesure locale (moyennée sur d'environ 0,5 mm de diamètre), précise et quasiment instantanée d'épaisseurs comprises entre une fraction et 70 microns environ. Les épaisseurs plus importantes sont mesurées par pesée de la plaque de dépôt (paragraphe suivant).

Cette technique de mesure locale nous a permis de vérifier que le film est d'épaisseur constante. Néanmoins, probablement du fait des défauts présents sur les raclours (ou des impuretés qui se déposent au cours de l'expérience), les mesures effectuées à l'aide de l'interféromètre sont plus bruitées que dans l'expérience de dépôt par trempage. Chaque mesure a donc été répétée cinq fois en des points espacés d'environ 1 cm, les barres d'erreur tracées sur les figures correspondant aux valeurs extrêmes relevées. La moyenne des dispersions relevées est de 3  $\mu\text{m}$ , et la plupart d'entre elles sont inférieures à 8  $\mu\text{m}$ . Il semble donc que l'épaisseur minimale accessible (de manière reproductible) avec notre expérience soit de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ .

#### Mesure par pesée

Le principe de la deuxième méthode de mesure employée est très simple : il consiste à peser la plaque de dépôt avant et après chaque expérience pour en déduire la quantité de fluide qui y a été déposé puis, connaissant ses dimensions, l'épaisseur moyenne du film liquide. En pratique, nous avons établi un protocole de mesure un peu plus précis. En premier lieu, le film liquide est déposé sur une plaque d'environ 30 cm de long. Le film est ensuite essuyé sur les 5 premiers et derniers centimètres, car des mesures préalables réalisées par interférométrie nous ont appris que le film met environ une longueur de raclour à s'établir. Les bords de la plaque de dépôt, et sa surface inférieure sont également essuyés pour enlever le surplus d'huile qui y a coulé. Enfin la plaque est pesée, sa masse est comparée à sa masse à vide (mesurée avant chaque série d'expériences) et l'épaisseur calculée. Sur une plaque de 3 cm, la variation de masse attendue est de l'ordre de 0,6 g pour un film de 100  $\mu\text{m}$ , ce qui rentre tout à fait dans la gamme de mesure de la balance utilisée (affichage à 0,1 mg), mais ce qui reste faible par rapport à la masse de la plaque de dépôt (de l'ordre de 50 g). Pour augmenter la précision de la mesure, nous avons donc utilisé des plaques de dépôt les plus fines possibles (2 mm), et nous avons pris garde aux effets électrostatiques et aux courants d'air pouvant perturber la lecture.

Une autre source d'incertitude provient de l'erreur commise sur les dimensions du film, notamment parce qu'on en essuie les extrémités "à la main". 2 mm de dérapage de chaque côté du film se traduisent par une erreur relative sur l'épaisseur de l'ordre de 4%. Enfin, la plus importante source d'incertitude aux faibles épaisseurs réside probablement dans la difficulté à bien essuyer la plaque de dépôt. Pour tester cet effet, nous avons enduit une plaque, que nous avons ensuite entièrement essuyée. Une mesure par pesée nous a permis de calculer que le film résiduel a une épaisseur d'environ 10  $\mu\text{m}$ , ce qui se traduit par une

surestimation systématique de l'épaisseur déposée de l'ordre de  $5\ \mu\text{m}$  (car seul une face de la plaque de dépôt est essuyée).

Les barres d'erreur des mesures par pesée tiennent compte de ces deux derniers effets : une surestimation systématique de l'ordre de  $5\ \mu\text{m}$  (car seul une face de la plaque de dépôt est essuyée), et une erreur relative de  $\pm 4\%$ . Contrairement aux mesures par interférométrie, certaines des mesures par pesées représentées dans la suite ne possèdent pas de barre d'erreur, simplement parce que l'information qu'elles apportent (l'application d'une formule) ne nous a pas toujours semblé compenser la difficulté de lecture qu'elles engendrent.

### Comparaison entre les deux méthodes

Un véritable inconvénient de la mesure par pesée est qu'elle suppose que le film est d'épaisseur constante. C'est ce qui la rend par exemple très délicate à utiliser dans les expériences de dépôt par trempage, car le film s'épaissit fortement aux bords de la surface à enduire. La figure 4.2 présente les épaisseurs de dépôt  $e_d$  mesurées lors d'une expérience typiques et compare les deux méthodes de mesure. Les deux méthodes fournissent des résultats comparables, ce qui nous rassure quant à la pertinence de la mesure.

Comme attendu, l'interférométrie fournit des valeurs plus plausibles aux faibles épaisseurs ( $e_d < 20\ \mu\text{m}$ ) : les mesures par pesées atteignent en effet un plateau autour de  $e_d = 15\ \mu\text{m}$  (ce qui est cohérent avec les limites évoquées au paragraphe précédent). Les deux méthodes fournissent néanmoins des épaisseurs comparables sur une large gamme d'épaisseurs intermédiaires ( $16\ \mu\text{m} < e_d < 70\ \mu\text{m}$ ). Dans la suite, nous ne distinguons pas les deux techniques de mesure. Néanmoins, les mesures par pesée pour des épaisseurs de films inférieures à  $20\ \mu\text{m}$  ont été rejetées.

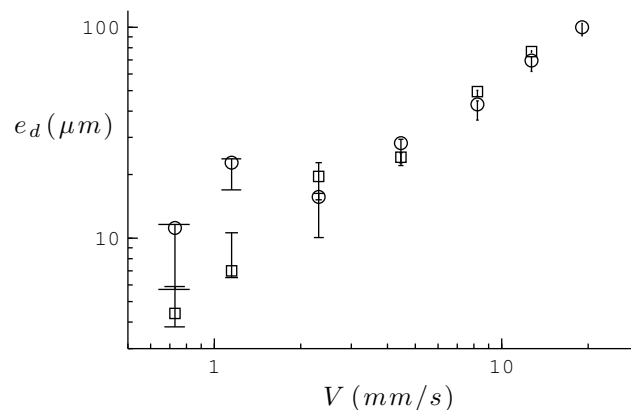


FIGURE 4.2 – Épaisseur de liquide déposée en fonction de la vitesse de tirage  $V$ , mesurée par interférométrie ( $\square$ ) ou par pesée ( $\circ$ ). Les autres paramètres de l'expérience sont :  $B = 4,2 \cdot 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4\ \text{cm}$ ,  $y_0 = 18,4\ \text{mm}$  et  $\eta = 0,98\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ .

## 4.2 Forme du racloir

Nous cherchons dans cette partie à déterminer la forme d'équilibre statique du racloir. Pour cela, nous assimilons le racloir à une poutre élastique de longueur  $L$ , d'épaisseur  $h$  et de largeur  $b$ . Nous considérons de plus que le problème est bidimensionnel : toutes les quantités considérées sont invariantes selon la largeur de la plaque (cf. figure 4.3).

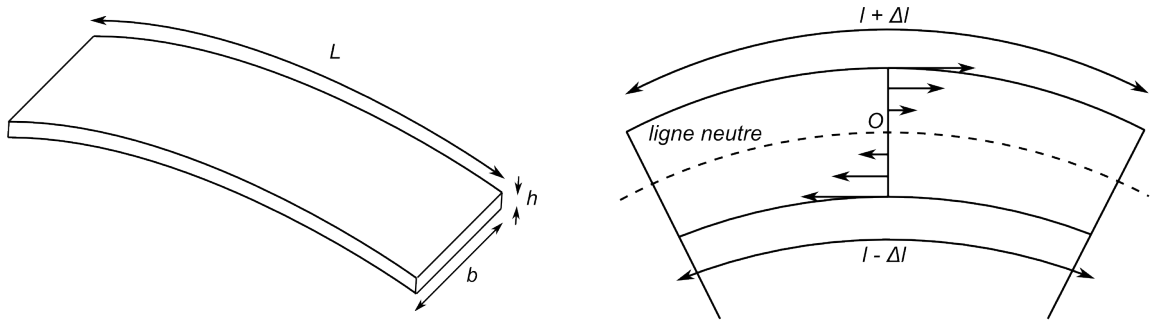


FIGURE 4.3 – Notations utilisées pour décrire les dimensions des raclours utilisés (à gauche), et schéma d'une poutre courbée (à droite) : les flèches représentent l'allongement local.

Si les équations régissant la forme de telles poutres sont bien connues [31], il nous a paru utile de présenter de manière simplifiée les arguments qui y conduisent.

## 4.2.1 Résistance à la flexion

### Flexion d'un poutre

Les matériaux utilisés pour fabriquer nos raclours (typiquement du mylar) obéissent, dans le régime de contraintes aux-elles nous les soumettons, à la loi de Hooke (1678) : la force nécessaire pour allonger d'une poutre de section transversale  $S$  est proportionnelle à  $S$  et à l'allongement relatif, le coefficient de proportionnalité étant le module de Young, caractéristique du matériau (environ  $5 \cdot 10^9$  Pa pour les matériaux considérés). Néanmoins, les forces appliquées (de l'ordre du Newton) sont assez faibles pour que l'on néglige cet allongement (l'allongement relatif est de l'ordre de un pour mille). Le caractère élastique des raclours se manifeste donc uniquement dans leur flexion.

Considérons en effet dans un premier temps une portion de poutre de longueur  $l$ , d'épaisseur  $h$  et dont la largeur est du même ordre que  $h$ , caractérisée par son rayon de courbure  $R_c$ . Le matériau est comprimé à l'intérieur de la courbure, et étiré à l'extérieur de celle-ci (cf figure 4.3, à droite). Plus précisément, on appelle fibre neutre la ligne le long de laquelle l'allongement du matériau est nul. Si le rayon de courbure de la poutre est faible devant son épaisseur, cette ligne est au centre de gravité de la section transversale de la poutre, et l'allongement relatif en un point de la poutre est alors proportionnel à sa distance  $y$  à la fibre neutre, le coefficient de proportionnalité étant  $1/R_c$ . En chaque point de la section, le matériau résiste à cette déformation par une contrainte proportionnelle à l'allongement relatif local, ce qui est à l'origine d'un moment (au point 0)  $M$  qui s'y oppose :

$$M = \int_{y=-h/2}^{y=h/2} y dF = \int_{y=-h/2}^{y=h/2} y E \epsilon dS = \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{y^2}{R_c} dS = \frac{EI}{R_c}$$

Le moment de flexion est donc inversement proportionnel au rayon de courbure de la poutre, résultat formulé par Euler en 1744 lors de son étude des tiges élastiques. Le coefficient de proportionnalité (que l'on appelle rigidité de la poutre) est le produit du module de Young  $E$  du matériau, et du moment d'inertie  $I$  de sa section. Dans le cas qui nous préoccupe, on calcule facilement  $I$  en intégrant la relation précédente :

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

### Module de Poisson

En réalité, la section d'une telle poutre ne reste pas constante. En effet, lorsque l'on étire un matériau dans une direction, il se contracte dans une direction perpendiculaire, et inversement. Plus précisément, l'allongement relatif perpendiculaire  $\epsilon_{\perp}$  est relié à l'allongement longitudinal  $\epsilon_l$  par le module de Poisson  $\nu$  :

$$\epsilon_{\perp} = -\nu\epsilon_l$$

Le module de poisson est une caractéristique du matériau qui varie entre 0 et 0,5 (cas d'un matériau incompressible), et qui est souvent d'ordre 0,3. La section d'une poutre élastique cintrée s'évase ainsi à l'intérieur de la courbure (où le matériau est comprimé longitudinalement), et s'amincit là où le matériau est étiré. Mais cette déformation ne modifie pas le raisonnement présenté, et en particulier l'expression de la rigidité (du moins tant que le rayon de courbure est grand devant l'épaisseur de la poutre).

### Flexion de plaques

Il en est autrement lorsque l'on considère la flexion de plaques, dont la largeur  $b$  est beaucoup plus grande que leur épaisseur  $h$  (ce qui correspond à nos racloirs, pour lesquels  $h/b \approx 0,01$ ). Si l'on considère la limite d'une plaque de largeur infinie, on ne peut avoir de déformation dans une direction perpendiculaire, ce qui rajoute des contraintes longitudinales.

Pour aller plus loin, on peut exprimer une généralisation de la loi de Hooke qui tienne compte de ces effets de Poisson (voir par exemple [53]). Notant respectivement  $\epsilon_l$ ,  $\epsilon_h$  et  $\epsilon_b$  les déformations de la plaque selon sa longueur, sa largeur et sa hauteur, et  $\sigma_l$ ,  $\sigma_h$  et  $\sigma_b$  les contraintes correspondantes, on a :

$$\epsilon_l = \frac{1}{E} (\sigma_l - \nu(\sigma_b + \sigma_h)) \quad (4.1)$$

$$\epsilon_h = \frac{1}{E} (\sigma_h - \nu(\sigma_b + \sigma_l)) \quad (4.2)$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{E} (\sigma_b - \nu(\sigma_l + \sigma_h)) \quad (4.3)$$

On retrouve la loi de Hooke lorsque le coefficient de Poisson  $\nu$  est nul. Dans le cas contraire, ce dernier lie les contraintes et les déplacements dans les trois directions. Dans notre géométrie, la contrainte  $\sigma_h$  est nulle sur les deux faces de la plaque. Vu que l'épaisseur  $h$  est "faible", on considère alors qu'elle est nulle dans tout le matériau.

Lorsque  $b$  est du même ordre que  $h$ , le même argument s'applique à  $\sigma_b$ , et la contrainte longitudinale  $\sigma_l$  qui nous permet de calculer le couple est inchangée par rapport à une "simple" loi de Hooke (équation 4.1).

En revanche, annuler dans le cas  $b \gg h$  les déplacements  $\epsilon_b$  dans la largeur de la plaque, impose d'après l'équation 4.3 une contrainte transverse  $\sigma_b = \nu\sigma_l$ , ce qui se traduit par une contrainte longitudinale augmentée (cf. équation 4.1) :

$$\sigma_l = E \frac{\epsilon_l}{1 - \nu^2}$$

Tout se passe donc comme si le module de Young était multiplié par un facteur  $(1 - \nu^2)^{-1}$ . On en déduit alors que la rigidité vaut, pour une plaque ( $b \gg h$ ) :  $\frac{EI}{1 - \nu^2}$ . On peut noter que

pour les matériaux usuels, ce terme correctif est de l'ordre de 10 %, et donc difficilement observable.

Dans toute la suite, nous n'étudierons que des situations invariantes selon la largeur de la poutre. On introduit donc pour des raisons de commodité la rigidité par unité de largeur de la plaque, que l'on note  $B$  ( $B = \frac{EI}{b(1-\nu^2)}$ ). Le point important est que la rigidité augmente très rapidement avec l'épaisseur de la poutre, ce qui permet d'explorer aisément à partir d'un même matériau une grande gamme de rigidités.

## 4.2.2 Équilibre mécanique

Lorsqu'on caractérise une plaque mince à l'aide de sa rigidité, on peut considérer son épaisseur nulle et ne s'intéresser qu'à la forme de sa surface neutre. On la détermine en écrivant l'équilibre mécanique (équilibre des forces et des moments) en tout point de cette plaque. Comme sur la figure 4.4, on repère sa forme à l'aide de son abscisse curviligne  $s$ , et de l'angle  $\theta(s)$  qu'elle forme avec la verticale. On note de plus  $\vec{F}(s)$  et  $\Gamma(s)$  la force et le moment (positif dans le sens trigonométrique) exercées par la portion de poutre comprise entre  $s$  et  $s = L$  sur la portion comprise entre  $s = 0$  et  $s$ . On note enfin  $\vec{f}_{ext}$  la force extérieure linéique appliquée.

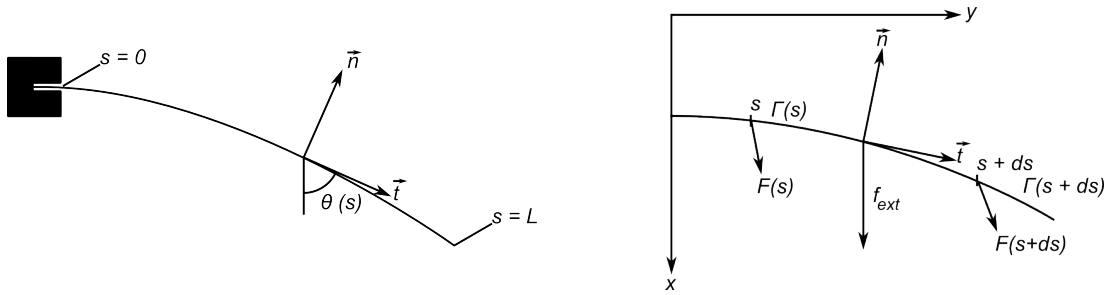


FIGURE 4.4 – Notations utilisées pour exprimer l'équilibre mécanique d'une poutre.  $\vec{F}(s)$  et  $\Gamma(s)$  sont la force et le couple exercés en un point de la poutre par la portion de poutre située "à sa droite".

Nous avons vu que  $\Gamma(s)$  est relié au rayon de courbure de la poutre, soit :

$$\Gamma = EI \frac{d\theta}{ds} \quad (4.4)$$

De plus, si l'on considère une portion de poutre comprise entre  $s$  et  $s + ds$ , l'équilibre des forces s'écrit :

$$\vec{F}(s + ds) - \vec{F}(s) + \vec{f}_{ext} ds = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}_{ext} \quad (4.5)$$

De même, l'équilibre des moments s'écrit alors, à l'ordre 1 en  $ds$  :

$$\Gamma(s + ds) - \Gamma(s) - (\vec{F} \times \vec{t}) \cdot \vec{u}_z ds = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\Gamma}{ds} = (\vec{F} \times \vec{t}) \cdot \vec{u}_z \quad (4.6)$$

Ces trois équations (4.4, 4.5 et 4.6), associées aux conditions aux limites ad hoc, déterminent la forme de la poutre sous l'effet du champ de force extérieur considéré.

### 4.2.3 Forme statique du racloir

#### Deux régimes

Dans notre expérience, le racloir est encastré verticalement à son extrémité supérieure, à une distance  $y_0$  de la surface de dépôt. On s'est toujours placé dans la limite où son poids est négligeable devant la force à appliquer pour maintenir le racloir, sa forme est alors entièrement déterminée par cette contrainte géométrique.

Nous avons visualisé la forme du racloir en marquant sa tranche à l'aide de blanc correcteur, puis en la "photographiant" à l'aide d'un scanner. L'utilisation d'un scanner (plutôt que d'un appareil photo) évite les erreurs de parallaxe. De plus, l'éclairage frontal (et très proche de l'objet) qu'il procure nous permet d'obtenir des images très contrastées : la tranche du racloir apparaît très blanche sur un fond quasiment noir. Il est alors très facile d'en extraire la forme. La figure 4.6 présente (en blanc) un montage des formes obtenues pour une plaque de 10 cm de long, et différentes valeurs de  $Y_0$  (de 9 cm à 10 cm).

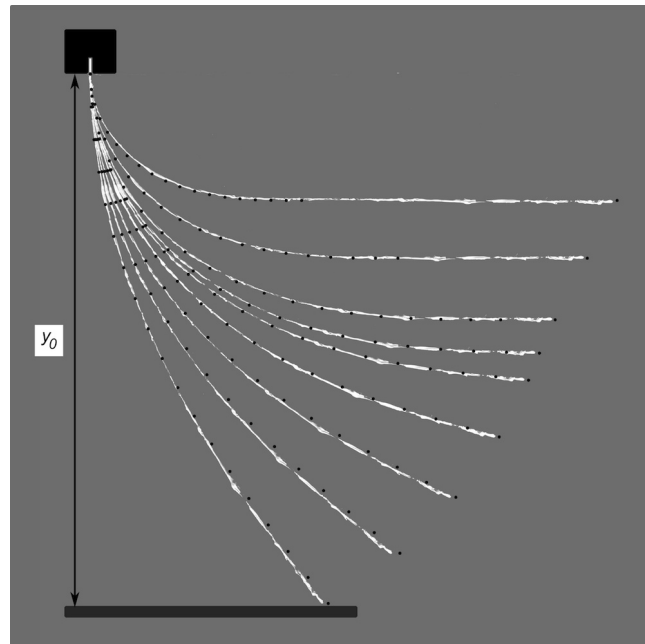


FIGURE 4.5 – Les courbes blanches représentent la forme mesurée du racloir, encastré verticalement comme dans notre expérience, pour différentes valeurs de  $\tilde{y}_0$  (environ 0,9, 0,8, 0,7, 0,6, 0,5, 0,46, 0,4, 0,3, 0,2),  $L = 10$  cm,  $b = 3$  cm et  $h = 260 \mu\text{m}$ . Les points noirs représentent la forme calculée d'après les équations de l'élasticité.

Lorsque le racloir n'est pas très contraint (plus précisément lorsque  $y_0/L > y_m = 0,46$ , comme nous le verrons dans la suite), seule son extrémité est en contact avec la plaque de dépôt, qu'elle rejoint avec un angle "de contact"  $\theta_c$ . Plus  $y_0$  diminue et plus cet angle décroît, jusqu'à s'annuler pour  $y_0 = y_m$ . Pour des valeurs plus faible de  $y_0$ , une portion finie du racloir est au contact du support.

#### Équation de la forme du racloir

La forme du racloir est régie comme dans les paragraphes précédents par les équations 4.4, 4.5 et 4.6, la seule force extérieure en présence étant la réaction de la plaque de dépôt  $F_f$  (on néglige le poids). Cette force (qui est égale et opposée à la force que l'on

exerce pour maintenir le racloir) est a priori inconnue. Elle est localisée au premier point de contact du racloir avec le support, et verticale lorsque l'on néglige les frottements. Avec les notations de la figure 4.6, l'équation 4.5 devient alors (pour la portion de racloir qui n'est pas en contact avec le support) :

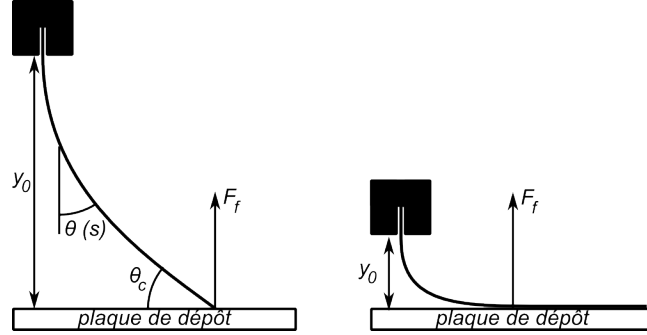


FIGURE 4.6 – Schéma du racloir utilisé dans nos expériences. Notez en particulier que la plaque de dépôt exerce une force de réaction  $F_f$  sur l'extrémité du racloir. Lorsque  $y_0 > y_m$  (à gauche), seule l'extrémité du racloir touche la plaque de dépôt, qu'elle rejoint avec un angle  $\theta_c > 0$ . Lorsque  $y_0 < y_m$ , une portion finie du racloir est en contact avec le support.

$$\vec{F}(s) = c\vec{t}e = \vec{F}_f$$

L'équation 4.6 fournit :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = -F_f \sin \theta \quad \text{soit avec l'équation 4.4 : } \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{F_f}{EI} \sin \theta$$

On adimensionne  $s$  par la longueur  $L$  du racloir (la variable sans dimension est notée  $\tilde{s}$ ). On introduit alors la force sans dimension  $f = \frac{F_f L^2}{EI}$ , obtenant :

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{s}^2} = -f \sin \theta \quad (4.7)$$

La première condition aux limites associées à cette équation provient de la condition d'encastrement de la plaque en  $\tilde{s} = 0$ , soit  $\theta(\tilde{s} = 0) = 0$ . Néanmoins, préciser la deuxième condition nécessite de considérer séparément le cas où seule l'extrémité du racloir est en contact avec le support ( $y_0 > y_m$ ) des autres.

### Régime peu appuyé

Dans le premier cas, l'extrémité du racloir est laissée "libre" en  $\tilde{s} = 1$ , d'où l'on déduit :  $\frac{d\theta}{d\tilde{s}}(1) = 0$ . Cette condition supplémentaire permet de résoudre l'équation 4.7 pour toute valeur de la force  $f$ . Néanmoins, en pratique, ce n'est pas la force que l'on impose dans le dispositif, mais la valeur de  $y_0$ , que l'on relie à la force résultante en imposant que l'extrémité du racloir se trouve à une distance  $y_0$  de son extrémité encastree :

$$\int_{\tilde{s}=0}^{\tilde{s}=1} \cos \theta d\tilde{s} = \tilde{y}_0 = \frac{y_0}{L}$$

$f$  (que l'on détermine numériquement), et donc la forme adimensionnée du racloir, ne dépendent que de  $\tilde{y}_0$ . En revanche, la force réellement appliquée dépend à la fois des

propriétés mécaniques du racloir, et de sa taille :  $F_f = f \frac{EI}{L^2}$ . On observe de plus sur la figure 4.5 que la forme calculée est très proche de la forme observée.

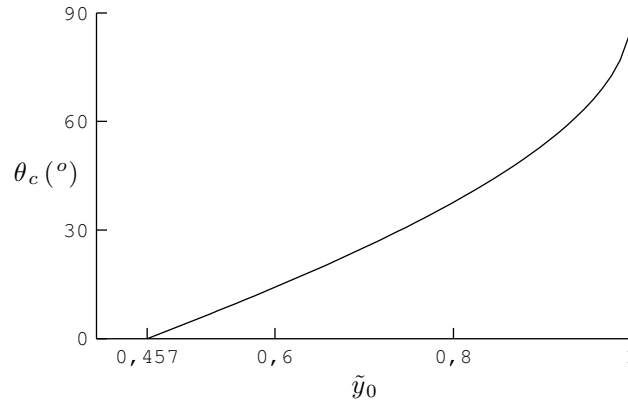


FIGURE 4.7 – Angle  $\theta_c$  entre le racloir et la plaque de dépôt, en fonction de  $\tilde{y}_0$ . Cet angle s'annule pour  $\tilde{y}_0 < \tilde{y}_m = 0,457$ .

La figure 4.7 présente pour illustration l'angle  $\theta_c$  entre l'extrémité du racloir et la plaque de dépôt en fonction de  $\tilde{y}_0$ . Cet angle tend vers  $90^\circ$  lorsque  $\tilde{y}_0 \rightarrow 1$ , car le racloir s'approche de la verticale. Il décroît avec  $\tilde{y}_0$ , jusqu'à s'annuler pour  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m \approx 0,46$ .

### Régime "mouillant"

La valeur de  $\tilde{y}_m$  est déterminée en étudiant le cas particulier (dans lequel nous nous sommes placés dans la plupart de nos expériences) dans lequel le racloir est "juste" tangent à la plaque de dépôt, c'est à dire que  $\theta(\tilde{s} = 1) = \pi/2$ . Cette condition remplace la contrainte géométrique, et permet de déterminer la valeur de la force correspondante, soit  $f_m \approx 3,438$ , ce qui permet de déterminer  $\tilde{y}_m$ .

### Régime fortement appuyé

Le régime  $\tilde{y}_0 < \tilde{y}_m$  s'étudie de manière un peu différente. Il faut en effet séparer le racloir en une partie qui n'est pas au contact de la plaque de dépôt ( $0 < s < l_c$ ), régie par les équations de l'élasticité, et une partie rectiligne ( $l_c < s < L$ ) plaquée au support (figure 4.6) qui a donc une courbure nulle. Par continuité, le raccord entre ces deux régions impose ainsi une tangente horizontale et une courbure nulle à l'extrémité de la partie libre, qui satisfait donc aux mêmes conditions aux limites que le racloir "mouillant" du paragraphe précédent. Sa forme, lorsqu'on l'adimensionne par  $l_c$ , et donc la même que dans ce dernier cas.

En particulier,  $\tilde{y}_0$  vaut alors  $\tilde{y}_m l_c$ , ce qui permet de déterminer la valeur de  $l_c$  en fonction de la valeur de  $\tilde{y}_0$  imposée :  $l_c = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_m} L$ . On en déduit que la force appliquée varie comme  $\tilde{y}_0^{-2}$  :

$$F_f = f_m \frac{EI}{l_c^2} = f_m \frac{EI}{L^2} \left( \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{y}_0} \right)^2$$

En conclusion, la figure 4.8 présente la force adimensionnée  $f$  calculée, qui décroît lorsque  $\tilde{y}_0$  augmente. Même pour  $\tilde{y}_0 > \tilde{y}_m$ ,  $f$  semble suivre une loi de puissance d'exposant  $-0,43$ . On peut de plus noter que, lorsque  $\tilde{y}_0 \rightarrow 1$ ,  $f$  tend comme attendu vers  $\frac{\pi^2}{4} \approx 2,467$ , qui est la force nécessaire pour faire flamber une poutre élastique dans cette configuration.



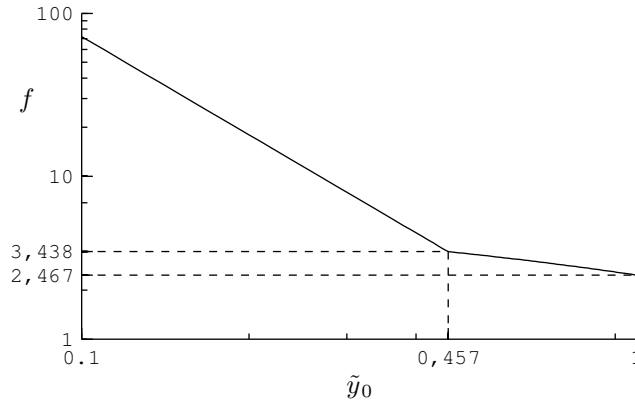


FIGURE 4.8 – Force adimensionnée  $f$  qui s'exerce sur l'extrémité du racloir, en fonction de  $\tilde{y}_0$ . Pour  $\tilde{y}_0 < \tilde{y}_m$ , cette force varie comme  $\tilde{y}_0^{-2}$ .  $f = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,467$  est la force nécessaire pour faire flamber le racloir.

Plus généralement, on peut insister sur le fait que la force décroît de manière monotone avec  $\tilde{y}_0$ , même si la décroissance est beaucoup moins rapide à partir de  $\tilde{y}_m$ .

### 4.3 Expériences de dépôt dans la configuration "mouillante"

#### 4.3.1 Épaisseur entraînée en fonction de $\tilde{y}_0$

Nous avons en premier lieu mesuré, pour différentes combinaisons de paramètres (vitesse  $V$  de la plaque de dépôt, viscosité  $\eta$  de l'huile, rigidité  $B$  du racloir), l'épaisseur de liquide  $e_d$  déposée en fonction  $\tilde{y}_0$ . Les courbes obtenues sont toutes qualitativement semblables à celle présentée sur la figure 4.9. L'épaisseur déposée, qui semble s'annuler lorsque  $\tilde{y}_0 \rightarrow 0$ , augmente dans un premier temps rapidement avec  $\tilde{y}_0$ , passant d'environ  $50 \mu\text{m}$  à  $500 \mu\text{m}$  entre  $\tilde{y}_0 = 0,1$  et  $\tilde{y}_0 = 0,4$ . Ceci est cohérent avec le fait que la force exercée par le racloir sur le film liquide diminue avec  $\tilde{y}_0$  : le liquide passe donc de plus en plus facilement.

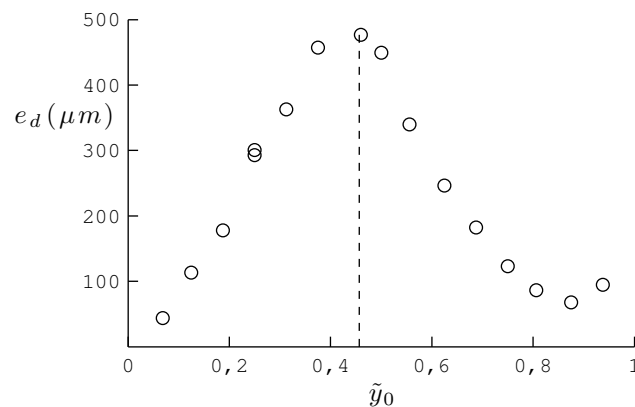


FIGURE 4.9 – Épaisseur  $e_d$  de liquide déposée en fonction de  $\tilde{y}_0$ . Dans cette expérience,  $V = 8,2 \text{ mm/s}$ ,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$  et  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Les pointillés représentent  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ .

La caractéristique inattendue de cette expérience est que  $e_d$  passe par un maximum pour  $\tilde{y}_0 \approx \tilde{y}_m$  (dans la configuration que nous avons baptisée par analogie avec le problème

de LLD classique de "mouillage total"). Au delà, l'épaisseur déposée décroît en effet jusqu'à atteindre environ  $50 \mu\text{m}$  pour  $\tilde{y}_0 = 0,9$ . Enfin, l'épaisseur déposée remonte légèrement pour les très grandes valeurs de  $\tilde{y}_0$ . Devant la richesse (et donc la complexité...) du problème, nous avons en premier lieu tenté de comprendre les phénomènes en jeu pour  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ , qui est la configuration dans laquelle le racloir est "juste" tangent à la plaque de dépôt, pour laquelle l'épaisseur déposée est maximale.

### 4.3.2 Mesure de l'épaisseur déposée

Dans cette configuration, l'épaisseur de liquide déposée ne dépend plus que de quatre paramètres :  $\eta$ ,  $V$ ,  $B$  et  $L$  ( $\tilde{y}_0$  vaut  $0,46 L$ ). Comme on peut le voir sur la figure 4.10 (en considérant chaque symbole séparément),  $e_d$  augmente avec  $V$ . Plus précisément, tracer l'épaisseur en fonction de  $\eta V$  nous permet de regrouper les mesures réalisées pour différentes viscosités et différentes vitesses de dépôt (toutes choses égales par ailleurs) sur une courbes maîtresse (qui semble être une loi de puissance) dépendant des autres paramètres (les symboles vides, les symboles pleins, et les *petits* symboles représentent chacun un couple  $L$ ,  $B$ ).

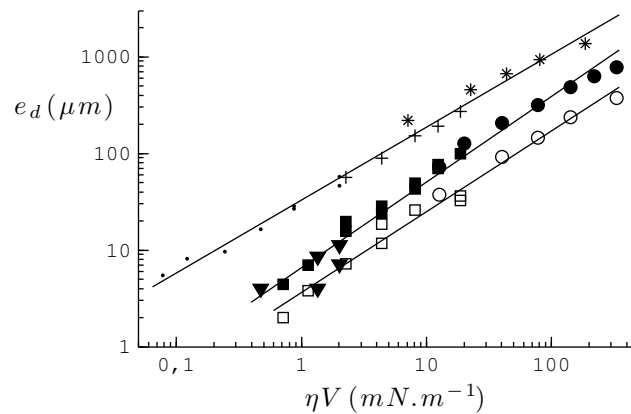


FIGURE 4.10 – Épaisseur déposée en fonction de  $\eta V$ , pour  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $\eta = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\nabla$  et  $\cdot$ ),  $\eta = 0,98 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\square$  et  $+$ ) et  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\circ$  et  $*$ ). Les grands symboles ( $\circ$ ,  $\square$ ,  $\nabla$ ) sont pour  $L = 4 \text{ cm}$ , les symboles pleins correspondant à un racloir de rigidité  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  et les symboles vides à  $B = 14,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Les petits symboles ( $\cdot$ ,  $+$ ,  $*$ ) représentent  $L = 6 \text{ cm}$  et  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Les lois de puissance représentées sont d'exposant  $0,75$ ,  $0,88$  et  $0,83$ .

Les épaisseurs déposées varient de  $1 \mu\text{m}$  à  $1 \text{ mm}$ , et sont environ un ordre de grandeur plus faibles que les épaisseurs que l'on obtiendrait, avec les mêmes huiles et la mêmes vitesses de tirage, dans une configuration d'enduction par trempage. Les "grands" symboles représentent une longueur de racloir  $L = 4 \text{ cm}$ . Les symboles pleins sont pour une rigidité environ trois fois inférieure aux symboles vides : l'épaisseur décroît lorsque  $B$  augmente. Enfin, augmenter  $L$  d'un facteur  $3/2$  (petits symboles) permet d'augmenter l'épaisseur déposée d'un facteur  $2$  à  $3$  (à comparer aux symboles pleins). Plus précisément, la figure 4.11 présente l'épaisseur mesurée en fonction de la longueur du racloir  $L$  ( $B$ ,  $V$ ,  $\eta$  étant gardés constants,  $y_0$  étant ajusté pour être toujours dans la configuration de "mouillage total" :  $y_0 = \tilde{y}_m L$ ). L'épaisseur suit une loi de puissance en  $L$ , d'exposant  $2,5$ .

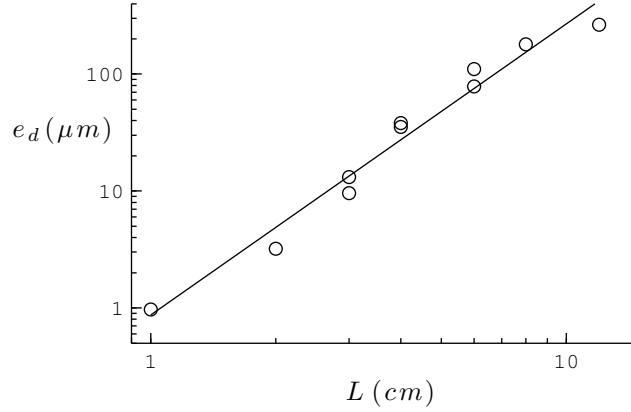


FIGURE 4.11 – Épaisseur déposée en fonction de  $L$  :  $y_0 = 0,46 L$ ,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $V = 4,4 \text{ mm/s}$ . Le meilleur ajustement par une loi de puissance fournit un exposant 2,5.

### 4.3.3 Prédiction en loi d'échelle de l'épaisseur déposée

#### Épaisseur $e_d$ déposée

Dans cette expérience l'épaisseur est déterminée par un équilibre entre forces visqueuses d'une part, et forces élastiques d'autre part : ce sont ces deux composantes que nous tentons d'évaluer ici, en nous inspirant du raisonnement présenté pour déterminer en loi d'échelle la loi de Landau-Levich-Derjaguin (partie 1.2.3, page 14).

En premier lieu, le nombre de Reynolds déterminé à l'aide des valeurs typiques de  $e_d$ ,  $V$  et  $\eta$  est inférieur à 0,1 : on peut donc négliger l'inertie dans le film. De plus, le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes s'écrit en ordre de grandeur  $\eta \frac{V}{e_d^2}$  : on peut vérifier qu'il est plus important que le terme gravitaire  $\rho g$ . Cette force volumique visqueuse est donc équilibrée par un gradient de pression. Si l'on suppose que l'équilibre s'effectue sur une taille  $l$  à partir de l'extrémité du racloir, on peut écrire :

$$\eta \frac{V}{e_d^2} \sim \frac{\Delta P}{l}$$

$\Delta P$  représente ici la pression exercée par le racloir sur le fluide. Or nous avons calculé dans les paragraphes précédents la force  $F$  exercée par le racloir, ce qui nous permet d'estimer  $\Delta P$  :

$$F \sim \frac{Bb}{L^2} \quad \text{d'où} \quad \Delta P \sim \frac{F}{lb} = \frac{B}{L^2 l}$$

L'équilibre s'écrit alors en ordre de grandeur

$$\eta \frac{V}{e_d^2} \sim \frac{B}{l^2 L^2} \quad (4.8)$$

La difficulté réside dans la détermination de  $l$ . En effet, la région de taille sur laquelle les forces en présence s'équilibrent est telle que l'épaisseur de liquide soit d'ordre  $e_d$ , mais la forme du racloir lorsqu'il est déformé par le liquide est a priori inconnue. Néanmoins, on peut dans un premier temps supposer, comme dans la théorie de LLD, que la forme statique du racloir est peu perturbée.  $l$  serait alors la distance (comptée à partir de l'extrémité du racloir) pour laquelle celui-ci atteint une hauteur  $e_d$  (figure 4.12).

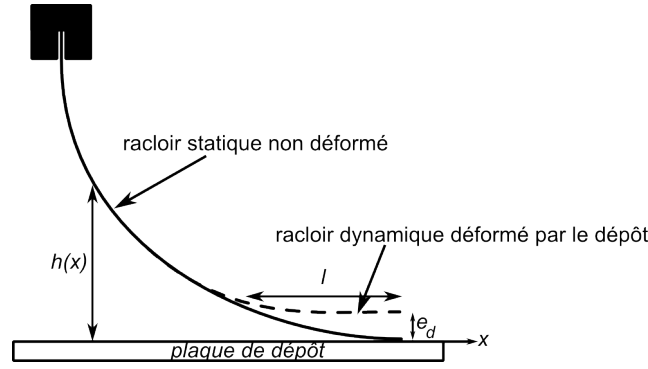


FIGURE 4.12 – Schéma du racloir non déformé (traits pleins), et en présence d'un film liquide de taille  $e_d$ .

La différence fondamentale avec le problème de LLD réside dans la forme du racloir, différente de la forme du ménisque statique, dont la courbure au point de contact n'est pas nulle. Le racloir statique, au contraire, est défini par un angle "de contact"  $\theta_c$  et une courbure au point de contact ( $\frac{d\theta}{ds}$ ) nuls. La hauteur  $h$  du racloir vaut alors près du point de contact (dont on note  $x_c$  l'abscisse) :  $h(x) \sim \frac{(x_c - x)^3}{L^2}$ . On en déduit  $l$  par la condition  $h(l) = e_d$ , qui fournit :

$$l \sim (e_d L^2)^{1/3}$$

En combinant cette expression avec l'équation 4.8, on prédit que l'épaisseur déposée doit être proportionnelle à  $L$ , et à un nombre sans dimension  $Ce^{3/4}$ . Ce nombre sans dimension, égal à  $\frac{\eta VL^2}{B}$ , compare les effets visqueux à la force élastique exercée par le racloir :

$$e_d \sim L \left( \frac{\eta VL^2}{B} \right)^{3/4} = LCe^{3/4} \quad (4.9)$$

Cette prédiction justifie la loi de puissance observée sur les figures 4.11 : on s'attend en effet à ce que  $e_d$  augmente comme  $L^{5/2}$ , toutes choses égales par ailleurs.

### Limites

Ce raisonnement suppose que la zone déformée  $l$  soit petite devant la taille du racloir  $L$ . Or,  $l \ll L$  équivaut ici à  $e_d^{1/3} \ll L^{1/3}$ , soit  $Ce^{1/4} \ll 1$  ce qui est assez bien vérifié dans nos expériences :  $Ce^{1/4}$  varie entre 0,2 et 0,7.

Enfin, nous avons négligé ici tout gradient de pression d'origine capillaire. La plus petite grandeur présente dans le problème étant  $e_d$ , on peut supposer qu'une différence de pression d'origine capillaire est au maximum d'ordre  $\gamma/e_d$ , ce qui correspond (dans l'équation 4.8) à un gradient de pression  $\gamma/(e_d l)$ . On peut le négliger devant le terme élastique tant que  $\frac{B}{L^2 l^2} > \frac{\gamma}{e_d l}$  soit  $\frac{B}{L^2 \gamma} > \left( \frac{L}{e_d} \right)^{2/3}$ . Pour  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  et  $L = 4 \text{ cm}$ , le premier terme de l'inégalité est d'ordre 100. Notre hypothèse est donc vérifiée, dans le pire des cas, tant que  $e_d$  est plus grand que  $20 \mu\text{m}$ .

### 4.3.4 Comparaison avec les expériences

La figure 4.13 présente l'ensemble des mesures effectuées dans la configuration mouillante ( $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ ). Comme prédit par le raisonnement en loi d'échelle,  $e_d$  est proportionnel à  $L Ce^{3/4}$ ,

sur environ trois ordres de grandeur d'épaisseur.

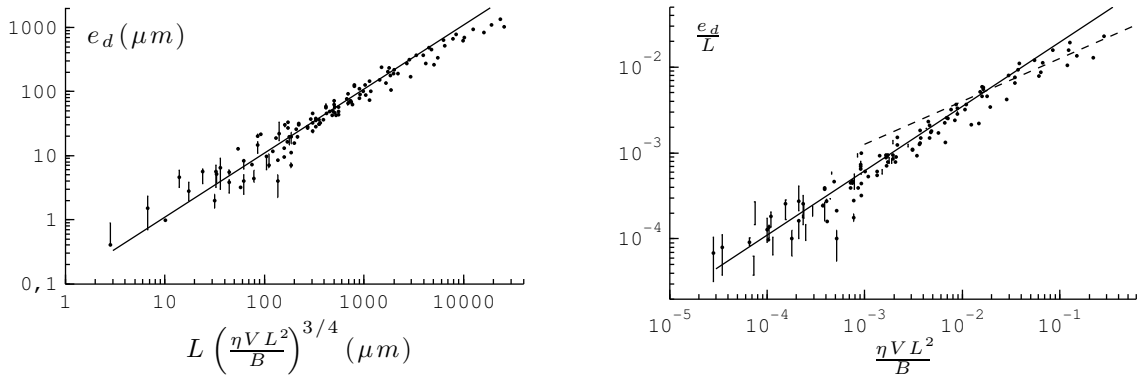


FIGURE 4.13 – À gauche : épaisseur déposée en fonction de l'épaisseur prédite en ordre de grandeur, dans la configuration  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ . À droite : les mêmes expériences dans une représentation adimensionnée :  $e_d/L$  en fonction de  $Ce$ . Les mesures ont été effectuées pour deux rigidités différentes ( $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  et  $14,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ), plusieurs longueurs de racloir ( $2 \text{ cm} < L < 8 \text{ cm}$ ) pour chaque rigidité, trois huiles de viscosités différentes ( $0,11 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $0,98 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) et différentes vitesses de tirage entre  $0,8 \text{ mm/s}$  et  $19 \text{ mm/s}$ . La droite représente  $e_d = 0,11 L C e^{3/4}$ , tandis que les tirets (à droite) figurent une loi de puissance  $e_d/L \approx C e^{1/2}$ .

Les mesures s'éloignent légèrement de la loi attendue à partir d'une épaisseur  $e_d = 0,8 \text{ mm}$ . Cela pourrait être dû à des difficultés expérimentales. En effet, déposer de telles épaisseurs nécessite d'étaler préalablement sur la plaque de dépôt une quantité de liquide encore plus importante, qui atteint rapidement la quantité maximale de liquide que l'on peut y faire tenir. Mais cela pourrait plus fondamentalement être dû au fait que l'épaisseur du film, et donc la taille de la zone de racloir déformée, ne sont alors plus négligeables devant  $L$ , invalidant une des hypothèses fondamentales de notre raisonnement.

En effet, on peut imaginer que dans ce régime de grandes déformations, la longueur du racloir dynamique est limitée par la taille  $L$  du racloir. Remplaçant, dans le raisonnement précédant,  $l$  par  $L$  fournit une nouvelle prédiction pour l'épaisseur :  $e_d^L \sim L \sqrt{\frac{\eta V L^2}{B}} \sim L C e^{1/2}$ . Cette variation en  $C e^{1/2}$  est compatible avec les données.

Enfin, le meilleur ajustement linéaire fournit  $e_d = 0,11 L C e^{3/4}$ . On poursuit dans la partie suivante l'analogie avec la théorie de LLD, en se demandant si un modèle de raccord asymptotique permet de retrouver ce coefficient.

### 4.3.5 Un dépôt élastique "à la LLD" ?

#### Racloir à courbure non nulle

Avant de présenter le modèle proposé, il nous a paru intéressant de revenir un instant sur le raisonnement en loi d'échelle utilisé pour justifier la variation de l'épaisseur du dépôt en  $L C e^{3/4}$ . Ce raisonnement est analogue à celui que l'on peut faire pour retrouver la loi de Landau-Levich-Derjaguin, qui décrit le dépôt sur une surface extraite d'un bain de liquide totalement mouillant (cf. 1.2.3, page 14), le racloir élastique jouant le rôle du ménisque statique de la théorie de LLD. Il y a néanmoins des différences fondamentales entre ces théories, qui conduisent par exemple à des dépendances en vitesses  $V$  différentes.

La première réside la condition imposée par la partie statique : le ménisque statique impose une pression, tandis que le racloir impose une force. Cela se traduit par une dépendance du gradient de pression en  $1/l$  dans le premier cas, et en  $1/l^2$  dans l'autre. De plus, la longueur  $l$  de la partie dynamique dépend différemment de  $e_d$  dans les deux théories. En effet, on considère dans les deux cas que la forme statique est perturbée sur une épaisseur de l'ordre de  $e_d$ . Mais la forme du ménisque statique est définie par une courbure non nulle à son sommet, tandis que la courbure du racloir s'annule. C'est cette différence de forme qui amène à des longueurs dynamiques variant comme  $\sqrt{ae_d}$  ou  $l = \sqrt[3]{L^2 e_d}$ , et donc à des lois de dépôt différentes.

Cette discussion amène à se demander ce qui se passe dans le cas où le racloir possède une courbure naturelle  $C_0$  non nulle. La forme près de son extrémité est alors gouvernée par cette courbure, ce qui permet d'estimer la longueur du "racloir dynamique" :

$$l = \sqrt{e_d/C_0}$$

Notant de plus  $f_{el}$  la force par unité de largeur exercée par le racloir sur la plaque de dépôt, le raisonnement en ordre de grandeur fournit une nouvelle prédiction pour l'épaisseur du dépôt :

$$e_d = \frac{1}{C_0} \frac{\eta V}{f_{el}}$$

On s'attend donc à ce que l'épaisseur soit en particulier proportionnelle à  $\eta V$ , ce qui est différent des deux autres situations de dépôt étudiées ( $e_d \approx \eta V^{2/3}$  dans la théorie de LLD, et  $e_d \approx \eta V^{3/4}$  pour un racloir élastique), et proportionnelle au rayon de courbure du racloir.

### Épaisseur déposée

Pour vérifier cette idée, nous avons utilisé des plaques en Lexan (une sorte de polycarbonate) de 250  $\mu\text{m}$  d'épaisseur, dont la rigidité mesurée vaut  $3,1 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Pour leur donner une courbure naturelle, nous les avons roulées dans un tube métalliques, placées trois heures dans une étuve à  $140^\circ$  puis démoulées. Le résultat est assez sensible à la température de "cuisson" (qui est de l'ordre de la température de transition vitreuse) : si elle est trop faible, la plaque revient à sa forme initiale plane après démoulage, tandis que si elle est trop importante, le racloir blanchit, et ses propriétés mécaniques et de surface sont fortement altérées (il devient en particulier très rugueux). Avec cette méthode, nous avons pu obtenir des raclours présentant des rayons de courbure de 1,4 cm et 2,7 cm.

Nous avons essayé de faciliter la comparaison avec la configuration mouillante obtenue avec  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  et  $b = 3,5 \text{ cm}$ . Pour cela, nous avons utilisé pour les raclours courbés la même largeur que dans la situation de référence, et nous avons travaillé à la valeur de  $y_0$  fournissant la même force élastique. Cette valeur est déterminée expérimentalement, en mesurant à l'aide d'une balance électronique la force exercée par le racloir (en fonction de  $y_0$ ), qui doit valoir  $3,43 b \frac{B}{L^2}$  (cas mouillant) soit 32 grammes-force. On détermine alors  $y_0 = 0,95$  et  $y_0 = 1,3$  pour les raclours courbés.

Toujours par soucis d'harmonisation, les épaisseurs mesurées ( $\circ$ ,  $\square$ ) sont portées sur la figure 4.14 en fonction de  $\frac{\eta V L^2}{B}$ , les valeurs de  $L$  et de  $B$  choisies correspondant au cas mouillant de référence (ce qui est légitime vu que la force  $f_{el}$ , maintenue constante d'une série à l'autre, est proportionnelle à  $B/L^2$ ). La loi de dépôt observée est cohérente avec la dépendance en  $\eta V$  attendue. De plus, lorsque l'on adimensionne l'épaisseur déposée par la courbure du racloir, les courbes obtenues pour les deux raclours courbés se superposent, confirmant la dépendance en  $C_0$  attendue.

En conclusion, cette étude, bien qu'embryonnaire, nous a paru intéressante car elle illustre le rôle crucial joué par le détail de la forme du racloir, ou du ménisque pour le dépôt de fluide libre.

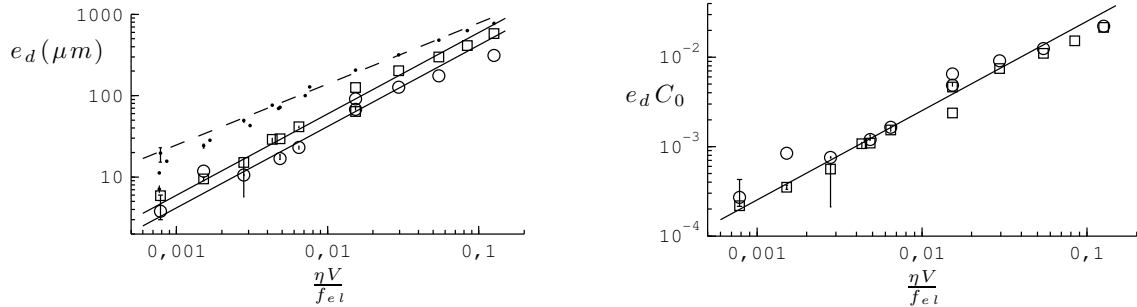


FIGURE 4.14 – À gauche : épaisseur déposée par des racloirs de rayon de courbure naturel 1,4 cm ( $\circ$ ) ou 2,8 cm ( $\square$ ), et par un racloir "normal" en configuration mouillante avec  $L = 4$  cm,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3}$  N · m ( $\bullet$ ). Pour les racloirs courbés, la valeur de  $y_0$  est ajustée pour que la force exercée par le racloir soit la même que dans le cas mouillant. Les ajustements en traits pleins sont linéaires, tandis que les pointillés représentent la loi de dépôt déterminée au paragraphe précédent :  $e_d = 0,11 C e^{3/4}$ . À droite : les mesures ont été adimensionnées par la courbure naturelle des racloirs. La loi linéaire représentée a pour équation :  $e_d = 0,25 C_0 \frac{\eta V L^2}{B}$ .

## 4.4 Coefficient de la loi de dépôt

### 4.4.1 Présentation du modèle

Le modèle se fonde sur l'idée que la forme du racloir reste quasiment inchangée lors du dépôt : seule une petite portion près de son extrémité (que l'on appelle "racloir dynamique") en est perturbée (cf. figure 4.15). La forme du racloir dans cette région est déterminée, comme nous allons le voir, par un couplage entre l'écoulement du fluide présent sous le racloir et la pression imposée par ce dernier. Le raccordement du racloir dynamique au racloir statique impose alors, comme dans la théorie de LLD, l'épaisseur de liquide déposée.

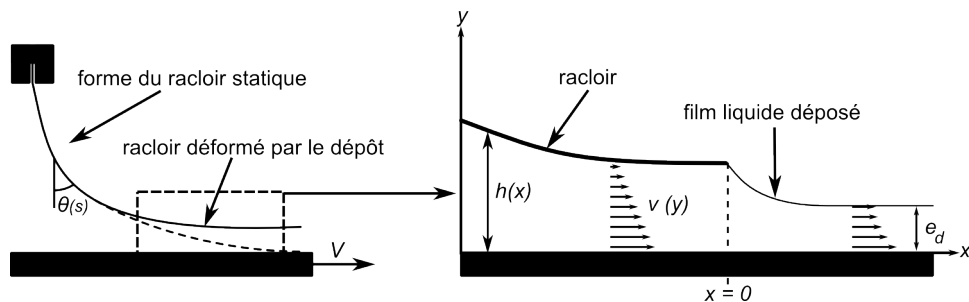


FIGURE 4.15 – Schéma du racloir, déformé par le dépôt d'un film liquide. L'interstice entre la plaque de dépôt et le racloir est rempli de liquide.

### 4.4.2 Forme du racloir dynamique

### 4.4.3 Couplage entre élasticité et contraintes visqueuses

On suppose de plus que dans la région "dynamique" le racloir est faiblement incliné, ce qui permet d'une part d'exprimer aisément les équations de l'élasticité en coordonnées cartésiennes, et d'autre part d'utiliser l'approximation de lubrification pour déterminer l'écoulement dans le film liquide. On note  $v(y)$  la vitesse du fluide sous le racloir (figure 4.15). Cette vitesse vaut  $V$  sur la plaque de dépôt (en  $y = 0$ ), et s'annule à la surface du racloir ( $y = h$ ). Négligeant la gravité, il vient alors :

$$v(y) = \frac{dP}{dx} \frac{y^2 - hy}{2\eta} + V \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (4.10)$$

La pression  $P$  régnant dans le fluide est indépendante de  $y$  (dans notre approximation), ce qui permet de l'évaluer juste sous le racloir. Or si l'on néglige le poids du racloir, celui-ci n'est soumis qu'à une force linéique extérieure  $\vec{f}_{ext} = (P - P_0)b\vec{n}$  ( $P_0$  étant la pression atmosphérique s'exerçant au dessus du racloir). L'équilibre mécanique impose alors (cf. partie 4.2.2, p. 68, et en particulier les équations (4.4), (4.5) et (4.6)) :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -F \quad \text{et} \quad \frac{dF}{ds} = -f_{ext} = -(P - P_0)b$$

d'où l'on tire, en dérivant la première équation par rapport à  $s$  :

$$P = P_0 + B \frac{d^3\theta}{ds^3}$$

Vu que le racloir est faiblement incliné,  $\theta_{sss}$  vaut simplement  $h_{xxxx}$ , d'où on déduit (on retrouve l'expression de la pression déterminée dans une configuration similaire par Hosoi et Mahadevan[41]) :

$$P = P_0 + B \frac{d^4h}{dx^4} = P_0 + Bh_{xxxx}$$

On reporte cette évaluation de la pression dans l'expression de la vitesse (équation 4.10), obtenant :

$$v(y) = Bh_{xxxx} \frac{y^2 - hy}{2\eta} + V \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Le débit  $q$  (par unité de largeur) s'écrit :

$$q = -Bh_{xxxx} \frac{h^3}{12\eta} + V \frac{h}{2} \quad (4.11)$$

On fait l'hypothèse que ce débit est constant, et qu'on peut donc l'évaluer dans le film déposé, où il vaut :  $q = Ve_d$ . On en déduit l'équation régissant la forme du racloir :

$$-Bh_{xxxx} \frac{h^3}{12\eta} + V \frac{h}{2} = Ve_d$$

On adimensionne ensuite cette équation en utilisant  $e_d$  comme échelle d'épaisseur ( $Y = h/e_d$ ), et  $L_x = e_d / \left(\frac{6\eta V e_d^2}{B}\right)^{1/5}$  ( $X = x/L_x$ ) comme échelle de longueur.  $L_x$  est comme attendu comparable à la taille  $l = (e_d L^2)^{1/3}$  de la zone déformée déterminée en ordre de



grandeur au paragraphe précédant. En effet, dans cette théorie,  $e_d = L^{5/2} \left(\frac{\eta V}{B}\right)^{3/4}$  d'où  $L = e_d^{2/5} \left(\frac{\eta V}{B}\right)^{-3/10}$  et  $l = e_d^{3/5} \left(\frac{\eta V}{B}\right)^{-1/5}$ . On obtient :

$$Y_{XXXXX} = \frac{Y - 2}{Y^3} \quad (4.12)$$

Cette expression de  $Y_{XXXXX}$  est semblable à l'expression de  $Y_{XXX}$  pour le ménisque dynamique dans la théorie de LLD (équation (1.3), page 17). On s'attend ainsi à pouvoir appliquer la même technique de raccordement asymptotique pour déterminer l'épaisseur déposée.

#### 4.4.4 Conditions aux limites

Une façon de modéliser la configuration de "mouillage total" étudiée dans ce paragraphe consiste à rechercher la solution de l'équation 4.12 tendant vers une épaisseur constante en bout de racloir. D'après l'équation 4.12, cette constante est égale à 2 en variables adimensionnées, ce qui correspond à  $h \rightarrow 2e_d$ . Ce facteur 2 est dû au fait que la vitesse du fluide s'annule au niveau du racloir, tandis que la vitesse est constante et égale à  $V$  dans le film déposé après le racloir (où on mesure l'épaisseur  $e_d$ ). Le raccord à un film d'épaisseur constante impose également que toutes les dérivées de  $Y$  s'annulent lorsque  $X \rightarrow +\infty$ , ce qui fournit les conditions aux limites nécessaires à l'intégration de l'équation 4.12 entre  $X = +\infty$  et  $X = -\infty$ .

D'un point de vue un peu plus technique, on approche numériquement la solution de la même manière que pour l'équation obtenue dans la théorie de LLD (la méthode est expliquée en détails dans l'annexe A, partie A.1, page 145). Vu que le calcul numérique ne permet pas de prendre directement en compte des conditions aux limites en  $\pm\infty$ , on intègre numériquement l'équation sur un "grand" intervalle de  $X$ . Seule la largeur de cet intervalle a du sens, changer l'abscisse initiale ne fait que translater le profil obtenu. On la choisit égale à  $X = 0$ , l'intégration se faisant jusqu'à  $X_f < 0$  ( $|X_f| \gg 1$ ). On suppose qu'en  $X = 0$ , le racloir a déjà une épaisseur quasiment constante.  $Y(0)$  est donc proche de 2, et sa valeur exacte constitue le seul paramètre à déterminer : les quatre autres conditions initiales nécessaires se déduisent de celle-ci. En effet, si l'on écrit alors  $Y(X) = 2 + \epsilon(X)$  ( $\epsilon \ll 1$ ), l'équation qui nous intéresse s'écrit :

$$\epsilon_{XXXXX} = \frac{\epsilon}{8}$$

La solution générale de cette équation est de la forme  $\epsilon = \sum_{k=0}^{k=4} A_k \exp\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}} X\right)$ . Imposer une solution réelle, et s'annulant lorsque  $X \rightarrow +\infty$ , annule la plupart des coefficients  $A_k$ . On peut alors réécrire  $\epsilon$  sous la forme :

$$\epsilon = (Y(0) - 2) e^{-\frac{\cos \pi/5}{8^{1/5}} X} \cos\left(\frac{\sin \pi/5}{8^{1/5}} X\right)$$

Cette expression permet de calculer les dérivées successives de  $Y$ , connaissant la valeur  $Y(0)$  au point de départ de l'intégration. Celles-ci s'écrivent :

$$\frac{dY}{dX^n}(X=0) = (Y(0)-2) \frac{d\epsilon}{dX^n}(X=0) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{k}{n} \left(-\frac{\cos \pi/5}{8^{1/5}}\right)^k \left(-\frac{\sin \pi/5}{8^{1/5}}\right)^{n-k} \cos\left((n-k)\frac{\pi}{2}\right)$$

### 4.4.5 Raccord avec le racloir statique, et coefficient

La valeur de  $Y(0)$  est imposée par la condition de raccord du racloir dynamique à la zone peu déformée. On voit sur l'équation 4.12 que  $Y_{XXXX}$  tend vers zéro lorsque  $Y \rightarrow +\infty$ , c'est à dire lorsque l'on se rapproche du racloir "statique".  $Y_{XXXX}$  alors tend vers une constante.

Or, l'équation 4.7 (p. 70), qui régit la forme du racloir statique, nous apprend que, dans l'approximation de faible pente,  $h_{xxxx}^{statique}$  tend vers 0 et  $h_{xxx}^{statique}$  tend vers une constante (égale à  $f_m = 3,438$  pour l'adimensionnement choisi) lorsqu'on s'approche de son extrémité. Pour raccorder le racloir dynamique "à gauche" (pour  $Y \rightarrow +\infty$ ) avec le racloir statique, il faut donc imposer  $Y_{XXXX} \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} 0$ , ce qui détermine  $Y(0) - 2 = 0,001225$ . La figure 4.16 présente la forme du racloir dynamique correspondante. Sa dérivée troisième  $Y_{XXX}$  tend en particulier vers une constante ( $Y_{XXX}^{inf} = -0,4780$ ) lorsque  $X \rightarrow -\infty$ , que l'on égale à la dérivée troisième à l'extrémité du racloir statique.

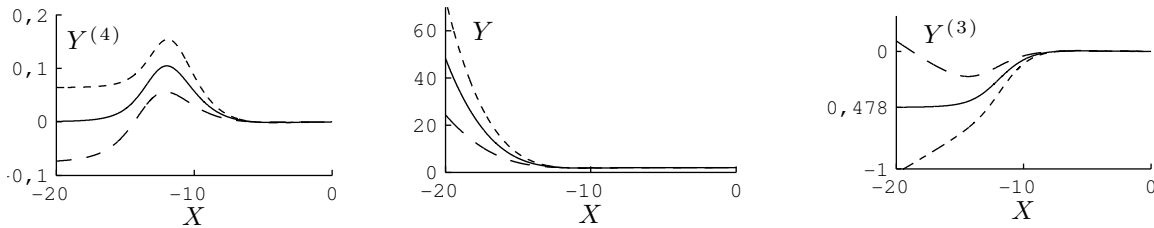


FIGURE 4.16 – Forme du racloir dynamique pour trois valeurs de  $Y(0)$  (figure centrale). La courbe en traits pleins présente  $Y(0) - 2 = 0,0012$ , qui est comme l'illustre la première figure la valeur pour laquelle  $Y_{XXXX} \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} 0$ ). La dérivée troisième du profil tend alors vers une constante (égale à  $-0,4780$ ) lorsque  $X \rightarrow -\infty$  (figure de droite). Les autres courbes correspondent à  $Y(0) - 2 = 0,0017$  (tirets courts) et  $Y(0) - 2 = 0,0007$  (tirets longs).

De plus, si l'on définit le racloir dynamique comme la zone dans laquelle  $Y_{XXX}$  est compris entre 1% et 99% de sa valeur asymptotique, celle-ci s'étend entre  $X = -8$  et  $X = -18$  et sa longueur vaut  $L_{dyn} \approx 10$  en variables adimensionnées. Pour une expérience typique ( $\eta = 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $V = 10 \text{ mm/s}$ ,  $B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  et  $e_d = 30 \text{ } \mu\text{m}$ ), cela correspond à 8,5 mm environ, ce qui est plus petit que  $L$ . De même, la hauteur maximale du ménisque dynamique vaut approximativement 22 en variables adimensionnées, soit 0,7 mm pour l'exemple proposé.

Le raccord sur les dérivées troisièmes prend du sens si l'on rappelle que dans l'approximation de faible pente que nous considérons,  $Y_{XXX}$  est proportionnelle à la force exercée par la portion de racloir située "à droite" du point considéré. Il traduit ainsi simplement le fait que la force verticale créée dans le racloir dynamique doit être égale à la force exercée par le racloir statique sur son extrémité. En revenant à des quantités dimensionnelles, cet équilibre s'écrit :

$$f \frac{1}{L^2} = Y_{XXX}^{inf} \frac{e_d}{L_x^3} = Y_{XXX}^{inf} \frac{1}{e_d^2} \left( \frac{6\eta V e_d^2}{B} \right)^{3/5} \quad \text{soit} \quad e_d^{4/5} = L^2 \left( \frac{\eta V}{B} \right)^{3/5} 6^{3/5} \frac{Y_{XXX}^{inf}}{f}$$

soit

$$e_d = 0,326L \left( \frac{\eta V L^2}{B} \right)^{3/4} \quad (4.13)$$

Si ce modèle prédit pour l'épaisseur la même loi de puissance que le raisonnement en loi d'échelle que nous avons discutée au paragraphe 4.3.3, le coefficient numérique qu'il fournit est environ trois fois trop important pour décrire convenablement les expériences (figure 4.13). On peut essayer d'identifier les axes d'évolutions possibles du modèle, qui lui permettraient de rendre convenablement compte des mesures.

## 4.5 Différences avec l'expérience

### 4.5.1 Une situation expérimentale bien décrite ?

La première différence entre le modèle et la réalité réside dans la condition aux limites utilisée ( $Y \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 2$ ), qui décrit une solution correspondant à un racloir s'étendant indéfiniment après le premier point de contact avec la plaque de dépôt. Ce n'est évidemment pas le cas pour les mesures présentées, vu que les expériences sont réalisées avec le racloir "juste tangent" (c'est à dire  $y_0 \approx 0,46L$ ). La figure 4.17 présente la variation d'épaisseur déposée lorsque  $L$  augmente à partir de la configuration "mouillante", à  $y_0$  fixé.  $e_d$  augmente très fortement sur les deux premiers centimètres d'allongement et atteint un maximum environ deux fois supérieur à sa valeur de départ, se rapprochant ainsi de la valeur prédite (180  $\mu\text{m}$ ). L'épaisseur décroît ensuite avec  $L$ .

Pour comprendre qualitativement pourquoi l'épaisseur déposée augmente, on peut imaginer qu'augmenter  $L$  revient à "rallonger" le racloir depuis son extrémité, là où il est le plus proche de la plaque de dépôt. Si l'épaisseur déposée était inchangée, cela augmenterait la force générée par le liquide (tout simplement parce que la contrainte s'appliquerait sur une plus grande surface), brisant l'équilibre entre forces élastiques et forces visqueuses. Une manière un peu plus formelle d'exprimer la même idée consiste à imaginer qu'augmenter  $L$  revient à augmenter la longueur  $l$  du racloir dynamique, ce qui amène à une augmentation de l'épaisseur d'après le raisonnement en ordre de grandeur (et en particulier l'équation 4.8).

Le raisonnement précédent n'est valable que tant que la portion de racloir "ajoutée" peut être considérée rigide. Dans le cas contraire, elle se courbe vers le haut sous l'effet des forces hydrodynamiques et s'éloigne de la plaque de dépôt, ce qui a pour effet de diminuer les forces de pression. Or, l'échelle de longueur à partir de laquelle la courbure du racloir se fait sentir est justement la taille typique du ménisque dynamique, soit environ 1 cm dans nos expériences. C'est ce qui explique que l'épaisseur maximale soit obtenue pour 2 cm d'allongement. La diminution d'épaisseur déposée lorsque  $L$  augmente encore ne semble en revanche pas explicable avec ce genre d'arguments : c'est donc qu'un autre phénomène entre en jeu.

### 4.5.2 Effet de la largeur de racloir

Une autre particularité de la théorie développée est d'être strictement bidimensionnelle : nous avons ignoré toute dépendance selon la largeur du racloir. Pour tester cette hypothèse sur notre système expérimental, nous avons représenté sur la figure 4.18 l'épaisseur déposée par des racloirs de différentes largeurs  $b$  comprises entre 2 cm et 8 cm (tous les autres paramètres étant gardés constants).

L'épaisseur augmente régulièrement avec la largeur de dépôt, doublant sur la gamme explorée. Mais cette variation pourrait être une sorte d'artefact. En effet, pour des raisons pratiques, les racloirs sont toujours un petit peu plus larges que la plaque de dépôt, de

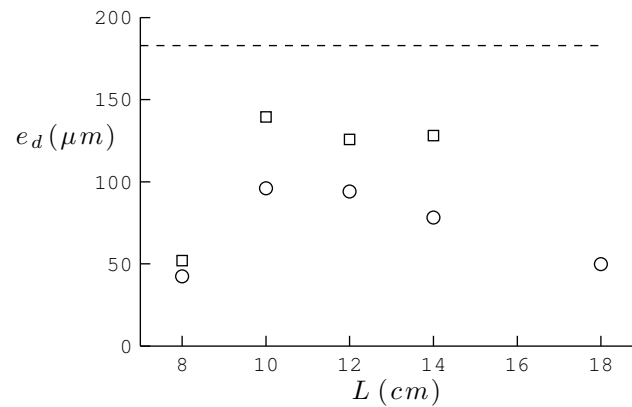


FIGURE 4.17 – Épaisseur de liquide déposée en fonction de la longueur du racloir  $L$ , pour deux largeurs de racloirs :  $b = 3$  cm ( $\circ$ ) et  $b = 5$  cm ( $\square$ ).  $y_0$  est constant pour toutes les expériences, égal à 36,8 mm : le racloir est "juste tangent" à la plaque de dépôt pour  $L = 8$  cm.  $B = 4 \cdot 10^{-3}$  N·m,  $\eta = 0,107$  Pa·s,  $V = 8,53$  mm/s. L'épaisseur prédite par le modèle, représentée par les tirets, vaut 180  $\mu\text{m}$  (equation 4.13).

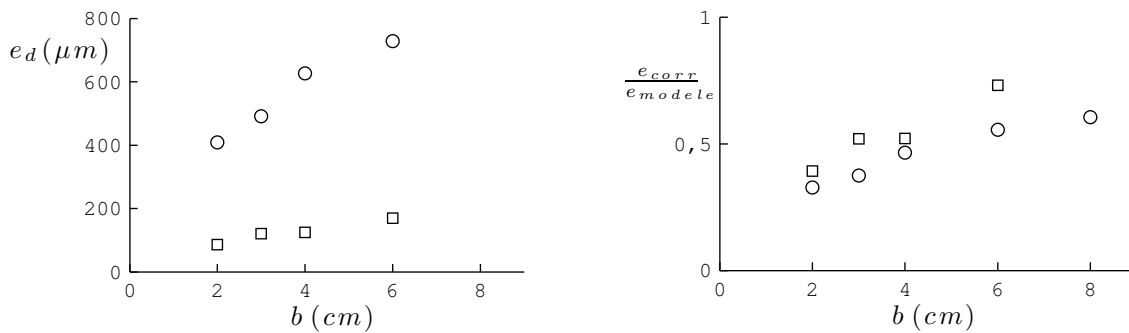


FIGURE 4.18 – Épaisseur de liquide déposé pour différentes largeurs de dépôt  $b$ .  $L = 4$  cm ( $\circ$ ) ou  $L = 2$  cm ( $\square$ ), toujours dans la configuration de "mouillage total" ( $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ , soit  $y_0 = 18,4$  mm et  $y_0 = 9,2$  mm, respectivement). Les autres paramètres de l'expérience sont  $\eta = 17,4$  Pa·s,  $V = 8,2$  mm/s,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3}$  N·m. Dans le graphe de droite, l'épaisseur a été corrigée pour tenir compte de la différence entre la largeur de la plaque de dépôt et la largeur du racloir, et adimensionnée par l'épaisseur prédite par le modèle (1,5 mm pour  $L = 4$  cm et 260  $\mu\text{m}$  pour  $L = 2$  cm).

0,5 cm pour les plus faibles largeurs à 1 cm pour les largeurs les plus importantes. Or, la force exercée par le fluide, proportionnelle à  $b$  (la largeur de la plaque de dépôt) est compensée par la force du racloir, proportionnelle à sa largeur  $b_{racloir}$ . Si les deux largeurs sont égales, comme on l'a supposé jusqu'ici, on peut raisonner sur "les forces par unité de largeur". Si l'on tient compte de la différence de largeur, le raisonnement en ordre de grandeur (par exemple l'équation 4.8) nous apprend que tout se passe donc comme si la rigidité  $B$  était augmentée d'un facteur  $b_{racloir}/b$ .

Le racloir apparaît donc d'autant plus rigide que  $b$  est petit, ce qui expliquerait l'épaisseur déposée plus faible. Néanmoins, pour les expériences présentées, le terme  $b_{racloir}/b$  varie entre 1,25 et 1,125.  $e_d$  étant proportionnel à  $B^{-3/4}$ , cela se traduit par une variation d'épaisseur d'un facteur 1,1, beaucoup plus faible que la variation observée (on peut l'observer sur le graphique de droite de la figure 4.18, dans lequel les épaisseurs mesurées ont été corrigée d'un facteur  $(b_{racloir}/b)^{3/4}$  pour tenir compte de l'effet discuté).

Plus fondamentalement, nous avons interprété la sensibilité à la largeur de dépôt comme la signature d'écoulements transverses sous la plaque : une partie du liquide se dirige vers les côtés du racloir (et disparaît donc du système) plutôt que de passer dessous. Nous n'avons en effet considéré dans le cadre de notre modèle que le gradient de pression selon l'axe  $x$ , égal à  $Bh_{xxxx}$  en variables adimensionnées. Mais la surpression sous le racloir doit s'annuler à ses bords, ce qui est à l'origine d'un gradient de pression d'ordre  $Bh_{xxx}/b$  dans la direction perpendiculaire.

C'est probablement ce même phénomène qui explique la diminution de l'épaisseur observée au paragraphe précédent lorsque l'on augmente la longueur du racloir, en imaginant que ces effets d'écoulements transverses sont d'autant plus importants que le racloir est long (figure 4.17). Cela explique de plus qualitativement pourquoi la baisse de  $e_d$  est beaucoup moins marquée lorsque le racloir est plus large.

Pour confirmer notre hypothèse, nous avons représenté sur la figure 4.19 la valeur du gradient de pression selon  $x$  fournie par notre modèle pour des valeurs typiques des paramètres :  $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $V = 10 \text{ mm/s}$ ,  $B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$  et  $L = 4 \text{ cm}$ . La valeur de  $e_d$  utilisée est celle calculée à partir du résultat du modèle (équation 4.13). La courbe en traits pleins représente dans la même configuration la valeur estimée du gradient de pression transverse ( $Bh_{xxx}/b$ ) pour  $b = 3 \text{ cm}$ . Ces deux termes sont du même ordre de grandeur dans la plus grande partie du racloir dynamique, ce qui semble confirmer l'importance des écoulements transverses.

## 4.6 Prise en compte de la largeur finie du dépôt

### 4.6.1 Correction au modèle

Pour prendre en compte l'effet de la largeur finie  $b$  dans notre modèle, on suppose que la perte de liquide par les côtés du racloir ne modifie que le flux longitudinal  $q$ , qui n'est plus constant. Qualitativement, les effets de bords augmentent, pour une même épaisseur de film, le flux de liquide qui circule sous le racloir. Ceci se traduit par une augmentation de sa déformation, donc de la force qu'il exerce, ce qui est cohérent avec la diminution de l'épaisseur que l'on observe. De plus, nous avons vu dans le paragraphe précédent que le gradient de pression dans la direction perpendiculaire à l'écoulement est d'ordre  $Bh_{xxx}/b$ . On suppose alors de plus que le flux de liquide transverse  $q_{\perp}$  qu'il crée peut s'écrire sous

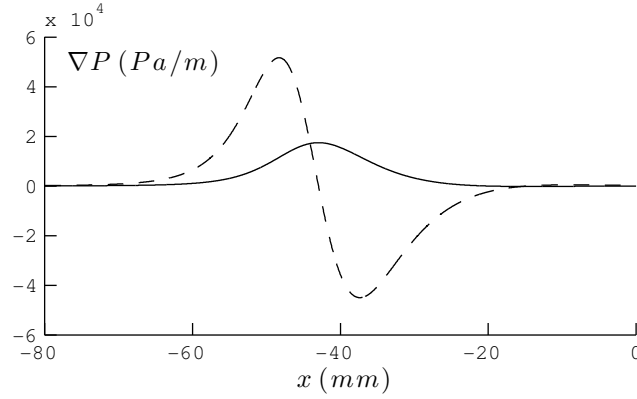


FIGURE 4.19 – La courbe en tirets correspond au gradient de pression longitudinal sous le racloir ( $Bh_{xxxxx}$ ), calculé par le modèle présenté pour  $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $V = 10 \text{ mm/s}$ ,  $B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$  et  $L = 4 \text{ cm}$ . La courbe en traits pleins représente le gradient de pression transverse estimé  $Bh_{xxxx}/b$ , pour  $b = 3 \text{ cm}$ . On remarque que ces deux termes sont du même ordre de grandeur.

la forme :

$$q_{\perp} = \alpha \frac{Bh_{xxxx}h^3}{12\eta b^2}$$

Dans cette formule, le paramètre  $\alpha$ , qui nous permet d'ajuster l'intensité de la correction, est supposé constant. On peut alors écrire relier  $q$  à  $q_{\perp}$  grâce à la conservation du débit :

$$\frac{dq}{dx} = -q_{\perp} = -\alpha \frac{Bh_{xxxx}h^3}{12\eta b^2}$$

La condition aux limites associée à cette équation de  $q$  est donnée par sa valeur dans le film déposé :  $q(x=0) = Ve_d$ . En reportant dans cette équation l'expression de  $q$  en fonction de la forme du ménisque (équation 4.11, page 79), on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left( Bh_{xxxxx} \frac{h^3}{12\eta} + V \frac{h}{2} \right) = \alpha \frac{Bh_{xxxx}h^3}{12\eta b^2}$$

On intègre une fois cette équation, et on obtient en utilisant le même adimensionnement que précédemment ( $e_d$  comme échelle d'épaisseur ( $Y = h/e_d$ ), et  $L_x = e_d / \left( \frac{6\eta V e_d^2}{B} \right)^{1/5}$  ( $X = x/L_x$ ) comme échelle de longueur) :

$$Y_{XXXXX} = \frac{Y-2}{Y^3} + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \frac{1}{Y^3} \int_0^X Y_{XXXX} Y^3 dX \quad (4.14)$$

Lorsque  $\alpha = 0$ , on retrouve bien l'équation (4.14) utilisée jusqu'à maintenant. Le paramètre pertinent pour décrire l'importance des effets de bord semble être  $L_x/b$ . Vu que  $L_x$  dépend de  $e_d$ , la forme du ménisque dynamique n'est plus universelle, et on ne s'attend plus à trouver de loi de puissance pour l'épaisseur de film (la situation est analogue à ce qui se passe dans le modèle à deux couches utilisé dans la partie 2.3 (page 28) pour décrire les expériences de dépôt sur surfaces texturées). On espère néanmoins que cet effet soit suffisamment faible pour rester compatible avec les données expérimentales. De plus,  $L_x$  augmente avec  $Ce$ . On s'attend donc à ce que les effets de bords se manifestent d'autant plus que l'épaisseur déposée est importante.

Néanmoins, le terme rajouté modifie le comportement de  $Y_{XXXXX}$ , qui ne s'annule plus lorsque  $X \rightarrow -\infty$ . On peut s'en convaincre en supposant que l'on ait un profil pour lequel  $Y_{XXXX}$  et  $Y_{XXXXX}$  s'annulent pour  $X \rightarrow -\infty$ , et  $Y_{XXX}$  tend vers une constante (ce qui est la condition nécessaire au raccord avec le racloir statique). Le terme dominant de  $Y$  est alors d'ordre  $X^3$ , ce qui contredit d'après l'équation (4.14) notre hypothèse initiale. Ceci nous interdit d'utiliser la technique de raccordement asymptotique précédente, et complique fortement le calcul de l'épaisseur déposée.

## 4.6.2 Correction constante

### Prédiction

Pour contourner cette difficulté, on peut essayer de justifier les comportements observés à l'aide d'un modèle plus simple à mettre en oeuvre. On suppose ici que l'effet principal des effets de bords est d'augmenter le flux longitudinal  $q$  moyen, mais que ce dernier peut toujours être considéré constant. On postule de plus, comme le suggère l'équation (4.14), que l'accroissement du flux est proportionnel à  $L_x^2/b^2$  :

$$q = Ve \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right)$$

L'équation adimensionnée du racloir dynamique devient alors :

$$Y_{XXXXX} = \frac{Y - 2 \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right)}{Y^3}$$

On réalise un nouveau changement de variable  $\tilde{Y} = Y / \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right)$ ,  $\tilde{X} = X / \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right)^{3/5}$  ; on obtient alors l'équation 4.12 de la limite sans effets de bords :

$$\tilde{Y}_{\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}} = \frac{\tilde{Y} - 2}{\tilde{Y}^3}$$

Le raccord avec le racloir statique se fait donc de la même façon ( $\tilde{Y}_{\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}}^{inf} = -0,4780$ ), et fournit l'épaisseur déposée :

$$f \frac{1}{L^2} = Y_{XXX}^{inf} \frac{e_d}{L_x^3} = \tilde{Y}_{\tilde{X}\tilde{X}\tilde{X}}^{inf} \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right)^{-4/5} \frac{e_d}{L_x^3}$$

soit :

$$e_d \left( 1 + \alpha \frac{L_x^2}{b^2} \right) = 0,326 L \left( \frac{\eta V L^2}{B} \right)^{3/4} = 0,326 L C e^{3/4}$$

en exprimant  $L_x$  en fonction de  $Ce$  on obtient :

$$e_d \left( 1 + \alpha \frac{L^{4/5} e_d^{6/5}}{b^2 C e^{2/5}} \right) = 0,326 L C e^{3/4} \quad (4.15)$$

On retrouve le régime bidimensionnel lorsque  $\alpha = 0$  ou  $b \rightarrow +\infty$ . Dans la limite inverse, lorsque les effets de bord sont prépondérants, on obtient :

$$e_d = \left( \frac{0,326}{\alpha} \right)^{5/11} L^{1/11} b^{10/11} C e^{23/44} \approx \sqrt{\frac{0,326}{\alpha}} b C e^{1/2}$$

### Confrontation à l'expérience

La prédiction (4.15) permet de rendre compte de l'augmentation de l'épaisseur avec  $b$  représentée sur la figure 4.20, avec une valeur de  $\alpha$  de 70. Nous avons également représenté en tirets l'épaisseur attendue dans le régime bidimensionnel ( $b \rightarrow +\infty$ ), supérieure aux mesures. L'extrapolation des mesures à l'aide du modèle nous apprend qu'il faudrait travailler avec des largeurs de l'ordre de 20 cm pour s'en approcher à mieux que 10%.

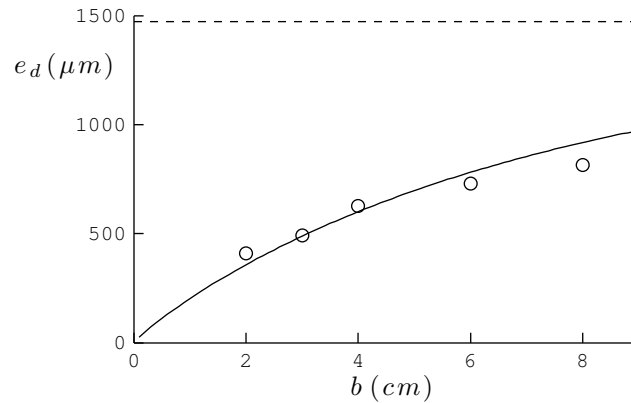


FIGURE 4.20 –  $\circ$  : épaisseur de liquide déposé dans la configuration de "mouillage total" pour différentes largeurs de dépôt  $b$ , et  $L = 4$  cm,  $\eta = 17,4$  Pa·s,  $V = 8,2$  mm/s,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3}$  N·m (données de la figure 4.18). La courbe en trait plein correspond à la prédiction (4.15), avec  $\alpha = 70$ . Les tirets représente l'épaisseur calculée dans la limite bidimensionnelle :  $e_d = 0,326 L C_e^{3/4}$ .

La figure 4.21 teste la capacité du modèle à rendre compte des variations d'épaisseurs avec  $C_e$ , avec la même valeur  $\alpha = 70$ . Les mesures présentées ont été réalisées avec la même longueur de racloir que sur la figure 4.20, et deux rigidités différentes : on s'attend donc à ce qu'elles se superposent lorsqu'on les trace en fonction de  $C_e$ . La prédiction décrit convenablement le dépôt pour  $C_e > 10^{-2}$ , ce qui est cohérent avec le fait que  $\alpha$  a été déterminée à partir des expériences de la figure 4.20 réalisées pour  $C_e = 5 \cdot 10^{-2}$ . Pour les plus faibles vitesses de dépôt, le modèle proposé surestime les épaisseurs mesurées.

En conclusion, le modèle proposé décrit convenablement les expériences où seule la largeur  $b$  varie. C'est donc probablement bien l'écoulement transverse qu'il faudrait prendre en compte dans notre modèle pour décrire convenablement le dépôt. Néanmoins les hypothèses simplistes que nous avons faites (notamment le fait que  $\alpha$  est constant) ne suffisent à décrire qualitativement la loi de dépôt. L'efficacité du drainage transverse est fortement sous-estimée aux faibles  $C_e$ .

## 4.7 Autres régimes de dépôt

Nous avons jusqu'à présent essentiellement parlé du dépôt dans la configuration "mouillante", et nous nous sommes en particulier intéressés à l'effet des différents paramètres ( $L$ ,  $B$ ,  $\eta$ ,  $V$ ) sur le dépôt. Nous avons également évoqué (figure 4.9) le rôle de  $y_0$  dans la détermination de l'épaisseur. La configuration "appuyée" ( $y_0 < y_m$ ) nous a paru intéressante à étudier, de par ses similitudes avec la configuration mouillante.



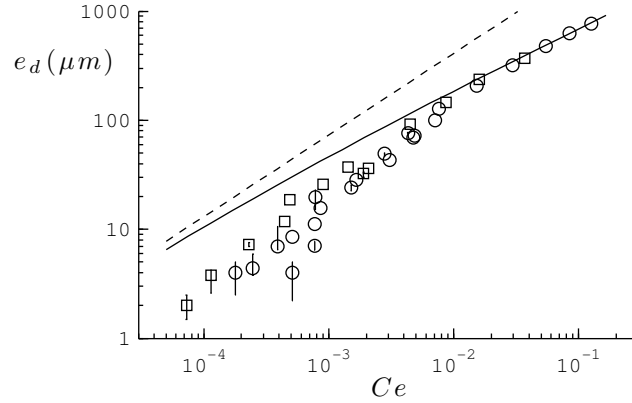


FIGURE 4.21 – Épaisseur déposée dans la configuration mouillante en fonction de  $Ce$ , pour  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  ( $\circ$ ) et  $B = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  ( $\square$ ),  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ , trois huiles de viscosités différentes ( $0,11 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $0,98 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) et différentes vitesses de tirage entre  $0,8 \text{ mm/s}$  et  $19 \text{ mm/s}$ . La courbe en traits pleins correspond à la prédiction (4.15) avec  $\alpha = 70$ , et les tirets à la limite  $b \rightarrow +\infty$ .

#### 4.7.1 Régime très appuyé : $y_0 < y_m$

Si, à partir de la situation "mouillante" que nous avons étudiée jusqu'à maintenant ( $y_0 = y_m$ ), on diminue  $y_0$  (on "appuie" plus sur le racloir), l'épaisseur déposée diminue. Or, en l'absence de fluide, lorsque  $y_0$  diminue, une portion grandissante de racloir se retrouve tangente à la plaque de dépôt (au delà du premier point de contact), mais la forme de sa portion "libre" est universelle. On peut alors se demander si les phénomènes en jeu ne sont pas les mêmes que dans le cas mouillant, la seule différence étant que la force exercée par le racloir sur le fluide, déterminée par  $y_0$ , n'est plus directement reliée à  $L$ . Le cas appuyé, défini par la valeur de  $y_0$ , serait ainsi analogue à un cas mouillant défini par une longueur de racloir  $L^{corr}$  telle que la valeur de  $y_m$  correspondante soit égale à  $y_0$ . Dans la théorie développée précédemment, cela revient à remplacer  $L$  par  $L^{corr} = L \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_m}$ . On s'attend alors à ce que l'épaisseur déposée varie comme  $L \left( \frac{\eta V L^2}{B} \right)^{3/4} \left( \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_m} \right)^{5/2} = L C e^{3/4} \left( \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_m} \right)^{5/2}$ .

On espère même que le cas très appuyé, du fait du "surplus" de racloir, soit plus proche de la situation décrite dans le modèle. En particulier, une expérience à  $y_0$  fixé devrait donner qualitativement le même résultat que dans le cas mouillant : l'épaisseur devrait être proportionnelle à  $Ce^{3/4}$ . Ce n'est pas le cas sur la figure 4.22 (à gauche), qui présente l'épaisseur de liquide déposée lorsque l'on fait varier la vitesse de l'expérience et la viscosité du liquide : l'épaisseur semble effectivement suivre une loi de puissance en  $\eta V$ , mais d'exposant plus faible qu'attendu (0,6). Cette même figure (à droite) présente également la variation d'épaisseur en fonction de  $\tilde{y}_0$ , toutes choses égales par ailleurs. On observe une loi de puissance de plus faible exposant (1,4) qu'attendu. Ces résultats, loin d'être anodins, renforcent l'idée qu'un phénomène est mal décrit dans notre modèle.

#### 4.7.2 Régime de "mouillage partiel" : $y_0 > y_m$

Le dernier régime observé est celui des grandes valeurs de  $y_0$ , pour lesquelles le racloir et la plaque de dépôt forment un angle non nul (d'où la dénomination de régime de "mouillage partiel"). Comme on peut le voir sur la figure 4.23 (à gauche), l'épaisseur déposée dans ce régime semble suivre une loi de puissance en  $V$  dont l'exposant, plus grand que dans le

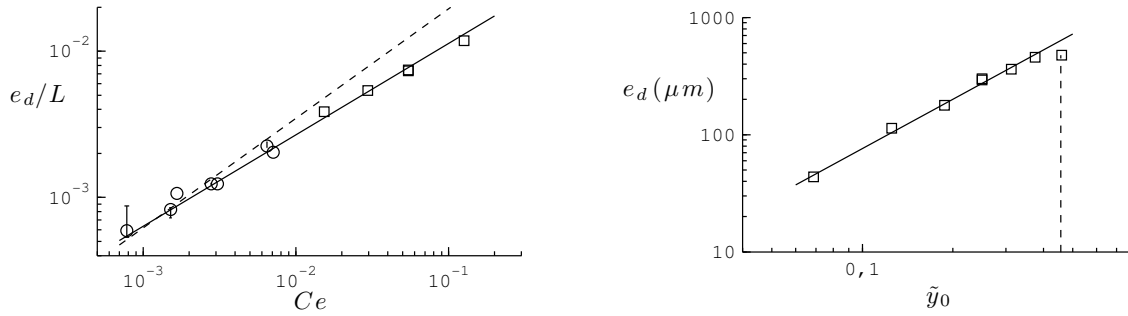


FIGURE 4.22 – Épaisseur de liquide déposée dans le cas où le racloir est très appuyé ( $\tilde{y}_0 < \tilde{y}_m$ ), pour  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $\eta = 0,98 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\circ$ ) et  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\square$ ). À gauche : effet de la variation de  $V$  (de  $0,7 \text{ mm/s}$  à  $19 \text{ mm/s}$ ) et de  $\eta$  sur l'épaisseur déposée pour  $y_0 = 1 \text{ cm}$  (soit  $\tilde{y}_0 = 0,25$ ). La droite est un ajustement en loi de puissance :  $e_d/L = 0,05 Ce^{0,6}$ , tandis que les pointillés décrivent le dépôt dans le cas mouillant :  $e_d/L = 0,11 Ce^{3/4}$ . À droite :  $e_d$  en fonction de  $\tilde{y}_0$ , pour  $V = 8 \text{ mm/s}$ . La droite figure  $e_d = 1,9 \cdot 10^3 \tilde{y}_0^{1,4}$ . Les pointillés figurent le cas mouillant.

cas mouillant, augmente avec  $y_0$ . Nous n'avons néanmoins jamais observé d'épaisseur de dépôt plus épais dans cette configuration que dans la configuration mouillante. C'est ce qu'illustre le graphe de droite de la figure 4.23, qui montre que l'épaisseur déposée décroît lorsque  $\tilde{y}_0$  augmente au-delà de  $\tilde{y}_m$ .

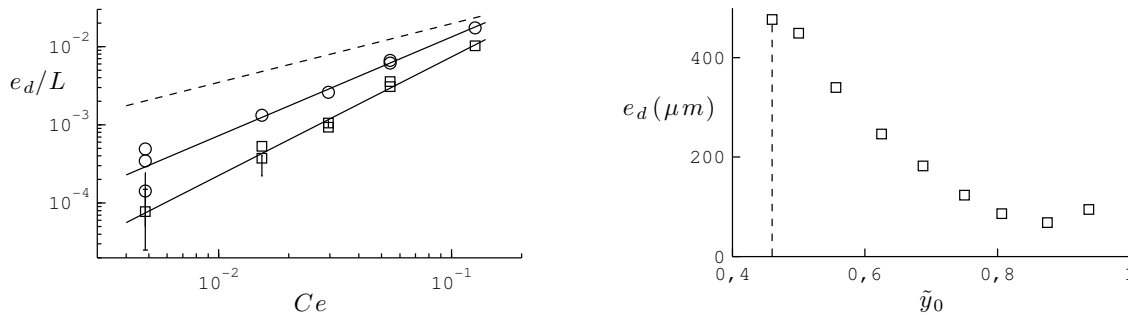


FIGURE 4.23 – Épaisseur de liquide déposée dans le régime de "mouillage partiel", pour  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . À gauche : effet de  $V$  (de  $0,7 \text{ mm/s}$  à  $19 \text{ mm/s}$ ) sur l'épaisseur déposée pour  $y_0 = 25 \text{ mm}$  ( $\circ$ , soit  $\tilde{y}_0 = 0,63$ ) et  $y_0 = 30 \text{ mm}$  ( $\square$ , soit  $\tilde{y}_0 = 0,75$ ). La courbe en pointillés décrit le dépôt dans le cas mouillant, tandis que les ajustements en lois de puissance représentés sont d'exposants 1,3 et 1,5. À droite :  $e_d$  en fonction de  $\tilde{y}_0$ , pour  $V = 8 \text{ mm/s}$ . Les pointillés figurent le cas mouillant.

Cette décroissance peut à première vue paraître surprenante, vu que la force exercée sur le racloir diminue avec  $\tilde{y}_0$  (figure 4.8, page 72). En réalité, l'effet dominant n'est pas la diminution de la force exercée, mais le fait que le racloir n'est plus tangent à la plaque de dépôt, ce qui change complètement l'écoulement du fluide et la force qu'il exerce. Pour tenter de saisir les phénomènes en jeu, nous avons simplifié le problème en utilisant des racloirs rigides, ce qui permet de découpler la force exercée sur le racloir de sa forme. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de cette configuration, que nous n'explicitons pas plus ici.

## 4.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une expérience de dépôt de fluide à l'aide d'une membrane élastique. Le dépôt se fait horizontalement, ce qui permet d'explorer une grande gamme d'épaisseurs (de 1  $\mu\text{m}$  à 1 mm) sans se soucier de la gravité. L'utilisation de fluides très visqueux a également cantonné l'étude aux grands nombres capillaires, pour lesquels la tension de surface est négligeable. Contrairement à ce qui se passe dans les expériences de dépôt par trempage, l'épaisseur de film entraînée n'est pas uniquement déterminée par la vitesse d'entraînement et les propriétés du liquide, mais également par les propriétés élastiques et géométriques du racloir. Nous nous sommes principalement intéressés au régime "mouillant", dans lequel la membrane est juste tangente à la plaque de dépôt, et qui correspond à un optimum du dépôt, pour lequel l'épaisseur entraînée est maximale.

Nous avons présenté une théorie permettant de justifier le fait que l'épaisseur déposée dans ce régime dépend de la longueur de la plaque  $L$  et d'un nombre visco-élastique  $Ce$ . Elle varie, en accord avec les expériences, comme  $LCe^{3/4}$ . Le préfacteur numérique calculé surestime la quantité de liquide déposée d'un facteur 3 environ. Une lacune fondamentale du modèle (que nous avons commencé à combler) est qu'il ne tient pas compte des effets dus à la largeur finie de la plaque, qui provoquent une fuite du liquide perpendiculairement à la direction du mouvement.

Ce chapitre a été également l'occasion d'illustrer la sensibilité de la loi de dépôt à la forme du racloir près de son point de contact. Utiliser un racloir possédant une courbure naturelle, par exemple, modifie qualitativement la loi de dépôt. Aborder le problème sous cet aspect permettrait probablement de découvrir des configurations et des lois de dépôt associées inédites. Enfin, la configuration de "mouillage partiel" dans laquelle le racloir est loin de la surface de dépôt, et l'approche avec un angle non nul, n'est pas compréhensible avec les outils théoriques présentés. Le chapitre suivant lui est consacré.

# Chapitre 5

## Dépôt de fluide par une membrane rigide

*Trovavo quelli che si rifugiavano nelle scienze, andavo nei loro laboratori polverosi e nelle loro sale di lettera, li vedevo dar la caccia a fantasmi per non sentire il sapore della realtà di quel mondo.*

Friedrich DÜRRENMATT, *Dalle annotazioni di un guardiano*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>91</b>
5.1.1	Une limite du cas flexible?	91
5.1.2	Montage expérimental	92
<b>5.2</b>	<b>Épaisseur déposée</b>	<b>92</b>
5.2.1	Le couteau à enduire de Taylor	92
5.2.2	Vérification de la prédiction	93
<b>5.3</b>	<b>Conclusion sur les racloirs flexibles</b>	<b>95</b>

---

## 5.1 Dispositif expérimental

### 5.1.1 Une limite du cas flexible ?

Le chapitre précédent a été consacré au dépôt de liquide par un racloir flexible de longueur  $L$ , encastré verticalement à une distance  $y_0$  de la plaque de dépôt. Nous avons en particulier présenté le régime de "mouillage partiel" (correspondant aux grandes valeurs de  $y_0$ ), dans lequel la membrane élastique forme un angle  $\theta_c$  non nul avec la plaque de dépôt.

Une façon d'isoler l'effet de cet angle  $\theta_c$  des phénomènes dus à l'élasticité du racloir consiste à étudier, comme nous le présentons ici, le dépôt de fluide par une racloir rigide. On peut également se demander si le racloir rigide peut être vu comme la limite de grande rigidité du cas flexible, ou si ces deux configurations sont totalement indépendantes. Une motivation supplémentaire provient des procédés industriels, qui utilisent souvent des racloirs rigides faiblement courbés, plus proches de la configuration explorée dans ce chapitre que de la configuration "mouillante" du chapitre précédent.

### 5.1.2 Montage expérimental

Le dispositif est décrit par la figure 5.1. La seule différence avec celui présenté au chapitre précédent réside dans le racloir utilisé, une plaque de Dural rigide de longueur  $L = 5$  cm, de largeur  $b_r = 3,5$  cm (on dépose le liquide sur une plaque de verre de 3 cm de large) et d'épaisseur  $h$  (variable) millimétrique. Elle est accrochée à l'aide de deux petits fils de coton (dont la rigidité est "négligeable") à une distance  $y_0$  au dessus de la plaque de dépôt. C'est cette hauteur qui contrôle l'angle  $\theta_c$  que forme le racloir avec l'horizontale ( $\sin \theta_c = \frac{y_0}{L}$ ).

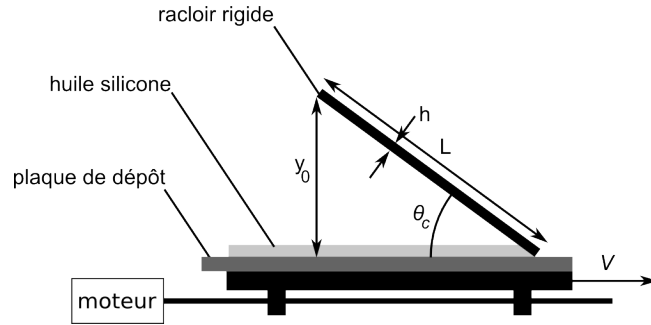


FIGURE 5.1 – Schéma du montage expérimental.

Nous avons apporté un grand soin à l'usinage à la fraiseuse des racloirs utilisés, afin que leur arête soit la mieux définie possible. L'épaisseur minimale de film que l'on peut déposer, fixée par la taille des défauts résiduels, est alors d'une quarantaine de microns. Cette limite inférieure à l'épaisseur nous amène à déterminer l'épaisseur déposée par pesée exclusivement (voir la partie 4.1.3, page 64 du chapitre 4).

## 5.2 Épaisseur déposée

### 5.2.1 Le couteau à enduire de Taylor

Dans cette configuration, l'épaisseur déposée n'est pas déterminée par l'élasticité de la plaque, mais par son poids qui équilibre les forces hydrodynamiques créées par l'écoulement du fluide. Cette situation a été étudiée théoriquement par Taylor dans les années 60[92]. Il a pour cela considéré l'écoulement bidimensionnel dans un coin d'angle  $\theta_c$  (figure 5.2), en supposant que l'écoulement est purement visqueux. La contrainte s'exerçant sur le racloir (que l'on sépare en une composante  $\sigma_v$  perpendiculaire à la plaque de dépôt et une composante horizontale  $\sigma_h$ ) varie alors avec la distance  $r$  au point de contact :

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{2\eta V}{r} \frac{\sin^2 \theta_c}{\theta_c^2 - \sin^2 \theta_c} \\ \sigma_h = \frac{2\eta V}{r} \frac{\theta_c - \sin \theta_c \cos \theta_c}{\theta_c^2 - \sin^2 \theta_c} \end{cases} \quad (5.1)$$

Lorsque  $\theta_c$  est petit, on retrouve les valeurs que l'on peut calculer dans l'approximation de lubrification, et qui ont l'avantage de rendre plus évidente la dépendance en  $\theta_c$ . Pour faciliter la lecture, ce sont ces expressions que nous utiliserons dans la suite, sachant qu'il serait tout aussi facile d'utiliser les équations (5.1) (pour la gamme d'angles explorée ici, la différence est au maximum de l'ordre de 10 %) :

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{6\eta V}{\theta_c^2 r} \\ \sigma_h = \frac{4\eta V}{r\theta_c} \end{cases} \quad (5.2)$$

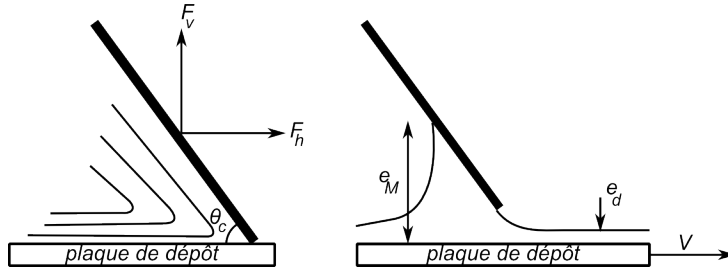


FIGURE 5.2 – Schéma de l'écoulement dans un coin d'angle  $\theta_c$  (à gauche), et schéma de l'expérience réalisée (à droite).

Dans ces expressions, la contrainte hydrodynamique diverge lorsqu'on s'approche du point de contact ( $r \rightarrow 0$ ). Dans la réalité, la distance minimale entre le racloir et la plaque de dépôt est de l'ordre de l'épaisseur  $e_d$  du film déposé. De même, toute la surface de racloir n'est pas en contact avec le fluide, dont l'épaisseur maximale (que l'on note  $e_M$ ) vaut quelques millimètres. En supposant que ces deux nouvelles conditions aux limites ne changent pas l'expression des contraintes, on peut calculer la force verticale  $f_v$  (par unité de largeur) s'exerçant sur racloir en intégrant l'équation 5.2 entre  $r = e_d / \tan \theta_c$  et  $r = e_M / \tan \theta_c$  (vu que  $e_d \ll y_0$ ,  $\theta_c$  est quasiment indépendant de  $e_d$ ) :

$$f_v \sim \int_{e_d / \tan \theta_c}^{e_M / \tan \theta_c} \sigma_v dr = \frac{6\eta V}{\theta_c^2} \ln \left( \frac{e_M}{e_d} \right)$$

On peut alors supposer que l'épaisseur déposée  $e_d$  est sélectionnée par l'équilibre entre le moment de la force hydrodynamique, qui s'applique à l'extrémité du racloir, et le moment exercé par son poids  $mg$  qui s'applique en son centre. On obtient alors :

$$f_v bL = \frac{mgL}{2} \quad \text{soit} \quad e_d \sim e_M \exp \left( -\frac{mg\theta_c^2}{12\eta Vb} \right) \quad (5.3)$$

L'équation 5.3 prédit que l'épaisseur déposée augmente comme attendu avec  $\eta V$ , et diminue si l'on augmente la masse du racloir (par exemple en augmentant son épaisseur  $h$ , ou en accrochant des poids dessus) ou l'angle  $\theta_c$ . On peut également remarquer que, si l'on utilise des racloirs de même largeur que la plaque de dépôt, la masse du racloir s'écrit  $m = \rho_{Al} hLb$  et la dépendance en  $b$  s'évanouit.

On peut noter, en guise de conclusion, que cette loi de dépôt est très différente des lois de puissance présentées dans les chapitres précédents. La raison fondamentale, liée à la divergence de la contrainte, est qu'on ne peut pas définir d'épaisseur typique dans un coin.

### 5.2.2 Vérification de la prédiction

Nous avons d'abord testé la dépendance de l'épaisseur avec la vitesse d'entraînement et la masse du racloir, tous les autres paramètres étant fixés (figure 5.3). Lorsque l'on trace  $e_d$  en fonction de  $\frac{mg\theta_c^2}{12\eta Vb}$ , les expériences réalisées avec les épaisseurs de racloir testées se regroupent sur une exponentielle décroissante, comme prévu par l'équation 5.3. Un

ajustement de la forme  $e_d = e_M \exp\left(-a \frac{mg\theta_c^2}{12\eta V b}\right)$  fournit  $e_M = 1,6$  mm, qui est une valeur plausible, et  $a = 1,3$ , qui est très proche de la valeur 1 attendue. Néanmoins, comme dans les expériences de dépôt par une membrane flexible, l'épaisseur déposée varie avec la largeur du racloir, ce qui complique toute prédiction quantitative.

De même, l'épaisseur varie comme une exponentielle décroissante de  $\theta_c^2$  (figure 5.4). De plus, un ajustement par une exponentielle fournit la même valeur de  $a$  qu'au paragraphe précédent, ce qui confirme que l'épaisseur déposée varie bien comme attendu avec les différents paramètres. En revanche,  $e_M$  est deux fois moins élevé, ce qui est probablement dû à une préparation différente de la plaque de dépôt (notamment de la quantité de liquide déposée initialement). Il serait d'ailleurs intéressant de comprendre ce qui fixe la dimension macroscopique  $e_M$ , et d'effectuer pour cela une série d'expériences dans une configuration mieux contrôlée.

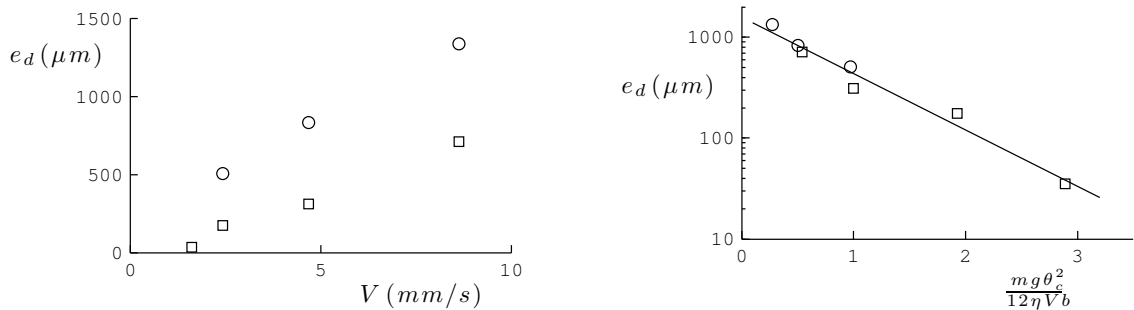


FIGURE 5.3 – À gauche : épaisseur de liquide déposée en fonction de la vitesse de tirage  $V$ , pour deux épaisseurs de racloir :  $h = 1,5$  mm ( $\circ$ ) et  $h = 3$  mm ( $\square$ ). Les autres paramètres sont :  $\theta_c = 26,6^\circ$  ( $y_0 = 25$  mm et  $L = 50$  mm),  $\eta = 17,4$  Pa·s et  $b = 3$  cm. À droite : ces mêmes expériences se superposent lorsqu'on adimensionne la vitesse. Un ajustement exponentiel de la forme  $e_d = e_M \exp(-ax)$  (traits pleins) fournit :  $e_M = 1,6$  mm et  $a = 1,3$ .

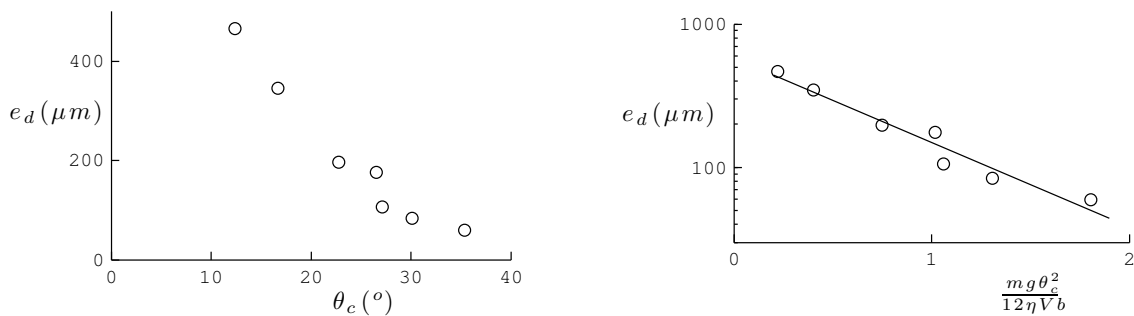


FIGURE 5.4 – À gauche : épaisseur de liquide déposée en fonction de l'angle  $\theta_c$ . Les autres paramètres sont :  $h = 1,5$  mm,  $\eta = 17,4$  Pa·s,  $V = 2,3$  mm/s et  $b = 3$  cm. À droite : la décroissance est exponentielle. Un ajustement de la forme  $e_d = e_M \exp(-ax)$  (traits pleins) fournit :  $e_M = 0,6$  mm et  $a = 1,35$ .

### 5.3 Conclusion sur les racloirs flexibles

L'étude du dépôt de fluide par un racloir rigide a été motivée entre autre par le désir mieux comprendre le régime de "mouillage partiel" dans le cas de racloirs flexibles. La présente étude semble suggérer que ces deux configurations sont très différentes, ce qui s'illustre par des lois de dépôt qualitativement dissemblables. On vérifie d'ailleurs sur la figure 5.5 que même aux grandes valeurs de  $y_0$ , le dépôt dans le cas flexible ne suit pas la prédiction faite pour le cas rigide (équation 5.3). Il nous semble que la différence fondamentale entre ces deux configurations provient de l'origine de la force qui s'oppose à l'entraînement. En particulier, dans le cas flexible, la force qui compense les forces hydrodynamiques est d'origine élastique. On ne peut donc pas négliger la déformation du racloir sous l'effet des contraintes dans le fluide, ce qui empêche leur divergence comme dans le cas rigide.

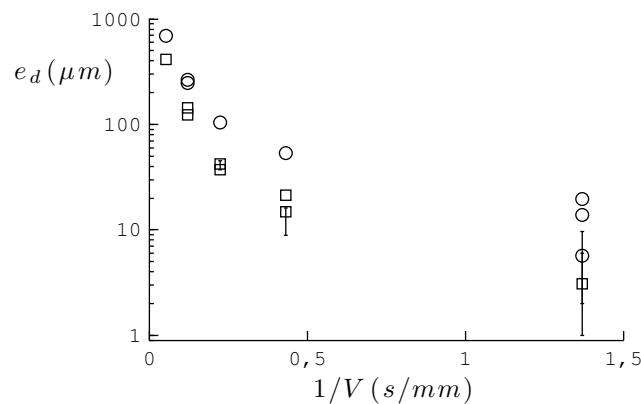


FIGURE 5.5 – Épaisseur déposée dans le cas flexible en fonction de  $1/V$ . La théorie présentée pour un racloir rigide prédit une évolution exponentielle en  $1/V$  qui n'est pas vérifiée.  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $y_0 = 25 \text{ mm}$  (○) ou  $y_0 = 30 \text{ mm}$  (□).

L'étude du cas rigide nous a néanmoins éclairés sur l'effet de l'angle du racloir. Notant plus généralement  $f$  la force exercée sur le racloir, l'épaisseur varie en effet (aux petits angles) comme  $\exp f \theta_c^2$ . On peut imaginer que cette décroissance très rapide avec  $\theta_c$  se retrouve dans le cas flexible, ce qui expliquerait la chute de l'épaisseur déposée lorsque  $y_0$  augment au-delà de  $y_m$  (voir la figure 5.6, à gauche). Plus quantitativement, on peut calculer l'angle  $\theta_c$  et la force adimensionnée  $f$  correspondant à chaque valeur de  $y_0$ , et tracer  $e_d$  en fonction de  $f \theta_c^2$  (figure 5.6, à droite). La décroissance n'est pas exponentielle comme pour un racloir rigide (la conclusion est la même lorsque l'on utilise l'expression non simplifiée de la variation angulaire des contraintes), mais plutôt en loi de puissance, signe que les résultats présentés dans ce chapitre ne sont pas directement applicables au cas flexible.



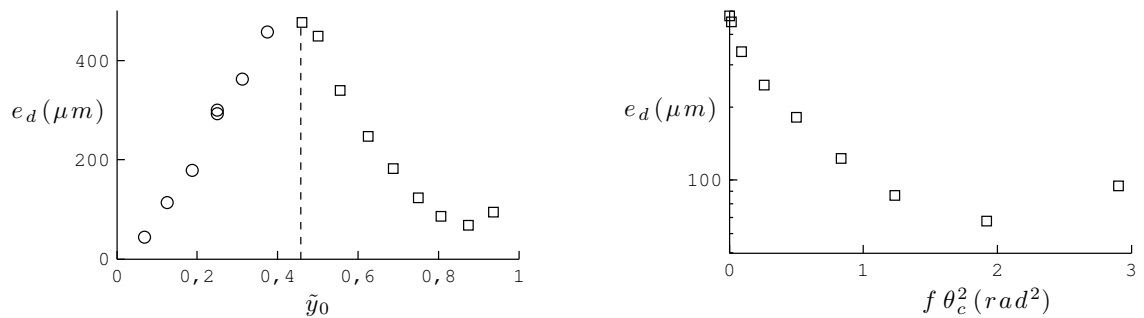


FIGURE 5.6 – À gauche : épaisseur  $e_d$  déposée par un racloir flexible en fonction de  $\tilde{y}_0$ . Dans cette expérience,  $V = 8,2 \text{ mm/s}$ ,  $B = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$  et  $\eta = 17,4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Les pointillés représentent  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_m$ . À droite : les données pour  $y_0 > y_m$  sont tracées en fonction de  $f \theta_c^2$  (les autres correspondent à  $\theta_c = 0$ ), dans un diagramme semilogarithmique. On n'observe pas la décroissance en  $\exp(-f \theta_c^2)$  attendue pour un racloir rigide.

## Troisième partie

### Fabrication et évolution de filaments



# Chapitre 6

## Fabrication de filaments visqueux

*Le travail présenté dans ce chapitre a été réalisé dans le cadre d'un séjour au "Fluid Mechanics Laboratory" de l'université de Brown, en collaboration avec Kenny Breuer.*

*In fondo hai ragione, sappiamo ancora troppo poco.*

Umberto ECO, *Il nome della rosa*

*Si vous pensez avoir trouvé la solution, eh bien, une bonne nuit de sommeil et il n'y paraît plus.*

Brigitte FONTAINE, *L'Europe*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Principe de l'expérience</b>	<b>100</b>
6.1.1	Entraînement sans support	100
6.1.2	Description du dispositif	100
<b>6.2</b>	<b>Extraction de filaments visqueux</b>	<b>101</b>
6.2.1	Méthodes de formation d'un filament	101
6.2.2	Volume de liquide entraîné	102
6.2.3	Effet du diamètre $D$ du cylindre	104
6.2.4	Effet de la profondeur du bain	105
6.2.5	Longueur du filament extrait	106
6.2.6	Volume maximal entraîné	107
6.2.7	Aller plus loin ?	108
<b>6.3</b>	<b>Drainage des filaments minces</b>	<b>110</b>
6.3.1	Loi expérimentale du drainage	110
6.3.2	Interprétation des observations	110
<b>6.4</b>	<b>Drainage des filaments épais</b>	<b>113</b>
6.4.1	Une loi de drainage différente des filaments fins	113
6.4.2	Forme du "pied" du filament	114
6.4.3	Forme de la "tête" du filament	116
6.4.4	Visualisation de l'écoulement	118
6.4.5	Importance du (non-)glissement sur le cylindre	121
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>122</b>

---

## 6.1 Principe de l'expérience

### 6.1.1 Entraînement sans support

Dans les expériences d'entraînement présentées jusqu'ici, la quantité de liquide entraînée est déterminée par un équilibre entre des forces de viscosité d'une part, et des forces capillaires ou élastiques d'autre part. Le point commun de ces expériences réside dans le fait que le liquide se dépose sur une surface solide. Ce n'est plus le cas dans ce chapitre où l'extraction se fait à l'aide d'un cylindre mû verticalement. Si le solide support joue évidemment un rôle (sans lui, pas d'entraînement), on peut s'attendre à ce que son effet diminue lorsque la longueur du filament augmente, et que certaines propriétés d'entraînement ou de drainage soient ainsi très différentes de ce que l'on a observé jusqu'ici.

### 6.1.2 Description du dispositif

#### Paramètres de l'expérience

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 6.1. Un cylindre (en matière plastique ou métallique) de diamètre  $D$  (2 mm, 13 mm ou 45 mm) est placé au contact d'un bain d'huile silicone visqueuse (de viscosité  $\eta = 12 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  ou  $\eta = 97 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ). Le liquide mouillant totalement le cylindre a tendance à remonter et former un ménisque le long de l'objet. Pour éviter ceci, le cylindre est placé un peu au-dessus de la surface du liquide (à environ 2 mm), de manière à ce que l'interface liquide/air soit quasi verticale au bord du cylindre.

Le solide, mû par une crémaillère actionnée par un moteur pas à pas, est ensuite tiré à une vitesse constante  $V$  (de 0,5 mm/s à 170 mm/s), créant ainsi un filament visqueux dont le diamètre initial est d'ordre  $D$ .

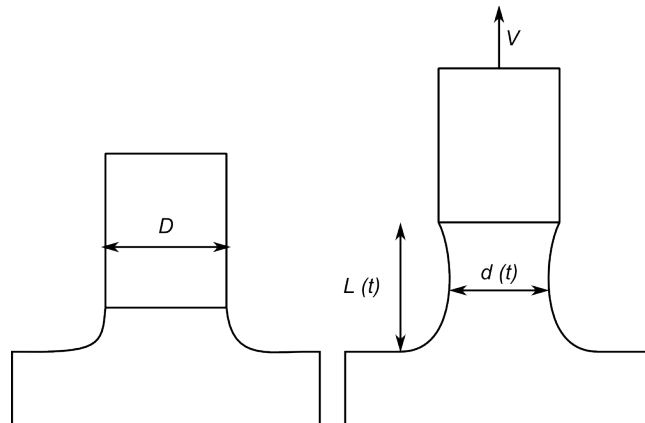


FIGURE 6.1 – Schéma de l'expérience. À gauche : condition initiale. À droite : fabrication du filament visqueux.

#### Éclairage, visualisation et traitement des données

L'expérience est filmée à l'aide d'une caméra (avec un capteur de 512 pixels) équipée d'un objectif macro (de 90 mm ou 28 mm de focale), à des fréquences d'acquisition comprises entre une fraction de hertz et 30 Hz. Comme illustré par la figure 6.2, le filament

est rétro-éclairé par l'intermédiaire d'un écran diffuseur (plaque de Plexiglas blanc translucide), positionné de manière à dépasser légèrement du champ de la caméra. La source lumineuse est confinée dans une boîte opaque, de manière à ce que l'écran soit beaucoup plus lumineux que le reste de la salle. Ces deux propriétés assurent des bords noirs au filament (car les bords réfléchissent alors vers la caméra la lumière provenant de la salle d'expérience), sur un fond blanc. Nous avons également veillé à ce que le fond ne soit pas trop surexposé : dans le cas contraire les bords du filament "disparaissent" dans le fond, ce qui diminue son épaisseur apparente.

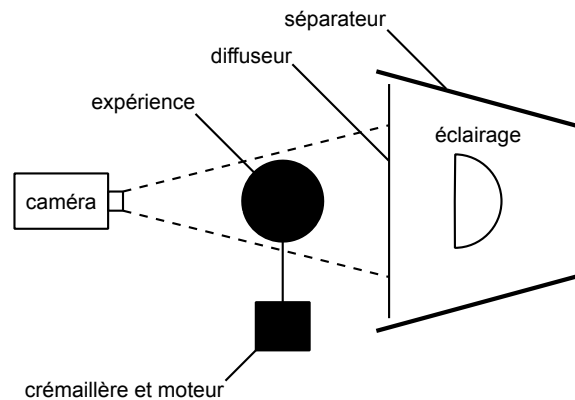


FIGURE 6.2 – Principe d'éclairage de l'expérience, qui permet d'obtenir un filament foncé sur fond blanc (voir la figure 6.3).

L'attention portée à l'éclairage permet d'obtenir des images facilement exploitables (la figure 6.3 en fournit un exemple) : un programme parcourt chaque ligne de pixels horizontale à partir des bords de l'image, et considère qu'il a rencontré le bord du filament lorsque le niveau de gris du pixel considéré descend sous un certain seuil. On peut ainsi reconstruire à chaque instant le profil du filament.

À l'aide de ce dispositif expérimental, nous avons réalisé deux types d'expériences que nous présenterons tour à tour :

- Dans les expériences d'extraction de filament, le cylindre se déplace à vitesse constante (on a donc  $L(t) = Vt$ ). On se demande alors quelle quantité de liquide est extraite du bain, et comment celle-ci dépend des différents paramètres expérimentaux ( $V$ ,  $D$ ,  $\eta$ ).
- Dans les expériences de drainage, un filament de liquide est obtenu en déplaçant rapidement (à 125 mm/s) le cylindre jusqu'à une hauteur  $L$ . Le cylindre est alors arrêté, et l'on s'intéresse à l'évolution du filament (et notamment de son diamètre  $d$ ), qui s'amincit sous l'effet du drainage gravitaire.

## 6.2 Extraction de filaments visqueux

### 6.2.1 Méthodes de formation d'un filament

Une façon de former des filaments visqueux consiste (comme nous le ferons au chapitre 7, page 125) à piéger une quantité donnée de liquide entre deux disques (formant ainsi un pont capillaire), que l'on écarte. Si l'ouverture est très lente, la forme du filament est déterminée par un équilibre entre forces de gravité et forces capillaires. Cette configuration, étudiée

par Plateau (1873) et Padday et Pitt[73, 74] n'est stable que tant que l'écartement n'est pas trop important, ce qui définit sa longueur maximale.

Un filament de longueur plus importante peut être créé lorsque l'ouverture est rapide. Divers articles décrivent cette configuration d'un point de vue expérimental, numérique ou théorique pour des fluides de faible viscosité ([81, 66, 98, 15]) ou de viscosité importante ([69, 33]). Une littérature abondante souligne l'intérêt de cette configuration pour la mesure des propriétés rhéologiques de fluides : Matta et Tytus[64] ont ainsi montré que la mesure du taux d'élongation d'un pont capillaire soumis à une force constante permet la mesure de sa viscosité élongationnelle. Tirtaatmadja et Sridhar[94], et Spiegelberg et collaborateurs [90] ont utilisé dans le même but un dispositif imposant un taux d'élongation exponentiel et permettant une mesure de la force exercée par le filament et de sa géométrie. McKinley et Tripathi[65] présentent une façon d'interpréter ces différentes expériences.

Dans toutes ces expériences, le volume du filament est constant, et limité par la quantité maximale de liquide qui peut être tenu par capillarité entre deux disques de diamètre  $D$  (qui est d'ordre  $a^2D$ ). Ceci constitue une différence fondamentale avec la configuration présentée ici, pour laquelle le volume du filament varie au cours du temps, ce qui en fait une expérience d'entraînement de fluide. De plus, la quantité de liquide entraînée n'est pas limitée par les conditions initiales de l'expérience.

À notre connaissance, les seules études de l'extraction d'un filament de liquide à partir d'un bain présentes dans la littérature concernent le régime statique dans lequel la tension de surface équilibre la gravité (Huh et Scriven[42], Padday et Pitt[75]), ou les fluides peu visqueux pour lesquels la dynamique est dominée par l'inertie et la tension de surface (Marmottant et Villermaux[63]). La taille importante des filaments extraits (de l'ordre du centimètre), ainsi que la grande viscosité des huiles utilisées, placent nos expériences dans un tout autre régime dominé par les forces visqueuses et gravitaires.

## 6.2.2 Volume de liquide entraîné

### Mesures

La figure 6.3 présente une expérience typique d'entraînement. Dans un premier temps, du liquide est entraîné hors du bain par le cylindre. Néanmoins, en fin d'expérience, le filament s'est aminci et pratiquement tout le liquide est retourné dans le bain. Le volume de liquide entraîné passe donc par un maximum, que l'on a essayé de déterminer.

Le "flambage" du filament que l'on observe sur la dernière image de la chronophotographie illustre d'ailleurs ce drainage de liquide. Qualitativement, on peut justifier son apparition si on assimile ce flambage à l'instabilité d'enroulement spontané de filaments visqueux étudiée Ribe[80, 60] et Skorobogatiy et Mahadevan[85, 58, 59]. L'instabilité s'apparaît en effet que lorsque son rapport d'aspect devient assez grand. Ce résultat semble compatible avec notre expérience, dans laquelle le flambage a lieu plutôt en fin d'entraînement lorsque le diamètre du filament est faible, et sa longueur importante.

Nous avons calculé le volume total de liquide  $Q$  entraîné à chaque instant à partir des profils des filaments, et nous l'avons représenté sur la figure 6.4 en fonction du temps. Seul le diamètre  $D$  du cylindre a été modifié entre les trois expériences présentées, pour lesquelles  $V = 25$  mm/s et  $\eta = 12$  Pa·s. Comme attendu, la quantité de liquide extraite augmente dans un premier temps, passe par une valeur maximale  $Q_{max}$  aux alentours de  $t = 0,5$  s (ce qui correspond à une longueur  $L_{max} \approx 12,5$  mm), puis décroît.  $Q_{max}$  augmente fortement avec le diamètre du cylindre.

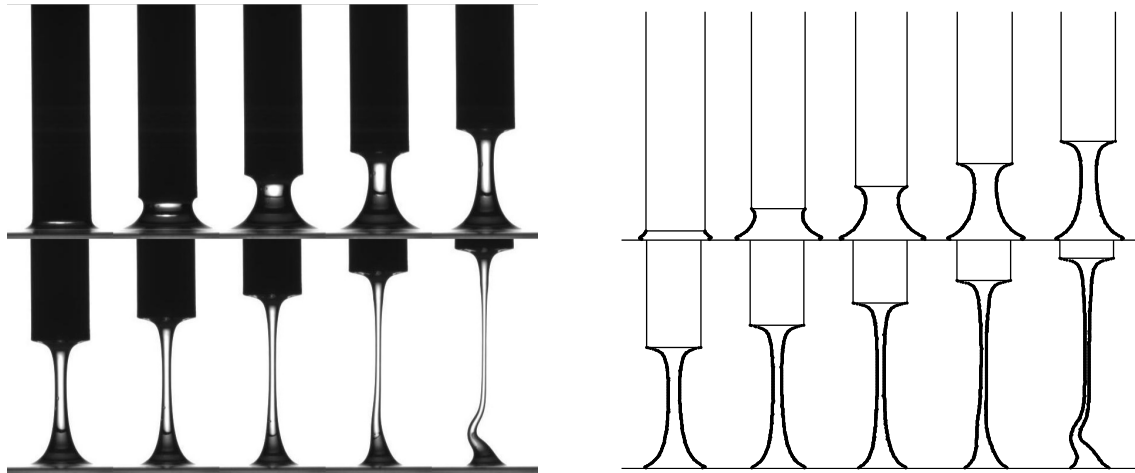


FIGURE 6.3 – Chronophotographie d'une expérience d'entraînement :  $D = 13$  mm,  $V = 25$  mm/s,  $\eta = 12$  Pa·s. L'intervalle entre deux images est de 0,2 s. Le volume de liquide entraîné est maximal aux alentours de la troisième image, soit pour  $t \approx 0,5$  s. L'image de droite présente les profils de filaments obtenus à partir des photos.

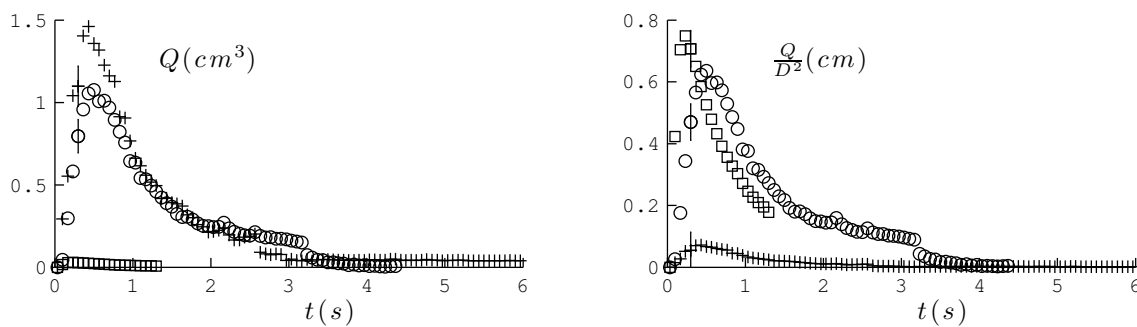


FIGURE 6.4 – Volume  $Q$  entraîné lors d'une expérience d'entraînement en fonction du temps, pour  $V = 25$  mm/s et  $\eta = 12$  Pa·s. Trois diamètres  $D$  différents ont été testés :  $D = 2$  mm ( $\square$ ),  $D = 13$  mm ( $\circ$ ) et  $D = 45$  mm ( $+$ ). La figure de droite représente le volume divisé par  $D^2$ .



### Précision de la mesure

L'erreur expérimentale représentée sur la figure 6.4 (nous n'avons représenté qu'une barre d'erreur par courbe pour ne pas surcharger le graphique) provient essentiellement du calcul du volume du filament à partir de la position de ses bords. En effet, la méthode de détection utilisée ne fait aucune différence entre le filament lui-même, le bain et le cylindre : la zone sur laquelle est effectué le calcul doit être déterminée par d'autres moyens.

La première difficulté réside dans le fait que le cylindre se déplace au cours de l'expérience. Pour chaque expérience, nous avons mesuré la position du bas du solide sur une dizaine d'images. Un ajustement de ces mesures par une loi linéaire fournit ensuite la position du haut du filament sur chaque image (cela permet également de vérifier que la vitesse d'entraînement est bien constante, et égale à la vitesse de consigne).

Une difficulté supplémentaire réside dans la détermination des extrémités du filament. En effet, celles-ci se confondent souvent avec le cylindre (tous deux apparaissent noirs sur les images) ou le bain de liquide. Plus fondamentalement, comme l'illustre la figure 6.5, des effets de parallaxe compliquent l'analyse.

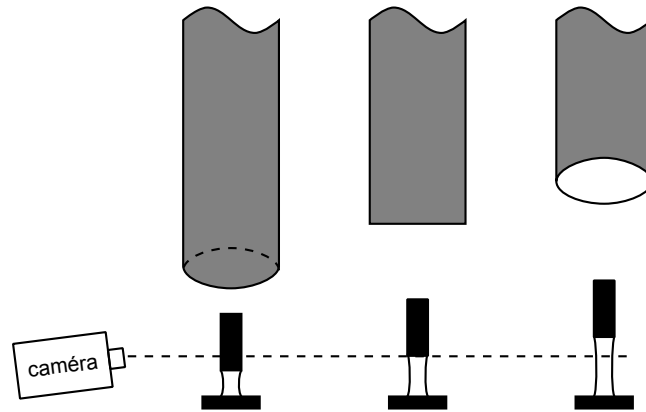


FIGURE 6.5 – Schéma du cylindre tel qu'il est vu par la caméra (en haut) en fonction de sa position (en bas).

Nous avons estimé que l'erreur commise sur la position du sommet et du pied du filament est de l'ordre de 1 mm, ce qui se traduit par une erreur d'évaluation du volume de l'ordre de  $d^2 \times 1 \text{ mm}$

### 6.2.3 Effet du diamètre $D$ du cylindre

En début d'expérience, le diamètre du filament liquide extrait est proche de  $D$ , et on remarque de plus sur la figure que le temps  $t_{max}$  du maximum n'est pas très différent d'une expérience à l'autre. On peut donc se demander si  $Q_{max}$  varie comme  $D^2$ . Le graphique de droite de la figure 6.4, qui représente  $Q/D^2$  en fonction du temps, infirme cette hypothèse : si cette représentation permet de regrouper  $Q_{max}$  pour les expériences réalisées avec les deux diamètres les plus faibles ( $Q_{max}/D^2 \approx 0,7 \text{ cm}$ ), l'expérience avec  $D = 45 \text{ mm}$  reste à part.

Nous voyons deux raisons éventuelles à cela. En premier lieu, le diamètre du filament ne reste pas égal à  $D$ . Comme on peut le voir sur la figure 6.6 pour  $D = 45 \text{ mm}$ , son diamètre décroît rapidement au cours de l'expérience, et le filament "glisse" même sur la surface solide. Néanmoins, au moment où le volume est maximale, le diamètre  $d$  du filament

vaut environ  $d = 35$  mm, une valeur trop élevée pour expliquer l'écart observé (la valeur  $Q_{max}/d^2 \approx 0,12$  cm est encore éloignée de  $0,7$  cm).

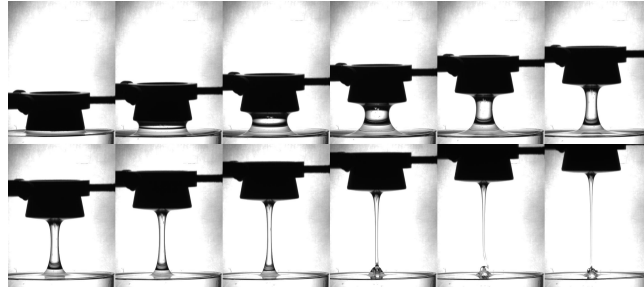


FIGURE 6.6 – Chronophotographie d'une expérience d'entraînement avec  $D = 45$  mm,  $V = 25$  mm/s et  $\eta = 12$  Pa·s. L'intervalle entre deux images est de  $0,2$  s, et le volume de liquide est maximal entre la deuxième et la troisième image. Remarquez la contraction du filament, dont le diamètre devient nettement inférieur à  $D$ .

Une deuxième raison, peut-être pas totalement indépendante de la première, est que toutes les expériences ont été réalisées dans un récipient d'environ  $1,5$  cm de profondeur. Or le fond du récipient augmente la dissipation visqueuse, et rend donc l'entraînement plus difficile. On peut alors justifier qualitativement la dépendance en  $D$  observée en supposant que l'effet du fond du récipient est négligeable pour les deux plus petits diamètres, mais pas pour  $D = 45$  mm :  $Q_{max}$  est alors plus faible qu'attendu.

#### 6.2.4 Effet de la profondeur du bain

Pour illustrer cet effet, nous avons réalisé une série d'expériences en faisant varier la profondeur  $p$  du bain, les autres paramètres étant constant :  $D = 12$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s et  $V = 19,1$  mm/s. On observe (figure 6.7) que le volume maximal entraîné  $Q_{max}$  augmente avec  $p$  jusqu'à  $p/D \approx 1$ , puis se stabilise aux alentours de  $1\text{cm}^3$ .

$Q_{max}$  tend de plus vers une constante non nulle pour  $p \rightarrow 0$ . Cela est aux conditions initiales de l'expérience : le cylindre est décollé de la surface (schéma 6.1), et a donc déjà "entraîné" un ménisque d'une hauteur  $\sqrt{2}a$  (la hauteur du cylindre est ajustée de manière à ce que le ménisque soit vertical) hors du bain. Cela correspond à un volume minimal cohérent avec les expériences :

$$Q_{\text{ménisque}} = \sqrt{2}a \frac{\pi D^2}{4} = 0,24 \text{ cm}^3$$

Sur la figure 6.7 représentant  $Q$  en fonction du temps, on remarque d'ailleurs que pour les deux plus faibles valeurs de  $p$ , les courbes forment quasiment un plateau : le ménisque est essentiellement étiré sans qu'il n'y ait de liquide supplémentaire entraîné.

On peut tenter d'interpréter les expériences de la figure 6.4 à la lumière de cette discussion : l'effet de la profondeur finie du bain ( $p = 15$  mm) est faible pour  $D = 13$  mm et  $D = 2$  mm (le rapport  $p/D$  vaut alors respectivement  $1,2$  et  $7,5$ ), et le volume maximal entraîné  $Q_{max}$  semble alors proportionnel à  $D^2$  (avec un coefficient de l'ordre de  $0,7$ ). En revanche, le fond du récipient se fait sentir pour  $D = 45$  mm ( $p/D = 0,3$ ), ce qui conduit à un entraînement moindre de fluide.

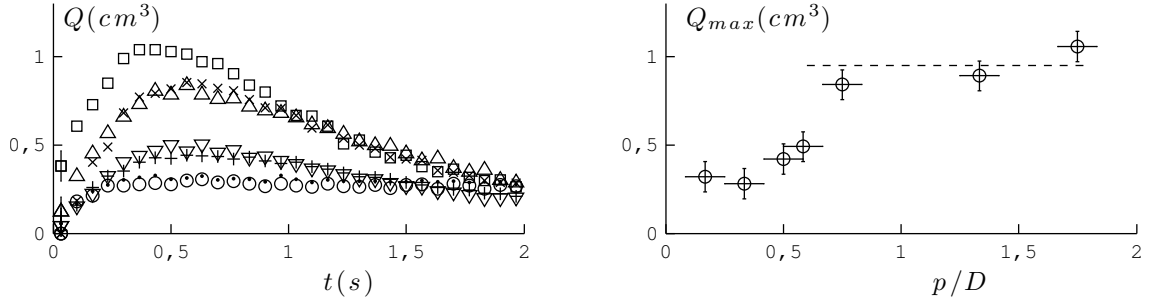


FIGURE 6.7 – Expériences d’entraînements avec  $D = 12$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $V = 19,1$  mm/s et différentes profondeurs de bain  $p$  : 2 mm ( $\circ$ ), 4 mm ( $\cdot$ ), 6 mm ( $+$ ), 7 mm ( $\Delta$ ), 9 mm ( $\nabla$ ), 16 mm ( $\times$ ), 21 mm ( $\square$ ).

### 6.2.5 Longueur du filament extrait

Les résultats du paragraphe précédent semblent suggérer que le diamètre du filament est d’ordre  $D$ . On se demande alors si une estimation de sa longueur  $L_M$  au moment où son volume est maximal ne permettrait pas de prédire le volume entraîné par la formule :  $Q_{max} \sim D^2 L_M$ .

Quatre phénomènes pourraient intervenir dans notre expérience : la gravité, la viscosité, l’inertie et la capillarité. Le nombre de Reynolds typique de l’expérience, construit sur une échelle de longueur de 1 cm, une vitesse de 10 cm/s et une viscosité de 10 Pa·s (valeurs typique de l’expérience présentée sur la figure 6.3) est d’ordre 0,1, ce qui nous assure que l’inertie est négligeable devant la viscosité. En outre, si l’on considère un cylindre de liquide de longueur  $L$  et de diamètre  $d$ , la tension de surface induit un gradient de pression de l’ordre de  $\frac{\gamma}{dL}$ . Les effets de tension de surface sont donc négligeables devant la gravité tant que :

$$\frac{\gamma}{dL} < \rho g \quad \text{soit} \quad d > \frac{a^2}{L}$$

La longueur capillaire  $a$  des huiles utilisées vaut 1,5 mm, le diamètre limite vaut donc environ 0,2 mm pour les expériences présentées, ce qui est beaucoup plus faible que le diamètre des filaments.

Il semblerait donc que l’entraînement résulte d’un équilibre entre forces visqueuses et forces de gravité. Dans le filament, les gradients de vitesse sont essentiellement axiaux vu que sa surface est libre. Or à un volume de filament maximal correspond une vitesse du fluide nulle à l’interface entre le filament et le bain. La vitesse du fluide est de plus égale à  $V$  au niveau du cylindre et la force volumique visqueuse est donc d’ordre :

$$F_\eta \sim \eta \frac{V}{L^2}$$

L’équilibre avec la force de gravité  $\rho g$  fournit donc une estimation de  $L_{max}$  :

$$\eta \frac{V}{L_{max}^2} \sim \rho g \quad \text{soit} \quad L_M \sim \sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}} \quad (6.1)$$

D’après cette équation,  $L_M$  ne dépend pas du diamètre  $D$  du cylindre : cette caractéristique provient du fait que forces visqueuses et forces de gravité sont verticales. Cette expression correspond à l’échelle de longueur la plus simple que l’on peut construire en

équilibrant viscosité et gravité. On la retrouve donc dans de nombreux problèmes d'entraînement. Lorenceau et collaborateurs[56] ont par exemple étudié le film d'air entraîné par un solide pénétrant à vitesse  $V$  dans un bain de liquide visqueux, et ont montré que la longueur de ce film est d'ordre  $L_M$ .  $L_M$  peut également se récrire sous la forme  $L_M \sim aCa^{1/2}$ , et correspond ainsi à l'épaisseur de liquide entraînée dans la configuration d'entraînement par trempage, dans le régime où la vitesse d'entraînement est assez importante pour que le phénomène soit dominé par la gravité(cf. [22], et la partie 1.3.1, page 18).

Pour tester cette prédiction, nous avons effectué une série d'expériences d'entraînement en faisant varier la vitesse du cylindre (de 0,5 mm/s à 18 cm/s), son diamètre (2 mm, 13 mm et 45 mm), et la viscosité du liquide (12 Pa·s et 97 Pa·s). La détermination expérimentale de  $L_M$  nécessite de calculer à chaque instant le volume  $Q$  du filament, pour déterminer l'instant correspondant au volume maximal. La longueur  $L_M$ , mesurée alors pour chaque réalisation directement sur le film de l'expérience, est représentée sur la figure 6.8. Pour chaque couple  $(D, \eta)$ ,  $L_M$  varie bien comme  $\sqrt{V}$  (graphe de gauche). De plus, les mesures sont proportionnelles à la valeur attendue  $\sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}}$  (graphe de droite), avec un coefficient 2,1.

Les valeurs obtenues pour  $D = 2$  mm ( $\square$ ) semblent néanmoins systématiquement plus faibles que cette loi (d'environ 30 %). On peut imaginer que cette déviation est la signature d'effets capillaire. On s'attend en effet à ce que ces derniers, en contribuant au drainage, diminuent  $L_M$ , ce qui est qualitativement cohérent avec les observations.

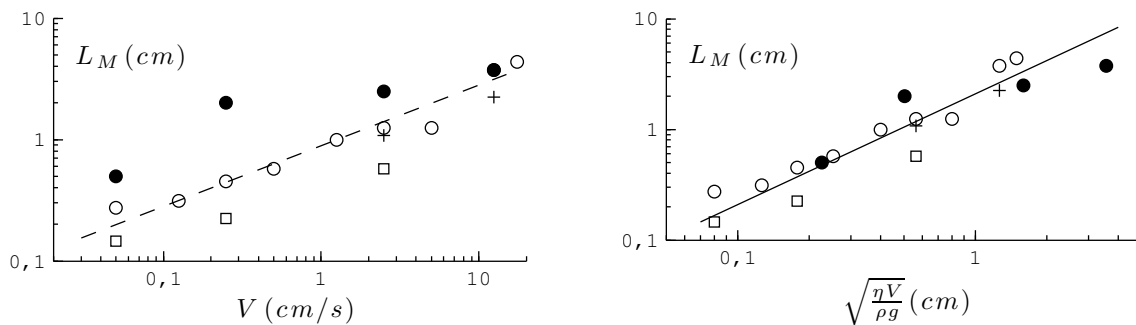


FIGURE 6.8 – Longueur  $L_M$  du filament mesurée au moment où son volume est maximal, en fonction de la vitesse d'entraînement (à gauche), ou de la longueur prédite par l'équation 6.1 (à droite). Les expériences sont réalisées avec deux huiles silicones de viscosités  $\eta = 12$  Pa·s (symboles vides) ou  $\eta = 97$  Pa·s ( $\bullet$ ) et trois diamètres de cylindre :  $D = 2$  mm ( $\square$ ),  $D = 13$  mm ( $\circ$ ) et  $D = 45$  mm ( $+$ ). Les tirets représentent une loi de puissance en  $\sqrt{V}$ , tandis que la droite en trait plein représente l'équation  $y = 2,1x$ .

### 6.2.6 Volume maximal entraîné

Nous avons également relevé, au cours de ces mêmes expériences, le volume maximal entraîné  $Q_{max}$ , représenté sur la figure 6.9 (à gauche). Lorsque l'on trace  $Q_{max}/D^2$  en fonction de  $\sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}}$ , les points expérimentaux pour  $D = 2$  mm et  $D = 13$  mm se rassemblent autour d'une courbe maîtresse. Cette courbe maîtresse n'est pas proportionnelle à  $\sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}}$  (une loi linéaire est représentée en tirets), ce qui nous indique que le volume maximal n'est pas simplement égal à  $D^2 L_M$ . Un ajustement des données en loi de puissance fournit un exposant d'environ 0,4, ce qui se traduit par une loi empirique pour le volume du filament :

$$Q_{max} \sim D^2 \left( \frac{\eta V}{\rho g} \right)^{0,20}$$

Une explication possible pourrait être que l'on a oublié dans le raisonnement précédent de tenir compte du volume initial  $Q_0$  du filament, qui constitue une limite inférieure à  $Q_{max}$ . La façon la plus simple d'en tenir compte consiste à postuler :

$$Q_{max} = Q_0 + D^2 L_M$$

Or, notant  $L_0$  la hauteur initiale du cylindre au dessus du bain,  $Q_0$  est d'ordre  $\pi D^2 L_0/4$ , soit  $Q_0/D^2 \sim \pi L_0/4$ . Pour les cylindres de plus grands diamètres (13 mm and 45 mm), le ménisque est analogue au ménisque sur un plan, et  $L_0$  vaut environ  $\sqrt{2}a$ . Pour le cylindre de 2 mm, on peut l'estimer à partir des données de Huh et Scriven[42], et  $L_0 \approx 0,85a$ . Cela se traduit respectivement par des valeurs de  $Q_0/D^2$  de 0,17 cm et 0,1 cm, qui ne sont pas totalement négligeable devant  $Q_{max}/D^2$ . Nous avons tracé sur la figure 6.9 (à droite)  $(Q_{max} - Q_0)/D^2$  en fonction de  $\frac{\eta V}{\rho g}$ . Par soucis de cohérence, la valeur de  $Q_0$  est mesurée à partir des expériences, et est compatible avec l'estimation présentée. Dans cette représentation, le volume augmente plus rapidement que dans la représentation précédente, mais toutefois nettement moins rapidement qu'attendu. Un ajustement en loi de puissance fournit en effet :  $\frac{Q_{max}-Q_0}{D^2} \sim D^2 \left( \frac{\eta V}{\rho g} \right)^{0,27}$

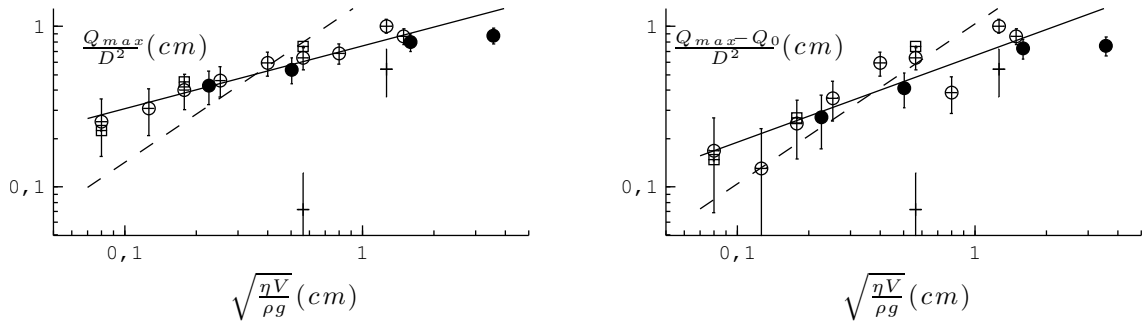


FIGURE 6.9 – Volume maximal de liquide mesuré  $Q_{max}$  (divisé par  $D^2$ ) en fonction de la longueur prédite du filament. Sur le graphe de droite, on a retranché le volume initial  $Q_0$  du filament. Les symboles sont les mêmes que sur la figure 6.8. La droite en pointillés représente le meilleur ajustement des mesures par une loi linéaire, et les droites en traits pleins le meilleur ajustement en loi de puissance, d'équation  $y = 0,8 x^{0,39}$  (à gauche) ou  $y = 0,7 x^{0,54}$  (à droite).

Le fait que  $Q_{max}$  ne soit pas proportionnel à  $D^2 L_{max}$  signifie que la forme du filament, au moment où son volume est maximale, dépend de la vitesse. C'est ce qu'on vérifie sur la figure 6.10, qui présente la forme du filament en  $t_{max}$  pour  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s et différentes vitesses d'entraînement (de 0,5 mm/s à 17,5 cm/s). Sur le graphe de gauche, on retrouve le fait que  $L_M$  augmente avec  $V$ . On remarque de plus sur le graphe de droite que lorsque l'on adimensionne l'échelle horizontale par  $D$  et l'échelle verticale par la longueur  $L_M$  du profil, toutes les courbes ne se superposent pas : le profil est d'autant plus épais que la vitesse est faible.

### 6.2.7 Aller plus loin ?

Pour aller plus loin dans l'analyse, il faut probablement prendre en compte l'étirement du filament au cours du mouvement, et notamment le fait que cet étirement est plus important là où le diamètre du filament est le plus faible (amplifiant ainsi toute perturbation

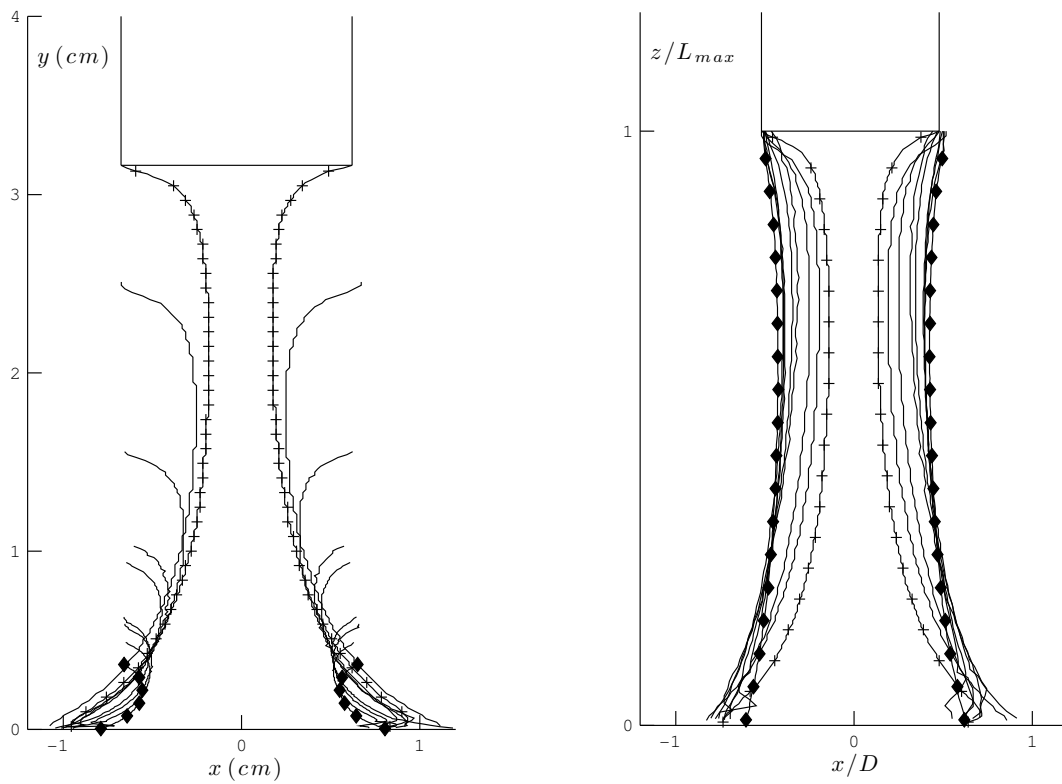


FIGURE 6.10 – Forme du filament au moment où son volume est maximal, pour  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s, et différentes vitesses  $V$ . Les symboles  $\bullet$  et  $+$  correspondent respectivement à la vitesse la plus faible (0,5 mm/s) et la plus grande (17,5 cm/s). Même adimensionnés horizontalement par  $D$  et verticalement par  $L_M$ , les profils ne se superposent pas : le filament est d'autant plus épais que  $V$  est faible.

de sa forme). Neil Ribe, au cours d'une discussion, nous a orienté vers un formalisme permettant d'accomplir cette étude, que nous présentons brièvement en annexe (annexe C, page 157).

### 6.3 Drainage des filaments minces

Nous avons vu (figure 6.8) que le volume de liquide entraîné est maximale lorsque la taille des filaments est de l'ordre du cm. Au delà, le drainage ne peut plus être négligé. Dans les expériences que nous avons menées pour étudier spécifiquement le drainage, le cylindre est rapidement relevé (à 125 mm/s) jusqu'à une hauteur  $L$  fixe. On s'intéresse alors à l'évolution du filament (et notamment de son diamètre  $d$ ), qui s'écoule vers le bain sous l'effet de la gravité.

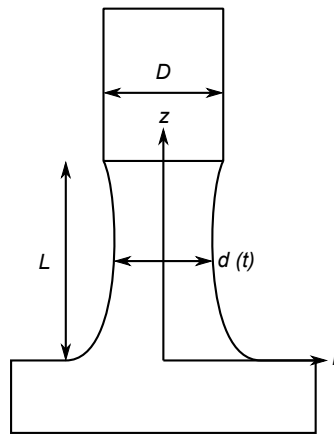


FIGURE 6.11 – Principe de l'expérience de drainage : une fois qu'un filament a été formé, la hauteur  $L$  du cylindre est maintenue constante, et on observe son amincissement en fonction du temps.

#### 6.3.1 Loi expérimentale du drainage

La figure 6.12 présente le diamètre  $d$  au milieu du filament en fonction du temps, pour un cylindre fin ( $D = 2$  mm) et deux longueurs d'extraction différentes :  $L = 14$  mm ( $\bullet$ ) et  $L = 5$  mm ( $+$ ). Pour  $L = 5$  mm, on observe deux régimes de drainage :  $d$  décroît exponentiellement jusqu'à environ 0,5 mm (avec un temps caractéristique de 1 s), puis linéairement (avec une vitesse de 0,28 mm/s). Pour  $L = 14$  mm, on n'observe que le régime linéaire, avec la même vitesse.

#### 6.3.2 Interprétation des observations

Comme dans les expériences d'entraînement, le nombre de Reynolds est au maximum d'ordre 0,1, et l'inertie est donc négligeable. Ainsi, le drainage est gouverné par un équilibre entre viscosité, gravité et tension de surface. On peut retrouver les caractéristiques expérimentales du drainage en égalant, en ordre de grandeur, la force visqueuse et la force motrice fournie par la gravité et la tension de surface. On assimile pour ce faire le filament à un cylindre de liquide de diamètre  $d(t)$  et de hauteur  $L$  (figure 6.13).

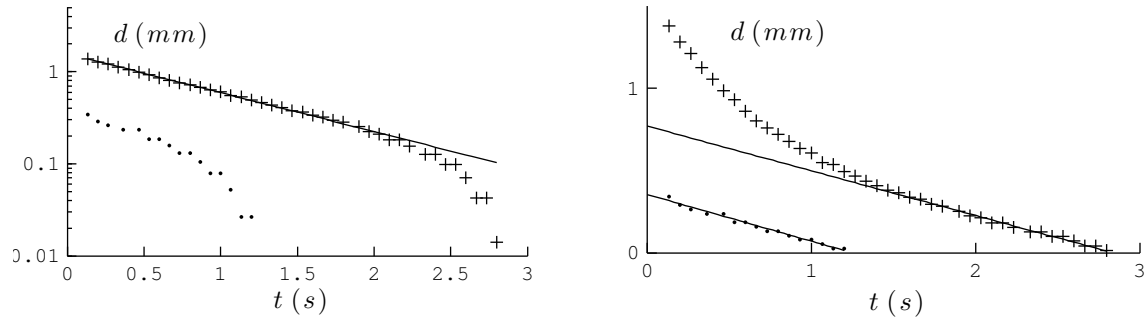


FIGURE 6.12 – Diamètre  $d$  du filament en fonction du temps, pour  $D = 2$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s, et deux longueurs d'extraction :  $L = 14$  mm ( $\bullet$ ) et  $L = 5$  mm ( $+$ ). Les courbes en trait plein montrent une décroissance exponentielle de  $d$  (graphe de gauche) avec un temps caractéristique de 0.7 s ou une décroissance linéaire (graphe de droite), avec des vitesses de  $-0,28$  mm/s ( $L = 14$  mm) et  $-0,27$  mm/s ( $L = 5$  mm).

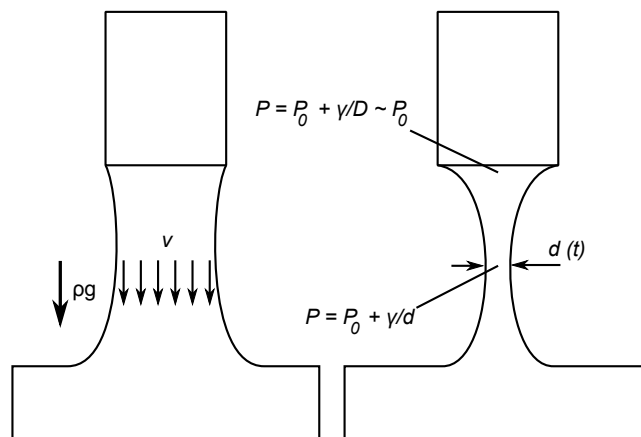


FIGURE 6.13 – Modèle du filament en train de drainer.



### Force résistante et force motrice

On suppose que l'écoulement dans le filament est de type "bouchon" : la vitesse est verticale et constante dans une section du filament. Les gradients de vitesse se font alors sur une longueur  $L$  : la vitesse est nulle près du cylindre, et atteint une valeur typique  $V$  au centre du filament. On peut dès à présent noter (on y reviendra) que cette hypothèse ne tient plus près de la paroi du cylindre. Néanmoins, on peut espérer que lorsque  $L > D$ , la région concernée est négligeable, et l'essentiel de la dissipation a lieu dans le corps du filament. La force volumique de viscosité  $F_\eta$  s'écrit alors en ordre de grandeur :

$$F_\eta \sim \eta \frac{V}{L^2}$$

On peut de plus relier  $V$  à la dérivée temporelle  $\dot{d}$  de  $d$  en exprimant la conservation du débit :

$$Vd^2 \sim (d^2L) \sim \dot{d}dL \quad \text{d'où} \quad V \sim \dot{d} \frac{L}{d}$$

soit

$$F_\eta \sim \eta \frac{\dot{d}}{dL} \tag{6.2}$$

La force motrice, quant à elle, a deux origines. D'un part, la gravité est responsable d'une force volumique  $F_g = \rho g$ . D'autre part, la tension de surface provoque une surpression d'ordre  $\gamma/d$  dans le filament, d'où un gradient de pression  $F_\gamma \sim \frac{\gamma}{dL}$  qui expulse le liquide.

### Régime gravitaire

La gravité est prépondérante lorsque  $F_g > F_\gamma$ , soit  $dL > a^2$  : la surface du filament doit être supérieure au carré de la longueur capillaire. Nous verrons au prochain chapitre que ce même critère permet, lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de filaments visqueux horizontaux (chapitre 7, page 125 et plus précisément partie 7.2.3, page 132), de séparer un régime de chute gravitaire d'un régime dominé par la tension de surface. Ce critère prédit, comme on pouvait s'y attendre, que le début du drainage ( $d$  est alors important) est dominé par la gravité. Dans ce cas, l'équilibre entre  $F_\eta$  et  $F_g$  prédit une décroissance exponentielle de  $d$  avec un temps caractéristique  $\tau_g \sim \frac{\eta}{\rho g L}$  :

$$\eta \frac{\dot{d}}{dL} \sim -\rho g \quad \text{d'où l'on tire} \quad d \sim d_0 e^{-\frac{\rho g L t}{\eta}}$$

Un régime exponentiel est effectivement observé sur la figure 6.12 en début d'expérience pour  $L = 5$  mm. De plus, le temps caractéristiques mesuré (0,7 s) est du même ordre de grandeur que  $\tau_g$  (0,25 s). Enfin, on s'attend à ce que ce régime gravitaire cesse lorsque  $d$  atteint  $\frac{a^2}{L}$ , soit 0,5 mm, ce qui est cohérent avec l'expérience présentée.

### Régime capillaire

Lorsque  $d < \frac{a^2}{L}$  (plus tard dans le drainage, donc), la tension de surface est prépondérante et l'on s'attend à ce que le diamètre du filament décroisse linéairement avec une vitesse  $\frac{\gamma}{\eta}$ . En effet, l'équilibre entre  $F_\eta$  et  $F_\gamma$  s'écrit :

$$\eta \frac{\dot{d}}{dL} \sim -\frac{\gamma}{Ld} \quad \text{d'où l'on tire} \quad d \sim d_0 - \frac{\gamma}{\eta} t$$

Cette prédiction en ordre de grandeur est cohérente avec les études d'Eggers[25] (reprise dans ses articles de synthèse sur le sujet[26, 28]), Kowalewski[49] et Henderson et collaborateurs[39] sur le régime de drainage dominé par la capillarité, qui montrent qu'au voisinage (en espace et en temps) du point de rupture du filament, sa forme et son évolution sont universelles. Ce raisonnement permet d'interpréter le régime linéaire observé. La vitesse de décroissance  $y$  est en effet la même dans les deux expériences présentées (0,28 mm/s), et du même ordre de grandeur que  $\frac{\gamma}{\eta}$  pour notre système (1,8 mm/s).

## 6.4 Drainage des filaments épais

### 6.4.1 Une loi de drainage différente des filaments fins

Le régime exponentiel de drainage présenté au paragraphe précédant se déroule sur une échelle de temps  $\tau_g \sim \frac{\eta}{\rho g L}$ . Une façon de valider notre interprétation consiste à vérifier que ce temps caractéristique varie bien comme attendu, notamment avec  $L$ . Or, le cylindre de 2 mm de diamètre utilisé jusqu'ici limite la gamme de longueurs accessibles : dès que l'on augmente  $L$ , le diamètre initial du filament décroît et le drainage est tout de suite capillaire. C'est pourquoi nous avons répété les expériences de drainage avec un cylindre de diamètre plus importants. La figure 6.14 présente une série d'expériences réalisées avec le cylindre de 13 mm de diamètre, deux longueurs de filaments différentes ( $L = 14$  mm et  $L = 22$  mm) et deux viscosités de liquide ( $\eta = 12$  Pa·s et  $\eta = 97$  Pa·s). Le diamètre  $d$  du filament  $y$  a d'abord été tracé en fonction du temps : le filament d'huile plus visqueuse met évidemment plus longtemps à drainer. De plus, à viscosité donnée, le drainage est plus rapide pour les filaments les plus longs. Plus précisément, les courbes présentées se superposent lorsqu'on les trace en fonction de  $t/\tau_g$  : le temps caractéristique de drainage semble donc bien varier comme  $\tau_g \sim \eta/\rho g L$ .

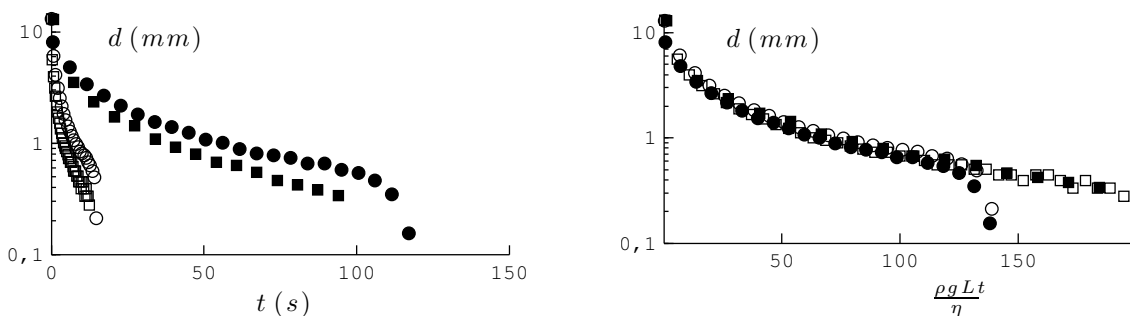


FIGURE 6.14 – Diamètre  $d$  du filament en fonction du temps (graphe de gauche) et en fonction de  $t/\tau_g$ .  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s (symboles vides) ou  $\eta = 97$  Pa·s (symboles pleins) et  $L = 14$  mm ( $\circ$ ) ou  $L = 22$  mm ( $\square$ ). Le drainage est beaucoup plus lent que prévu : il devrait avoir lieu sur un temps caractéristique  $\tau_g$ , qui est de l'ordre de la seconde pour l'huile la plus visqueuse.

Néanmoins, on ne pourrait en aucun cas superposer les courbes de drainage obtenues au paragraphe précédent avec  $D = 2$  mm. En effet,  $d$  ne décroît pas exponentiellement. De

plus, le drainage est environ 100 fois plus lent qu'attendu. Nous avons essayé de comprendre pourquoi le drainage est qualitativement différent dans ces nouvelles expériences. Pour tenter de préciser les phénomènes en jeu, nous nous sommes d'abord intéressés à la forme du filament. Nous avons ensuite visualisé l'écoulement à l'intérieur de celui-ci afin de tenter de caractériser la vitesse de drainage. Nous avons enfin observé qu'un changement des conditions aux limites au niveau du cylindre permet de retrouver un drainage exponentiel.

### 6.4.2 Forme du "pied" du filament

La photo 6.15 présente l'évolution de la forme du filament lors d'une expérience de drainage ( $D = 13$  mm,  $L = 22$  mm), qui diffère du cylindre imaginé pour prédire la loi de drainage. On peut distinguer une partie centrale quasiment cylindrique qui s'étend au fur et à mesure du drainage, mais qui s'épaissit fortement avant de se raccorder au bain et au cylindre.

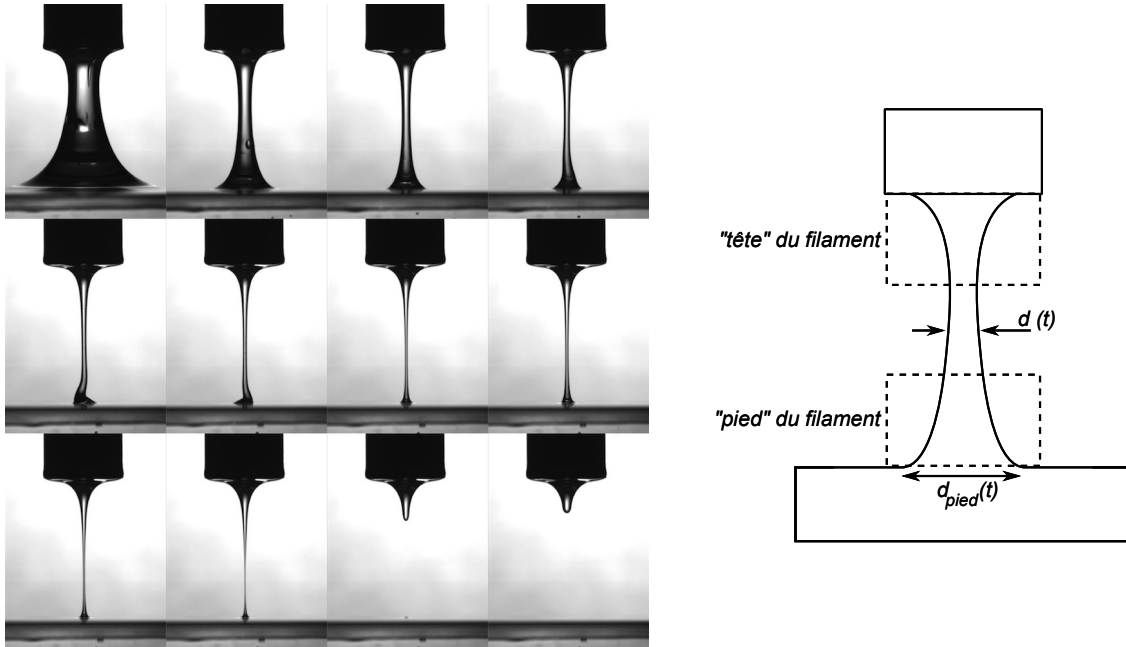


FIGURE 6.15 – À gauche : chronophotographie d'une expérience de drainage, avec  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 22$  mm. L'intervalle entre deux images vaut 1,33 s. À droite : schéma du filament en train de drainer.

L'épaississement du filament au niveau du bain (le "pied") est dû au fait que le liquide issu du drainage ne pénètre pas instantanément dans le bain, d'où une accumulation d'huile. La taille du pied diminue au cours du drainage (c'est à dire au fur et à mesure que le flux de liquide atteignant le bain diminue), comme on peut l'observer sur la figure 6.16 qui présente la forme de ce pied (en réalité le tiers inférieur du filament) à différents instants du drainage. Les profils présentés semblent se superposer lorsque l'on adimensionne l'échelle horizontale par le diamètre  $d$  du filament en son centre. La figure 6.17 permet de préciser cette observation. On y observe que le diamètre  $d_{\text{pied}}$  de la base du filament varie linéairement avec  $d$ , le coefficient de proportionnalité dépendant de la longueur  $L$  du filament.

On peut tenter de comprendre ces observations en présentant un petit modèle permettant de prédire la taille du pied. Pour cela, on suppose, comme sur la figure 6.18 que la

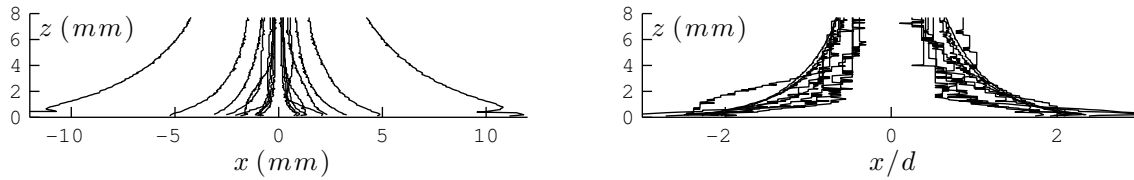


FIGURE 6.16 – Les différentes courbes représentent le tiers inférieur du filament, déterminé à partir des neuf premières images de la figure 6.15. Sur le graphe de gauche, les axes ont été ajustés de manière à ce que la proportion du filament soit identique à la réalité. Sur le graphe de droite en revanche, l'échelle horizontale de chaque profil a été adimensionnée par  $d$ , le diamètre mesuré au milieu du filament (et qui varie au cours de l'expérience).

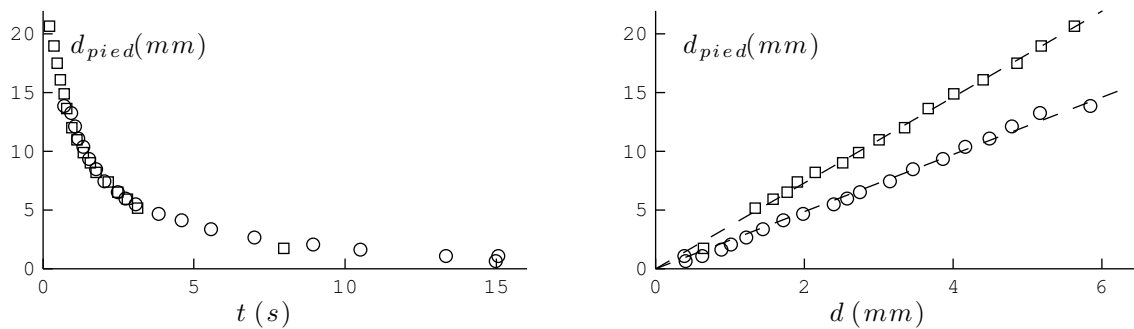


FIGURE 6.17 – Diamètre  $d_{pied}$  de la base du filament (au niveau de la surface du bain) en fonction du temps (à gauche) ou en fonction de son diamètre  $d$  en son centre (en  $z = L/2$ ).  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 12$  mm ( $\circ$ ) ou  $L = 22$  mm ( $\square$ ). Les droites tiretées représentent des lois linéaires de coefficients 2,4 et 3,6.

hauteur  $h$  du pied est du même ordre de grandeur que son diamètre  $d_{pied}$ . La vitesse du fluide  $y$  est estimée en écrivant l'équilibre (sur une échelle  $d_{pied}$ ) entre forces de viscosité et gravité<sup>1</sup> :

$$\eta \frac{V_{pied}}{d_{pied}^2} \sim \rho g \quad \text{soit} \quad V_{pied} \sim \frac{\rho g}{\eta} d_{pied}^2$$

En équilibrant le flux  $V_{pied} d_{pied}^2$  s'écoulant du pied vers le bain et le flux  $V d^2$  provenant du drainage du filament, on obtient une estimation de la taille du pied :

$$d_{pied} = \sqrt{d} \left( \frac{\eta V}{\rho g} \right)^{1/4} \quad (6.3)$$

Dans l'équation 6.3, la vitesse typique de drainage  $V$  est inconnue (et varie au cours de l'expérience), ce qui ne nous permet de conclure quant à la variation de  $d_{pied}$  avec  $d$ . Pour confirmer notre analyse, on peut néanmoins mesurer cette vitesse (à l'aide de la méthode décrite dans la partie suivante), et tracer sur la figure 6.18 (graphe de droite) le diamètre du pied  $d_{mesure}$  en fonction du membre de droite de l'équation 6.3. Si cette représentation permet de superposer les données des deux expériences,  $d_{pied}$  n'est pas proportionnel à la valeur attendue (ce qui revient à dire que  $V$  ne varie pas comme  $d^2$ ). Le modèle proposé est donc un peu crû, peut-être dans l'assimilation de  $h_{pied}$  à  $d_{pied}$ .

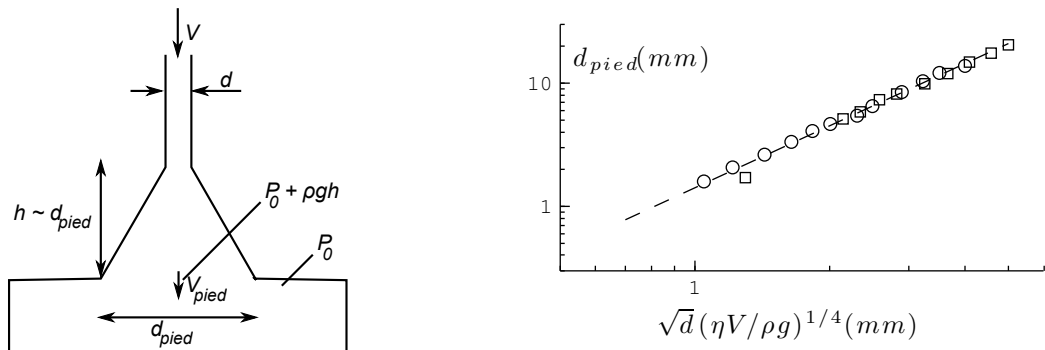


FIGURE 6.18 – À gauche : schéma du pied du filament. À droite :  $d_{pied}$  en fonction du membre de droite de l'équation 6.3. Notez que  $d$  et  $V$  sont mesurés directement dans ces expériences.  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 12$  mm ( $\circ$ ) ou  $L = 22$  mm ( $\square$ ). Les tirets représentent une loi de puissance d'exposant 1,7.

### 6.4.3 Forme de la "tête" du filament

Un peu comme pour le pied, l'épaississement du filament au niveau du cylindre est dû à la présence d'une paroi rigide imposant une vitesse nulle au fluide. En effet, cette condition aux limites impose que la vitesse verticale du fluide augmente lorsque l'on s'éloigne du cylindre. Si l'on considère par exemple que le filament est initialement cylindrique, du fait de ce gradient de vitesse, le flux de drainage (proportionnel à chaque hauteur  $z$  à  $v(z) d(z)^2$ ) n'est aux premiers instants de l'expérience pas constant le long du filament, ce qui suffit qualitativement à expliquer la variation de diamètre observée.

1. On retrouve la même loi d'échelle si l'on assimile le pied à un solide de masse  $\rho d_{pied}^2 h$ , et que l'on cherche, en équilibrant son poids avec une force de friction de Stokes, sa vitesse  $V_{pied}$  de chute dans le liquide.

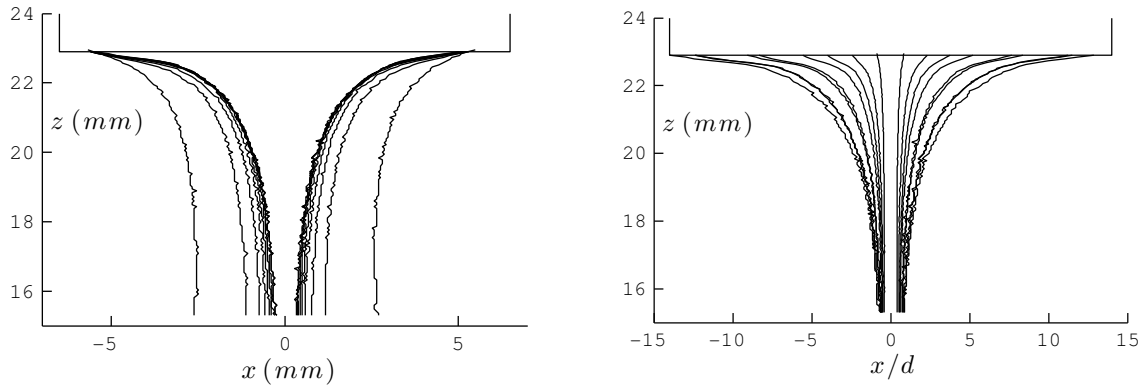


FIGURE 6.19 – Les différentes courbes représentent le tiers supérieur du filament (près du cylindre), déterminé à partir des neuf premières images de la figure 6.15. Sur le graphe de gauche, les axes ont été ajustés de manière à ce que la proportion du filament soit identique à la réalité. Sur le graphe de droite en revanche, l'échelle horizontale de chaque profil a été adimensionnée par  $d$ . Dans cette représentation, les profils les plus "fins" correspondent aux premiers instants du drainage.

Le cylindre impose également une vitesse radiale nulle à sa surface. Lorsque le filament se draine, on s'attend donc à ce que la diamètre de la tête décroisse beaucoup plus difficilement que le corps du filament. C'est ce qu'on observe sur la figure 6.19, qui représente le profil du tiers supérieur du filament à différents instants du drainage. On remarque en particulier que le diamètre de la tête varie beaucoup plus lentement que  $d$ .

La rétraction de la tête (visible en particulier sur la figure 6.15) introduit des gradients de vitesse que nous n'avons pas pris en compte jusqu'ici, donc une source de dissipation supplémentaire qui pourrait être à l'origine de la loi de drainage inattendue que l'on observe. Si, à l'inverse de ce qui a été fait pour les faibles diamètres de cylindre, on suppose que tous les phénomènes responsables du drainage ont lieu sur une échelle  $d$ , la vitesse typique dans le filament devient dans le régime gravitaire :

$$V \sim \frac{\rho g d^2}{\eta}$$

La conservation du débit fournit  $V \sim \dot{d}$ , ce qui permet de prédire une nouvelle loi de drainage :

$$\frac{\dot{d}}{d^2} \sim -\frac{\rho g}{\eta} \quad \text{soit aux temps longs} \quad d \sim \frac{\eta}{\rho g t}$$

La figure 6.20 (à gauche) présente l'évolution du diamètre du filament en coordonnées logarithmiques (pour les données de la figure 6.14). Les mesures sont compatibles avec une décroissance du diamètre en  $1/t$  aux temps longs. Néanmoins, le drainage est tout de même beaucoup plus lent que ne le prédit l'équation ci-dessus ( $\frac{\eta}{\rho g D}$  vaut environ une seconde). De plus, cette prédiction ne peut expliquer la dépendance des lois de drainage en  $L$  observée. Un modèle uniquement basé sur le diamètre du filament ne permet donc pas de rendre compte entièrement du drainage.

La clé de la compréhension du drainage "non exponentiel" semble néanmoins être à rechercher dans la tête du filament. On observe d'ailleurs sur la chronophotographie d'une expérience de drainage réalisée avec  $D = 2$  mm (figure 6.20), donc pour laquelle  $d$  décroît exponentiellement, que la tête du filament ne se rétracte quasiment pas au cours du drai-

nage. C'est cette réflexion qui nous a poussés à essayer de visualiser l'écoulement au sein du filament visqueux.

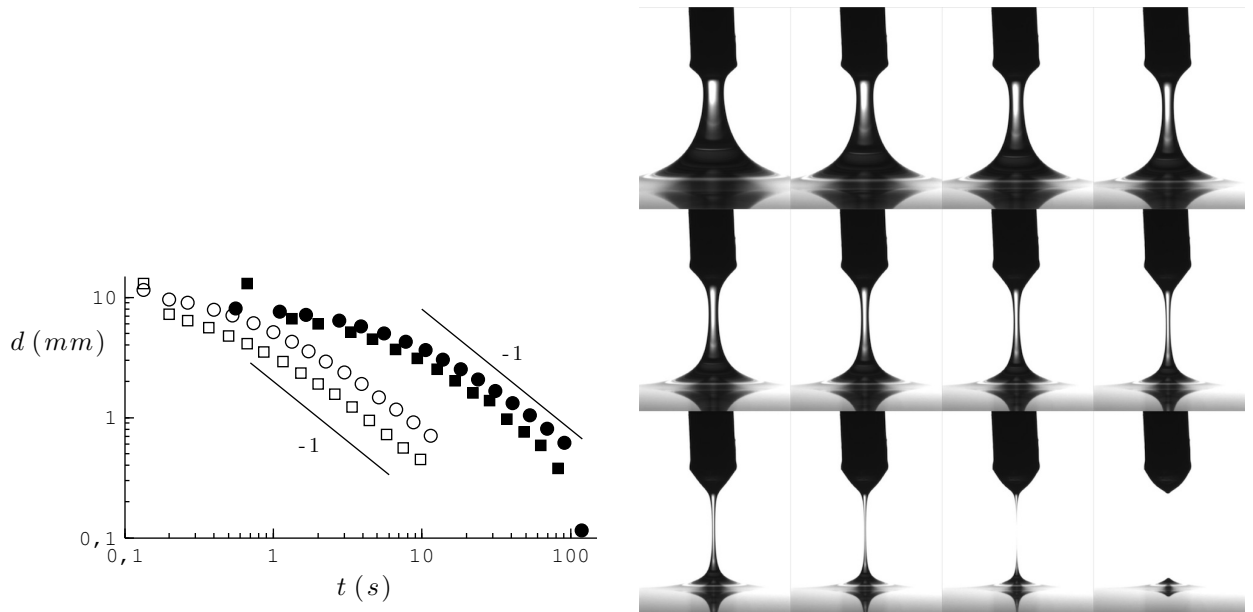


FIGURE 6.20 – À gauche : diamètre  $d$  du filament en fonction du temps, pour  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s (symboles vides) ou  $\eta = 97$  Pa·s (symboles pleins) et  $L = 14$  mm ( $\circ$ ) ou  $L = 22$  mm ( $\square$ ) (mêmes données que la figure 6.14). Les droites représentent des lois en  $1/t$ . À droite : chronophotographie d'une expérience avec  $D = 2$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 5$  mm. L'intervalle entre deux images vaut 0,27 s. Notez que la tête du filament ne se rétracte quasiment pas au cours du drainage.

#### 6.4.4 Visualisation de l'écoulement

##### La "PIV" du pauvre

Pour visualiser l'écoulement au sein du filament, nous avons ensemencé le liquide à l'aide de billes de verre de  $50\ \mu\text{m}$  de diamètre. En éclairant le filament à l'aide d'une nappe laser perpendiculaire à la direction de l'observation (verticale, c'est à dire qu'elle coupe le filament dans le sens de la longueur), les billes de verre qui reflètent la lumière dans toutes les directions apparaissent comme des points blancs sur un fond sombre (la figure 6.21 propose un schéma de l'éclairage, et un exemple d'images réalisées). On observe ainsi les mouvements du fluide dans un plan diamétral du filament (en réalité l'épaisseur de la nappe laser vaut environ 2 mm). Vu la taille des billes et la viscosité des huiles utilisées, la vitesse de sédimentation des particules est totalement négligeable devant les vitesses typiques de l'expérience (il faut quelques jours pour l'observer).

##### Profils de vitesse

On observe sur la figure 6.21 que l'écoulement est de type "bouchon" (la vitesse est verticale, et ne dépend que de l'altitude  $z$ ) dans la plus grande partie du filament : seule la tête présente un écoulement radial.

Plus quantitativement, ces expériences nous permettent, en mesurant la distance parcourue par les marqueurs entre deux images, de déterminer la vitesse du fluide en tout

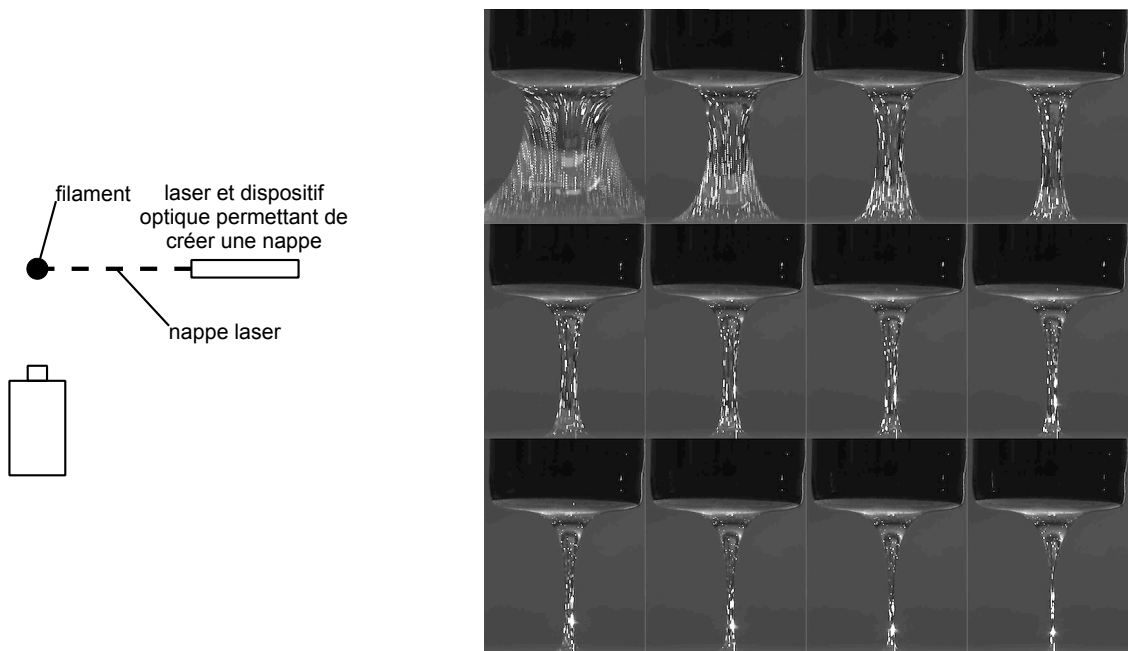


FIGURE 6.21 – À gauche : schéma de l'éclairage utilisé pour observer l'écoulement dans le filament. À droite : visualisation de l'écoulement lors d'une expérience de drainage, avec  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 12$  mm (l'écoulement est qualitativement semblable avec  $L = 22$  mm, mais moins visible car le filament est plus fin). Comme sur les figures précédentes, l'intervalle entre deux images vaut 1,33 s. Chaque image a été obtenue en superposant plusieurs photographies : les traînées visibles sont ainsi formées par les positions successives des marqueurs sur un intervalle total de 0,2 s. Elles représentent donc les lignes de courant au sein du filament, et sont d'autant plus longues que la vitesse du fluide est élevée.



point du filament. La figure 6.22 présente par exemple la vitesse verticale au centre du filament en fonction de l'altitude  $z$ , à trois instants différents au cours du drainage. Dans tous les cas, la vitesse tend vers 0 sur la surface cylindre ( $z = 22$  mm) et à la surface du bain ( $z = 0$ ).

En tout début de drainage ( $t = 0,3$  s,  $\circ$ ), le profil de vitesse est quasiment parabolique, ce qui n'est pas totalement inattendu. En effet, si l'on considère que la vitesse du fluide est de la forme  $\vec{v} = -v(z)\vec{u}_z$  ( $v$  est alors positif lorsque le liquide s'écoule vers le bas), l'équilibre entre gravité et force visqueuse s'écrit :

$$\eta \frac{d^2v}{dz^2} = -\rho g \quad \text{soit} \quad v = -\frac{\rho g}{\eta} \frac{z^2}{2} + bz + c$$

Les conditions aux limites  $v(0) = v(L) = 0$  permettent de déterminer les constantes d'intégration  $b$  et  $c$  :

$$v = \frac{\rho g}{\eta} \frac{Lz - z^2}{2}$$

On s'attend donc à ce que la vitesse maximale  $v_{max}$  soit atteinte en  $z = L/2$ , et vaille  $\frac{\rho g L^2}{8\eta}$ , soit 39 mm/s dans notre expérience, ce qui est supérieur à la valeur mesurée (environ 15 mm/s). Un peu plus tard ( $t = 1,8$  s,  $\bullet$ ), si le profil de vitesse reste quasiment parabolique et symétrique par rapport à  $z = L/2$ , la vitesse maximale est sensiblement plus faible (environ 10 mm/s). Enfin, en fin de drainage ( $t = 6,6$  s,  $+$ ),  $v_{max}$  est encore plus faible, et le profil de vitesse n'est plus symétrique. Cela est dû aux effets capillaires qui, en fin de drainage, drainent le liquide du centre du filament vers ses extrémités. Cet effet se conjugue à la gravité dans la partie basse du filament, et s'y oppose dans la partie haute, provoquant la dissymétrie observée.

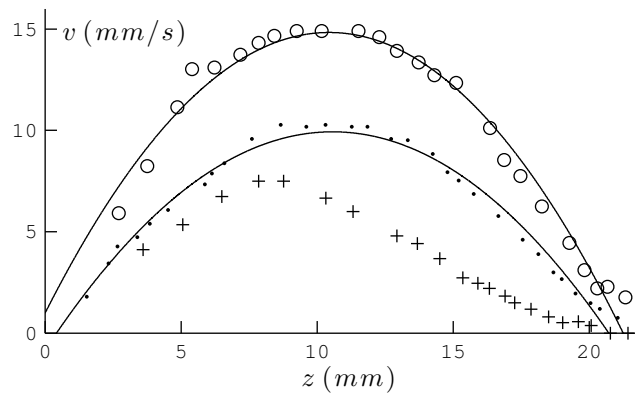


FIGURE 6.22 – Vitesse verticale (positive vers le bas) du fluide au centre du filament en fonction de l'altitude  $z$  ( $z = 0$  correspond à la surface du bain) lors d'une expérience de drainage :  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 22$  mm. Les différentes courbes correspondent à différents instants :  $t = 0,3$  s ( $\circ$ ),  $t = 1,8$  s ( $\bullet$ ) et  $t = 6,6$  s ( $+$ ). Les courbes en traits pleins représentent un ajustement parabolique des données.

Le fait que  $v_{max}$  soit plus faible qu'attendu, et surtout décroisse au cours du drainage, interdit d'observer une décroissance exponentielle de  $d$ . Nous avons tracé sur la figure 6.23 la valeur de  $v_{max}$  en fonction du temps, et en fonction du diamètre  $d$  du filament. On y retrouve que  $v_{max}$  décroît au cours du temps, et dépend de  $L$ . La décroissance rapide de  $v_{max}$  pour  $d < 1$  mm ou  $t > 12$  s, et les valeurs négatives atteintes sont la signature des effets capillaires.

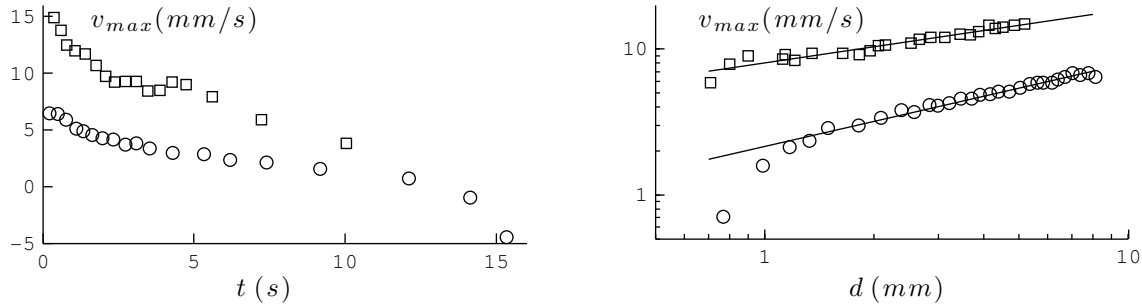


FIGURE 6.23 – Vitesse  $v_{max}$  au centre du filament en fonction du temps (gauche) et en fonction de  $d$  (droite), lors d’une expérience de drainage pour laquelle  $D = 13$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s,  $L = 12$  mm ( $\circ$ ) ou  $L = 22$  mm ( $\square$ ). Les droites illustrent des lois de puissance d’exposants 0,5 et 0,4.

### 6.4.5 Importance du (non-)glissement sur le cylindre

Nous avons vu que le non glissement sur la paroi inférieure du cylindre est à l’origine de gradients de vitesse non pris en compte dans notre interprétation. Nous nous sommes alors demandés si l’altération de cette condition aux limites pouvait changer la loi de drainage.

Nous avons choisi de remplacer la paroi solide du cylindre par différentes grilles, caractérisées par le rayon  $r$  des fils la constituant formant un réseau carré de pas  $p$ . La figure 6.24 schématise le dispositif : le grille n’est pas laissée à l’air libre, car sinon la quantité de liquide entraînée diminue lorsque le pas de la grille augmente. Nous avons également testé l’effet d’une simple prise d’air située au centre du cylindre.

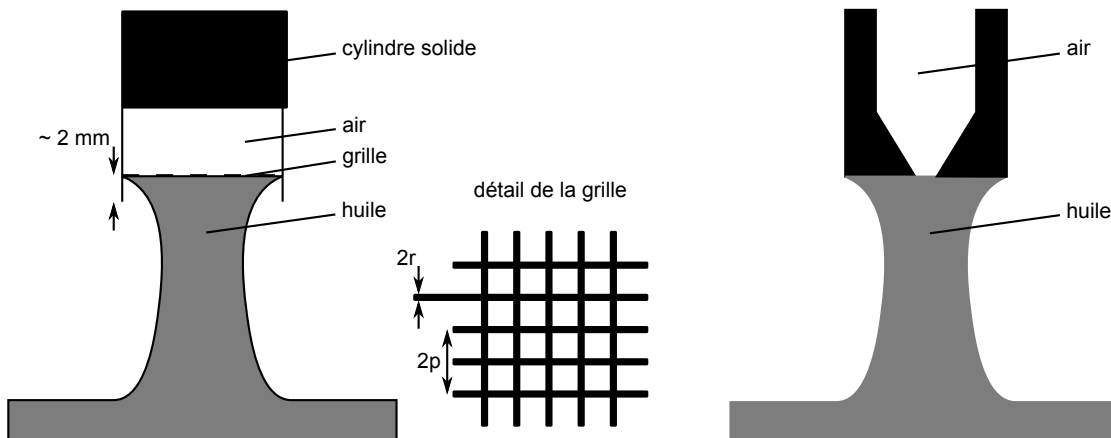


FIGURE 6.24 – À gauche : la surface inférieure du cylindre est remplacée par une grille, dont on fait varier la géométrie. À droite : nous avons également testé l’effet d’une prise d’air, de diamètre 1,6 mm.

Nous avons testé des grilles de pas  $p = 0,5$  mm,  $p = 1,3$  mm,  $p = 2$  mm,  $p = 3$  mm et  $p = 6$  mm, et nous les avons caractérisée par la densité surfacique occupée par les fils :  $\phi_s = \frac{4r}{p}$ . La figure 6.25 présente les expériences de drainage réalisées.

Les expériences réalisées avec les grilles les plus fines ( $\phi_s > 48\%$ ) et avec une prise d’air fournissent la même loi de drainage que les expériences réalisées avec un cylindre solide. En revanche, le drainage est beaucoup plus rapide sur les grilles de plus grand pas ( $\phi_s < 40\%$ ). Le drainage semble même exponentiel, avec un temps caractéristique d’environ 0,6 s. Ces

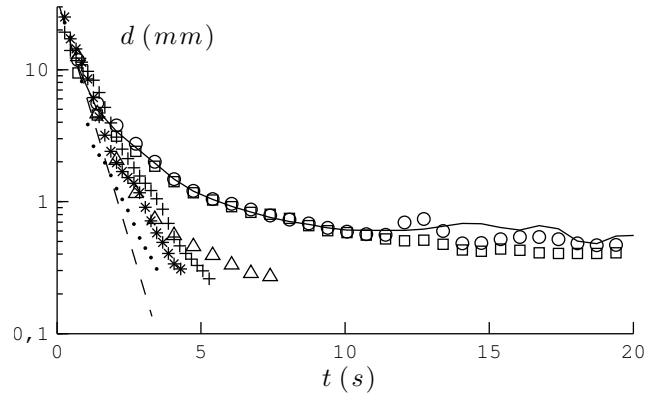


FIGURE 6.25 –  $d$  en fonction du temps lors d’expériences de drainages réalisées avec des grilles de différentes densités surfaciques :  $\phi_s = 8,4\%$  ( $\bullet$ ),  $\phi_s = 15\%$  ( $*$ ),  $\phi_s = 17\%$  ( $+$ ),  $\phi_s = 40\%$  ( $\Delta$ ),  $\phi_s = 48\%$  ( $\circ$ ),  $\phi_s = 69\%$  ( $\square$ ).  $D = L = 25$  mm,  $\eta = 12$  Pa·s. La courbe en trait plein représente l’expérience réalisée sur un cylindre solide possédant une prise d’air en son centre (voir le schéma de la figure 6.24). Les tirets illustrent une décroissance exponentielle de temps caractéristique 0,6 s. On s’en rapproche lorsque  $\phi_s \rightarrow 0$

expériences confirmeraient ainsi le rôle prépondérant du frottement sur la base du cylindre, dans le drainage.

## 6.5 Conclusion

Nous avons d’abord étudié dans ce chapitre l’extraction par un disque d’un filament à partir d’un bain de liquide visqueux. Une différence importante avec les expériences d’entraînements présentées dans les chapitres précédents réside dans l’interaction entre le fluide et le solide qui le supporte : ici, seul le haut du filament est accroché tandis que lors du dépôt sur une surface tout le film liquide est au contact du solide. Cela se traduit en particulier par le fait que le volume de liquide entraîné passe par un maximum au cours du drainage.

Dans le régime que nous avons étudié, la quantité de liquide entraînée est déterminée par un équilibre entre forces visqueuses et gravité, et varie expérimentalement comme  $D^2 \left( \frac{\eta V}{\rho g} \right)^{1/5}$ . Cette expression, valable tant que le diamètre  $D$  du disque d’entraînement est plus petit que la profondeur du bain, suggère qu’il est plus efficace, pour entraîner la plus grande quantité de liquide possible, d’augmenter la taille du disque plutôt que la vitesse d’extraction. Des arguments en ordre de grandeur ne semblent pas suffisants pour justifier la loi observée, parce que la forme du filament dépend de la vitesse d’entraînement. La suite de cette étude portera justement sur la prédiction de cette forme.

Nous nous sommes également intéressés au drainage des filaments produits. Lorsque le diamètre du cylindre support est petit, le diamètre du filament décroît d’abord exponentiellement en un temps typique  $\eta/\rho g$  lorsque la gravité est prépondérante, puis linéairement à la vitesse  $\gamma/\eta$  du fait de la tension de surface. On peut justifier ces comportements en modélisant simplement le filament par un cylindre de liquide. Lorsque le diamètre du cylindre est plus important, le drainage est beaucoup plus lent que prévu par ces arguments. Nous avons observé que l’on se rapproche d’un drainage exponentiel lorsque l’on altère la condition aux limites (de non-glissement) imposée par le solide. Cette expérience illustre le

fait que l'effet du disque peut être prépondérant dans ces expériences de filaments visqueux. Il nous paraîtrait intéressant de prolonger cette étude en nous intéressant à la transition entre ces deux régimes de drainage, ce qui pourrait nous permettre de mieux appréhender les phénomènes en jeu.



# Chapitre 7

## Chute de filaments visqueux

avec Marie Le Merrer

*Oh la la, mais que j'aime cette soif d'apprendre.*

Gotlib, *Rubric à brac, taume 3*

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Deux régimes de chute</b>	<b>125</b>
7.1.1	Principe de l'expérience	125
7.1.2	Différences entre U et chaînette	126
<b>7.2</b>	<b>Critère de sélection des deux régimes</b>	<b>129</b>
7.2.1	Temps caractéristique de chute	129
7.2.2	Temps caractéristique de drainage	131
7.2.3	Critère de sélection de la forme	132
<b>7.3</b>	<b>Évolution aux temps longs</b>	<b>133</b>
7.3.1	Chaînette	134
7.3.2	U	137
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>

---

## 7.1 Deux régimes de chute

### 7.1.1 Principe de l'expérience

En collaboration avec Marie Le Merrer, nous nous sommes intéressés à l'évolution, sous l'effet de la gravité, de filaments liquides initialement horizontaux et retenus par leurs extrémités. L'expérience est présentée sur la figure 7.1 : une goutte de liquide visqueux (de l'huile silicone le plus souvent, de viscosité  $\eta$  comprise entre 1 Pa·s et 100 Pa·s) est placée entre deux mors (de 22 mm de diamètre) que l'on écarte rapidement à la main. On forme ainsi un filament horizontal qui tombe et s'allonge sous l'effet de la gravité en l'espace d'une fraction de seconde à quelques secondes.

Au cours de l'expérience, on observe la forme générale du filament (qui est rétro éclairé) à l'aide d'une caméra rapide. À partir des images obtenues, on mesure en particulier la longueur initiale  $L$  du filament, que l'on fait varier en modifiant l'écartement entre les

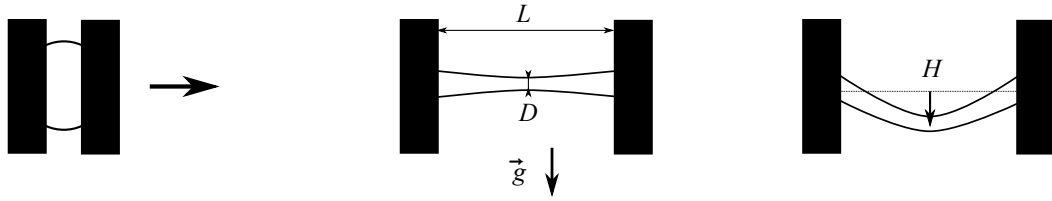


FIGURE 7.1 – Schéma de l'expérience : une goutte de liquide visqueux est placée entre deux mors cylindriques que l'on écarte rapidement l'un de l'autre. On forme alors un filament horizontal de longueur  $L$  centimétrique et de diamètre  $D$  millimétrique. On s'intéresse à son évolution dans le champ de la gravité, en particulier à sa forme et à sa hauteur de chute  $H$ .

mors du dispositif, et qui est comprise entre 1,5 cm et 6 cm. On s'intéresse également à la hauteur  $H$  parcourue par le filament. Le diamètre initial  $D$  du filament (de 0,1 mm à 3 mm) est contrôlé par la quantité de liquide utilisée. Néanmoins, la complexité du mécanisme de formation du filament interdit de relier directement cette quantité de liquide à  $D$  (une grande partie du liquide reste en particulier accrochée aux mors). On utilise donc une deuxième caméra rapide, montée sur une loupe binoculaire (le champ observé est de l'ordre de 3 mm, pour un capteur de 512 pixels) pour mesurer avec précision le diamètre initial du filament lors de chaque expérience.

La figure 7.2 présente deux expériences réalisées avec la même huile et la même longueur de filament ( $\eta = 9,8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $L = 25 \text{ mm}$ ), mais deux diamètres différents ( $D = 1,75 \text{ mm}$  et  $D = 0,33 \text{ mm}$ ). On observe alors deux comportements différents, que nous appelons "chaînette" (figure 7.2, à gauche) ou "U" (7.2, à droite).

### 7.1.2 Différences entre U et chaînette

#### Une différence de forme

Les deux expériences se distinguent en premier lieu par la forme que prend le filament. Un filament épais tombe en effet en gardant une forme de chaînette (on le vérifie sur la figure 7.3), la même forme qu'adopterait une chaîne accrochée à ses extrémités[54]. En revanche, les filaments plus fins prennent une forme de trapèze, avec deux portions verticales jointes par une portion horizontales (on parle alors d'évolution en U).

Une façon de quantifier cette différence de forme consiste à mesurer l'aire sous le filament, adimensionnée par  $L \times H$ , en fonction du temps. On observe sur la figure 7.4 (symboles vides) que cette aire est à peu près constante et égale à 0,3 pour une expérience de type chaînette, ce qui est cohérent avec la valeur  $1/3$  attendue pour une chaînette peu étirée, c'est à dire tant que  $H \lesssim L$ . En revanche, pour un U, cette aire diminue au cours de l'expérience. Nous n'avons en pratique jamais eu à nous référer à cette représentation pour déterminer si le filament évoluait en U ou en chaînette : une observation directe a toujours suffi (et était souvent plus convaincante).

L'inertie du filament étant négligeable, sa forme est directement liée à la répartition de sa masse. En effet, un filament dont le diamètre est homogène sur toute sa longueur aura une forme de chaînette, tandis qu'un U est plus mince en son centre. Pour illustration, nous avons photographié deux fils lestés par des plombs de pêche répartis de manière homogène, ou au contraire concentrés sur les bords (figure 7.5) : on retrouve qualitativement les formes observées sur les filaments.

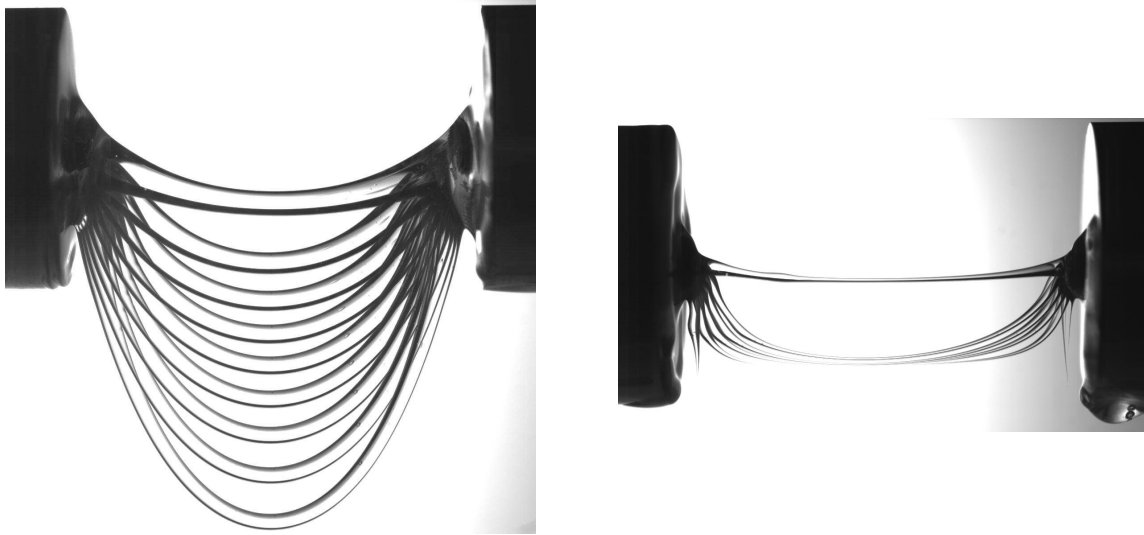


FIGURE 7.2 – Chronophotographies d'un filament d'huile silicone de longueur  $L = 25$  mm et de viscosité  $9,8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , de diamètre  $D = 1,75$  mm (à gauche) ou  $D = 0,33$  mm (à droite). Notez que l'intervalle de temps entre deux images est quatre fois plus grand sur le montage de droite (0,32 s) que sur celui de gauche (0,08 s). Nous qualifions d'évolution "en chaînette" l'expérience présentée à gauche, et de U celle de droite.

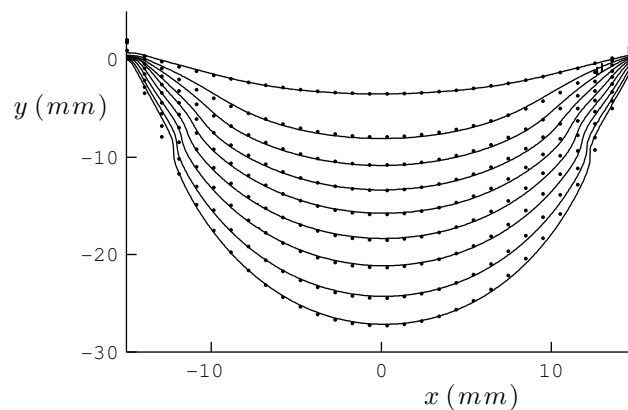


FIGURE 7.3 – Formes du filament de la figure 7.2 (traits pleins), et ajustements par une forme de chaînette (points) :  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c$ .



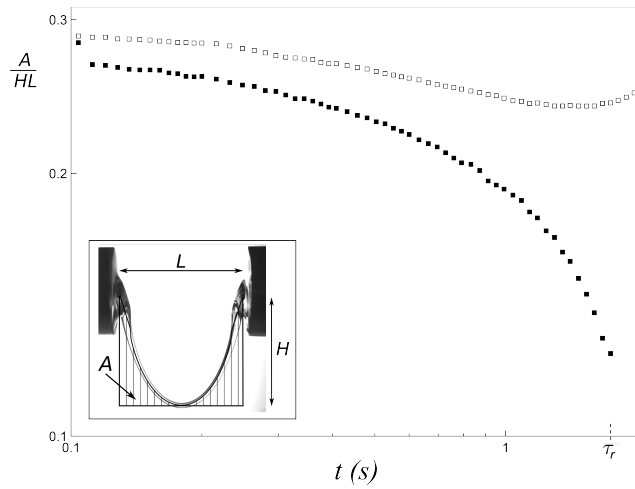


FIGURE 7.4 – Aire sous le filament (telle que définie dans l’insert) adimensionnée par l’aire du rectangle qu’il occupe ( $LH$ ), en fonction du temps pour  $\eta = 9,8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $L = 25 \text{ mm}$ . Les symboles vides correspondent à un filament de diamètre  $D = 0,57 \text{ mm}$  évoluant en chaînette : l’aire est sensiblement constante et proche de 0,3. Au contraire, pour  $D = 0,33 \text{ mm}$  (symboles pleins), l’aire diminue au cours du temps, signe que le filament adopte une forme en U. Elle n’atteint pas 0, car le filament se brise au bout du temps  $\tau_r$  indiqué sur la figure.

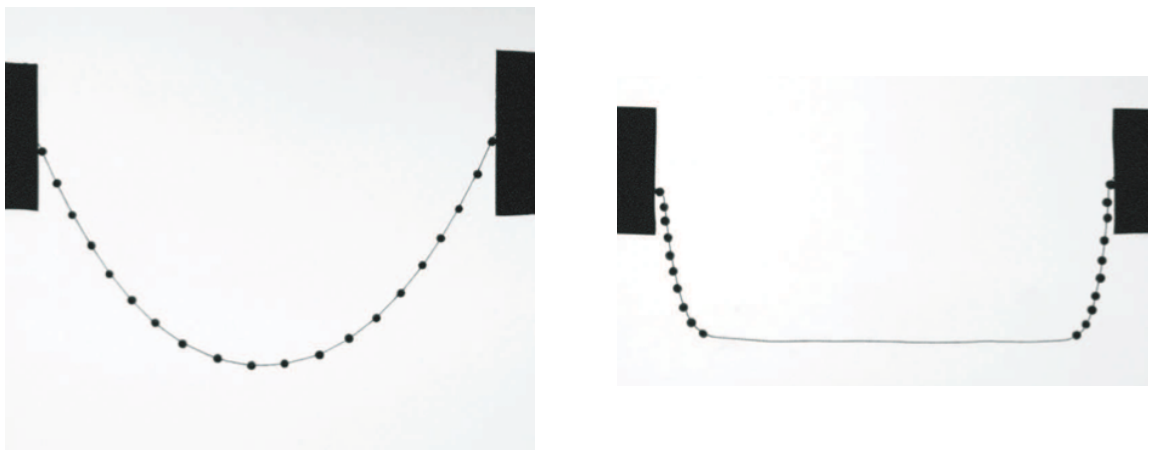


FIGURE 7.5 – Photo d’un fil plombé de façon régulière (à gauche, les plombs sont espacés de 10 mm) ou inhomogène (à droite, les plombs sont espacés de 5 mm). La distance entre les points d’accroche du fil est de 13 cm, et sa longueur totale est de 20 cm

L'observation de cordes présentant différentes répartitions de masse est d'ailleurs un moyen d'obtenir des formes inédites mais physiquement cohérentes, comme l'avait compris l'architecte catalan Gaudí pour dessiner certaines de ses arches (figure 7.6). Une autre de ses motivations était probablement [106] qu'une corde à laquelle sont suspendus différents poids adopte une forme d'équilibre pour laquelle elle n'est soumise qu'à de la tension. En inversant la forme obtenue on obtient une arche qui, soumise aux forces correspondant aux poids utilisés, n'est contrainte qu'en compression.

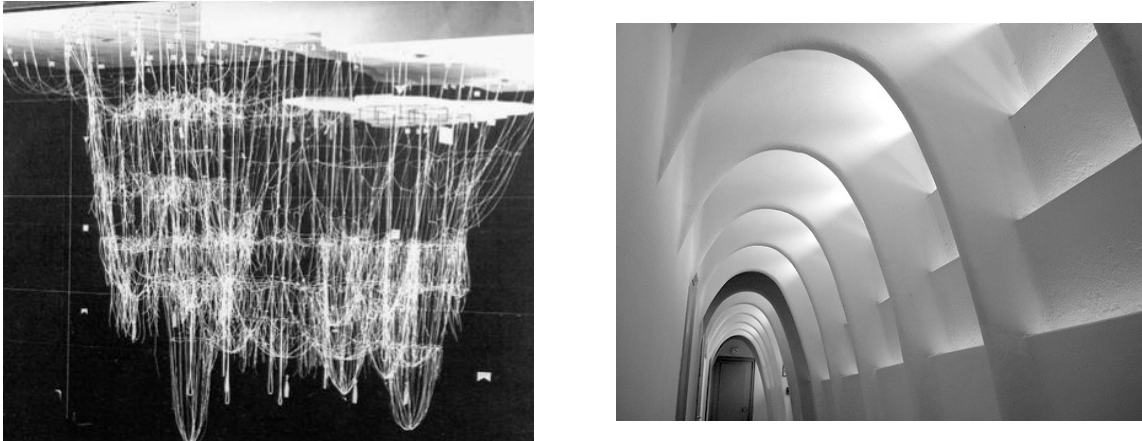


FIGURE 7.6 – À gauche : reconstruction de l'atelier d'Antoni Gaudí (Tom-low, 1989). À droite, arches dans un couloir de la "Casa Battlo", à Barcelone, dessinée par Gaudí.

### Dynamique du filament

Les figures 7.2 et 7.4 illustrent une autre différence entre U et chaînette : les premiers se brisent en leur centre avant d'être tombés d'une hauteur de l'ordre de  $L$  (au bout d'un temps  $\tau_r \approx 2$  s pour l'expérience présentée). Plus généralement, la dynamique de chute est différente. En effet, si la chute des "chaînettes" s'accélère régulièrement, les U ralentissent voire s'arrêtent une fois qu'ils ont parcouru une distance  $H_0$  de l'ordre de  $L$ , signe que d'autres forces viennent compenser la gravité.

## 7.2 Critère de sélection des deux régimes

Un cylindre de liquide n'est pas une forme stable du point de vue de la tension de surface : il tend à se briser pour former une série de gouttes dont la surface totale est moindre. C'est ce qui explique le drainage du liquide vers les bords, et donc la forme en U de certains d'entre eux. Une manière de déterminer un critère d'existence des U consiste à comparer la dynamique de ce drainage à sa dynamique de chute sous l'effet de la gravité.

### 7.2.1 Temps caractéristique de chute

**Dynamique de chute** La dynamique de chute d'un filament résulte d'un équilibre entre la gravité motrice et les forces visqueuses résistantes (on néglige ici tout effet capillaire et tout effet inertiel, vu que le nombre de Reynolds est d'ordre 0,01). La difficulté réside dans la détermination de la forme de la dissipation.

Dès 1906, Trouton s'est intéressé, dans ces travaux de mesure de la viscosité élongationnelle du goudron [97], à la déformation d'un cylindre horizontal visqueux dans le champ de la gravité, mais uniquement dans le régime des très faibles déformations ( $H \sim D$ ). En 2003, Teichman et Mahadevan [93] ont étudié la même configuration, et ont identifié plusieurs régimes pour la dynamique de chute des chaînettes : la dissipation aux premiers instants de l'expérience est liée à la création de courbure dans le filament ; puis elle est dominée par l'étirement du filament. C'est ce second régime qui nous intéresse ici, le premier ne s'appliquant que tant que  $H \lesssim D$  (difficilement observable expérimentalement). On peut également mentionner les travaux de Koulakis *et al.* [48] sur le même sujet, qui ont étudié en détail (à la fois expérimentalement et théoriquement) la chute du filament et sa forme, et également observé la forme en U, sans véritablement approfondir cette question. Enfin, Brochard-Wyart et de Gennes [10] ont discuté la dynamique du filament avec des arguments énergétiques. C'est leur approche que nous avons choisi pour déterminer le temps typique de chute.

Dans le régime qui nous préoccupe ( $H \gtrsim D$ ), la dissipation est due à l'étirement du filament liquide. L'écoulement y est en effet essentiellement élongationnel. Si l'on se limite de plus aux faibles hauteurs de chute  $H \lesssim L$  (ce qui est justifié par le fait que la distinction entre U et chaînette se fait dans ce régime) on peut, comme l'illustre la figure 7.7, relier le taux d'élongation  $\dot{\epsilon}$  du filament à sa vitesse de chute  $\dot{H}$  :

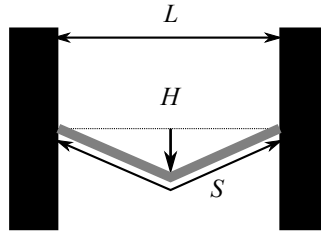


FIGURE 7.7 – Lorsque le filament tombe d'une hauteur  $H$ , il s'allonge : sa longueur passe de  $L$  à  $S$ , telle que  $S^2 = L^2 + 4H^2$ .

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{S}}{S} \sim \frac{H\dot{H}}{L^2}$$

La puissance visqueuse dissipée dans le volume  $D^2L$  du filament est donc :

$$P_\eta \sim \eta \dot{\epsilon}^2 D^2 L \sim \eta \frac{H^2 \dot{H}^2 D^2}{L^3}$$

Cette dissipation est compensée par le gain d'énergie potentielle  $P_g \sim \rho g D^2 L \dot{H}$ , ce qui fournit :

$$\rho g D^2 L \dot{H} \sim \eta D^2 \frac{H^2 \dot{H}^2}{L^3} \quad \text{soit} \quad H^3 \sim \frac{\rho g L^4}{\eta} t$$

La dynamique de chute est donc indépendante du diamètre. Elle est d'autant plus lente que le filament est court, ou que le liquide est visqueux. On peut définir un temps de chute typique  $\tau_g$  tel que  $H(\tau_g) \sim L$  :

$$\tau_g = \frac{\eta}{\rho g L}$$

**Comparaison avec les expériences** La figure 7.8 présente, pour les différentes expériences réalisées, le temps typique de chute. Pour les filaments évoluant en chaînette (graphe de gauche), ce temps est défini comme le temps  $\tau_{L/2}$  mis par le filament pour atteindre une hauteur  $H = L/2$ . Pour les U, ce temps est égal au temps  $\tau_{L/10}$  au bout duquel le filament est tombé d'une hauteur  $L/10$  (simplement parce certains U n'atteignent jamais  $L/2$ ). Dans les deux cas, la chute s'effectue bien en un temps proportionnel à  $\tau_g$ .

Les barres d'erreur représentées ont deux origines principales. En premier lieu, le filament tombe avant que l'on ait fini d'écartier ses extrémités (ce temps d'ouverture est de l'ordre de 0,1 s). Nous avons choisi de définir l'instant initial comme celui où l'ouverture du dispositif est terminée, l'incertitude temporelle représentée étant égale au temps d'ouverture. L'incertitude sur  $\tau_g$  provient essentiellement de la difficulté de la mesure de  $L$ , due à la présence des ménisques (visibles sur le figure 7.2) qui relient le filament aux mors. Nous avons choisi de les exclure, et de considérer une erreur de l'ordre de la longueur capillaire  $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$  (qui vaut 1,5 mm pour les huiles silicones et 2,2 mm pour le miel).

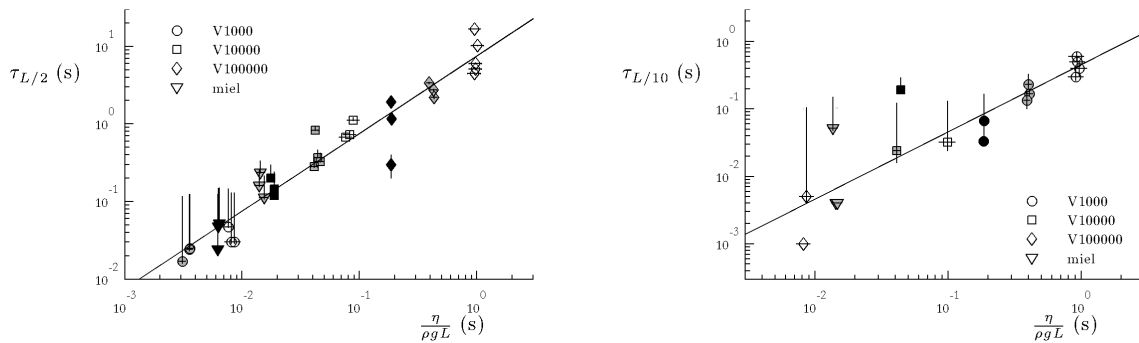


FIGURE 7.8 – Temps de chute typique du filament, en fonction de  $\tau_g = \eta/\rho g L$ . Le graphe de gauche correspond aux "chaînettes", tandis qu'à droite sont représentés les U. Différents liquides ont été utilisés (huiles silicones V1000, V10000 et V100000 de viscosités respectives 0,97 Pa·s, 9,7 Pa·s et 97 Pa·s, et miel de viscosité 5 Pa·s). Les différentes couleurs de symboles correspondent à différentes longueurs de filament ( $L = 12$  mm en blanc, 25 mm en gris et 57 mm en noir). Les droites ont pour équations  $\tau_{L/2} = 7,5 \tau_g$  (gauche) et  $\tau_{L/10} = 0,46 \tau_g$  (droite).

### 7.2.2 Temps caractéristique de drainage

Ce temps de chute  $\tau_g$  est à comparer au temps typique de drainage du liquide vers les bords. Pour l'évaluer, nous considérons la limite opposée où la gravité est nulle et le filament initialement cylindrique. Ce filament se déstabilise sous l'influence de la tension de surface (instabilité de Rayleigh-Plateau [76, 78]), et on peut montrer qu'à petit nombre de Reynolds les grandes longueurs d'onde ( $L$  dans notre configuration) sont les plus instables [78, 10].

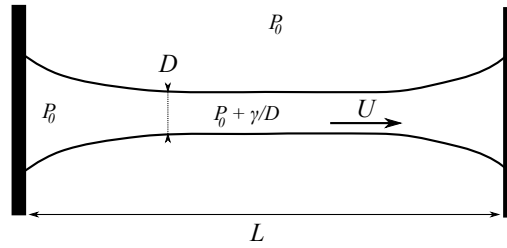


FIGURE 7.9 – Le filament a une courbure plus importante au milieu, la pression  $y$  est donc importante (loi de Laplace), ce qui provoque un mouvement de liquide vers les extrémités du filament de plus basse pression.

La dynamique du drainage est cette fois gouvernée par un équilibre entre forces capillaires et forces visqueuses. En effet, notant  $d(t)$  le diamètre du filament, il règne en son centre une surpression de Laplace  $\gamma/d$ , plus importante que dans les ménisques le rattachant aux mors (qui ont une taille caractéristique plus grande que  $d$ , de l'ordre de la longueur capillaire  $a$ ). Ce gradient de pression d'ordre  $\Delta P/L \sim \gamma/dL$  provoque un drainage du liquide vers les bords du filament (comme représenté sur la figure 7.9).

Les écoulements sont toujours essentiellement longitudinaux. Notant  $U$  la vitesse de migration du liquide vers les ménisques, la force visqueuse est donc d'ordre  $F_\eta \sim \eta U/L^2$ . Par ailleurs, la conservation de la masse nous permet de relier  $U$  à  $\dot{d}$  :

$$\frac{d}{dt}(d^2 L) \sim U d^2 \quad \text{donc} \quad U \sim -\frac{\dot{d} L}{d}$$

L'équilibre des forces visqueuses et capillaires s'écrit ainsi :

$$\dot{d} \sim -\frac{\gamma}{\eta} \quad \text{soit} \quad d \sim D - \frac{\gamma}{\eta} t$$

Le diamètre du filament décroît linéairement en temps, jusqu'à ce que ce dernier se casse au bout d'un temps typique  $\tau_\gamma = \eta D/\gamma$ . On peut d'ailleurs le vérifier sur nos expériences, comme l'illustre la figure 7.10 : le diamètre du filament décroît (en son centre) à une vitesse constante de  $27 \mu\text{m/s}$  (jusqu'à atteindre une centaine de micromètres, après quoi l'amincissement se fait plus rapide).

Pour quantifier le temps caractéristique du drainage, nous avons mesuré le temps  $\tau_r$  au bout duquel le filament se rompt. La figure 7.11 nous montre que ce temps est proportionnel à  $\tau_\gamma$  ( $\tau_r = 7,5 \eta D/\gamma$ ), qui est donc bien le temps caractéristique du drainage capillaire (seules les expériences en  $U$  sont représentées, la rupture des chaînettes n'étant jamais observée dans notre expérience). Sur cette figure, l'expérience de la figure 7.10 a pour coordonnées ( $\eta D/\gamma \approx 24 \text{ s}, \tau_r \approx 14 \text{ s}$ )

### 7.2.3 Critère de sélection de la forme

On s'attend à obtenir un filament en  $U$  si le drainage du liquide vers les bords est plus rapide que sa chute sous l'effet de la gravité, donc lorsque  $\tau_\gamma < \tau_g$ , c'est-à-dire :

$$LD < a^2 \tag{7.1}$$

Ainsi, la forme finale du filament est déterminée par la dynamique qui l'emporte (chute ou drainage) mais le critère qui en résulte est purement géométrique. Cela est dû au fait que,

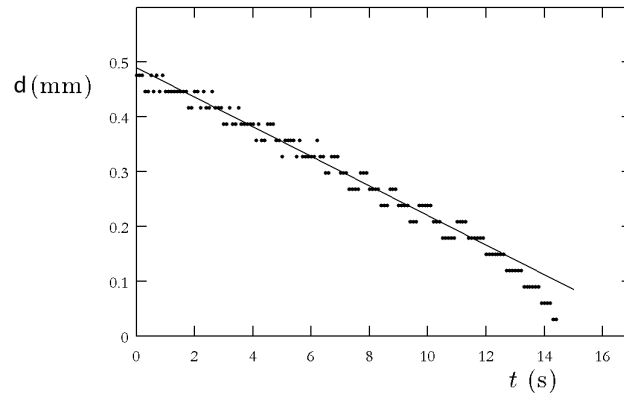


FIGURE 7.10 – Diamètre  $d$  du filament en fonction du temps, pour un filament d'huile silicone de viscosité  $97 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Le diamètre initial du filament vaut  $0,5 \text{ mm}$  et sa longueur  $12 \text{ mm}$ . La droite correspond à une décroissance linéaire à la vitesse de  $27 \mu\text{m/s}$ .

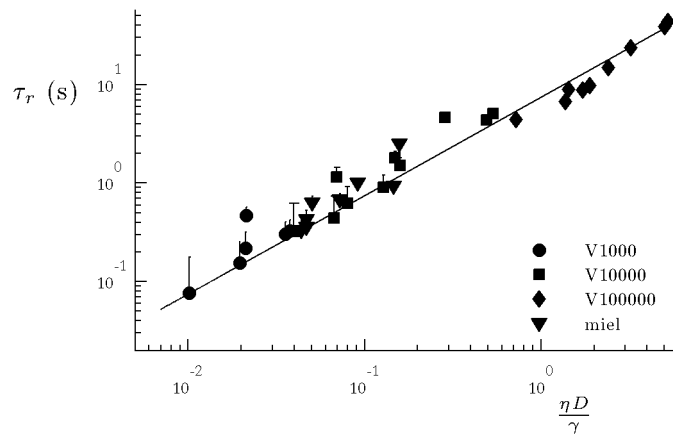


FIGURE 7.11 – Temps de rupture  $\tau_r$  des U en fonction du temps caractéristique du drainage capillaire  $\tau_\gamma = \eta D / \gamma$ . Les différents symboles correspondent aux différents liquides utilisés (huiles V1000, V10000 et V100000 de viscosités respectives  $0,97 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $9,7 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $97 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , et miel de viscosité  $5 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ). La droite indique la variation linéaire  $\tau_r = 7,5 \tau_\gamma$ .

dans ces mouvements dominés par la dissipation visqueuse, les temps caractéristiques sont toujours proportionnels à la viscosité  $\eta$  du liquide.

La figure 7.12 est une coupe du "diagramme de phase" de l'expérience dans le plan des paramètres  $L$  et  $D$ . Chaque symbole représente une expérience, les symboles vides ayant évolué en chaînette et les symboles pleins en U. Le critère  $LD < 7a^2$  sépare ces deux régimes de manière convaincante : les filaments courts et fins forment des U (près de l'origine des axes), tandis que les longs et épais forment des chaînettes (coin supérieur droit), conformément au critère 7.1.

## 7.3 Évolution aux temps longs

Si le raisonnement proposé nous fournit un critère de sélection du mode d'évolution, il ne fournit aucun renseignement sur la dynamique des filaments aux temps plus longs (ou

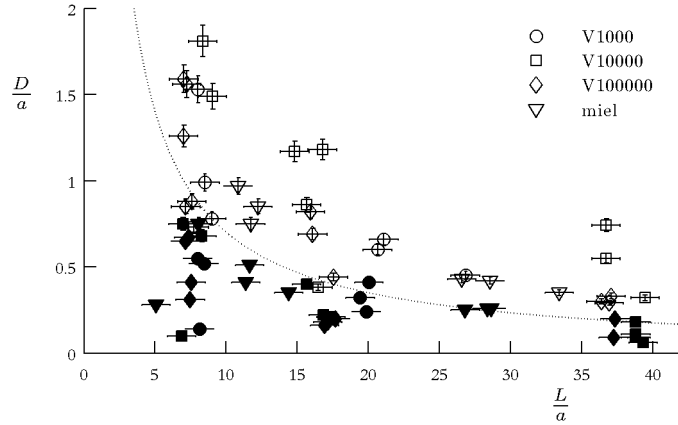


FIGURE 7.12 – Diagramme de phase  $(L/a, D/a)$  pour la forme des filaments : les symboles noirs représentent les expériences qui ont donné des U, les symboles vides celles qui ont donné des "chaînettes". Les symboles correspondent aux liquides utilisés (huiles silicones et miel). L'hyperbole d'équation  $LD = 7a^2$  (pointillés) sépare de manière convaincante les deux domaines.

l'absence de dynamique, pour ce qui est des U).

### 7.3.1 Chaînette

#### Dynamique de chute aux temps longs

Pour une chaînette, les temps longs correspondent au régime dans lequel le filament est très déformé, c'est-à-dire  $H > L$ . Si la dissipation est toujours dominée par l'extension du filament, l'expression de l'élongation est différente du cas  $H < L$ . Le filament étant très allongé, on peut l'assimiler à un cylindre vertical, de hauteur  $H$  et de diamètre  $d$ .

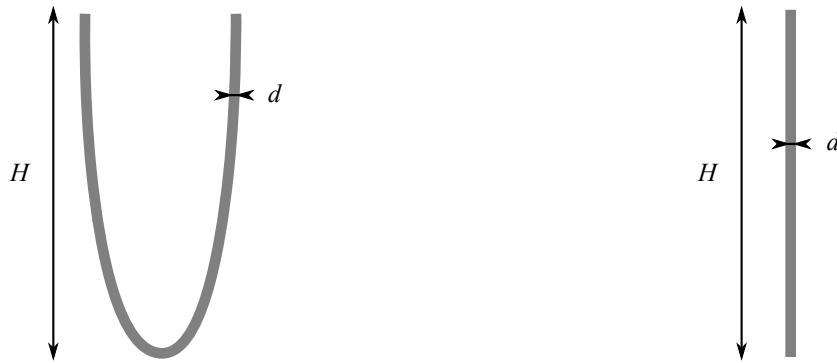


FIGURE 7.13 – Grandes déformations : on modélise le filament très allongé (à gauche) par un simple cylindre (à droite) de hauteur  $H$ .

Dans ce cas, la vitesse typique dans le filament vaut  $\dot{H}$ , d'où une force visqueuse volumique  $f_\eta \sim \eta \dot{H}/H^2$ . Cette force est équilibrée par la gravité, d'où on déduit :

$$\eta \frac{\dot{H}}{H^2} \sim \rho g \quad \text{soit après intégration} \quad \frac{1}{H_0} - \frac{1}{H} = \frac{\rho g}{\eta} (t - t_1) = \frac{t - t_1}{L\tau_g}$$

Dans cette expression,  $t_1$  et  $H_1$  correspondent au début du régime de grandes déformation, c'est à dire que  $H_1 \sim L$ . On s'attend donc à ce que  $L/H$  décroisse linéairement avec  $t/\tau_g$  lorsque  $t \gtrsim t_1$ . C'est ce qu'on vérifie sur la figure 7.14, où l'on remarque par ailleurs que cette décroissance linéaire décrit convenablement l'expérience pour  $H \gtrsim L$ .

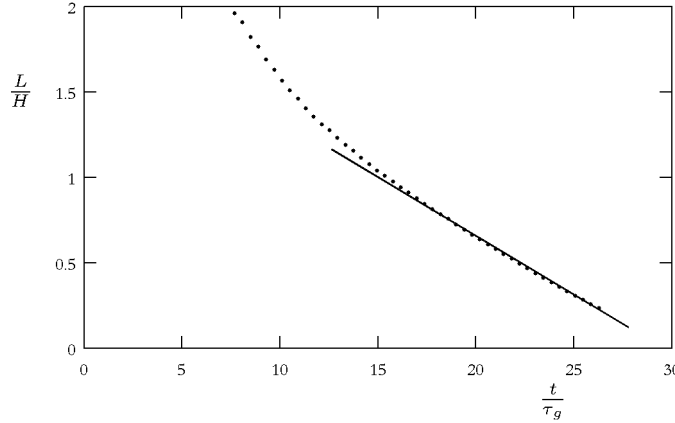


FIGURE 7.14 –  $L/H$  en fonction du temps adimensionné  $t/\tau_g$ . Le liquide utilisé est de l'huile silicone de viscosité  $9,7 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Les dimensions initiales du filament sont  $L = 24 \text{ mm}$  et  $D = 2,3 \text{ mm}$ .

### Modification de la forme

Nous avons supposé au début de ce chapitre que la masse de liquide est uniformément répartie le long d'une chaînette visqueuse. En réalité, ce n'est plus le cas aux temps longs. À l'inverse des U, le filament est plus épais au centre que sur les bords (ce que l'on peut voir sur la figure 7.15, à gauche), ce qui a pour conséquence une forme plus "pointue" que la chaînette (voir figure 7.15(b), sur laquelle on a superposé forme du filament et profil d'une chaînette de même dimension).

Cette disparité de masse est le signe que le taux d'élongation du filament n'est pas constant au sein de la chaînette : il est plus important vers les bords qu'au centre. Ce phénomène provient d'une propriété géométrique de la chaînette, que l'on peut illustrer par un exemple analogue mais plus simple du point de vue des calculs. Supposons pour cela que le filament est parabolique (c'est le cas d'une chaînette que l'on regarde près de son "origine"). Repérée à partir du bas du filament (voir figure 7.16), la hauteur du filament à l'abscisse  $x$  s'écrit  $y = H(2x/L)^2$ . Considérons la portion de chaîne d'abscisse  $x$  et de largeur  $dx$ . La longueur de chaîne correspondante est  $ds$ , telle que  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . On a donc :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\dot{ds} = dx \frac{\left(\frac{8xH}{L^2}\right) \left(\frac{8x\dot{H}}{L^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}}$$



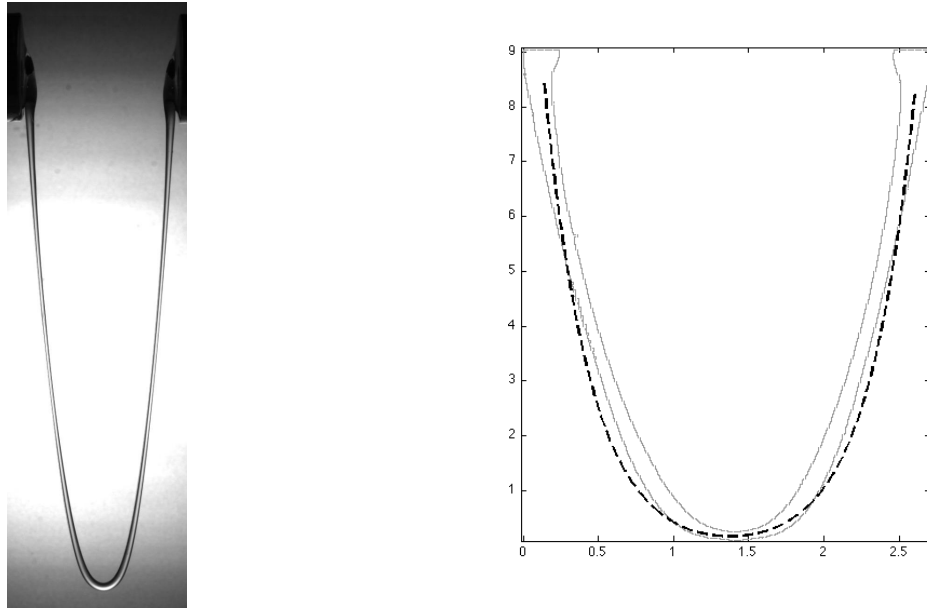


FIGURE 7.15 – À gauche : chaînette visqueuse d'huile silicone ( $\eta = 9,7 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $L = 24 \text{ mm}$  et  $D = 2,3 \text{ mm}$ ), aux grandes déformations. À droite : on superpose à la forme de ce filament visqueux (en gris) la forme d'une chaînette (pointillés noirs) ayant les mêmes dimensions (les axes sont en centimètres).

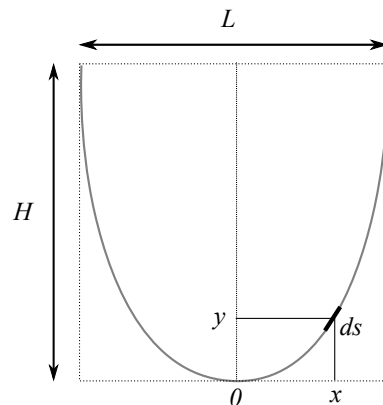


FIGURE 7.16 – Schéma de la "chaînette visqueuse".

On peut alors écrire le taux d'élongation  $\dot{\epsilon} = \dot{d}s/ds$  en fonction de l'abscisse  $x$ <sup>1</sup> :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{H}}{H} \frac{\left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}$$

On retrouve avec cette expression les deux régimes limites que nous avons étudiés : les faibles déformations ( $H < L$ ), pour lesquelles  $\dot{\epsilon} \sim \dot{H}H/L^2$ , et les grandes déformations ( $H > L$ ) pour lesquelles  $\dot{\epsilon} \sim \dot{H}/H$ . On voit aussi  $\dot{\epsilon}$  est une fonction croissante de  $x$ , si bien

1. Pour une véritable chaînette, on aurait avec les même paramètres  $y = H \frac{\cosh(2x/L) - 1}{\cosh(1) - 1}$  et  $\dot{\epsilon} = 2 \frac{\dot{H}}{H} \frac{\left(\frac{2H \sinh(2x/L)}{L \cosh(1) - 1}\right)^2}{1 + \left(\frac{2H \sinh(2x/L)}{L \cosh(1) - 1}\right)^2}$ , ce qui conduirait aux mêmes conclusions.

que le taux d'élongation est plus important sur les bords ( $x = L/2$ ) qu'au milieu ( $x = 0$ ), où il est nul, ce qui explique l'amincissement du filament sur les bords.

### 7.3.2 U

Nous avons vu (figure 7.8) qu'à temps très court (pour  $H \lesssim L/10$ ), la chute des U n'est pas très différente des "chaînettes", avec un temps caractéristique de chute proportionnel à  $\tau_g$ . Les dynamiques d'évolution se différencient nettement à temps plus long. Dans les filaments en U, la capillarité, en plus de provoquer une migration du liquide vers les bords (et donc une forme caractéristique), s'oppose à la gravité. Comme on peut le voir sur la figure 7.17, le filament atteint au bout d'un certain temps une hauteur d'équilibre, que nous notons  $H_0$ .

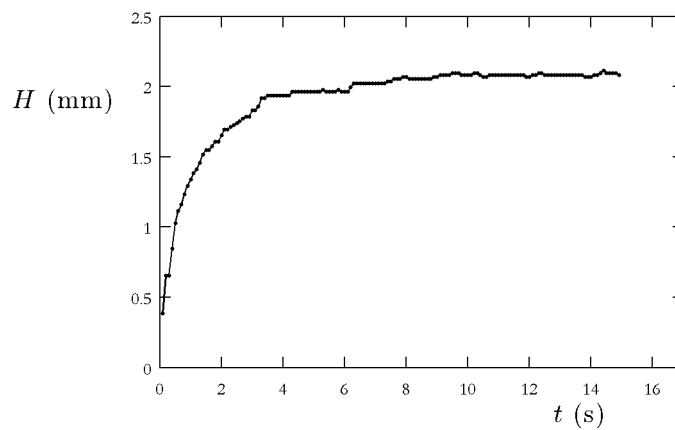


FIGURE 7.17 – Hauteur  $H$  d'un filament en U ( $\eta = 97 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $D = 0,5 \text{ mm}$  et  $L = 12 \text{ mm}$ ) en fonction du temps  $t$ . Au bout d'environ 8 s, le filament s'arrête de tomber et se stabilise à une hauteur  $H_0 = 2,1 \text{ mm}$

Avant de poursuivre, il nous paraît intéressant de souligner que ce comportement conforte le fait que le critère séparant U et chaînettes ne fasse intervenir que les dimensions initiales du filament. En effet, le filament qui prend une forme de U ne s'allonge pas aussi vite qu'une chaînette (sa longueur reste même constante une fois qu'il a atteint sa hauteur d'équilibre), mais son diamètre diminue. L'importance relative de la tension de surface par rapport à la gravité (mesurée par le terme  $LD/a^2$ ) augmente : il reste dans le régime où le drainage capillaire l'emporte. Cette propriété explique aussi pourquoi les deux régimes se distinguent très facilement l'un de l'autre : chaque forme se conserve dans le temps.

#### Hauteur finale $H_0$

On peut estimer la hauteur  $H_0$  en écrivant en ordre de grandeur l'équilibre entre poids et forces capillaires. Le premier vaut  $\rho g L D^2$ , tandis que la force capillaire parallèle au filament s'écrit  $\gamma D$  (voir figure 7.18). C'est la composante verticale de cette force, d'ordre  $\gamma D H / L$  qui s'oppose au poids. L'équilibre fournit donc :

$$H_0 \sim \frac{L^2 D}{a^2} \quad (7.2)$$

Ce critère, tel qu'il est écrit, suggère qu'un équilibre est toujours possible. En réalité, la projection de la force capillaire n'est valable que lorsque  $H \lesssim L$ . On retrouve le fait que les U, qui correspondent à  $LD \lesssim a^2$ , s'arrêtent avant d'avoir parcouru une distance de l'ordre de  $L$ . La figure 7.19 présente la hauteur finale  $H_0$  mesurée sur les expériences en U. Elle semble bien proportionnelle à  $L^2D/a^2$ .

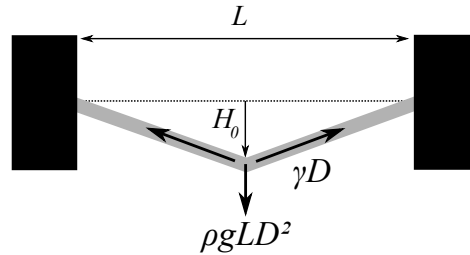


FIGURE 7.18 – L'équilibre entre forces capillaires et poids du filament détermine la hauteur d'équilibre du U.

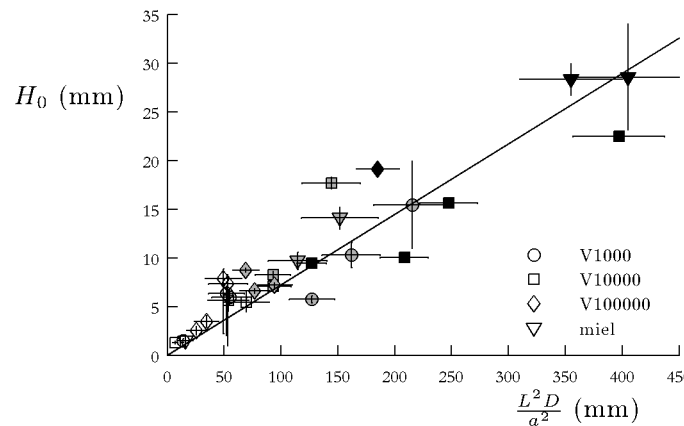


FIGURE 7.19 – Hauteur finale du U en fonction de la quantité  $L^2D/a^2$  pour différents liquides. Les symboles blancs correspondent à  $L = 12$  mm, les gris à  $L = 25$  mm, les noirs à  $L = 57$  mm.

### Critère d'existence du U

L'estimation de  $H_0$  proposée (équation 7.2) nous enseigne que la hauteur d'équilibre augmente avec  $L^2D/a^2$ , donc lorsqu'on s'approche des chaînettes. Cette hauteur permet d'ailleurs de retrouver le critère qui détermine la forme du filament. Si l'on définit les U comme les filaments qui s'arrêtent sur une hauteur  $H_0$  plus petite que  $L$ , on retrouve le critère proposé auparavant :  $L^2D/a^2 < L$  soit  $LD < a^2$ .

Plus généralement, les chaînettes sont les filaments qui tombent, c'est-à-dire ceux pour lesquels le poids  $\rho g L D^2$  est plus grand que la tension de surface qui retient le filament  $\gamma D$  (on retrouve le fait qu'un équilibre n'est pas toujours possible). On a donc une chaînette

quand  $LD > a^2$ . Ce raisonnement éclaire le fait que le critère séparant les U des chaînettes est purement statique.

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les déformations de filaments visqueux initialement horizontaux. Selon les dimensions initiales du filament (longueur  $L$  et diamètre  $D$ ), on observe deux comportements très différents : dans un cas, les filaments prennent une forme de caténoïde qui s'allonge au cours du temps (on parle alors de chaînette visqueuse), et subissent des déformations importantes, avec des hauteurs de chute plus grandes que la longueur initiale du filament. Dans l'autre cas, les filaments s'arrêtent de tomber lorsqu'ils atteignent une hauteur inférieure à leur longueur, et prennent une forme très différente, proche du U.

Nous avons montré que leur forme est déterminée par la répartition de masse le long du filament : les chaînettes ont une masse répartie de façon homogène tandis que, pour les U, la masse est concentrée sur les bords. Le mécanisme qui amincit le filament en son milieu a une origine capillaire : la pression est plus importante dans le cylindre visqueux qu'aux extrémités, ce qui provoque un drainage du liquide vers les bords. La forme prise par le filament est alors déterminée par une compétition entre la dynamique de drainage (de temps caractéristique  $\eta D/\gamma$ ) et la dynamique de chute (de temps caractéristique  $\eta/\rho g L$ ). La comparaison de ces deux temps permet d'obtenir un critère pour déterminer la forme du filament : on obtiendra une chaînette si  $LD > a^2$ , un U dans le cas contraire.



# Conclusion

L'épaisseur du film liquide déposée sur une surface lisse suit, tant qu'elle est inférieure à  $100\ \mu\text{m}$ , la loi établie dans les années 40 par Landau, Levich et Derjaguin (chapitre 1). Nous avons étudié l'effet sur ces expériences d'une rugosité représentée par une forêt de piliers dont la taille typique ( $10\ \mu\text{m}$ ) est du même ordre de grandeur que le film (chapitre 2). La loi de dépôt s'en trouve qualitativement modifiée, l'épaisseur étant en particulier constante aux faibles nombres capillaires, et égale à la hauteur de la texture. Dans ce régime, des forces capillaires accrochent le film aux plots et compensent le poids du liquide. Cet équilibre se traduit par un gradient d'épaisseur de film, qui limite pour les surfaces étudiées la taille du film à une vingtaine de centimètres.

À grand nombre capillaire, l'épaisseur tend vers la loi de LLD. Dans le régime intermédiaire qui raccorde ces deux zones, nous avons pu déterminer l'épaisseur déposée à l'aide d'un modèle à deux couches, dans lequel l'effet de la texture est représenté par une augmentation d'un facteur  $\alpha$  de la viscosité du liquide qu'elle renferme. Ce modèle décrit convenablement les mesures réalisées à l'aide de ce seul paramètre ajustable. Les expériences de tirage deviennent ainsi un moyen de sonder les propriétés hydrodynamiques de la texture, et de relier  $\alpha$  à la géométrie de la rugosité. L'effet de la texture ne peut être remplacée par une simple condition de glissement à la paroi, ce qui est illustré par l'existence d'un nombre capillaire critique en de-ça duquel aucun film n'est entraîné au dessus de la texture.

Cette propriété s'illustre également de manière spectaculaire dans des expériences de drainage (chapitre 3) sur ces surfaces. Lorsque son épaisseur devient assez faible, l'écoulement dans la texture devient prépondérant ce qui se traduit par une décroissance brutale de l'épaisseur : la couche de liquide au dessus des plots glisse sur la texture à une vitesse que l'on retrouve à l'aide de notre modèle.

Nous avons exploré dans le chapitre 4 une autre façon d'échapper à la loi de LLD, qui consiste à déposer le fluide à l'aide d'une membrane flexible. Les forces dominantes sont alors visqueuses et élastiques. Dans le cas où la membrane est juste tangente à la plaque de dépôt, nous avons pu prédire la manière dont l'épaisseur varie avec les propriétés du fluides et les caractéristiques élastiques et géométrique du racloir, même si le modèle proposé surestime l'épaisseur d'un facteur 3 environ. Ce dernier est en partie dû à des effets de bords finis, que nous avons commencés à étudier et sur lesquels nous comptons nous concentrer dans le futur. L'étude de ce nouveau système a été l'occasion d'insister sur le rôle crucial que joue la forme du racloir dans ces problèmes d'entraînement à petite échelle. On peut en particulier modifier la loi de dépôt en rajoutant une courbure naturelle à la membrane.

Ce point s'illustre également dans l'originalité de la loi de dépôt obtenue avec un racloir rigide sur lequel on exerce une force constante (chapitre 5) . L'épaisseur de film varie en effet exponentiellement avec la vitesse de tirage, ce qui provient de la divergence des contraintes

près de la plaque de dépôt.

L'entraînement vertical d'un filament hors d'un bain de liquide visqueux par un cylindre a permis de discuter une configuration où la viscosité compense la gravité. La loi d'entraînement n'est toutefois pas encore totalement comprise, et nécessite probablement de s'intéresser aux détails de la forme du filament. Le drainage dans ce même système possède des caractéristiques très différentes en fonction du diamètre du cylindre. En particulier, la présence du solide ne semble pas importante dans les cas des petits cylindres, tandis qu'elle domine le drainage des cylindres plus importants.

Cette différence de comportement en fonction de la géométrie du filament se retrouve lorsque l'on s'intéresse à l'évolution, dans le champ de pesanteur, de filaments visqueux initialement horizontaux (chapitre 7). Ils tombent en conservant une forme de chaînette lorsque leur surface initiale est plus faible que  $a^2$ . Dans le cas contraire, la tension de surface redistribue le liquide vers leurs bords, et ils adoptent alors une forme de trapèze, ou "U". Les dynamiques de chutes sont également très différentes, les filaments en "U" s'arrêtant après avoir parcouru une distance inférieure à leur longueur.

# Quatrième partie

## Annexes





# Annexe A

## Calcul de l'épaisseur déposée par dip-coating

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Calcul de LLD</b>	<b>145</b>
A.1.1	Conditions aux limites	145
A.1.2	Valeur asymptotique $Y_{XX}$	146
<b>A.2</b>	<b>Modèle à deux couches</b>	<b>147</b>
A.2.1	Un calcul analogue au calcul de LLD	147
A.2.2	Valeur minimale de $e_l$	148
A.2.3	Étapes de la résolution	148
A.2.4	Vérification des deux cas limites $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow +\infty$	149
<b>A.3</b>	<b>Taille du ménisque dynamique</b>	<b>150</b>
A.3.1	Théorie de LLD	150
A.3.2	Modèle à deux couches	150

---

### A.1 Calcul de LLD

Nous présentons ici les détails du calcul de LLD en vue d'introduire une partie des méthodes utilisées dans le cadre du modèle à deux couches.

Nous avons vu (partie 1.2, 11) que la théorie de LLD nécessite de déterminer numériquement la forme du ménisque dynamique régie par l'équation :

$$Y^{(3)} = 3 \frac{1 - Y}{Y^3} \quad (\text{A.1})$$

Lorsque  $Y \rightarrow +\infty$ ,  $Y^{(3)} \rightarrow 0$ , donc la dérivée seconde du profil  $Y^{(2)}$  tend vers une constante, que l'on cherche précisément à évaluer pour raccorder le film au ménisque statique.

#### A.1.1 Conditions aux limites

L'équation à résoudre est complétée par une série de conditions aux limites en  $X \rightarrow +\infty$  (issue du raccord du ménisque dynamique avec le film plan) :  $Y(X \rightarrow +\infty) = 1$ ,  $Y_X(X \rightarrow +\infty) = 0$ ,  $Y_{XX}(X \rightarrow +\infty) = 0$ . La première difficulté consiste à les prendre en

compte dans le calcul numérique, vu que celui-ci ne peut traiter que des nombres finis. On intègre donc l'équation entre une abscisse  $X_0$  ( $X_0 \gg 1$ ), et  $X = 0$  (changer l'origine revient simplement à translater le profil étudié). On choisit de plus  $Y_0 = Y(X_0)$ , qui constitue une première condition initiale de l'intégration. Notons que si  $X_0 \gg 1$ ,  $Y_0$  devrait être proche de 1 (mais toujours supérieur). Dans ce cas, on peut raccorder le profil à une solution asymptotique de l'équation (A.1) pour  $X > X_0$ , ce qui fournit les conditions initiales manquantes.

En effet, posant  $Y = 1 + \epsilon(X)$ , il vient à l'ordre 1 en  $\epsilon$  :

$$\epsilon^{(3)} = -3\epsilon$$

On en déduit  $\epsilon(X) = \sum_{j=1..3} A_j \exp(\sqrt[3]{3}\alpha_j X)$ , où  $\alpha_j$  sont les racines cubiques de  $-1$ . Parmi ces dernières, seule  $-1$  a une partie réelle négative, nécessaire pour garantir  $\epsilon(\infty) \rightarrow 0$ . Ainsi, à "grand"  $X$ , le profil du ménisque dynamique est de la forme :

$$Y_{asympt} = 1 + Ae^{-X}$$

$Y(X_0) = Y_0$  impose  $A = (Y_0 - 1) \exp X_0$ , donc :

$$\begin{cases} Y(X_0) = Y_0 \\ Y_X(X_0) = -A \exp -X_0 = -(Y_0 - 1) \\ Y_{XX}(X_0) = (Y_0 - 1)^2 \end{cases}$$

La figure A.1 présente le profil calculé avec  $X_0 = 25$   $Y_0 = 1,001$ . Le point important est que la courbure du profil tend comme attendu vers une constante ( $Y_{XX}(0) = 1,34$ ) lorsque son épaisseur augmente.

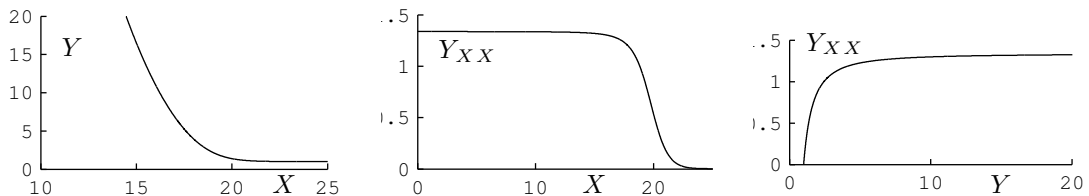


FIGURE A.1 – Profil du ménisque dynamique, obtenu par intégration numérique de l'équation (A.1), avec  $X_0 = 25$   $Y_0 = 1,001$ . A gauche : profil adimensionné du ménisque dynamique  $Y$  en fonction de  $X$ . Au centre : dérivée seconde du profil  $Y^{(2)}$  en fonction de  $X$ . A droite :  $Y^{(2)}$  en fonction de  $Y$ .  $Y^{(2)}$  atteint son asymptote pour  $Y \approx 10$ .

### A.1.2 Valeur asymptotique $Y_{XX}$

La valeur asymptotique calculée  $Y_{XX}(0)$  de la dérivée seconde du profil, que l'on cherche précisément à déterminer, dépend évidemment des conditions initiales  $X_0$  et  $Y_0$  choisies, mais on s'attend à ce que cette quantité tende vers la véritable solution de l'équation (A.1) lorsque  $X_0 \rightarrow +\infty$  et  $Y_0 \rightarrow 1$ . Le profil calculé dépend de plus de la manière dont est réalisée l'intégration de l'équation. Plus précisément, nous avons choisi d'utiliser le solveur "ode45" inclu dans le logiciel Matlab, qui permet de résoudre numériquement des équations différentielles (et qui a été écrite et optimisée par des gens infiniment plus compétents que

nous dans le domaine...). Cela nous permet de contrôler la précision de l'intégration par un unique paramètre (que nous noterons  $tol$ , pour tolérance) : la solution calculée se rapproche de la solution réelle lorsque  $tol \rightarrow 0$ .

Nous avons choisi de relier les valeurs de  $X_0$  et  $Y_0$  au paramètre  $tol$ , de manière à ce que la précision du calcul soit contrôlée par un unique paramètre. Pour ce faire,  $Y_0$  est choisi en premier lieu égal à  $Y_0 = 1 + tol$ .  $X_0$  est ensuite choisi assez grand pour que  $Y_{XX}$  ait bien atteint son asymptote. Plus précisément,  $X_0$  est choisi de manière à ce que la variation relative de  $Y_{XX}$  entre  $X_0/2$  et  $X = 0$  soit inférieure à  $tol$ . La figure A.2 présente la valeur calculée de  $Y_{XX}(0)$  en fonction du paramètre de contrôle  $tol$ . On remarque que la valeur calculée décroît rapidement avec  $tol$ , puis se stabilise aux alentours de 1,338 lorsque  $tol < 10^{-3}$ . C'est cette valeur du paramètre  $tol$  que nous choisirons dans la plupart des calculs effectués.

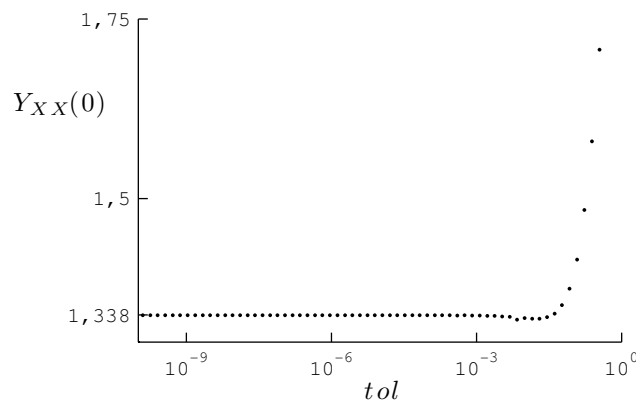


FIGURE A.2 – Valeur calculée de  $Y_{XX}(0)$  en fonction du paramètre  $tol$  contrôlant la précision du calcul.

## A.2 Modèle à deux couches

### A.2.1 Un calcul analogue au calcul de LLD

Par bien des aspects, les calculs nécessaires à la résolution du modèle à deux couches présenté en 2.3 (page 28) sont semblable aux calculs de LLD. Il s'agit en effet de déterminer la courbure du ménisque dynamique régi par l'équation :

$$Y_{XXX} = 3\alpha \frac{1 - Y}{\alpha Y^3 + 3Y^2 \frac{h_p}{e_l} + 3Y \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{e_l}\right)^3} \quad (\text{A.2})$$

En premier lieu, les conditions aux limites nécessaires au calcul sont les mêmes que dans la théorie de LLD ( $Y(X \rightarrow +\infty) = 1$ ,  $Y_X(X \rightarrow +\infty) = 0$ ,  $Y_{XX}(X \rightarrow +\infty) = 0$ ), et sont traitées de la même façon (raccordement asymptotique à une solution valable pour  $Y \approx 1$ ). Comme dans la théorie de LLD, le profil est déterminé, à l'aide du solveur "ode45" du logiciel Matlab, entre  $X = X_0 \gg 1$  et  $X = 0$ . La seule condition aux limites à préciser est  $Y_0 = Y(X_0)$ , qui sera prise égale à  $Y_0 = 1 + tol$ .

### A.2.2 Valeur minimale de $e_l$

Ce modèle à deux couches présente néanmoins deux différences fondamentales avec la théorie de LLD. La première, qui réside dans la dépendance de la forme du ménisque dynamique avec l'épaisseur de film  $e_l$  que l'on cherche à déterminer, a deux conséquences. En effet, d'après l'équation A.2, on ne peut attendre une asymptote de  $Y_{XX}$  que lorsque  $Y \gg h_p/e_l$ . La convergence est donc d'autant plus longue que  $e_l$  est petit, nécessitant des valeurs de plus en plus grandes de  $X_0$ . En pratique, on détermine une valeur de  $e_l$  minimale que l'on appelle  $e_{min}$  (en dessous de laquelle on ne calcule pas la forme du ménisque), et une valeur de  $X_0$  associée.

La dépendance en  $e_l$  complique également le raccord avec le ménisque statique, vu que la courbure (en variables adimensionnées) du ménisque dynamique dépend de  $e_l$ . Plus précisément, notant  $Y^{(2)}(X=0, e_l)$  la courbure en variables adimensionnées en  $X=0$ , ce raccord s'écrit :

$$\frac{Y^{(2)}(e_l)}{e_l} = \frac{\sqrt{2}}{aCa^{2/3}} \quad (\text{A.3})$$

Si l'on trace, comme sur la figure A.3  $Y^{(2)}(0)/e_l$  en fonction de  $e_l$ , déterminer l'épaisseur entraînée revient à trouver l'abscisse  $e_l$  de l'intersection de cette courbe avec la droite horizontale d'ordonnée  $\sqrt{2}/aCa^{2/3}$ .

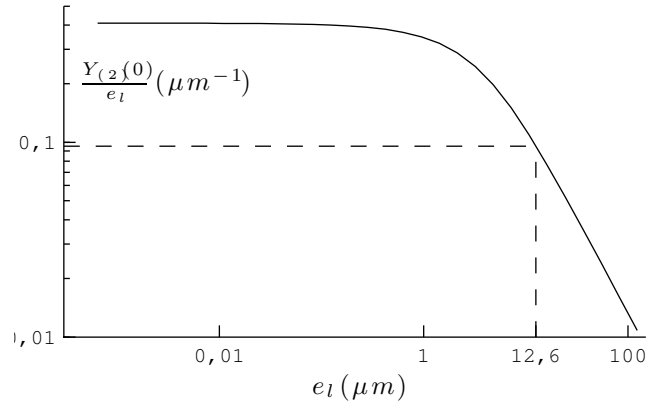


FIGURE A.3 –  $Y^{(2)}(0)/e_l$  en fonction de  $e_l$ , pour  $\alpha = 10$  et  $h_p = 10 \mu\text{m}$ .  $e_{min}$  vaut alors  $6 \cdot 10^{-7} \mu\text{m}$  et  $X_0$   $2,8 \cdot 10^5$ . La droite horizontale représente le membre de droite de l'équation A.3 pour  $Ca = 10^{-3}$ , ce qui correspond à une épaisseur entraînée  $e_l = 12,6 \mu\text{m}$ .

La seconde différence avec la théorie de LLD (qui n'est pas indépendante de la première) réside dans l'existence d'un nombre capillaire critique  $Ca_c$ , en deçà duquel aucun film n'est entraîné (cf. 2.12, page 38). Ceci impose en particulier que  $Y^{(2)}(0)/e_l$  tend vers une constante (égale à  $\sqrt{2}Ca^{-2/3}/a$ , ce qui permet d'ailleurs de déterminer  $Ca_c$ ) lorsque  $e_l \rightarrow 0$ .

C'est cette propriété que nous utiliserons pour déterminer  $e_{min}$  et  $X_0$ , en imposant :

- une variation relative de  $Y^{(2)}(0)/e_l$  entre  $e_{min}$  et  $10 e_{min}$  inférieure à  $tol$
- une variation relative de  $Y^{(2)}(X)$  entre  $X_0/2$  et  $X=0$  inférieure à  $tol$

### A.2.3 Étapes de la résolution

À ce stade, il paraît utile de résumer les différentes étapes du calcul de l'épaisseur libre entraînée dans le cadre du modèle à deux couches, connaissant  $a$ ,  $\alpha$ ,  $h_p$ ,  $Ca$  et  $tol$ .

- On définit en premier lieu  $Y_0 = 1 + tol$ , ce qui permet de définir les conditions initiales de l'équation différentielle régissant la forme du ménisque dynamique.
- On recherche ensuite  $X_0$  et  $e_{min}$  tels que les variations relatives de  $Y^{(2)}(0)/e_l$  entre  $e_{min}$  et  $10 e_{min}$  et de  $Y^{(2)}(0)$  entre  $X_0/2$  et  $X = 0$  sont inférieures à  $tol$ .
- On calcule alors  $Ca_c$  à partir de  $Y^{(2)}(X = 0, e_l = 0)$  (on extrapole la valeur de la courbure calculée en  $e_l = 0$ ).
- On calcule également  $Y^{(2)}(X = 0, e_l = e_{min})/e_{min}$ , et la valeur de nombre capillaire  $Ca_{min}$  associée (d'après l'équation A.3).
- $e_l$  est ensuite déterminé en égalant la courbure du ménisque dynamique en  $X = 0$  et la courbure au sommet du ménisque statique. Plus précisément, si  $Ca$  est plus petit que  $Ca_c$ ,  $e_l = 0$ . Si  $Ca_c < Ca < Ca_{min}$ ,  $e_l$  est calculé par une interpolation linéaire entre  $(e_l = 0, Ca_c)$  et  $(e_l = e_{min}, Ca_{min})$ . Enfin, lorsque  $Ca > Ca_{min}$ , on recherche  $e_l$  solution de l'équation A.3. Ceci nécessite bien sûr de calculer la forme du ménisque dynamique pour de nombreuses valeurs de  $e_l$ , toujours avec le même paramètre  $X_0$ .

#### A.2.4 Vérification des deux cas limites $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow +\infty$

Pour vérifier la procédure utilisée pour le modèle à deux couches, nous avons calculé l'épaisseur déposée dans deux cas limites facilement exploitables :  $\alpha = 1$  et  $\alpha \rightarrow +\infty$ . En effet, le premier cas représente la limite de faible densité de plots, pour laquelle  $e_d = e_l + h_p = \max(e_{LLD}, h_p)$ . L'épaisseur libre attendue vaut donc soit  $e_{pred} = \max(e_{LLD} - h_p, 0)$ . Dans le deuxième cas, qui représente la limite de grande densité de plots, on s'attend à déposer une couche libre d'épaisseur  $e_{pred} = e_{LLD}$ .

La figure A.4 présente le résultat de ces calculs. Pour  $\alpha = 1$  (o) et  $\alpha = 10^{200} \gg 1$  ( $\square$ ), l'écart relatif de l'épaisseur calculée dans le cadre du modèle à deux couches à l'épaisseur prédite  $e_{pred}$  y est tracé en fonction du paramètre  $tol$ . Comme attendu,  $e_l$  se rapproche de la valeur prédite lorsque  $tol$  diminue. De plus, l'écart est proportionnel à  $tol$ , et du même ordre de grandeur (le meilleur ajustement fournit un coefficient de 0,4). Il paraît donc cohérent de choisir comme valeur usuelle de  $tol$  la même que pour le calcul de la théorie de LLD, soit  $10^{-3}$ .

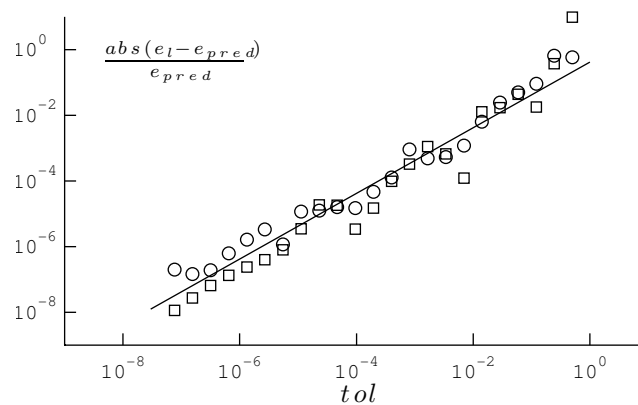


FIGURE A.4 – L'épaisseur  $e_l$  déposée dans le cadre du modèle à deux couches a été calculée pour  $\alpha = 1$  (o) et  $\alpha = 10^{200} \gg 1$  ( $\square$ ) (et  $h_p = 10 \mu\text{m}$ ,  $Ca = 10^{-3}$ ) en fonction du paramètre  $tol$ .  $e_l$  est comparée à la valeur prédite pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha \rightarrow +\infty$ . La droite représente le meilleur ajustement linéaire :  $y = 0,41x$ .

## A.3 Taille du ménisque dynamique

### A.3.1 Théorie de LLD

La théorie de LLD, et donc son adaptation dans le modèle à deux couches, se fondent sur le fait que la courbure du ménisque dynamique tend "rapidement" vers une constante, c'est à dire que le ménisque dynamique est de taille négligeable devant le ménisque statique, qui n'est alors pas perturbé. Si l'on considère par exemple que la zone du ménisque dynamique est telle que la courbure du profil est comprise entre 1% (frontière avec le film plan) et 99 % (frontière avec le ménisque statique) de sa valeur asymptotique, son épaisseur maximale  $Y_{LLD}^{dyn}$  (adimensionnée) vaut dans le cadre de la théorie de LLD 20 environ. Soit en grandeurs dimensionnelles :

$$e_{LLD}^{dyn} = Y_{LLD}^{dyn} e_{LLD} \approx 20 a Ca^{2/3}$$

Si l'on suppose que la théorie de LLD n'est justifiée que lorsque  $e_{LLD}^{dyn} < a$  ( $a$  étant la taille typique du ménisque statique), on déduit des précédentes relations une épaisseur de liquide déposée maximale (pour les huiles silicones utilisées)  $e_{LLD}^{max} = a/20 = 74 \mu\text{m}$  (correspondant à un nombre capillaire d'environ 0,01), en accord avec les résultats expérimentaux.

La théorie de LLD suppose de plus que la longueur du ménisque statique est très grande devant son épaisseur. Or, en variables adimensionnées, cette longueur vaut  $L_{LLD}^{dyn} \approx 8,5$ , soit en variables dimensionnelles

$$l_{LLD}^{dyn} = L_{LLD}^{dyn} e_{LLD} Ca^{-1/3} \approx 8,5 a Ca^{1/3}$$

$l_{LLD}^{dyn} > e_{LLD}^{dyn}$  impose par exemple  $Ca^{1/3} < 8,5/20$  soit  $Ca < 0,08$ , ce qui est une condition à peu près équivalente à celle déterminée au paragraphe précédant.

### A.3.2 Modèle à deux couches

Pour vérifier ces mêmes hypothèses dans le cadre du modèle à deux couches, nous avons calculé  $Y^{dyn}$  et  $L^{dyn}$  pour différentes valeurs de  $h_p$  (1  $\mu\text{m}$ , 10  $\mu\text{m}$ , 100  $\mu\text{m}$ ), de  $\alpha$  (1, 10, 100, 1000) et des nombres capillaires tels que  $e_l$  soit compris entre 0,01  $\mu\text{m}$  et 100  $\mu\text{m}$ .  $Y^{dyn}$  et  $L^{dyn}$  ne sont pas universels comme dans la théorie de LLD, pour laquelle ils valent respectivement 20 et 8,5. Néanmoins la figure A.5 nous enseigne que, dans la gamme de paramètres étudiée,  $Y^{dyn}$  et  $L^{dyn}$  s'éloignent très peu de ces valeurs (et de manière significative uniquement pour de faibles épaisseurs déposées).

On en déduit que la théorie développée est valable dans la même gamme d'épaisseurs que la théorie de LLD, soit pour les liquides utilisés lorsque  $e_l < 80 \mu\text{m}$ . Il est à noter que nous nous sommes toujours placés dans ce régime lors de nos expériences.

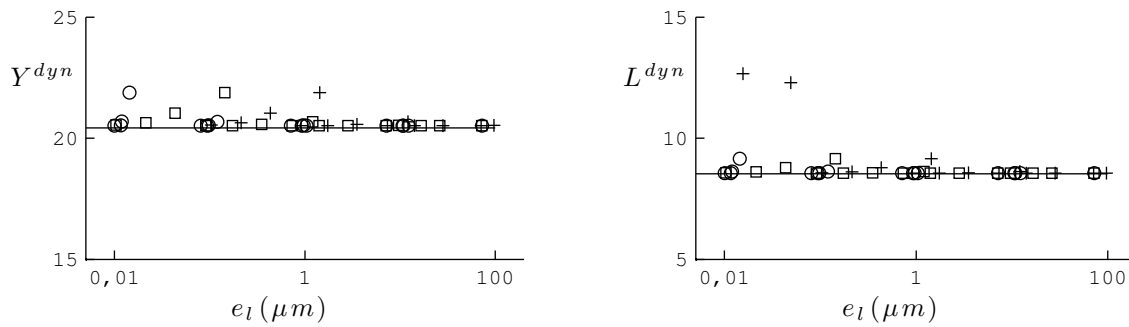


FIGURE A.5 – Épaisseur  $Y^{dyn}$  et longueur  $L^{dyn}$  (variables adimensionnées) du ménisque dynamique dans le modèle à deux couches, en fonction de l'épaisseur libre déposée  $e_l$ . Le calcul a été effectué pour différentes valeurs de  $h_p$  ( $1 \mu m$  ( $\circ$ ),  $10 \mu m$  ( $\square$ ) et  $100 \mu m$  ( $+$ )) et de  $\alpha$  (1, 10, 100, 1000). Les traits horizontaux représentent la valeur attendue dans le cadre de la théorie de LLD.





# Annexe B

## Mesure de la rigidité des racloirs

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Forme d'une plaque soumise à son propre poids.</b>	<b>153</b>
B.1.1	Équation de la forme du racloir	153
B.1.2	Conditions aux limites	154
<b>B.2</b>	<b>Méthode pour les racloirs les moins rigides</b>	<b>155</b>
B.2.1	Principe de la mesure	155
B.2.2	Précision et limites	155
<b>B.3</b>	<b>Méthode pour les racloirs plus rigides</b>	<b>156</b>

---

### B.1 Forme d'une plaque soumise à son propre poids.

Les équations régissant la forme de plaques de rigidité  $B$  soumises à une force extérieure  $f_{ext}^{\vec{}}$  sont déterminées dans la partie 4.2.2, page 68. Elles sont rappelées ici par commodité (les notations sont celles de la figure B.1) :

$$\Gamma = EI \frac{d\theta}{ds} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -f_{ext}^{\vec{}} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} = (\vec{F} \times \vec{t}) \cdot \vec{u}_z \quad (\text{B.3})$$

#### B.1.1 Équation de la forme du racloir

La mesure de la rigidité des racloirs utilisés se base sur l'observation de leur forme lorsqu'ils se courbent sous l'effet de leur propre poids. Cette forme est ensuite comparée à la forme attendue, ce qui permet de déduire la valeur de  $B$ . La mesure nécessite ainsi de calculer la forme prise par une poutre dans le champ de gravité. Dans ce cas, la force extérieure  $f_{ext}^{\vec{}}$  vaut  $\rho b h \vec{g}$ . L'intégration de l'équation (B.2) fournit alors (la constante d'intégration est déterminée en imposant que  $\vec{F}$  s'annule en bout de plaque) :

$$\vec{F} = -\rho b h s \vec{g} + C \vec{t} = \rho b h (L - s) \vec{g}$$

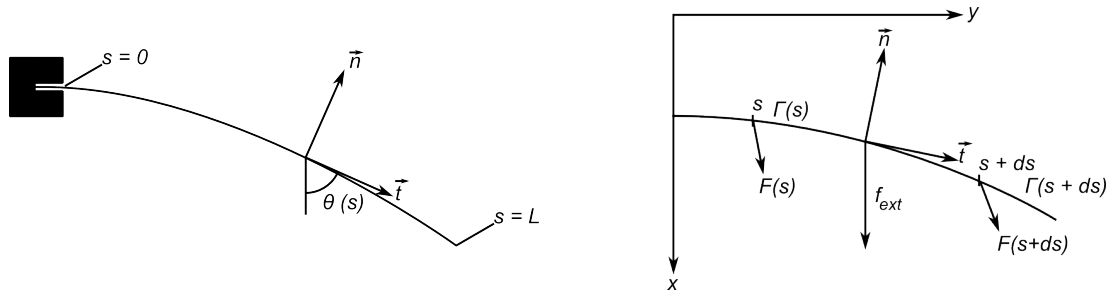


FIGURE B.1 – Notations utilisées pour exprimer l'équilibre mécanique d'une poutre.  $\vec{F}(s)$  et  $\Gamma(s)$  sont la force et le couple exercés en un point de la poutre par la portion de poutre située "à sa droite".

De même, l'équation (B.3) devient :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \rho b h g (L - s) \sin \theta$$

Cette dernière équation se combine avec B.1 :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{\rho b h g}{EI} (L - s) \sin \theta$$

En adimensionnant la variable  $s$  par  $L$  (la nouvelle variable  $\tilde{s}$  varie alors entre 0 et 1), on peut écrire l'équation régissant la forme de la poutre sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{s}^2} = \Delta (1 - \tilde{s}) \sin \theta \quad (\text{B.4})$$

Le nombre sans dimension  $\Delta = \frac{\rho b h g L^3}{EI} = \left(\frac{L}{L_c}\right)^3$  compare l'effet de la gravité à la rigidité de la plaque.  $L_c$  est la longueur typique de racloir à partir de laquelle la gravité se fait sentir, qui augmente avec la rigidité de la plaque et diminue avec sa densité. Lorsque  $L \ll L_c$ , l'élasticité domine et la plaque est droite (lorsque  $\Delta \ll 1$ , le membre de droite de l'équation (B.4) est faible). Au contraire, lorsque  $L \gg L_c$ , la plaque est largement déformée par son propre poids. En introduisant la masse surfacique  $\rho_s$  de la poutre et sa rigidité par unité de largeur  $B$ , on récrit  $\Delta$  sous la forme :  $\Delta = \frac{\rho_s g L^3}{B}$ .

### B.1.2 Conditions aux limites

L'équation (B.4) nécessite deux conditions aux limites pour être résolue. Dans les cas qui nous préoccupent ici, le racloir est encastré à une extrémité, ce qui fournit une condition sur l'angle initial  $\theta(0)$ . De plus, la plaque ne possède pas de courbure naturelle, donc  $\frac{d\theta}{d\tilde{s}}(\tilde{s} = 1) = 0$  (qui sert de deuxième condition d'intégration).

Le fait que les conditions aux limites ne soient pas spécifiées à la même extrémité de la poutre complique un peu la résolution de l'équation. En pratique, l'intégration est effectuée (numériquement) à partir de  $\tilde{s} = 1$ , en imposant  $\frac{d\theta}{d\tilde{s}} = 0$ , et une valeur arbitraire de l'angle  $\theta(1)$ . On recherche alors par une méthode de tir la valeur  $\theta(1)$  satisfaisant la condition aux limites à l'extrémité encastrée. Parfois, deux solutions sont possibles, on choisit alors celle de plus faible énergie. On arrive ainsi à trouver la forme prise par le racloir en fonction du paramètre  $\Delta$ .

## B.2 Méthode pour les racloirs les moins rigides

### B.2.1 Principe de la mesure

La première méthode consiste à encasturer le racloir verticalement (cf figure B.2), et observer l'altitude  $z_f$  de son extrémité. Si sa longueur  $L$  est faible (donc  $\Delta$  est faible également), le racloir reste vertical. Lorsque sa longueur augmente en revanche, il flambe sous son propre poids et se courbe vers le bas.

On retrouve ce comportement à partir des équations de l'élasticité B.4. En effet, la condition aux limites à prendre en compte pour le calcul de la forme est  $\theta(0) = \pi$ . La plaque verticale ( $\theta(s) = \pi$ ) est donc toujours une des solutions possibles. Lorsque le paramètre  $\Delta$  est faible, c'est la seule. En revanche, lorsque  $\Delta$  augmente, il en apparaît une autre (plaque courbée) de plus basse énergie. Plus précisément, on peut montrer à partir de B.4 que le flambage apparaît pour  $\Delta = 7,837$  [53].

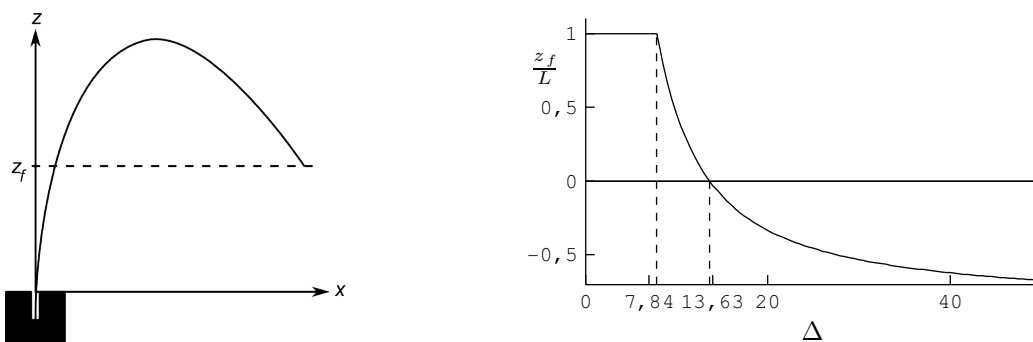


FIGURE B.2 – Méthode de mesure de la rigidité des racloirs : le racloir est encasturé verticalement (à gauche), et on observe la hauteur  $z_f$  de son extrémité libre. La courbe de droite permet de relier cette hauteur au nombre sans dimension  $\Delta = \frac{\rho_s g L^3}{B}$ , ce qui permet de déterminer  $B$  (les tirets représentent  $\Delta = 7,837$ , valeur analytique à partir de laquelle la poutre flambe sous son propre poids). En pratique, on recherche la longueur de racloir pour laquelle  $z_f = 0$ ,  $\Delta$  valant alors 13,634.

Pour relier la forme du racloir à sa rigidité, on mesure la longueur  $L$  pour laquelle  $z_f = 0$ , ce qui correspond à une valeur  $\Delta \approx 13,634$ . Une mesure supplémentaire de la densité surfacique du racloir permet donc de calculer sa rigidité  $B$ . En pratique, pour déterminer la rigidité d'un racloir taillé dans une feuille de matériau semblable au mylar d'environ  $260 \mu\text{m}$  d'épaisseur (la mesure au micromètre fournit  $255 \mu\text{m} - 260 \mu\text{m}$ ), on mesure en premier lieu sa masse surfacique en pesant une feuille de  $26,9 \text{ cm} \times 14,3 \text{ cm}$  ( $m = 11,60 \text{ g}$ ). La valeur déterminée ( $301 \text{ g/m}^2$ ) implique une densité de 1,2, proche de la densité "théorique" du mylar (1,3). On mesure ensuite la longueur  $L_0$  ( $26,8 \text{ cm}$ ) telle que  $z_f = 0$ , ce qui permet de déterminer  $B = \frac{\rho_s g L_0^3}{13,634} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ .

### B.2.2 Précision et limites

L'erreur de mesure provient essentiellement de l'erreur commise sur  $L_0$ , et de l'erreur commise sur la détermination de la surface de la feuille que l'on pèse. On estime que les longueurs sont mesurées (à la règle) à  $dl = 1 \text{ mm}$  près, tandis que  $L_0$  est déterminée à  $dL_0 = 5 \text{ mm}$  près. Cela se traduit par une erreur relative sur  $B$  de l'ordre de :

$$\frac{dB}{B} \sim \frac{dl}{l} + \frac{dL}{L} + 3\frac{dL_0}{L_0} \approx 8\%$$

Enfin, cette méthode n'est valable que tant que la longueur  $L_0$  mesurée n'est pas trop petite (car alors la précision sur la mesure de  $L_0$  n'est pas suffisante) ou trop grande (pour des raisons pratiques), par exemple pour  $1 \text{ cm} < L_0 < 30 \text{ cm}$ . Or pour un matériau donné,  $\rho_s$  varie linéairement avec son épaisseur  $h$ , tandis que  $B$  varie comme  $h^3$  :  $L_0$  varie donc comme  $h^{2/3}$ . Avec le matériau utilisé ici, on s'attend donc à pouvoir effectuer une mesure tant que  $2 \text{ }\mu\text{m} < h < 300 \text{ }\mu\text{m}$ , soit pour  $10^{-9} \text{ N}\cdot\text{m} < B < 7 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$

### B.3 Méthode pour les racloirs plus rigides

Pour des racloirs plus rigides (ou lorsque la plaque dont on dispose n'est pas assez grande), on peut simplement encasturer la plaque horizontalement (la gravité agissant alors perpendiculairement à la poutre, son effet est plus important), et mesurer l'angle entre son extrémité et son point d'attache (voir par exemple [57], et la figure B.3). Là encore, le calcul fournit la correspondance entre cet angle (plus précisément sa tangente, qui est facile à mesurer vu qu'elle vaut  $|z_f/x_f|$ ) et la valeur du paramètre  $\Delta$  (figure B.3, à droite). Pour illustration, cet angle vaut 45 degrés ( $z_f = x_f$ ) pour  $\Delta = 9,255$ .

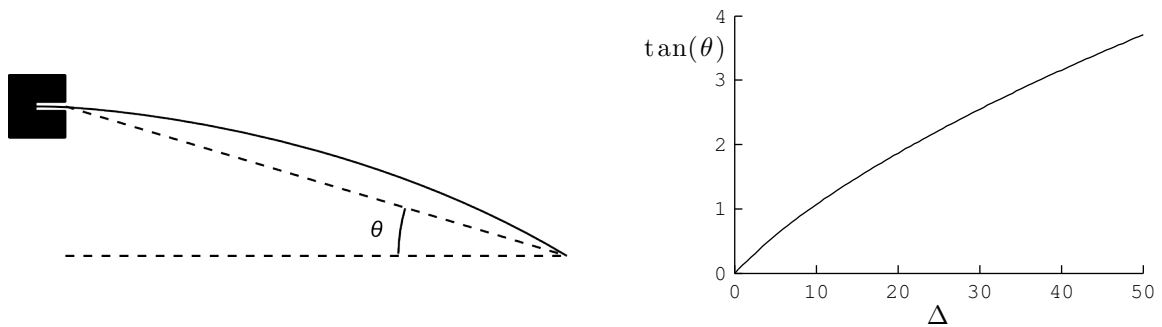


FIGURE B.3 – Méthode de mesure de la rigidité des racloirs : le racloir est encasturé horizontalement, et on observe la hauteur  $z_f$  de son extrémité libre. La courbe de droite permet de relier cette hauteur au nombre sans dimension  $\Delta = \frac{\rho_s g L^3}{B}$ , ce qui permet de déterminer  $B$ .

Si l'on se fixe comme limite de la mesure une déflexion de  $10^\circ$ , cela correspond à une valeur de  $\Delta$  d'environ 1,4 : on gagne un facteur 10 sur la rigidité maximale que l'on peut mesurer par rapport à la méthode précédente (soit un facteur environ 2 sur les épaisseurs de plaque). Enfin, des racloirs encore plus rigides nécessiteraient une autre méthode de mesure, par exemple une mesure de sa déflexion lorsqu'on accroche une masse à son extrémité (cette mesure est très facile à exploiter lorsqu'on peut négliger le poids de la poutre).

# Annexe C

## Modèle de filament visqueux

L'étude du filament extrait d'un bain de liquide visqueux par un cylindre (chapitre 6, page 99) a illustré la nécessité de pouvoir calculer la forme du filament au cours du temps. La façon de le faire que nous présentons ici nous a été suggérée par Neil Ribe.

On paramétrise pour cela le filament en coordonnées lagrangiennes (comme l'illustre la figure C.1). On peut définir la position d'une section (dont on note  $A = \pi d^2$  l'aire) du filament par sa hauteur  $z$  au dessus du bain, ou de manière équivalente par la variable  $\tau$ , qui est l'instant auquel la section considérée est "sortie" du bain. À chaque instant  $t$ , le pied du filament ( $z = 0$ ) correspond donc à  $\tau = t$ , tandis que le bas du cylindre ( $z = L = Vt$ ) correspond à  $\tau = 0$ . On note  $\Phi(t)$  le flux de liquide entraîné par le filament. Ce flux est positif en début d'expérience, et négatif lorsque le filament se draine. Il s'annule pour  $t = t_{max}$ , lorsque le volume du filament est maximal. La conservation du débit, combinée à l'équilibre entre gravité et forces visqueuses, fournissent alors[104] :

$$3\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial A(\tau, t)}{\partial t} = \rho g \phi(t)$$

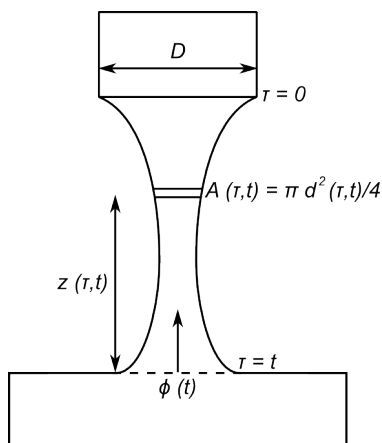


FIGURE C.1 – Description du filament.

Si l'on suppose le flux de liquide  $\phi$  connu, la forme du filament s'obtient en intégrant deux fois l'équation précédente. Les conditions aux limites nécessaires à sa dérivation explicite sont la forme initiale du filament, et l'extension à vitesse constante  $V$  imposée par le cylindre :  $\frac{\partial z}{\partial t}(\tau = 0, t) = V$ . Dans notre expérience,  $\phi$  est une inconnue supplémentaire qu'il faut relier à la forme du filament pour fermer le système d'équations. Nous envisageons de

considérer en premier que ce flux peut être déterminé en supposant que le filament exerce une contrainte  $\sigma$  constante sur un disque dont le diamètre varie comme celui du filament au niveau du bain ( $d(\tau = t, t)$ ). Si l'on suppose que la profondeur du bain est infinie, le flux est alors proportionnel à :

$$\phi \sim \frac{d^3(t, t)\sigma}{\eta}$$

Or, notant  $A_0$  la section du filament au niveau du bain ( $A_0 = A(\tau = t, t)$ ),  $\sigma$  est d'ordre  $\eta A_0^{-1} \frac{dA_0}{dt}$ , ce qui permet d'exprimer le flux :

$$\phi \sim A_0^{1/2} \frac{dA}{dt}$$

# Annexe D

## Dépôt de mousse sur une fibre

avec Anne Le Goff

### Sommaire

---

<b>D.1</b>	<b>Mouillage dynamique d'une fibre</b>	<b>159</b>
<b>D.2</b>	<b>Entraînement de mousse par une fibre</b>	<b>160</b>
D.2.1	Montage	160
D.2.2	Entraînement discontinu	160
D.2.3	Entraînement continu	164
<b>D.3</b>	<b>Force exercée par la mousse sur la fibre</b>	<b>166</b>
D.3.1	Principe de la mesure	166
D.3.2	Expériences	167
D.3.3	Taille de la région élastique	167
<b>D.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>170</b>

---

### D.1 Mouillage dynamique d'une fibre

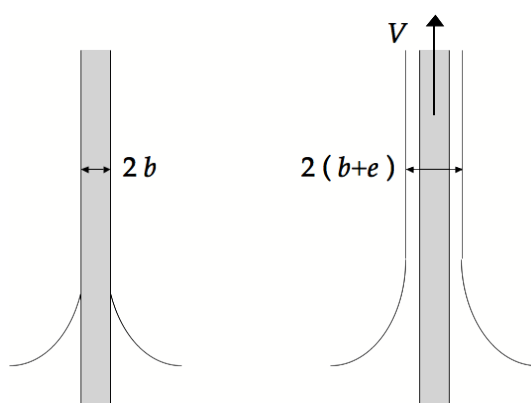


FIGURE D.1 – À gauche : fibre immobile, de rayon  $b$ , plongée dans un liquide. À droite, la même fibre tirée du bain liquide à la vitesse  $V$ , entraînant un film d'épaisseur  $e_d$ .

L'entraînement de fluide par trempage que nous avons présenté au premier chapitre de cette thèse peut être réalisé sur une fibre cylindrique (figure D.1). Cette configuration, étudiée en détail par Alain de Ryck au cours de sa thèse[20], possède la particularité, par rapport au dépôt sur une surface plane, d'introduire une nouvelle longueur caractéristique



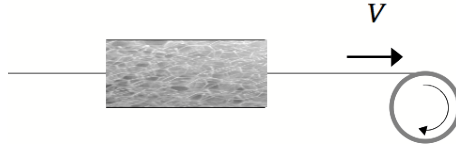


FIGURE D.2 – Schéma du montage de dépôt de mousse sur une fibre.

dans le problème, à savoir le rayon  $b$  de la fibre. Dans le cas où  $b$  est petit devant la longueur capillaire, la courbure du ménisque statique est dominée par cette grandeur et vaut  $1/b$ . En remplaçant, dans la théorie de Landau-Levich-Derjaguin,  $\sqrt{2}/a$  (la courbure du ménisque statique sur un plan infini) par  $1/b$  on obtient une estimation de l'épaisseur déposée :

$$e_d = 1,34 bCa^{2/3}$$

Cette prédiction est vérifiée expérimentalement tant que l'épaisseur de film est faible devant le rayon de la fibre. Pour les plus grandes épaisseurs, on peut corriger la formule précédente en remplaçant  $b$  par  $b + e$ . Lorsque la vitesse de tirage augmente encore, l'inertie devient prépondérante et l'épaisseur déposée  $e_d$  diverge.

C'est cette expérience que l'on étudie ici, en remplaçant le liquide mouillant par une mousse. On cherche en particulier à déterminer si la fibre entraîne dans son mouvement du liquide moussant et/ou des bulles, et en quelles quantités.

## D.2 Entraînement de mousse par une fibre

### D.2.1 Montage

Le montage expérimental est présenté sur la figure D.2 : un tube cylindrique horizontal de rayon centimétrique est rempli de mousse à raser Gillette, traversée par le fil que l'on cherche à enduire. On utilise des fils de Nylon ou de métal, dont le diamètre est de l'ordre d'une centaine de microns, que l'on enroule sur un tambour entraîné par un moteur pas à pas. La vitesse d'entraînement peut être ajustée entre 8 mm/s et 2 m/s . On observe la fibre en sortie du cylindre à l'aide d'une caméra rapide montée sur une loupe binoculaire, ou derrière un objectif macro, ce qui nous permet de détecter d'éventuels films de liquide moussant d'une épaisseur supérieure à 5  $\mu\text{m}$ .

La figure D.3 présente les différents régimes d'entraînement observés en fonction de la vitesse de la fibre.

- À basse vitesse, la fibre n'entraîne pas de mousse.
- Au-delà d'un premier seuil  $V'$ , de l'ordre du centimètre par seconde, des paquets de mousse isolés s'accrochent mais ne suffisent pas à former une gaine uniforme autour de la fibre. Leur densité augmente avec la vitesse de tirage.
- À partir d'une vitesse  $V''$ , la fibre entraîne une gaine continue de mousse d'épaisseur mesurable : elle est à proprement parler enduite de mousse.

### D.2.2 Entraînement discontinu

#### Seuil d'entraînement par paquets

Nous nous sommes en premier lieu intéressés au seuil d'entraînement par paquets, que nous présentons sur la figure D.4 en fonction du rayon  $b$  de la fibre. Pour les fibres d'un

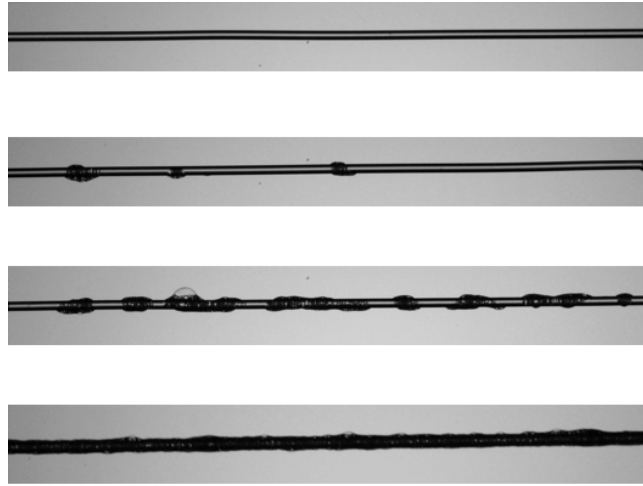


FIGURE D.3 – Dépôt de mousse sur une fibre de Nylon de  $200\ \mu\text{m}$  de diamètre, en fonction de la vitesse de la fibre. De haut en bas :  $V = 8\ \text{mm/s}$ ,  $V = 21\ \text{mm/s}$ ,  $V = 62\ \text{mm/s}$ ,  $V = 206\ \text{mm/s}$ .

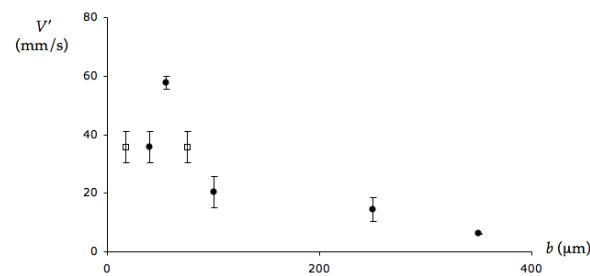


FIGURE D.4 – Variation de la vitesse seuil d'entraînement discontinu  $V'$  avec le diamètre de la fibre, pour des fibres de Nylon ( $\bullet$ ) ou de nickel ( $\square$ ).

diamètre supérieur à  $100\ \mu\text{m}$ , on observe une décroissance de la vitesse seuil en fonction du rayon. Les fibres les plus grosses sont donc les plus susceptibles d'entraîner du liquide.

### Taille et longueur d'ondes des paquets

Les paquets observés dans la fenêtre de vitesses comprise entre  $V'$  et  $V''$  semblent avoir toujours une taille de l'ordre de  $100\ \mu\text{m}$ , ce qui correspond à quelques tailles de bulles comme on l'observe sur la première image de la série D.5. Ces photographies montrent que la dimension caractéristique de ces agrégats de bulles ne semble varier ni avec la vitesse de tirage  $V$ , ni avec le rayon  $b$  de la fibre.

En revanche la longueur d'onde à laquelle ils sont émis change en fonction de la vitesse de tirage : plus celle-ci est importante, plus les paquets sont rapprochés, comme on l'observe qualitativement sur les photographies de la figure D.3 et quantitativement sur le graphe de la figure D.6. On remarque de plus sur cette dernière courbe que les données obtenues avec deux fibres de rayons différents semblent se superposer : ainsi, cette longueur d'onde dépendrait seulement de la vitesse de tirage, mais pas du rayon de la fibre.



FIGURE D.5 – Photographie des paquets émis lors de l'enduction d'une fibre de Nylon. De gauche à droite :  $V = 40$  mm/s et  $b = 40$   $\mu\text{m}$ ,  $V = 200$  mm/s et  $b = 40$   $\mu\text{m}$ ,  $V = 100$  mm/s et  $b = 75$   $\mu\text{m}$ .

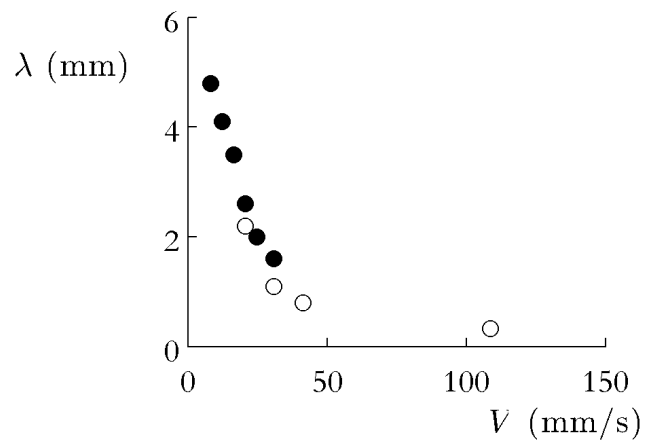


FIGURE D.6 – Longueur d'onde d'émission des paquets, en fonction de la vitesse de tirage, pour une fibre de Nylon de 200  $\mu\text{m}$  (○) ou 700  $\mu\text{m}$  (●) de diamètre.

### Mécanisme possible pour l'entraînement discontinu

Ce régime de dépôt discontinu n'est pas dénué d'intérêt, notamment grâce à la possibilité de contrôler la longueur d'onde d'émission des paquets par le biais de la vitesse de tirage. Lorsqu'on approche du seuil d'entraînement continu, la distance entre deux grappes de bulles devient de l'ordre de la taille des paquets et du diamètre de la fibre. Si le liquide moussant contient une espèce chimique capable de s'adsorber sur le solide ou de le faire réagir, on peut imaginer texturer la fibre à l'échelle de la dizaine de micromètres, ce qui serait difficile avec une technique classique de lithographie utilisée généralement pour texturer des surfaces planes. L'entraînement par paquets pourrait donc s'inscrire dans le contexte de l'utilisation de liquides en microfabrication, qui permet d'élaborer des structures en trois dimensions [32].

On pourrait imaginer que les gouttes régulièrement espacées que l'on observe résultent de la fragmentation d'un manchon liquide. En effet, une gaine liquide sur une fibre se déstabilise le plus souvent en gouttelettes (instabilité de type Plateau-Rayleigh [36]). La fibre se retrouve alors garnie d'une chaîne de gouttelettes, de longueur d'onde :

$$\lambda \sim 2\pi\sqrt{2b} \left(1 + \frac{e}{b}\right)^2$$

Or la longueur d'onde des colliers de bulles produits dans notre expérience semble indépendante du rayon de la fibre. Un scénario à la Plateau semble de plus bien improbable, compte tenu de l'absence de tension de surface pour la mousse. D'ailleurs, l'observation à la caméra rapide de la fibre à la sortie de l'échantillon de mousse montre que les paquets se forment dès la sortie du tube. La fibre n'est jamais recouverte d'un film qui se déstabiliserait ensuite.

Lors de l'enduction d'une fibre par de l'eau pure, il arrive qu'on observe l'émission de gouttes [20]. Ce phénomène a été remarqué par de Ryck et se produit aux grandes vitesses de tirage, lorsque la force due à l'entraînement inertiel par la fibre excède la force capillaire. Le ménisque devient alors instable et libère une goutte. Dans notre cas, c'est aux petites vitesses de tirage qu'on observe l'émission de paquets, on ne peut donc l'expliquer par un argument inertiel.

Sachant que la mousse est un fluide complexe, on se demande si l'entraînement par paquets est lié aux caractéristiques non-newtoniennes de la mousse. Les expériences réalisées par de Ryck pour une solution de POE (polymère soluble dans l'eau) montrent qu'à vitesse de tirage donnée, l'épaisseur déposée croît avec la concentration en polymères [21]. Ce phénomène est interprété comme un signature de la présence de contraintes normales dans la solution polymère : lorsque celle-ci est cisailée par le tirage de la fibre, elle gonfle dans la direction normale, ce qui crée un film plus épais. La viscoélasticité a donc une influence sur l'épaisseur entraînée, mais cette épaisseur reste homogène.

On pourrait également attribuer l'apparition de paquets au caractère hétérogène de la mousse. D'autres expériences effectuées par de Ryck portent sur des émulsions [20] : on enduit une fibre avec une émulsion et on s'intéresse au régime de basses vitesses, dans lequel on attend une épaisseur plus faible que la taille des gouttes d'huile. On se demande alors quelle est l'épaisseur et la composition du film entraîné. L'huile est toujours entraînée, même à très basse vitesse, dans le cas où des forces de van der Waals attractives existent entre la fibre et la phase organique. On s'attend en revanche à n'entraîner que de l'eau dans le cas où ces interactions sont répulsives. Il semble donc que l'hétérogénéité de la mousse ne soit pas non plus la source des discontinuités observées.

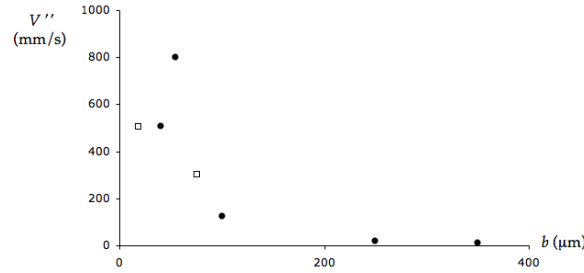


FIGURE D.7 – Variation de la vitesse seuil d’enduction  $V''$  avec le diamètre de la fibre, pour des fibres de Nylon ( $\bullet$ ) ou de nickel ( $\square$ ).

On peut aussi se demander si l’entraînement par paquets est la conséquence d’une autre propriété rhéologique de la mousse : le seuil d’écoulement. Les simulations effectuées par Hurez et Tanguy pour un fluide de Bingham ne semblent pas indiquer de discontinuité dans l’enduction des fibres [43], mais les seuils d’écoulements utilisés dans leurs calculs sont faibles (de l’ordre de 5 Pa). Nous avons répété notre expérience avec deux autres fluides à seuil : du gel coiffant ( $\sigma_Y \simeq 60$  Pa) et du dentifrice ( $\sigma_Y \simeq 200$  Pa). Aucun de ces deux liquides n’a permis d’obtenir des paquets. Il semble donc que l’existence d’un seuil d’écoulement ne soit pas la source de ce phénomène.

Enfin, on pourrait également interpréter l’entraînement par paquets comme une manifestation de la nature solide de la mousse. En soufflant un jet d’air sur une mousse bidimensionnelle, Hilgenfeldt et al. ont montré que celle-ci peut se fracturer comme un solide [40]. On pourrait donc imaginer que, dans notre expérience, la fibre casse l’échantillon de mousse, y créant un tunnel dans lequel le reste du fil peut avancer sans toucher le fluide. Puis, en raison de l’élasticité de la mousse, ce tunnel pourrait se refermer, déposant alors un peu de liquide sur la fibre.

Finalement, c’est peut-être la combinaison entre plusieurs de ces effets qui est à l’origine des discontinuités du revêtement. Par exemple, une compétition entre élasticité et inertie en présence d’un seuil d’écoulement peut mener à un phénomène de type stick-slip, dont on sait qu’il existe dans les mousses à l’échelle des bulles qui se réarrangent [35], et qui peut produire des structures périodiques [107].

## D.2.3 Entraînement continu

### Seuil d’entraînement continu

Nous avons vu qu’au-delà d’un seuil  $V''$  la fibre pouvait être entièrement recouverte de mousse. Comme le seuil d’entraînement par paquets, celui-ci décroît avec le rayon de la fibre (figure D.7), sans que l’on observe de différence entre les fibres de Nylon et les fibres métalliques.

### Épaisseur entraînée

La question de l’épaisseur déposée se pose alors naturellement lorsque l’on veut caractériser un phénomène d’enduction. On cherche en particulier à savoir si l’on retrouve avec une mousse un équivalent de la loi  $e \sim b Ca^{2/3}$ .

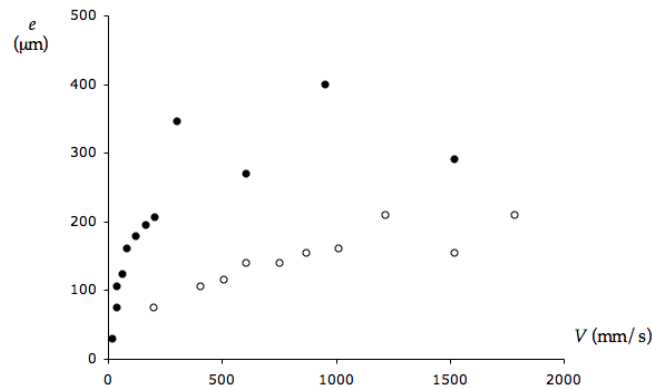


FIGURE D.8 – Épaisseur de la gaine de mousse entraînée en fonction de la vitesse de tirage, pour des fils de Nylon de  $700\ \mu\text{m}$  (●) et  $200\ \mu\text{m}$  (○) de diamètre.

Nous avons donc réalisé une série d'expérience en faisant varier la vitesse de tirage de  $V''$  à la limite de cohésion de la mousse (à très grande vitesse, la fibre creuse un trou dans l'échantillon, il y a alors rupture du contact liquide-solide). La figure D.8 représente, dans le régime d'entraînement, l'épaisseur  $e$  de la gaine de mousse entraînée. On a vu que la taille des paquets était de quelques dizaines de microns ; on s'attend donc à ce que le film entraîné ait une épaisseur de cet ordre lorsque  $V$  est proche de  $V''$ . C'est effectivement ce qui se produit, puis l'épaisseur croît avec la vitesse de tirage jusqu'à atteindre des valeurs proches du diamètre de la fibre.

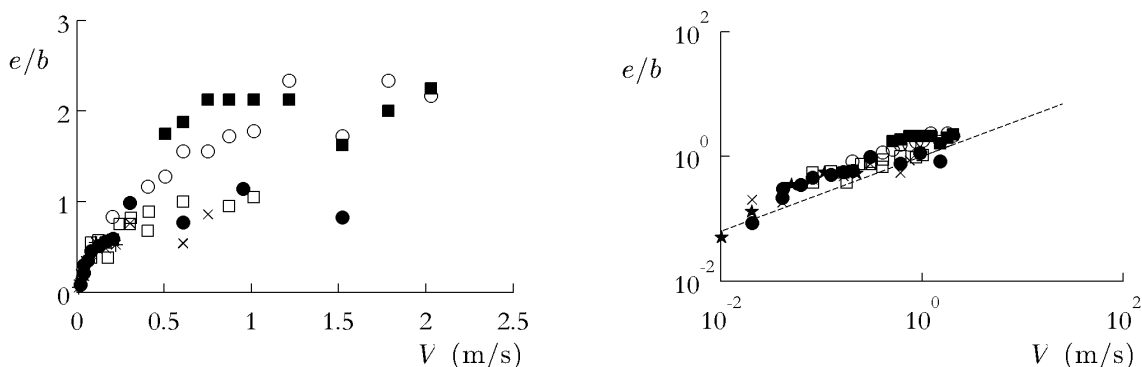


FIGURE D.9 – À gauche : épaisseur de la gaine de mousse entraînée en fonction de la vitesse de tirage, pour des fils de Nylon de  $700\ \mu\text{m}$  (●),  $500\ \mu\text{m}$  (×),  $200\ \mu\text{m}$  (○) et  $80\ \mu\text{m}$  (■) de diamètre ; un fil métallique de  $200\ \mu\text{m}$  (□) de diamètre et une tige de plastique (PMMA) de  $4\ \text{mm}$  de diamètre (★). À droite : représentation en échelle logarithmique des mêmes données. La courbe en pointillés est une droite de pente 0,5.

On observe sur la figure D.9, qui présente l'épaisseur adimensionnée  $e_d/b$ , que si l'on change le diamètre de la fibre, l'épaisseur varie à peu près dans les mêmes proportions. Toutes les données semblent de plus se superposer sur une loi de puissance d'exposant  $0,5 (\pm 0,1)$ . Les données représentées sur cette figure correspondent à des fils de Nylon de différents diamètres, mais aussi à un fil métallique et à une tige de plastique. Il semble donc que la nature chimique du matériau qui compose la fibre ne joue aucun rôle dans la détermination de l'épaisseur entraînée. Il est tentant de voir dans cette loi d'échelle, valable sur deux ordres de grandeur, un analogue de la loi d'échelle de la théorie de LLD

Il faut évidemment manipuler avec prudence les concepts de viscosité et de tension de surface pour la mousse. En effet, il était possible de définir une viscosité équivalente pour la mousse, mais cette approximation ne se justifie que dans un régime de taux de cisaillement élevé (cf. la thèse de Anne Le Goff[34]). Pour une expérience d'enduction, on ne connaît pas l'échelle des gradients de vitesse, il est donc possible qu'on se situe dans le domaine où  $\eta$  varie avec le taux de cisaillement. Quant à la tension de surface, elle n'est pas bien définie pour une mousse. Pour un liquide pur, par exemple, la longueur capillaire détermine l'échelle au-dessous de laquelle une goutte prend une forme sphérique, alors que la forme d'un amas de mousse ne résulte pas d'un simple équilibre entre gravité et tension de surface, mais dépend de la structure même de l'amas. En effet, toute modification géométrique de l'amas suppose un réarrangement entre bulles, qui nécessite de franchir une barrière énergétique. Celle-ci est en général suffisamment haute pour que ni gravité ni tension de surface ne parviennent à modéliser l'échantillon. La forme d'un tas de mousse ne permet pas de comparer ces deux effets.

Une meilleure connaissance des écoulements dans la mousse au voisinage de la fibre pourrait néanmoins nous permettre de savoir si le modèle visqueux est pertinent dans cette expérience. Nous nous sommes donc intéressés à la force exercée sur le film, dans l'espoir de déterminer l'échelle spatiale de variation de la vitesse et donc le modèle rhéologique adapté à la description de l'expérience.

## D.3 Force exercée par la mousse sur la fibre

### D.3.1 Principe de la mesure

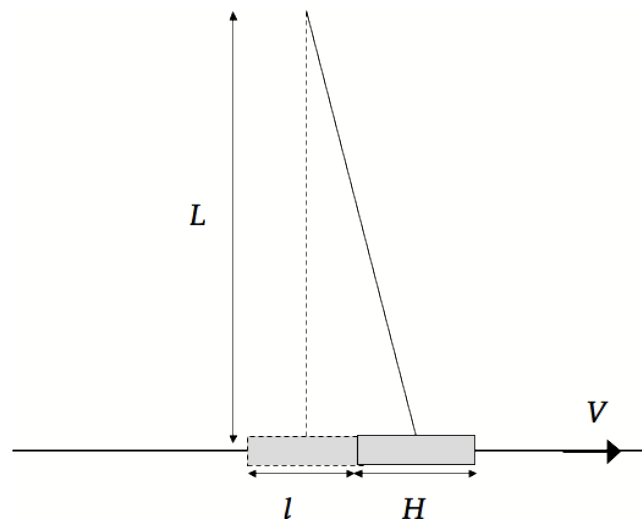


FIGURE D.10 – Mesure de la force exercée sur la fibre enduite. Le tube de mousse, de longueur  $H$ , n'est plus fixé mais suspendu à un fil de longueur  $L$ . Lorsque la fibre qui le traverse avance à une vitesse  $V$ , le tube est déplacé d'une distance  $l$  par rapport à sa position initiale.

Les forces que l'on cherche à mesurer sont de l'ordre du millinewton. Pour les mesurer, nous avons utilisé le montage expérimental représenté sur la figure D.10. Le tube qui contient la mousse est suspendu à un fil de longueur  $L$ , et est ainsi libre de se déplacer

le long de l'axe de la fibre. Lorsque celle-ci avance, elle entraîne avec elle la mousse qui l'entoure, et le tube avance lui aussi. Il atteint une position d'équilibre à une distance  $l$  de sa position de repos, dans laquelle il est en régime stationnaire : la force de rappel due à la gravité compense exactement la force exercée par la fibre. Ainsi, on peut déduire cette dernière par une simple mesure de la masse  $M_{tot}$  de l'ensemble (tube + mousse) et de son déplacement :

$$F \simeq M_{tot} g \frac{l}{L}$$

### D.3.2 Expériences

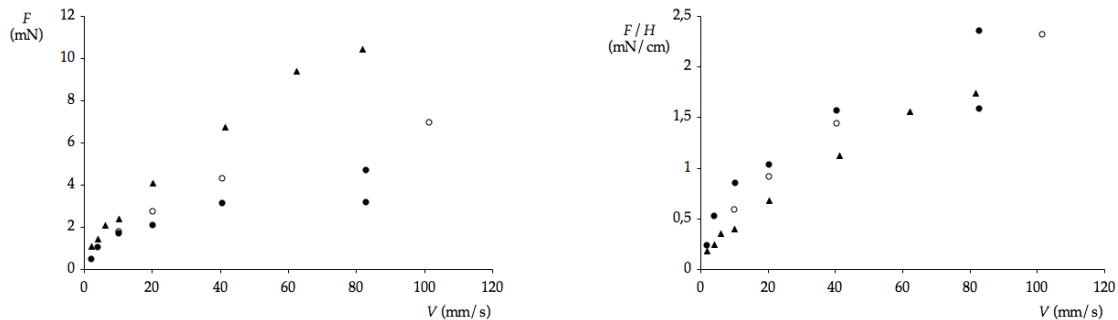


FIGURE D.11 – à gauche : force  $F$  exercée par la mousse sur un fil de  $200 \mu\text{m}$  de diamètre, en fonction de la vitesse de tirage  $V$ . On réalise l'expérience avec des tubes de longueur  $H = 2 \text{ cm}$  ( $\bullet$ ),  $H = 3 \text{ cm}$  ( $\circ$ ) et  $H = 6 \text{ cm}$  ( $\blacktriangle$ ). À droite : les mêmes mesures se superposent lorsque l'on trace  $F/H$  en fonction de la vitesse.

La figure D.11 représente les variations de la force mesurée  $F$  avec la vitesse de tirage  $V$ , pour trois longueurs  $H$  différentes :  $F$  augmente à la fois avec  $H$  et avec  $V$ . Plus précisément,  $F$  semble croître linéairement avec  $H$ , ce qui tendrait à prouver que la contrainte exercée par la mousse sur la fibre est uniforme. La figure D.12, qui présente la force mesurée pour différents rayons de fibre (et une longueur de cylindre fixée) corrobore cette hypothèse, et suggère une loi de puissance pour la contrainte s'appliquant sur le fil :

$$\frac{F}{Hb} \sim V^{0,6}$$

### D.3.3 Taille de la région élastique

On sait que la mousse réagit comme un solide élastique aux faibles déformations et qu'elle se réarrange de façon irréversible lorsqu'elle est soumise à un cisaillement important. Le taux de cisaillement n'est pas le même dans tout l'échantillon : on s'attend donc à ce qu'il y ait dans la mousse des domaines élastiques et des régions où se localisent les réarrangements. Notre objectif ici est d'essayer de comprendre l'agencement de ces domaines et leurs tailles respectives.

On réalise dans ce but une mesure de force dans le même esprit que l'expérience précédente, mais en se plaçant cette fois à la surface de la mousse, et en régime quasi-statique. On approche de cette surface un disque de diamètre  $D$  relié à une tige. Le disque colle à la mousse grâce aux forces de capillarité : en tirant sur la tige, on peut alors entraîner le



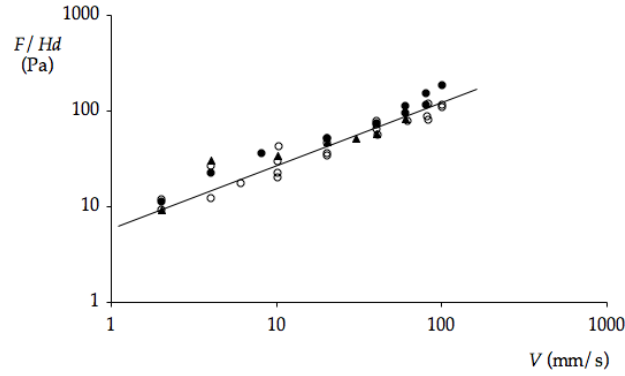


FIGURE D.12 – Évolution de la contrainte mesurée  $\sigma = \frac{F}{Hd}$ , en fonction de la vitesse de tirage, pour des fils de rayon  $b = 40 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ),  $b = 200 \mu\text{m}$  ( $\circ$ ) et  $b = 500 \mu\text{m}$  ( $\blacktriangle$ ). La droite en trait plein représente le meilleur ajustement en loi d'échelle,  $\sigma \sim V^a$ , avec  $a = 0,6$ .

tube de mousse. On tire très lentement sur cette tige jusqu'à ce que la mousse rompe. On vérifie bien que le disque est couvert de mousse après la rupture, ce qui signifie que celle-ci a bien lieu au sein de la mousse et pas du contact avec le disque.

D.13

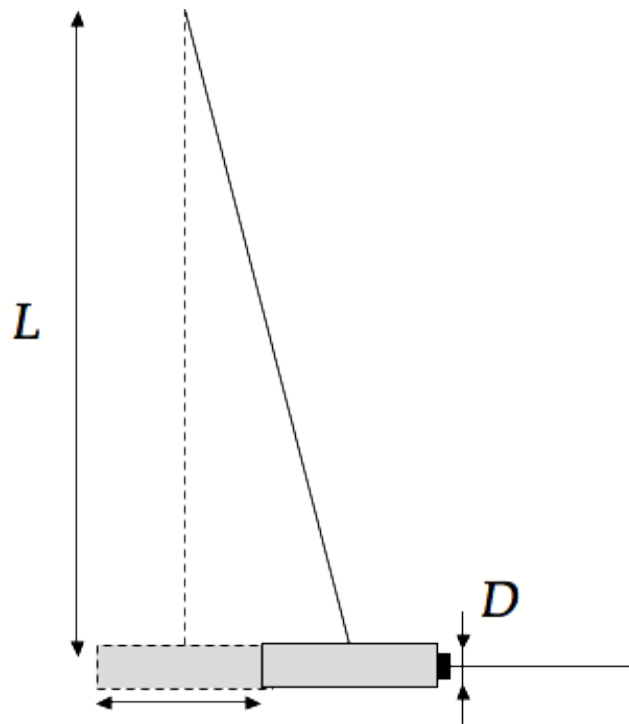


FIGURE D.13 – Le tube rempli de mousse est suspendu à un fil de longueur  $L$ . On approche de la surface de mousse un disque de diamètre  $D$  sur lequel on tire ensuite jusqu'à ce que la mousse rompe, le tube ayant parcouru une distance  $l$ .

La figure D.14 présente la force  $F$  mesurée pour des expériences impliquant toujours le même tube et des disques de diamètres  $D$  différents. La contrainte  $\sigma$  exercée par le disque sur la mousse est reliée à la force  $F$  mesurée :  $\pi \frac{D^2}{4} \sigma$ . On s'attend à ce que la rupture se produise au moment où la contrainte  $\sigma$  atteint le seuil d'écoulement  $\sigma_Y$  (de l'ordre de

200 Pa pour la mousse utilisée), et donc à mesurer :

$$F = \pi \frac{D^2}{4} \sigma_Y \quad (\text{D.1})$$

La figure D.15 présente les valeurs obtenues pour  $F$ , en fonction de  $\pi \frac{D^2}{4} \sigma_Y$ . Conformément à la prédiction D.1, on observe une droite de pente 1. Les résultats obtenus dans ces deux expériences, l'une dynamique et l'autre quasi-statique, montrent qu'au-dessous d'une contrainte seuil  $\sigma_Y$  la mousse ne s'écoule pas, et qu'une fois ce seuil d'écoulement dépassé la contrainte dépend de la vitesse selon une loi de type :

$$\sigma \sim \sigma_Y + CV^a \quad (\text{D.2})$$

avec  $a \approx 0,6$ . On reconnaît une loi de type Herschel-Bulkley, classiquement utilisée en rhéologie des mousses.

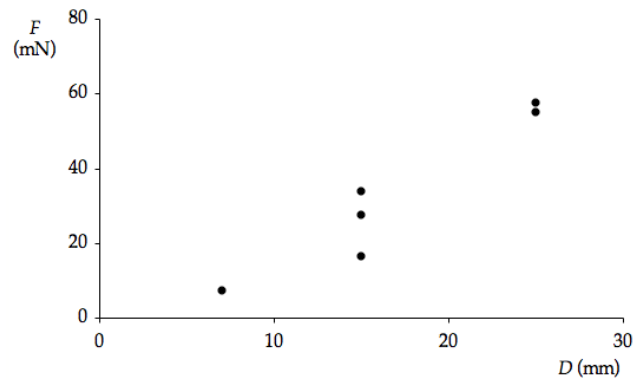


FIGURE D.14 – Variation de la force  $F$  mesurée en fonction du diamètre  $D$  du disque utilisé.

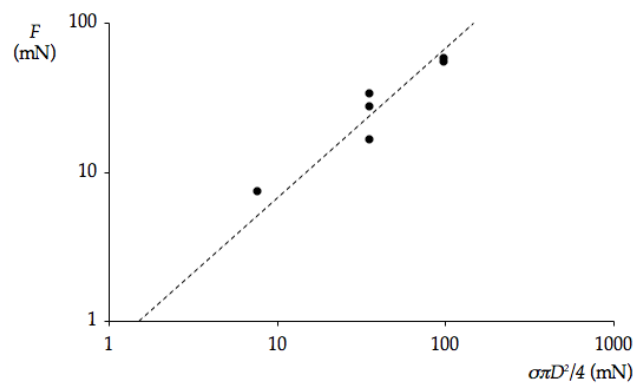


FIGURE D.15 – Variation de la force  $F$  mesurée en fonction de la quantité  $\frac{1}{4} \pi D^2 \sigma_Y$ . La pente de la droite en pointillés est 1.

## D.4 Conclusion

Nous avons réalisé une expérience d'ensimage avec de la mousse et montré qu'il existe un régime dans lequel la fibre entraîne un manchon liquide dont l'épaisseur est donnée par une loi de type Landau-Levich. Aux faibles vitesses, nous avons mis en évidence un phénomène original d'entraînement discontinu dont le mécanisme demeure incompris. Nous avons mesuré les limites  $V'$  et  $V''$  de ce régime, qui semblent varier de façon inversement proportionnelle avec le rayon de la fibre. Pour comprendre ce phénomène, il semble nécessaire de tenir compte de toutes les spécificités de la mousse (viscosité, élasticité et seuil d'écoulement) : aucune d'elles, seule, ne suffit à provoquer l'apparition de paquets. Pour savoir quel modèle rhéologique utiliser, nous avons effectué des mesures, statiques et dynamiques, de la force exercée par la mousse sur la fibre. Celles-ci montrent que le comportement de la mousse dans cette expérience est bien décrit par une loi de type Herschel-Bulkley.

# Bibliographie

- [1] D. A. Antelmi and O. Spalla. Adsorption of nanolatex particles to mineral surfaces of variable surface charge. *Langmuir*, 15 :7478–7489, 1999.
- [2] J. M. Aristoff and J. W. M. Bush. Water entry of small hydrophobic spheres. *J. Fluid Mech.*, 619 :45–78, 2009.
- [3] D. Atkins, P. Kéricheff, and O. Spalla. Adhesion between colloidal silica as seen with direct force measurement. *J. Colloid Interface Sci.*, 188 :234–237, 1997.
- [4] T. Baldacchini, J. Carey, M. Zhou, and E. Mazur. Superhydrophobic surfaces prepared by microstructuring of silicon using a femtosecond laser. *Langmuir*, 22 :4917–4919, 2006.
- [5] W. Barthlott and C. Neinhuis. Purity of the sacred lotus, or escape from contamination in biological surfaces. *Paanta*, 202 :1–8, 1997.
- [6] T. D. Blake and K. J. Ruschak. A maximum speed of wetting. *Nature*, 282 :489–491, 1979.
- [7] H. Bouasse. *Capillarité et phénomènes superficiels*. Delagrave, 1924.
- [8] F. P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, 10 :166–188, 1961.
- [9] H. C. Brinkman. *Appl. Sci. Res.*, 1(27), 1947.
- [10] F. Brochard-Wyart and P.-G. de Gennes. The viscous catenary : a poor man’s approach. *EPL*, 80, 2007.
- [11] M. Callies, Y. Chen, F. Marty, A. Pépin, and D. Quéré. Microfabricated textured surfaces for super-hydrophobicity investigations. *Microelectronic Engineering*, 78-79 :100–105, 2005.
- [12] M. Callies and D. Quere. On water repellency. *Soft Matter*, page 55, 2005.
- [13] B. J. Carroll and J. Lucassen. Capillarity-controlled entrainment of liquid by a thin cylindrical filament moving through an interface. *Chem. Engng Sci.*, 28 :23 ?30, 1973.
- [14] J.D. Chen. Measuring the film thickness surrounding a bubble inside a capillary. *J. Colloid Interface Sci.*, 109 :341, 1986.
- [15] T.-Y. Chen and J. Tsamopoulos. Nonlinear dynamics of capillary bridges : Theory. *J. Fluid Mech.*, 255 :373, 1993.
- [16] A. Daerr, P. Lee, J. Lanuza, and E. Clément. Erosion patterns in a sediment layer. *Phys. Rev. E*, 67 :065201, 2003.
- [17] E. R. Damiano, B. R. Duling, K. Ley, and T. C. Skalak. Axisymmetric pressure-driven flow of rigid pellets through a cylindrical tube lined with a deformable porous wall layer. *J. Fluid Mech.*, 314 :163–189, 1996.

- [18] E. R. Damiano, D. S. Long F. H. El-Khatib, and T. M. Stace. On the motion of a sphere in a stokes flow parallel to a brinkman half-space. *J. Fluid Mech.*, 500 :75–101, 2004.
- [19] E. R. Damiano, D. S. Long, and M. L. Smith. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids : application to micro-vascular haemodynamics. *J. Fluid Mech.*, 512 :1–19, 2004.
- [20] A. de Ryck. *Le mouillage dynamique d'une fibre*. PhD thesis, Université Paris VI, 1994.
- [21] A. de Ryck and D. Quéré. Fluid coating from a polymer solution. *Langmuir*, 13 :1911–1914, 1998.
- [22] B. Derjaguin. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 39 :13, 1943.
- [23] O. Devauchelle, C. Josserand, and S. Zaleski. Forced dewetting on porous media. *J. Fluid Mech.*, 574 :343–364, 2007.
- [24] V. Duclaux, F. Caille, C. Duez, C. Ybert, L. Bocquet, and C. Clanet. Dynamics of transient cavities. *J. Fluid Mech.*, 591 :1–19, 2007.
- [25] J. Eggers. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letter*, 71(21) :3458, 1993.
- [26] J. Eggers. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Reviews of Modern Physics*, 69(3) :865, 1997.
- [27] J. Eggers. Two- and one-dimensional flocculation of silica spheres on substrates. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :094502, 2004.
- [28] J. Eggers and E. Villermaux. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.*, 71 :036601, 2008.
- [29] M. N. Esmail and R. L. Hummel. Non-linear theory of free coating onto a vertical surface. *A. I. Ch. E*, 21 :958–965, 1975.
- [30] Essilor. <http://www.essilor.fr/verre-lunette/fabrication-verre-essilor.htm?id=162>.
- [31] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on Physics*. Addison-Wesley publishing company, 1963.
- [32] H. Gau, S. Herminghaus, P. Lenz, and R. Lipowsky. Liquid morphologies on structured surfaces : From microchannels to microchips. *Science*, 283(5398) :46–49, 1999.
- [33] S. Gaudet, G. H. McKinley, , and H. A. Stone. Extensional deformation of newtonian liquid bridges. *Phys. Fluids*, 8(10), 1996.
- [34] A. Le Goff. *Figures d'impact : tunnels, vases, spirales et bambous*. PhD thesis, Université Paris VI, 2009.
- [35] A. D. Gopal and D. J. Durian. Nonlinear bubble dynamics in a slowly driven foam. *Physical Review Letters*, 75(13), 1995.
- [36] S. L. Goren. The instability of an annular thread of fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(2), 1962.
- [37] F. S. Goucher and H. Ward. The thickness of liquid films formed on solid surfaces under dynamic conditions. *Phil. Mag.*, 44 :1002–1014, 1922.
- [38] H. Hasimoto. On the periodic fundamental solutions of the stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres. *J. Fluid Mech.*, 5(02) :317–328, 1959.

- [39] D. Henderson, H. Segur, L. B. Smolka, and M. Wadati. The motion of a falling liquid filament. *Phys. Fluids*, 12(3) :550, 2000.
- [40] S. Hilgenfeldt, S. Arif, and J.-C. Tsai. Foam : a multiphase system with many facets. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 366 :2145–2159, 2008.
- [41] A. E. Hosoi and L. Mahadevan. Peeling, healing, and bursting in a lubricated elastic sheet. *Physical Review Letter*, 93(13), 2004.
- [42] C. Huh and I. E. Scriven. Shapes of axisymmetric fluid interfaces of unbound extent. *J. Colloid Interface Sci.*, 30(3) :323, 1969.
- [43] P. Hurez and P. A. Tanguy. Finite element analysis of dip coating with Bingham fluids. *Polymer Engineering Science*, 30(18), 1990.
- [44] C. Ishino, M. Reyssat, E. Reyssat, K. Okumura, and D. Quéré. Wicking within forests of micropillars. *EPL (Europhysics Letters)*, 79(5) :56005, 2007.
- [45] H. Jeffreys. The draining of a vertical plate. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 26(02) :204–205, 1930.
- [46] W. Kim and G. H. Kim. Thickness-profile measurement of transparent thin-film layers by white-light scanning interferometry. *Appl. Opt.*, 38(28) :5968–5973, 1999.
- [47] S. F. Kistler and P. M. Schweizer. *Liquid film coating*. Chapman and Hall, 1997.
- [48] J. P. Koulakis, C. D. Mitescu, F. Brochard-Wyart, P.-G. de Gennes, and E. Guyon. The viscous catenary revisited : experiments and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 609 :87–110, 2008.
- [49] T. A. Kowalewski. On the separation of droplets from a liquid jet. *Fluid Dynamics Research*, 17 :121–145, 1996.
- [50] R. Krechetnikov and G. M. Homsy. Surfactant effects in the landau levich problem. *J. Fluid Mech.*, 559 :429–450, 2006.
- [51] R. Krechetnikov and G.M. Homsy. Experimental study of substrate roughness and surfactant effects on the landau-levich law. *Physics of Fluids*, 17(10) :102108, 2005.
- [52] L. Landau and B. Levich. Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physicochim. URSS*, 17 :42, 1942.
- [53] L. Landau, E. Lifchitz, and A. Kosevich. *Physique théorique : théorie de l'élasticité*, volume 7. MIR, 1990.
- [54] G. W. Leibniz. Naissance du calcul différentiel. *Vrin*, pages 192–199, 1691.
- [55] E. Lorenceau, F. Restagno, and D. Quéré. Fracture of a viscous liquid. *P. R. L.*, 90 :184501–1, 2003.
- [56] E. Lorenceau, F. Restagno, and D. Quéré. Fracture of a viscous liquid. *Physical Review Letter*, 90(18) :184501, 2003.
- [57] L. Mahadevan and J. B. Keller. Periodic folding of thin sheets. *SIAM Review*, 41(1) :115–131, 1999.
- [58] L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel. Fluid rope trick? investigated. *Nature*, 392 :140, 1998.
- [59] L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel. Correction : fluid rope trick? investigated. *Nature*, 403 :502, 2000.
- [60] M. Maleki, M. Habibi, R. Golestanian, N. M. Ribe, and D. Bonn. Liquid rope coiling on a solid surface. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :214502, 2004.

- [61] M. Maleki, M. Reyssat, F. Restagno, C. Clanet, and D. Quéré. Landau-levich menisci. *J. Colloid Interface Sci.*, in press, 2010.
- [62] R. N. Marchessault and S. G. Mason. Flow of entrapped bubbles through a capillary. *Ind. Eng. Chem.*, 52 :79–84, 1960.
- [63] P. Marmottant and E. Villermaux. Fragmentation of stretched liquid ligaments. *Phys. Fluids*, 16(8) :2732, 2004.
- [64] J. E. Matta and R. P. Tytus. Liquid stretching using a falling cylinder. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 35 :215–229, 1990.
- [65] G. H. McKinley and A. Tripathi. How to extract the newtonian viscosity from capillary breakup measurements in a filament rheometer. *J. Rheol.*, 2000.
- [66] J. Meseguer and A. Sanz. Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *J. Fluid Mech.*, 153 :83, 1985.
- [67] F. C. Morey. Thickness of a film adhering to a surface slowly withdrawn from the liquid. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 25 :385–393, 1940.
- [68] C. Neinhuis and W. Barthlott. Characterization and distribution of water-repellent, self-cleaning plant surfaces. *Annals of Botany*, 79 :667–677, 1997.
- [69] J. A. Nicolas. Hydrodynamic stability of high-viscosity cylindrical liquid bridges. *Phys. Fluids*, 4 :1620, 1992.
- [70] K. Okumura, F. Chevy, D. Richard, D. Quéré, and C. Clanet. Water spring : a model for bouncing drops. *EPL (Europhysics Letters)*, 62(2) :237, 2003.
- [71] G. Onoda and P. Somasundaran. Two- and one-dimensional flocculation of silica spheres on substrates. *J. Colloid Interface Sci.*, 118(1) :169, 1987.
- [72] O.O.Ramdane and D. Quere. Thickening factor in marangoni coating. *Langmuir*, 13 :2911–2916, 1997.
- [73] J. F. Padday and A.R. Pitt. Axisymmetric meniscus profiles. *J. Colloid Interface Sci.*, 38 :323–334, 1972.
- [74] J. F. Padday and A.R. Pitt. The stability of axisymmetric menisci. *Phil. Trans R. Soc. Lond.*, 275 :489–528, 1973.
- [75] J. F. Padday and A.R. Pitt. Menisci at a free liquid surface : surface tension from the maximum pull on a rod. *J. Chem. Soc. Farad. Trans.*, 71 :1919–1931, 1975.
- [76] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [77] D. Quéré. Non-sticking drops. *Reports on Progress in Physics*, 68 :2495, 2005.
- [78] W. Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Philos. Mag.*, 34 :145, 1892.
- [79] M. Reyssat. *Splendeur et misère de l'effet lotus*. PhD thesis, Université Paris VI, 2006.
- [80] N. M. Ribe. Coiling of viscous jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, 460 :3223–3239, 2004.
- [81] D. Rivas and J. Meseguer. One-dimensional self-similar solution of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *J. Fluid Mech.*, 138 :417, 1984.
- [82] A. De Ryck and D. Quéré. Inertial coating of a fiber. *J. Fluid Mech.*, 311 :219–237, 1996.

- [83] A. Q. Shen, B. Gleason, G. H. McKinley, , and H. A. Stone. Fiber coating with surfactant solutions. *Phys. Fluids*, 14 :4055, 2002.
- [84] Bluestar Silicones. Rhodorsil oils 47 technical information.
- [85] M Skorobogatiy and L. Mahadevan. Folding of viscous sheets and filaments. *Europhys. Lett.*, page 532?538, 2000.
- [86] J. H. Snoeijer, G. Delon, M. Fermigier, and B. Andreotti. Avoided critical behavior in dynamically forced wetting. *Physical Review Letters*, 96 :174504, 2006.
- [87] J. H. Snoeijer, J. Ziegler, B. Andreotti, M. Fermigier, and J. Eggers. Thick films coating a plate withdrawn from a bath.
- [88] A. J. Soroka and J. A. Tallmadge. A test of the inertial theory for plate withdrawal. *A. I. Ch. E*, 17 :505?508, 1971.
- [89] O. Spalla and P. K ericheff. Adhesion between oxide nanoparticles : influence of surface complexation. *J. Colloid Interface Sci.*, 192(1) :43–65, 1997.
- [90] S. H. Spiegelberg, D. C. Ables, and G. H. McKinley. The role of end-effects on measurements of extensional viscosity in viscoelastic polymer solutions with a filament stretching rheometer. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 64(2-3) :229–267, 1996.
- [91] R. P. Spiers, C. V. Subbaraman, and W. Wilkinson. Free coating of a newtonian liquid onto a vertical surface. *Chem. Engng Sci*, 29 :389–396, 1974.
- [92] G. I. Taylor. On scraping viscous fluid from a plane surface. *On scraping viscous fluid from a plane surface*, 1962.
- [93] J. TEICHMAN and L. MAHADEVAN. The viscous catenary. *J. Fluid Mech.*, 478 :71?80, 2003.
- [94] V. Tirtaatmadia and T. Sridhar. A filament stretching device for measurement of extensional viscosity. *J. Rheol.*, 37(6) :1081–1102, 1993.
- [95] H. G. Tompkins and W. A. McGahan. *Spectroscopic ellipsometry and reflectometry : a user?s guide*. John Wiley and sons, 1999.
- [96] E. Trinh and T. G. Wang. Large-amplitude free and driven drop-shape oscillations : experimental observations. *Journal of Fluid Mechanics*, 122(-1) :315–338, 1982.
- [97] F. T. Trouton. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 77 :426?440, 1906.
- [98] J. Tsamopoulos, T.-Y. Chen, and A. Borkar. Viscous oscillations of capillary bridges. *J. Fluid Mech.*, 235 :579, 1992.
- [99] J. J. van Rossum. Viscous lifting and drainage of liquids. *Applied Scientific Research*, 7 :121 – 144, 1958.
- [100] S. Weinbaum, J. M. Tarbell, and E. R. Damiano. The structure and function of the endothelial glycocalyx gayer. *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, 9 :121–167, 2007.
- [101] S. Weinbaum, X. Zhang, Y. Han, H. Vink, and S. C. Cowin. Mechanotrans-duction and flow across the endothelial glycocalyx. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 100.
- [102] D. A. White and J. A. Tallmadge. Theory of drag out of liquids on flat plates. *Chemical Engineering Science*, 20 :33–37, 1965.
- [103] D. A. White and J. A. Tallmadge. A theory of withdrawal of cylinders from liquid baths. *A.I.Ch.E. J.*, 12 :333–339, 1966.
- [104] S. D. R. Wilson. *Journal of Fluid Mechanics*, 190(-1) :561–570, 1988.



- [105] A. M. Worthington and R. S. Cole. Impact with a liquid surface, studied by the aid of instantaneous photography. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 189 :137–148, 1897.
- [106] Y.M. Xie, P. Felicetti, and J.W. Tang. Form finding for complex structures using evolutionary structural optimization method. *Design Studies*, 26 :55–72, 2005.
- [107] H. Yoshizawa, P. McGuiggan, and J. Israelachvili. Identification of a second dynamic state during stick-slip motion. *Science*, 26(5099), 1993.
- [108] T. Young. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 95 :65 ?87, 1805.

## Résumé

Nous étudions expérimentalement diverses configurations d'entraînement et de drainage visqueux. Dans un premier temps, nous montrons que la rugosité modifie les lois de l'enduction par trempage : l'épaisseur est égale à la taille de la texture jusqu'à un nombre capillaire critique, à partir duquel elle augmente pour rejoindre la loi obtenue sur surface lisse lorsqu'elle devient largement supérieure à la rugosité. Le drainage gravitaire est également modifié, et présente en particulier une marche d'épaisseur. Un modèle à deux couches de fluide permet de rendre quantitativement compte de toutes ces observations.

Nous étudions ensuite le dépôt à l'aide d'une membrane flexible. Dans le cas où le racloir est juste tangent à la surface de dépôt, un modèle décrit les expériences à un facteur près, essentiellement dû à des effets de bords. Nous montrons ensuite que la loi de dépôt est très différente avec un racloir rigide, et peut être comprise en considérant l'écoulement dans un coin. Cette étude nous permet d'insister sur l'importance de la forme de la membrane dans la détermination de la loi d'entraînement.

Enfin, nous nous intéressons à l'entraînement vertical par un cylindre d'un filament visqueux, dont la taille résulte alors d'un équilibre entre viscosité et gravité. Le drainage de ces objets est très différent selon les dimensions du cylindre. Cette différence de comportement se retrouve dans l'évolution d'un filament horizontal soumis à la gravité. Nous expliquons pourquoi un "gros" filament conserve une forme de chaînette tout au long de sa chute, tandis qu'un "petit" évolue sous l'effet de la capillarité vers une forme de "U".

*Mots-clés* : Entraînement, filament visqueux, drainage, dépôt, surface texturée, capillarité, film mince, élasticité, problème de Landau-Levich-Derjaguin

## Abstract

We study experimentally different configuration of Newtonian viscous entrainment and drainage. We show that surface roughness drastically affects the coating laws of the dip-coating experiment : the entrained thickness is equal to the texture height below a critical capillary number, then increases and tends towards the smooth limit when it becomes much larger than the roughness. The drainage is also affected, and features a sharp decrease. A two layer model is able to quantitatively reproduce all these observations.

We then study the coating by an elastic sheet. When the scraper is just tangent to the deposition surface, a model reproduces the experimental results within a prefactor, which is part due to finite width effects. We then show that the deposition is very different when using a rigid scraper, and arises from the stress divergence at scraper's tip. This study features the crucial role of the shape of the scraper.

Lastly, we consider the filament withdrawn from a bath of viscous oil with a cylinder, and show that its size comes from a balance between viscous and gravity forces. The observed drainage law strongly depends on the size of the thread. This characteristic is also found when considering a horizontal viscous thread in the gravity field. We explain why "thick" filaments keep a catenary-like shape throughout their fall, whereas "small" ones evolve toward a "U" shape.

*Keywords* : Entrainment, viscous filament, Landau-Levich-Derjaguin problem, drainage, textured surface, capillarity, elasticity