De la Pureté locale à la décomposition

Fouad Elzein, Lê Dung Trang

DE LA PURETÉ LOCALE À LA DÉCOMPOSITION

FOUAD EL ZEIN AND DŨNG TRÁNG LÊ

Abstract. Le théorème de décomposition se déduit de la pureté locale.

From Local purity to Decomposition

Abstract. The decomposition theorem is deduced from local purity.

1. Introduction

Cette note fait suite à la note [14] où nous avons expliqué comment le théorème de décomposition en dehors d'un point implique un théorème de pureté locale en ce point dans le cadre analytique, similaire au théorème de pureté locale de Deligne-Gabber de [10] dans le cadre algébrique. Ici nous montrons comment ce théorème de pureté locale en un point sert à étendre le théorème de décomposition en ce point, ce qui permet d'établir simultanément par récurrence le théorème de pureté locale et le théorème de décomposition.

Nous reprenons les notations de [14]. Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés algébriques complexes, $\tilde{\mathcal{L}}$ une variation de structures de Hodge (VSH) polarisée sur un ouvert Ω lisse de X, $j : \Omega \to X$, $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$ le complexe de cohomologie réduite à $\tilde{\mathcal{L}}$ en degré $-m$ où m est la dimension de X, et $j_{!*}\mathcal{L}$ l'extension intermédiaire de $\mathcal{L}$. Dans la note précédente [14] nous avons déduit la pureté locale en un point v de V, de la décomposition de $Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ sur $V - v$. Il s'agit à présent d'étendre la décomposition en v.

Cette notion consiste en réalité en deux décompositions de nature bien distinctes. L'une consiste à décomposer une cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L}))$ en une somme directe d'extensions intermédiaires canoniques qui utilise la théorie de Hodge.

L'autre consiste à décomposer le complexe en une somme directe de complexes élémentaires se réduisant à ses propres cohomologies perverses décalées en degré, ce qui découle de la dégénérescense de la suite spectrale de Leray perverse et qui se déduit d'un résultat de type Lefschetz [6], à savoir: le cup-produit itéré avec la classe η d'une section hyperplane, induit des isomorphismes de (complexes de) faisceaux de cohomologie perverse $\eta^i : {}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_* j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})$.

La démontration procède par une récurrence sur les strates d'une stratification convenable du morphisme f. Le pas de récurrence consiste à appliquer le théorème de pureté locale à une section normale à une strate de V en un point de la strate.

Date: Janvier 2013.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54C40, 14E20; Secondary 46E25, 20C20.
Key words and phrases. Hodge theory, algebraic geometry.

Pour poursuivre le raisonnement de récurrence et utiliser chaque fois une SHM sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux (DCN), on doit préparer la variété X à l'aide d'une désingularisation adaptée à $\mathcal{L}$ et à une stratification de Thom-Whitney de f, ce qui ne change pas la portée du résultat puisque l'on peut toujours se réduire à ce cas.

En fait, la décomposition reflète les propriétés topologiques des morphismes projectifs en géométrie algébrique complexe et il est agréable de lier ces résultats à des fibrations topologiques induites sur les strates d'une stratification de Thom-Whitney sur la base. De plus, ayant choisi d'utiliser des complexes logarithmiques, on s'intéresse particulièrement à des fibrations par des DCN sur les strates au sens de la note précédente (voir Définition 3.1 [14]).

On *débute la récurrence* sur l'ouvert U formé par la réunion des grandes strates lisses de V tel que la restriction de f au-dessus de U soit lisse et propre. On suppose par construction que: $f^{-1}(U)$ est le complémentaire d'un DCN, le complémentaire $Y = X - \Omega$ est un DCN et que les singularités de $\mathcal{L}$ forment au-dessus de U un DCN horizontal $Y_U := Y \cap f^{-1}(U)$ relatif sur U.

Alors la famille de cohomologie d'intersection des fibres forme une VSH polarisée. Dans ce cas, les faisceaux image-directes supérieures $R^i f_* j_{!*}\mathcal{L}$ classiques coincident avec les cohomologies perverses: ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L})) = \mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L}))$, le théorème de Lefschetz difficile s'applique, et par conséquent les résultats de [6] aussi, d'où la décomposition sur U.

On choisit un point général v de $V - U$. Il appartient à une strate S de V de dimension strictement inférieure à la dimension n de V. La pureté locale en v sert alors à étendre la décomposition au voisinage du point v dans une section normale $\mathcal{N}_v$ dans V à la strate S. Le point v est dans une strate induite de dimension minimale sur $\mathcal{N}_v$, ce qui nous ramène à étudier le cas d'une strate de dimension minimale. On suppose par construction que l'image réciproque de la strate S est un DCN dans X qui est relatif sur la strate S, on pourra étendre la décomposition sur tout un voisinage de v dans V.

Morphismes d'intersection. Avec notre hypothèse sur f, il est naturel d'exprimer le résultat en termes de *morphismes d'intersection* I dont l'importance apparait comme une des révélations de la théorie dans [2]. Soit $X_{S_l} := f^{-1}(S_l)$ l'image réciproque d'une strate S_l de dimension $l \leq n$, où n est la dimension de V, d'une stratification de Thom-Whitney $\mathcal{S}$, on pose $i_{X_{S_l}} : X_{S_l} \to X$, $i_{S_l} : S_l \to V$ et on considère le morphisme composé:

$$I_{S_l} : Ri^!_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L} \to j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L} \tag{1.1}$$

Sous l'hypothèse de fibration sur les strates de V, on en déduit des systèmes locaux images

$$\mathcal{L}^i_l = \mathrm{Im}[R^{-l+i} f_{l*}(Ri^!_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L}) \overset{I_{S_l}}{\to} R^{-l+i} f_{l*}(i^*_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L})], \tag{1.2}$$

sur les différentes strates qui interviennent dans la formule explicite de la décomposition de $K := Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ en tant que somme directe d'extensions intermédiaires par i_{S_l}: ${}^p\mathcal{H}^i(K) \simeq \oplus_{S_l \in \mathcal{S}} i_{S_l !*}\mathcal{L}^i_l[l]$. Ces $\mathcal{L}^i_l$ sont en fait des VSH polarisées de poids $a+i-l$, car $\mathcal{L}^i_l$ est l'image d'une variation de SHM de poids $\omega \geq a+i-l$ dans une variation de SHM de poids $\omega \leq a+i-l$ et de plus le tout est calculé avec des complexes logarithmiques en X_{S_l}, DCN relatifs sur S_l.

Retenons que le théorème de décomposition sera démontré par induction sur la dimension décroissante des strates de V. La preuve n'utilise pas la théorie des cycles évanescents et diffère des preuves actuelles que nous citons en référence [2, 19].

2. Décomposition de la cohomologie perverse

Nous allons expliquer le pas de la récurrence dans le cas d'une fibration par des DCN sur les strates ([14], définition ?). La situation est donc celle d'un morphisme projectif de variétés algébriques complexes $f : X \to V$ où X est lisse et d'une VSH polarisée définie sur un système local $\tilde{\mathcal{L}}$ sur le complémentaire de Y un DCN dans X. Une stratification $\mathcal{S}$ de V définit une famille de sous-espaces fermés V_i, réunion de strates de dimension $\leq i$ pour $i \in [0, n]$: $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V = V_n$, et V_{n-1} contient le lieu singulier de V. Soit $X_{V_i} = f^{-1}(V_i)$ et pour chaque strate S_l de dimension l soit $X_{S_l} = f^{-1}(S_l)$, par construction, l'espace X_{V_i} est un DCN dans X. Les propriétés de la stratification que nous utilisons sont:

- (T) Au-dessus de S_l le morphisme $f_l : X_{S_l} \to S_l$, induit par f, est un fibré topologique localement trivial de fibre en un point v un DCN dans l'image réciproque lisse d'une setion normale générale $\mathcal{N}_v$ à S_l en v.
- (W) Le link de la strate S_l en un point de S_l est un invariant topologique localement constant.

Comme les stratifications sont de Thom-Whitney, le résultat de J. Mather dans [18] nous garantit la propiété W.

En particulier, la restriction de f à $X - X_{V_{n-1}}$ est lisse sur $V - V_{n-1}$. On peut toujours supposer $Y = X_{V_{n-1}} \cup Y_h$ union de $X_{V_{n-1}}$ avec un DCN horizontal Y_h tel que la restriction de f à Y_h induise au-dessus de de la grande strate $U := V - V_{n-1}$ un DCN relatif. De même la fibre de X_{S_l} en un point v est un DCN dans l'image réciproque d'une section normale générale $\mathcal{N}_v$ à S_l en v. Dans ce cas la stratification est dite adaptée à f et $\mathcal{L}$.

L'espace Y contient donc les singularités de $\mathcal{L}$ et de f de sorte que l'on puisse utiliser des complexes logarithmiques pour la théorie de Hodge à coefficients dans $\mathcal{L}$ sur X [3]. Le diagramme suivant résume les notations

$$\begin{array}{ccccc} X - X_{V_l} & \overset{j_l}{\to} & X & \overset{i'_l}{\hookleftarrow} & X_{V_l} \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_l \\ V - V_l & \overset{k_l}{\to} & V & \overset{i_l}{\hookleftarrow} & V_l \end{array}$$

où $i'_l : X_{V_l} = f^{-1}(V_l) \to X$, $i_l : V_l \to V$, (resp.$j_l : (X - X_{V_l}) \to X$, $k_l : (V - V_l) \to V$) dénotent les plongements dans X et V, (resp. les plongements des compléments ouverts). Soit v un point dans V_0, on écrit $i_{X_v} : X_v = f^{-1}(v) \to X$, $k_v : (V - \{v\}) \to V$ et $j_v : (X - X_v) \to X$. Enfin $V_l^* := V_l - V_{l-1}$ est la réunion (éventuellement vide) des strates de dimension l.

On va montrer que la pureté locale en v permet d'étendre la décomposition de $V - V_0$ à V à travers les points $v \in V_0$ de la réunion des strates de dimension zéro. Cet argument s'applique en fait à l'étape de récurrence inductive à travers une strate de dimension quelconque, auquel cas le point v est l'intersection avec une section normale à la strate $\mathcal{N}_v$ dans V. On écrit aussi pour chaque strate: $i_{S_l} : S_l \to \overline{S}_l$ et de même avec abus de notation $i_{S_l} : S_l \to V$.

Proposition 2.1 (Décomposition de la cohomologie perverse)**.** *Soit $i_0 : V_0 \to V$ la réunion des strates de dimension 0 et supposons que la cohomologie perverse de $K = Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ se décompose sur l'ouvert $k_0 : (V - V_0) \to V$ en une somme directe d'extensions intermédiaires de VSH : $\mathcal{L}^i_l$ (1.2) sur toutes les strates S_l de $V^*_l := V_l - V_{l-1}$ pour tout $l > 0$ et en tout degré i, soit:*

$$(2.1) \quad {}^p\mathcal{H}^i(K)_{|V-V_0} \simeq \oplus^{S_l \subset V^*_l}_{0<l\leq n} \; k^*_0 i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^i_l[l], \quad K_{|V-V_0} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(K)_{|V-V_0}[-i]$$

Alors la suite exacte longue de cohomologie perverse

$${}^p\mathcal{H}^i((i_0)_* R(i_0)^! K) \overset{{}^p\alpha_i}{\to} {}^p\mathcal{H}^i(K) \overset{{}^p\rho_i}{\to} {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{0*}K_{|V-V_0}) \overset{{}^p\delta_i}{\to}$$

donne lieu à une suite exacte courte: $0 \to Im\, {}^p\alpha_i \to {}^p\mathcal{H}^i(K) \xrightarrow{{}^p\rho_i} Im\, {}^p\rho_i \to 0$ de faisceaux pervers, scindée sur V, qui se décompose en termes de $\mathcal{L}^i_l$ et $\mathcal{L}^i_0$ (1.2):

$$Im\, {}^p\rho_i = (k_0)_{!*}k^*_0\, {}^p\mathcal{H}^i(K) \simeq \oplus^{S_l \in V^*_l}_{0<l\leq n} i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^i_l[l], \; et \; Im\, {}^p\alpha_i = ker\, {}^p\rho_i \simeq (i_0)_*\mathcal{L}^i_0.$$

La preuve étant locale aux points de V_0, on peut supposer V projective et V_0 réduit à un point v et l'on écrit i_v, k_v pour les immersions au lieu de i_0, k_0. La suite exacte dans la proposition est associée au triangle sur V: $i_{v*}Ri^!_v(K) \overset{\alpha}{\to} K \overset{\rho}{\to} Rk_{v*}K_{|V-\{v\}} \overset{[1]}{\to}$, et de plus on a: ${}^p\mathcal{H}^i(i_{v*}Ri^!_v K) \simeq i_{v*}H^i(Ri^!_v K)$. Afin de calculer successivement: $Im\, {}^p\rho_i$, $Im\, {}^p\alpha_i$ et prouver le scindage dans ${}^p\mathcal{H}^i(K)$, il nous est utile d'abord de signaler le calcul suivant de cohomologie perverse de $Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}$ à partir de la décomposition (2.1):

Lemme 2.2. *1) Dans le cas d'un seul système local $\mathcal{L}'$ sur une strate S_l contenant v dans son adhérence, on note $i_{S_l} : S_l \to \overline{S}_l$, $k_v : (\overline{S}_l - v) \to \overline{S}_l$, alors la suite longue de cohomologie perverse définie par le triangle:*

$$i^!_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l] \to (i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l] \to Rk_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \xrightarrow{[1]}$$

se décompose en une suite exacte

$$0 \to (i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l] \to {}^p\mathcal{H}^0(Rk_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \to i_{v,*}H^1_v((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \to 0$$

de plus, on a des isomorphismes:

$$H^0({}^p\mathcal{H}^0(Rk_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l])) \simeq R^0k_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l] \simeq i_{v,*}H^1_v((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l])$$
$$R^ik_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l] \simeq i_{v,*}H^{i+1}_v((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \text{ pour } \; i > 0$$
$${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) = 0 \text{ pour } i < 0,$$
$${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \simeq H^{i+1}_v((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) \text{ pour } \; i > 0.$$

2) Dans le cas d'une somme directe de systèmes locaux $K' := \oplus_j (i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]$ sur la même strate S_l, on a:
i) Une suite exacte courte pour tout i

$$0 \to (i_{S_l})_{!*}(\mathcal{L}^i_l[l]) \to {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k^*_vK') \overset{h}{\to} \oplus_{j\leq i}R^ik_{v*}(k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) \to 0$$

où le dernier terme est un faisceau en degré zéro de support v.
ii) $H^0(i^*_v {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k^*_vK')) \simeq \oplus_{j\leq i}R^ik_{v*}(k^*_v(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) \simeq R^ik_{v*}(k^*_v({}^p\tau_{\leq i}K'))$
iii) En particulier un morphisme φ à valeur dans ${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k^*_vK')$ se factorise par $(i_{S_l})_{!*}(\mathcal{L}^i_l[l])$ si $h \circ \varphi = 0$.

En 1, on utilise: ${}^p\mathcal{H}^i((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) = 0$ pour $i \neq 0$, $H^0(i_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) = 0$ et $H^i_v((i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}'[l]) = 0$ pour $i \leq 0$.

En 2 i) on applique l'assertion 1 à $\mathcal{L}' := \mathcal{L}^j_l$ sur S_l pour déduire:
${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) = {}^p\mathcal{H}^{i-j}(Rk_{v*}k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l]) = 0$ pour $i < j$,
${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) = R^ik_{v*}(k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j])$ pour $i > j$,
et la suite exacte pour $i = j$:
$0 \to (i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l] \to {}^p\mathcal{H}^j(Rk_{v*}k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) \to R^jk_{v*}(k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]) \to 0$.
L'énoncé 2 ii) se déduit du cas $i < j$, et 2 iii) s'applique pour toute suite exacte dans une catégorie abélienne.

2.1. **Preuve de la proposition 2.1.** 1) *Calcul de l'image de* ${}^p\rho_i$. Par définition du foncteur extension intermédiaire [2], 1.4.22, p.54, on a:

$$(k_v)_{!*}\,{}^p\mathcal{H}^i(k_v^*K) = Im\,({}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k_v^*K) \xrightarrow{{}^p\gamma_i} {}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_*k_v^*K))$$

qui est égal à $\oplus^{S_l\subset V_l^*}_{0<l\leq n}(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^i_l[l]$, $V_l^* = V_l - V_{l-1}$, dim.$S_l = l$, d'après l'hypothèse (2.1). Le morphisme ${}^p\gamma_i$ se factorise en:

$${}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k_v^*K) \xrightarrow{{}^p\beta_i} {}^p\mathcal{H}^i(K) \xrightarrow{{}^p\rho_i} {}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_*k_v^*K), \quad {}^p\gamma_i = {}^p\rho_i \circ {}^p\beta_i$$

on en déduit:

$$Im\,{}^p\rho_i \supset \oplus^{S_l\in V_l^*}_{0<l\leq n}(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}^i_l[l] = Im\,{}^p\gamma_i.$$

Pour obtenir l'égalité $Im\,{}^p\rho_i = Im\,{}^p\gamma_i$, il suffit de prouver, d'après le lemme 2.2 (2 iii), que le morphisme ${}^p\rho_i^0$, induit sur la cohomologie en degré zéro par ${}^p\rho_i$ s'annule:

$$H^0(i_v^*\,{}^p\mathcal{H}^i(K)) \xrightarrow{{}^p\rho_i^0} H^0(i_v^*\,{}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K)) \simeq \oplus^{S_l\in V_l^*}_{0<l\leq n, j\leq i}R^ik_{v*}(k_v^*i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^j_l[l-j]).$$

Interprètation du morphisme ${}^p\rho_i^0$. On considère de petits voisinages B_v de v et B_{X_v} de X_v et on interprète le morphisme ${}^p\rho_i^0$ comme un morphisme de $\mathbb{H}^0(B_v,\,{}^p\mathcal{H}^i(K))$ dans
$H^0(i_v^*\,{}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K)) \simeq \mathbb{H}^0(B_v - v,\,{}^p\mathcal{H}^i(K)) \simeq Gr_i^{{}^p\tau}\mathbb{H}^i(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$.
En effet: $\mathbb{H}^i(B_v,\,{}^p\tau_{\leq i}K) \simeq \mathbb{H}^i(B_v,\,{}^p\mathcal{H}^i(K)[-i])$ car $\mathbb{H}^i(B_v,\,{}^p\tau_{<i}K) = H^i(i_v^*({}^p\tau_{<i}K)) = 0$ et $\mathbb{H}^{i+1}(B_v,\,{}^p\tau_{<i}K) = H^{i+1}(i_v^*({}^p\tau_{<i}K)) = 0$, et par conséquent ${}^p\rho_i^0$ se factorise comme suit

$$\mathbb{H}^i(B_v,\,{}^p\tau_{\leq i}K) \to \mathbb{H}^i(B_v, K) = \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$$

où l'espace $\mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ est de poids $\omega \leq a+i$ alors qu'à droite le poids est $\omega > a+i$ d'après le résultat sur la semi-pureté en v, donc ${}^p\rho_i^0 = 0$.
2) *L'isomorphisme* $Im\,{}^p\alpha_i \simeq i_{v*}\mathcal{L}^i_0$. Le morphisme de connexion

$${}^p\mathcal{H}^{i-1}(Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}) \overset{{}^p\delta_{i-1}}{\to} \mathbb{H}^i_v(V, K)$$

s'annule sur l'image de ${}^p\rho_{i-1}$ et par conséquent, d'après le lemme précédent 2.2, (2 i), son image est égale à celle de l'espace vectoriel $R^{i-1}k_{v*}k_v^*({}^p\tau_{\leq i-1}K)$

$$R^{i-1}k_{v*}k_v^*({}^p\tau_{\leq i-1}K) \overset{{}^p\delta_{i-1}}{\to} {}^p\mathcal{H}^i(i_v^!K) = \mathbb{H}^i_v(V, K) \simeq \mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$$

et l'on a $Im\,{}^p\alpha_i \simeq \mathbb{H}^i_v(V, K)/Im{}^p\delta_{i-1}$. Par ailleurs, rappelons que $\mathcal{L}^i_0$ est l' image du morphisme d'intersection I^i_v en degré i dans le diagramme suivant

$$H^{i-1}(i_v^*Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}) \overset{\delta_{i-1}}{\to} \mathbb{H}^i_v(V, K) \overset{I^i_v}{\to} H^i(i_v^*K) \overset{\rho_i}{\to} H^i(i_v^*Rk_{v*}K_{|V-\{v\}})$$

et l'on a $Im\, I_v^i \simeq \mathbb{H}_v^i(V,K)/Im\,\delta_{i-1}$. Il suffit donc de prouver: $Im\,^p\delta_{i-1} = Im\,\delta_{i-1}$. Vu que la décomposition s'applique par récurrence sur $V-\{v\}$, on trouve: $^p\delta_{i-1}(R^{i-1}k_{v*}k_v^*(^p\tau_{\leq i-1}K)) \simeq \delta_{i-1}(^p\tau_{\leq i-1}\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$. Alors que l'on veut l'égalité avec toute l'image $\delta_{i-1}(\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$, ce qui découle de la semi-pureté: en effet, le quotient $\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))/^p\tau_{\leq i-1}$ est de poids $\omega < a+i$ et le poids de $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est $\omega \geq a+i$ d'où les images de $^p\delta_{i-1}$ et δ_{i-1} sont égaux dans $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ de poids $\omega \geq a+i$. Vu que $Im\,^p\alpha_i = ker\ ^p\rho_i$, on obtient une suite exacte

$$0 \to i_{v*}\mathcal{L}_0^i \to {}^p\mathcal{H}^i(K) \to \oplus_{0<l\leq n}^{S_l\subset V_l^*} i_{S_l\,!*}\mathcal{L}_l^j[l] \to 0$$

3) *Scindage de* $^p\mathcal{H}^i(K)$. Considérons la suite exacte: $^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k_v^*K) \stackrel{^p\beta_i}{\to} {}^p\mathcal{H}^i(K) \stackrel{\theta_i}{\to} H^i(i_v^*K)$. Par définition de $\mathcal{L}_0^i$, le morphisme θ_i induit un isomorphisme sur $i_{v*}\mathcal{L}_0^i = Im\,^p\alpha_i = ker\,^p\rho_i$, alors que $\theta_i \circ {}^p\beta_i = 0$, et par conséquent $Im\,^p\beta_i \cap \mathcal{L}_0^i = 0$. On en déduit que $^p\rho_i$ induit un isomorphisme: $Im\,^p\beta_i \xrightarrow{^p\rho_i} Im\,^p\rho_i$ et finalement: $^p\mathcal{H}^i(K) = Im\,^p\beta_i \oplus i_{v*}\mathcal{L}_0^i$

Remarque 2.3. On retient les relations utiles pour la suite

$$\begin{aligned} kerI_v^i = ker\ ^p\alpha_i \simeq Im\ ^p\delta_{i-1} &\simeq \oplus_{0<l\leq n, 0\leq i-1-j}^{S_l\subset V_l^*} R^{i-1-j}k_{v*}(i_{S_l\,!*}\mathcal{L}_l^j[l]) \\ &\simeq \oplus_{0<l\leq n, 0<i-j}^{S_l\subset V_l^*} H_v^{i-j}(i_{S_l\,!*}\mathcal{L}_l^j[l]). \end{aligned}$$

2.2. **Lefschetz difficile.** Pour terminer, il faut démontrer l'isomorphisme de Lefschetz pour le cup-produit itéré avec la classe η d'une section hyperplane sur la cohomologie perverse. Par récurrence, il reste à vérifier le cas d'un point v de la strate de dimension zéro. Nous le vérifions sur les termes de la formule explicite de décomposition. Donc on suppose Lefschetz difficile pour $(k_v)_{!*}k_v^*\,^p\mathcal{H}^i(K)$, et on pose $\mathcal{L}_v^i = \oplus_{v\in V_0} Im(\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \stackrel{I_v^i}{\to} \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$ pour l'image du morphisme d'intersection I_v^i. Il reste à prouver

Proposition 2.4. *i) La SH $\mathcal{L}_v^{-i}$ est duale de Poincaré de $\mathcal{L}_v^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*
ii) Le cup-produit itéré avec η induit des isomorphismes $\eta^i : \mathcal{L}_v^{-i} \to \mathcal{L}_v^i$ pour $i \geq 0$. En particulier, $\mathcal{L}_v^i$ est une SH polarisable.

L'assertion i) est claire sur la définition auto-duale du morphisme d'intersection.
ii) *Interprétation dans le cas classique* où $\tilde{\mathcal{L}}$ est un système local en degré 0 sur X lisse et X_v aussi est lisse. Le résultat utilise la décomposition de Lefschetz sur X_v comme suit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^{-(i-1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) & \stackrel{\eta^{i-1}}{\stackrel{\simeq}{\longrightarrow}} & \mathbb{H}^{(i-1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) \\ \uparrow\eta & \searrow\eta^i & \downarrow\eta \\ \mathbb{H}^{-(i+1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) & \stackrel{\eta^{i+1}}{\stackrel{\simeq}{\longrightarrow}} & \mathbb{H}^{(i+1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) \end{array}$$

Pour interpréter ce diagramme, on note que pour $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$, l'image de l'injection η à gauche est égale à l'image $\mathcal{L}_v^i := Im\,(\mathbb{H}^{-i}_{X_v}(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{I_v^i} \mathbb{H}^{-i}(X_v, \mathcal{L}_{|X_v}))$ d'après l'isomorphisme de Thom-Gysin: $\mathbb{H}^{-(i+1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) = \mathbb{H}^{-i-2}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq$

$\mathbb{H}^{-i}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$, alors que l'image de la surjection η à droite est égale à l'image $\mathcal{L}^i_v$ de $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, \mathcal{L}) \stackrel{I^i_v}{\to} \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$.

Donc, l'isomorphisme η^i, induit sur l'image de l'injection η à gauche, un isomorphisme sur l'image de η à droite:

$$\mathcal{L}^{-i}_v \simeq \eta(\mathbb{H}^{-(i+1)}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1])) \xrightarrow[\simeq]{\eta^i} \mathbb{H}^{i+1}(X_v, \tilde{\mathcal{L}}_{|X_v}[m-1]) \simeq \mathcal{L}^i_v$$

qui se déduit de l'isomorphisme classique η^{i+1} en bas dans le diagramme.

La partie primitive de $\mathbb{H}^{-i}(X_v, \mathcal{L}_{|X_v})$ n'est donc pas concernée, ce qui pourrait expliquer le résultat surprenant qui suit et qui évite le cas crucial dans le cas classique d'une récurrence sur une section hyperplane.

Preuve de ii). L'énoncé garde un sens même si X_v n'est pas la fibre d'un morphisme, mais on va utiliser la remarque (2.3) précédente dans la preuve et donc le fait que X_v soit la fibre d'un morphisme f. On procède par réduction à une section hyperplane relative lisse H dans X, d'intersection transversale aux strates du DCN: $X_v \cup Y$. Soit $i_H : H \to X$ l'immersion. Le cup-produit avec la classe η de H définit un morphisme égal au composé des morphismes $j_{!*}\mathcal{L} \stackrel{\rho}{\to} i_{H*}i^*_H j_{!*}\mathcal{L} \stackrel{G}{\to} j_{!*}\mathcal{L}[2]$. Par application des foncteurs $Ri^!_{X_v}$ et $i^*_{X_v}$ on obtient des morphismes commutant avec les morphismes d'intersection I^*_v sur X et $I^*_v(H)$ sur H dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) & \stackrel{\rho^!}{\to} & \mathbb{H}^i_{X_v \cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L}) & \stackrel{G^!}{\to} & \mathbb{H}^{i+2}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \\
I^i_v \downarrow & & I^i_v(H)\downarrow & & I_v i+2 \downarrow \\
\mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) & \stackrel{\rho^*}{\to} & \mathbb{H}^i(X_v \cap H, j_{!*}\mathcal{L}) & \stackrel{G^*}{\to} & \mathbb{H}^{i+2}(X_v, j_{!*}\mathcal{L})
\end{array}$$

On pose: $\mathcal{L}^i_v = Im\, I^i_v$, $\mathcal{L}(H)^i_v = Im\, I^i_v(H)$, $\mathcal{L}^{i+2}_v = Im\, I_v i + 2$ pour les images des morphismes verticaux définis par I^*_v. On s'intéresse à l'image de la première ligne dans la seconde ligne représentée par la ligne intermédiaire qui aurait dû figurer dans le diagramme:

$$\mathcal{L}^i_v \stackrel{\rho'}{\to} \mathcal{L}(H)^i_v \stackrel{G'}{\to} \mathcal{L}^{i+2}_v$$

où ρ' (resp. G') est induit par le morphisme ρ^* (resp. G^*).

Lemme 2.5. *Le morphisme induit $\rho' : \mathcal{L}^i_v \to \mathcal{L}(H)^i_v$ est un isomorphisme pour $i < 0$ et par dualité $G' : \mathcal{L}(H)^i_v \to \mathcal{L}^{i+2}_v$ est un isomorphisme pour $i > 0$.*

Preuve. D'après le théorème d'annulation d'Artin-Lefschetz sur l'espace affine $X_v - X_v \cap H$, on a:

Lemme 2.6. *i) Les morphismes $\rho^! : \mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i_{X_v \cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L})$*
sont des isomorphismes pour $i < 0$ et injectifs pour $i = 0$.
ii) Les morphismes $\rho^* : \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i(X_v \cap H, j_{!*}\mathcal{L})$
sont des isomorphismes pour $i < -2$ et injectifs pour $i = -2$.

On démontre i). Le complexe $P_{X_v} = Ri^!_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}[1]$ est un faisceau pervers sur le diviseur de Cartier X_v [2] p.106. Sur l'espace affine, on a: $\mathbb{H}^j_c(X_v - X_v \cap H, P_{X_v}) = 0$ pour $j < 0$, d'où on déduit l'isomorphisme pour $i < 0$

$$\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{i-1}(X_v, P_{X_v}) \stackrel{\rho^!}{\to} \mathbb{H}^{i-1}(X_v \cap H, P_{X_v}) \simeq \mathbb{H}^i_{X_v \cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L}).$$

Suite de la preuve. On pose $K = Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ et $K(H) = R(f_{|H})_*(j_{!*}\mathcal{L}_{|H})$ et, vue la remarque (2.3), on introduit les morphismes δ_{i-1} sur X, et $\delta_{i-1}(H)$ sur H, dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
H^{i-1}(i_v^*R(k_v)_*K_{|V-\{v\}}) & \stackrel{\rho_v}{\to} & H^{i-1}(i_v^*R(k_v)_*K(H)_{|V-\{v\}}) \\
\delta_{i-1}\downarrow & & \delta_{i-1}(H)\downarrow \\
\mathbb{H}^i_{X_v}(X,j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i_v(V,K) & \stackrel{\rho^!}{\to} & \mathbb{H}^i_{X_v\cap H}(H,j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i_v(V,K(H)) \\
I_v^i\downarrow & & I_v^i(H)\downarrow \\
\mathbb{H}^i(X_v,j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i(i_v^*K) & \stackrel{\rho^*}{\to} & \mathbb{H}^i(X_v\cap H,j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i(i_v^*K(H))
\end{array}$$

Pour établir l'isomorphisme $\rho' : \mathcal{L}_v^i \simeq \mathcal{L}(H)_v^i$, étant donné que $\rho^!$ est un isomorphisme pour $i < 0$, il suffit de prouver que le morphisme $\rho^!$ induit aussi un isomorphisme $ker\, I_v^i \simeq ker\, I_v^i(H)$ ou aussi $Im\,\delta_{i-1} \simeq Im\,\delta_{i-1}(H)$; or on a d'après la remarque précédente (2.3):

(1) $Im\,\delta_{i-1} = Im\,(\oplus_{0<l\leq n,j<i}^{S_l\subset V_l^*} H^{i-1-j}(i_v^*Rk_{v*}k_v^*i_{S_l\,!*}\mathcal{L}_l^j[l]))$

(2) $Im\,\delta_{i-1}(H) = Im(\oplus_{0<l\leq n,j<i}^{S_l\subset V_l^*} H^{i-1-j}(i_v^*R(k_v)_*k_v^*i_{S_l\,!*}(\mathcal{L}_{|H})_l^j[l]))$

(noter que: la restriction $\mathcal{L}_{|H}[-1]$ décalée de $[-1]$ est un faisceau pervers sur H, et d'après la formule (1.2): $(\mathcal{L}_{|H}[-1])_l^{j+1} = (\mathcal{L}_{|H})_l^j$ et que $I_v^i(H,j_{!*}\mathcal{L})) = I_v^{i+1}(H,j_{!*}\mathcal{L}[-1]))$, ce qui compense les indices). Pour comparer les faisceaux $\mathcal{L}_l^j$ et $(\mathcal{L}_{|H})_l^j$, on considère un point u_l d'une strate S_l de dimension l, une section N_{u_l} normale à S_l au point u_l, et les sous-espaces $X_{N_{u_l}} := f^{-1}(N_{u_l})$ qui est lisse et $X_{u_l} := f^{-1}(u_l)$ qui est un DCN dans $X_{N_{u_l}}$ par construction, alors:

$$(R^{-l+j}f_*(i_{X_l})^! j_{!*}\mathcal{L})_{u_l} \simeq \mathbb{H}^{-l+j}_{X_{u_l}}(X_{N_{u_l}}, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^j_{X_{u_l}}(X_{N_{u_l}}, j_{!*}\mathcal{L}[-l])$$

où la restriction de $j_{!*}\mathcal{L}[-l]$ à $X_{N_{u_l}}$ est un faisceau pervers car $X_{N_{u_l}}$ est de codimension l par transversalité. Comme $i < 0$ et $j < i$ on a $j < -1$ et le théorème d'annulation d'Artin sur l'espace affine $X_{u_l} - (H \cap X_{u_l})$ s'applique; on en déduit l'isomorphisme:

$$R^{-l+j}f_*(i_{X_l}{}^! j_{!*}\mathcal{L}) \simeq R^{-l+j}f_*((i_{(H\cap X_l)})^! j_{!*}\mathcal{L}_{|H})$$

des deux termes pris avant restriction à H à gauche et après restriction à H à droite. En particulier le raisonnement s'applique aussi sur une strate générique S_n. En effet $X_n := f^{-1}(S_n)$ est ouvert, et en tout point u, l'espace $X_u := f^{-1}(u)$ est lisse, on a:

$$(R^{-n+j}f_*(i_{X_n})^! j_{!*}\mathcal{L})_u = (R^{-n+j}f_*(i_{X_n})^* j_{!*}\mathcal{L})_u \simeq \mathbb{H}^{-n+j}(X_u, j_{!*}\mathcal{L})$$

où $\mathbb{H}^{-n+j}(X_u, j_{!*}\mathcal{L}) = \mathbb{H}^{m-n+j}(X_u, \tilde{\mathcal{L}})$ est isomorphe à
$\mathbb{H}^{-n+j}(X_u, \tilde{\mathcal{L}}) = \mathbb{H}^{m-n+j}(X_u\cap H, j_{!*}\mathcal{L})$ par le théorème sur la section hyperplane de Lefschetz car X_u est de dimension $m-n$ et $j < -1$. D'où $\rho^!$ qui est un isomorphisme, induit aussi des isomorphismes de $Im\,\delta_{i-1} = ker\, I_v^i$ sur $Im\,\delta_{i-1}(H) = ker\, I_v^i(H)$. Les colonnes du diagramme étant exactes, il induit les isomorphismes ρ' pour $i > 0$ (et par dualité on a des isomorphismes G') dans le diagramme suivant:

$$\eta^i : \mathcal{L}_v^{-i} \stackrel{\rho'}{\simeq} \mathcal{L}(H)_v^{-i} \simeq (\mathcal{L}_{|H})_v^{-i+1} \stackrel{\eta^{i-1}}{\simeq} (\mathcal{L}_{|H})_v^{i-1} \simeq \mathcal{L}(H)_v^{i-2} \stackrel{G'}{\simeq} \mathcal{L}_v^i$$

où η^{i-1} est un isomorphisme par récurrence; ce qui termine la preuve du lemme, et celle de la proposition.

Corollaire 2.7. *i) Le cup-product avec la classe d'une section hyperplane définit des isomorphismes* $\eta^i : {}^p\mathcal{H}^{-i}(K) \to {}^p\mathcal{H}^i(K)$ *pour* $i \geq 0$.

ii) Le théorème de décomposition est vrai pour un morphisme fibré par des DCN sur les strates, donc pour tout morphisme algébrique propre.

ii) En effet, le théorème s'applique sur la grande strate d'après le cas classique. Si on suppose par récurrence le théorème vrai sur $V - V_l$, il se prolonge à la réunion des strates S_l de dimension l, car en tout point v de S_l, les résultats précédents s'appliquent sur la normale en v à S_l ce qui entraîne le résultat au voisinage de v dans S_l et donc sur tout S_l. On a vu que pour tout morphisme f, on peut se réduire au cas fibré par des DCN relatifs sur les strates.

Remarque 2.8 (La décomposition naturelle). Deligne déduit du théorème de décomposition, pour η fixé, un morphisme canonique $\oplus^p\mathcal{H}^i(K)[-i] \xrightarrow{\gamma} K$ [9] qui présente l'avantage d'être compatible avec la SHM sur la cohomologie d'un ouvert de la forme $f^{-1}(U)$, ce qui devrait permettre de construire une théorie de Hodge en bas sur V à partir des VSH sur les images $\mathcal{L}_l^i$ des morphismes d'intersection et compatible avec la SHM induite sur les gradués pervers utilisés dans cette note. Ce résultat correspond au fait bien connu que la suite spectrale de Leray perverse est compatible avec les SHM.

References

[1] Arapura D. The Leray spectral sequence is motivic, *Inv. Math.* **160** (2005), no. 3, 567-589.
[2] Beilinson A.A., Bernstein J., Deligne P. Faisceaux Pervers, *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers Vol.I, Astérisque* **100**(1982).
[3] Brosnan P., El Zein F. Admissible Variation of mixed Hodge structure.
[4] Brylinski J.L. (Co)- Homologie d' Intersection et Faisceaux Pervers, *Séminaire Bourbaki,* **585**(1981/1982).
[5] Cattani E., Kaplan A., Schmid W. L^2 and intersection cohomologies, *Inv. Math.* **87**, 217-252, 1987.
[6] Deligne P. Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES*, 35 (1968), 107-126.
[7] Deligne P. Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES* 40 (1972), 5-57.
[8] Deligne P. La Conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES*,**52**,(1980), pp. 137-252.
[9] Deligne P. Décompositions dans la catégorie Dérivée, Motives (Seattle, WA, 1991), 115128, Proc. Symp. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
[10] Deligne P., Gabber O. Théorème de pureté d'après Gabber, *Note written by Deligne and distributed at IHES* (1981).
[11] de Cataldo M.A., Migliorini L. The perverse filtration and the Lefschetz hyper- plane theorem, arXiv:0805.4634, Annals of Math., Vol. 171, No. 3, (2010), 20892113.
[12] El Zein F. Théorie de Hodge à coefficients : étude locale, *CR Ac. Sc.* t 307 Série I, 593-598 (1988).
[13] El Zein F. Topology of Algebraic Morphisms, *Contemporary Mathematics* , 474, http://arxiv.org/abs/math/0702083.
[14] El Zein F., Lê Dũng Tráng. Du théorème de décomposition à la Pureté locale, à paraître dans C. R. Math. Acad. Sci. Paris.
[15] Goresky M., Macpherson R. Intersection homology II, *Inv.Math.* 72 (1983) p 77-129.
[16] Kashiwara M. A study of variation of mixed Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 22, 991-1024, 1986.
[17] Kashiwara M., Kawai T. Poincaré lemma for a variation of Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 23, 345-407, 1987.
[18] J. Mather, Notes on topological stability, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (2012), no. 4, 475-506.
[19] Saito M. Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto univ.*, 24 (1988), 849-995. (2) Mixed Hodge Modules. 26 (1990), 221-333.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France
E-mail address: elzein@math.jussieu.fr

Université d'Aix-Marseille LATP, UMR-CNRS 7353 39, rue Joliot-Curie F-13453 Marseille Cedex 13
E-mail address: ledt@ictp.it